INCIDENCIA DEL SOFTWARE GEOGEBRA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURAS ADITIVAS CON FRACCIONES PROPIAS

WILSON DAVID PEÑALOZA CASTRO

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES
FACULTAD DE ESTUDIOS SOCIALES Y EMPRESARIALES
MAESTRÍA VIRTUAL EN LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
MANIZALES
2020

INCIDENCIA DEL SOFTWARE GEOGEBRA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURAS ADITIVAS CON FRACCIONES PROPIAS

WILSON DAVID PEÑALOZA CASTRO

Trabajo de grado para optar al título de Magister en La Enseñanza de las Ciencias

Tutor
NATALIA MÚNERA ESCOBAR

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES
FACULTAD DE ESTUDIOS SOCIALES Y EMPRESARIALES
MAESTRÍA VIRTUAL EN LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
MANIZALES
2020

RESUMEN

Objetivo: Caracterizar el impacto del software GeoGebra en la resolución de situaciones problema relacionadas con las estructuras aditivas de fracciones propias, en estudiantes de quinto grado del Colegio Sagrado Corazón de Jesús- Hermanas Bethlemitas Bucaramanga.

Metodología: Esta investigación tiene un enfoque descriptivo, con carácter cualitativo, en un estudio de casos.

El instrumento principal para la recolección de datos fue la Unidad Didáctica , dividida en tres momentos; Ubicación, Desubicación y Reenfoque, esta herramienta se le aplico a 12 estudiantes de quinto grado del Colegio Sagrado Corazón de Jesús- Hermanas Bethlemitas Bucaramanga, aunque se presentan solo los resultados de tres estudiantes.

Resultados: Finalizando cada momento los estudiantes se clasificaron mediante los niveles de resolución de Tamayo (2013), de esta forma evaluando el impacto del software.

Tabla 1. Niveles de Resolución

Caso	**Nivel del Momento de Ubicación**	**Nivel del Momento de Desubicación**	**Nivel del Momento de Reenfoque**
Laura	Nivel 1	Nivel 3	Nivel 3
Daniela	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5
David	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5

Fuente: Autor del proyecto

Conclusiones:

Los estudiantes comenzaron sin identificar los números fraccionarios en una situación problema y relacionarlos con sus representaciones para encontrar su solución, mediante el trascurso de la unidad didáctica fueron superándolas, aunque algunos persisten en identificar conversiones entre los distintos registros posibles del concepto de fracción, porque falta relacionar algunos registros gráficos con los numéricos o viceversa.

El trabajo desarrollado con los estudiantes de quinto grado y el análisis de los estudiantes Laura, David y Daniela, muestran que el software GeoGebra influye en la motivación, porque facilita el aprendizaje del concepto de fracción y brinda, desde el registro numérico y gráfico, un apoyo en la resolución de problemas relacionados con las estructuras aditivas.

Palabras Claves: Dificultades, Momentos, Motivación, Niveles de Resolución, Registros.

SUMMARY

Objective: To characterize the impact of the GeoGebra software in the resolution of problem situations related to the additive structures of own fractions, in fifth grade students of the Sacred Heart of Jesus School - Bethlemitas Bucaramanga Sisters.

Methodology: This research has a descriptive approach, with a qualitative character, in a case study. The main instrument for data collection was the Didactic Unit, divided into three moments; Location, Relocation and Refocusing, this tool was applied to 12 fifth grade students of the Sacred Heart of Jesus School - Bethlemitas Sisters Bucaramanga, although only the results of three students are presented.

Results: At the end of each moment, the students were classified using the resolution levels of Tamayo (2013), thus evaluating the impact of the software.

Tabla 2. resolution levels

Case	Location Moment Level	Moment of Displacement Level	Refocus Moment Level
Laura	Level 1	Level 3	Level 3
Daniela	Level 3	Level 4	Level 5
David	Level 3	Level 4	Level 5

Source: Project author

Conclusions:

The students began without identifying the fractional numbers in a problem situation and relating them to their representations to find their solution. Through the course of the didactic unit, they were overcoming them, although some persist in identifying conversions between the different possible registers of the concept of fraction, because it is missing. relate some graphic registers to numerical ones or vice versa.

The work developed with the fifth grade students and the analysis of the students Laura, David and Daniela, show that the GeoGebra software influences motivation, because it facilitates the learning of the concept of fraction and provides, from the numerical and graphical register, a support in solving problems related to additive structures.

Key Words: Difficulties, Moments, Motivation, Levels of Resolution, Records.

Tabla de Contenido

LISTA DE FIGURAS

Pág.

LISTA DE TABLAS

Pág.

LISTA DE ANEXOS

Pág.

1 INTRODUCCIÓN

> El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades, desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje (Brousseau, 1986, p. 2).

Los números fraccionarios tiene una historia de más de 7000 años, a pesar de esto sigue siendo un concepto complejo de abordar en la clase de matemáticas por la exigencia e integración de nuevos significados y los múltiples aspectos simbólicos, operatorios, estructurales, relacionales y de representación que poseen. Esta situación y según (Brousseau, 1986) motiva a los docentes a construir actividades que captan la atención de los estudiantes y fomentan gusto por este concepto.

Los intereses que tienen los estudiantes varían de acuerdo a su edad y al contexto donde se desenvuelven. “Un niño prefiere ante todo jugar que estudiar” (Chamorro, 2003). Ante esta situación, sumado a la capacidad actual de la tecnología de atraer el interés tanto de niños como de adolescentes, se ve la pertinencia de utilizar las nuevas tecnologías para crear actividades dinámicas que generen en el estudiante motivación en las matemáticas, de modo que permita un aprendizaje a profundidad. “El uso de software en la enseñanza produce cambios en la actuación docente en el aula y en las características del conocimiento que construye el alumno, como muestran muchas de las investigaciones realizadas hasta la fecha” (Ruiz, 2012, pág. 11).

Este trabajo busca resaltar los elementos visuales en la construcción comprensiva de conceptos y nociones matemáticas. En particular, generando escenarios dinámicos mediante la representación geométrica de las operaciones básicas entre fracciones propias, que motiven la comprensión, coincidiendo en lo señalado por Zimmermann (1991), cuando afirma que los “conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente o geométricamente” (p. 15).

Aprovechar estas características visuales resulta, en la mayoría de los casos, de gran utilidad en la construcción comprensiva de conocimiento matemático.

El trabajo se encuentra estructurado por capítulos, los primeros tres corresponden a la formulación del problema, los objetivos de la investigación y la forma como estos se llevaron a cabo, esto incluye la metodología y el cronograma de actividades. En los demás capítulos se desarrollan los resultados de la investigación, mostrando el análisis de las pruebas aplicadas y los hallazgos con respecto al uso del software.

En el capítulo final se muestran las conclusiones de la investigación con base a los objetivos de la misma que se formularon al inicio. Igualmente, se encuentran unas recomendaciones para futuras investigaciones en pro del desarrollo de la didáctica para el trabajo con los números fraccionarios.

2 CAPITULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En general, el aprendizaje de conceptos matemáticos resulta complicado para muchos estudiantes, en especial cuando se tienen ideas preconcebidas negativas acerca de la asignatura, creencias reforzadas por el imaginario social que frecuentemente asocia las matemáticas con saberes complejos y poco útiles en la vida diaria (Álvarez, 2017). A esto se suma que en las escuelas sigue predominando los métodos tradicionales de enseñanza (exposiciones magistrales donde el docente dicta la lección y la realización de ejercicios), que parecen ignorar las ventajas que traen las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones en la educación. “La instrucción y la formación en una tarea específica, han sido el centro de atención en la enseñanza, y contrario a los avances tecnológicos en la actual sociedad, las prácticas de enseñanza siguen siendo las mismas de siglos anteriores” (Murillo, 2014, pág. 986). Es por esto que una de las líneas de investigación más importantes dentro de la pedagogía y la didáctica en la actualidad, es la búsqueda de nuevas estrategias y prácticas educativas que aprovechen las múltiples posibilidades que ofrece la tecnología en el aula de clase y permita una participación protagónica y no pasiva, de todos los estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Por otro lado, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998), plantea que los estudiantes al final de la primaria deben identificar los múltiplos comunes de dos números y usar esta información para sumar y restar fracciones heterogéneas. También señala que los estudiantes deben conocer la división de una fracción por un número natural y relacionarlo con la multiplicación de fracciones. Sin embargo, los fraccionarios es uno de los conceptos que más dificultades presenta en la escuela básica, como lo demuestran las investigaciones de Martínez (2001), Perera (2009), Arteta (2012), Valdemoros (2010) y Lara (2003). La experiencia en la práctica muestra que “muchas de las dificultades en el aprendizaje de las operaciones con fraccionarios siguen sin resolverse en la escuela y que los alumnos de la educación básica siguen arrastrando las dificultades que históricamente se han presentado en el tema” (Rizo y Campistrous, 2013, pág. 134).

Estos problemas pueden ser por la dificultad para comprender el concepto de fracción: para nuestros niños, las fracciones no son más que pares de números naturales sin relación entre sí puestos uno arriba del otro; por lo tanto, al momento de entender los usos o contextos en que se utilizan las fracciones enfrentan serias dificultades. Como, por ejemplo, la mayoría no relacionan los números racionales positivos con los decimales o porcentajes, no logran comprender que como fracción el número racional hace parte de la unidad y por tanto no logran ubicarlo en la recta numérica. Esto se refleja en que los estudiantes tengan dificultades para abordar las operaciones básicas con los números racionales positivos (Avila, 2008).

Existen dificultades también en el manejo de fracciones y común denominador, en este tipo de errores se encuentran las sumas y restas lineales o arbitrarias, cancelación entre numerador y denominador con sumandos, errores en el manejo de recíprocos, etc. Igualmente, muchas de las dificultades que se han encontrado en la resolución de problemas aritméticos simples tienen que ver con la mala comprensión o ejecución de los algoritmos de suma y resta de fraccionarios (Gonzales, 2015).

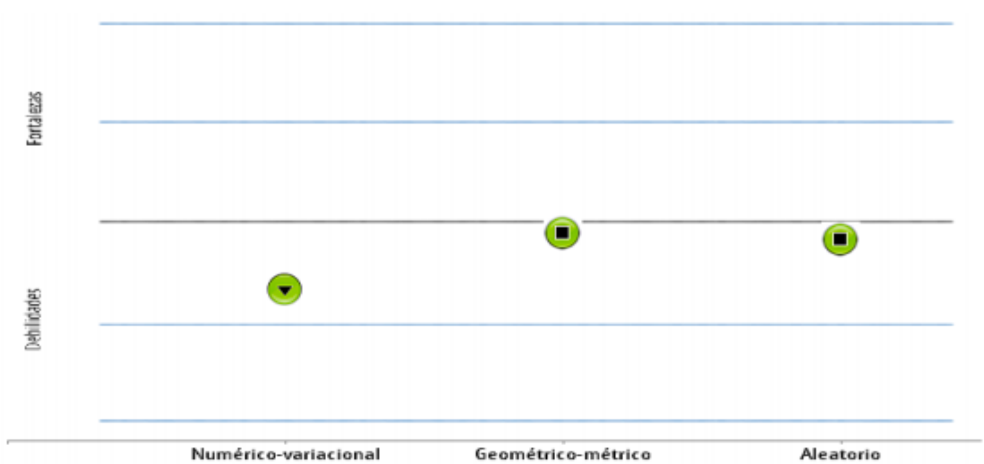
En general, y coincidiendo con Lara (2003), las fracciones no dejan de ser un concepto complicado para los niños por su naturaleza matemática, las fracciones son complicadas y difíciles de entender. Por lo tanto, se ve la necesidad de hacer un cambio que permita modificar esta premisa.

Ahora bien, la experiencia del investigador en el aula ha permitido evidenciar que la metodología usual de enseñanza de las matemáticas en grado quinto (uso del tablero y algoritmos) genera pocas acciones motivadoras; la nueva generación de estudiantes requiere metodologías que les llame la atención y les mantenga incentivados hacia el aprendizaje. El mundo tecnológico en el que estamos viviendo ha creado estudiantes más curiosos y en ocasiones les resulta aburrido las formas de enseñanza tradicionales o ni las entienden.

Actualmente, en el colegio del Sagrado Corazón de Jesús – Hermanas Bethlemitas, es común escuchar que los estudiantes no comprenden que la suma indiscriminadamente de numeradores y denominadores en los fraccionaros es incorrecto, desde la parte gráfica distinguen las unidades, pero no alcanzan a identificar las particiones de esta, y, en especial, en el análisis de situaciones problemas. Este error en la suma de los fraccionarios, por ejemplo, es una circunstancia que se refleja en los resultados de las pruebas SABER 5º 2018 (Figura 1), ya que verifica la debilidad en la comprensión de este concepto, puesto que mide a los estudiantes bajo tres componentes; Numérico-variacional, Geométrico-métrico y Aleatorio, estos a su vez, se organizan bajo tres competencias; Razonamiento, Resolución y comunicación. Esta prueba considera ítems sobre el manejo de los números y especialmente, los fraccionarios para el componente numérico-variacional. Como se evidencia en las siguientes afirmaciones:

- Reconocer e interpretar números naturales y fracciones en diferentes contextos
- Reconocer diferentes representaciones de un mismo número (natural o fracción) y hacer traducciones entre ellas.
- Traducir relaciones numéricas expresadas gráfica y simbólicamente.
- Expresar el grado de probabilidad de un evento, usando frecuencias o razones

Figura 1. Componentes evaluados, quinto grado.



Fuente: Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. (2018). Establecimiento Educativo: Col Del Sagrado Corazón De Jesús. Bogotá, D.C., Colombia.

Vincular el uso de la computadora con el aprendizaje de las matemáticas y, en especial, con el concepto de fracción puede resultar atractivo para los estudiantes, propiciando así un mayor interés hacia los procesos de aprendizaje de los números fraccionarios. Por esta razón, la presente investigación giró en torno a resolver la siguiente pregunta: ¿Cómo influye la implementación del software GeoGebra en la resolución de situaciones problema relacionadas estructuras aditivas de fracciones propias, en estudiantes de quinto grado del Colegio del Sagrado Corazón de Jesús, Hermanas Bethlemitas?

3 JUSTIFICACIÓN

En esta problemática de la comprensión de las operaciones entre fracciones, la tecnología podría entrar a ayudar, convirtiéndose en una gran herramienta didáctica al ser implementada en el aula de clase, puesto que apoya al docente a que la clase sea más dinámica y sirva como catalizador en el aprendizaje del estudiante. Los software educativos pueden utilizarse para apoyar o ampliar las experiencias de aprendizaje en el contexto de muchos enfoques educativos distintos, gracias a las diferentes actividades didácticas que a través de ellos se pueden realizar, tales como la formulación de cuestionarios, los juegos, la recreación de fenómenos, etc. Squires y McDougall (2001).

Igualmente, el uso de software educativo permite la interrelación entre los conocimientos y presenta la información de manera no secuencial; permite la interacción, lo que desarrolla la iniciativa y el trabajo autónomo, riguroso y metódico; proporciona mayor facilidad de uso y un mejor acceso a los significados, facilitando el aprendizaje a través de los errores con un tratamiento de ellos, no punitivo (Bruce y Escobar, 2010).

Los estudiantes cada día poseen mayor familiaridad con la tecnología, sus aplicaciones y usos, por lo tanto, el docente debe conocer las distintas herramientas tecnológicas a su alcance y saber aplicarlas en el aula de clases, de forma que el estudiante se involucre más en su propio proceso de aprendizaje. En el mundo se reconoce que el uso de nuevas tecnologías y software en la enseñanza produce cambios en la actuación docente en el aula y en las características del conocimiento que construye el estudiante, como muestran algunas de las investigaciones realizadas hasta la fecha, muchas de las cuales se centran en programas informáticos (Area, 2005).

Una de estas herramientas tecnológicas es GeoGebra, la cual goza de un reconocimiento a nivel internacional como una herramienta interactiva y flexible para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la básica primaria y secundaria, "es un software de matemáticas con una interfaz muy intuitiva y eficiente que permite construir gráficas dinámicas y permite equilibrar lo práctico con lo conceptual innovando la forma de enseñar en el aula" (Cano y Giraldo, 2017, pág. 29). Por ejemplo, desde algunas investigaciones en educación matemática, se ha evidenciado el uso de Geogebra para solucionar problemáticas y dificultades en los estudiantes con lo referente a conceptos específicos. Según Peñaloza y Suárez (2013), este permite a los estudiantes crear representaciones mentales de los conceptos matemáticos, a través de la visualización que hacen al realizar las actividades propuestas por el docente implicando una mayor comprensión e interpretación de estos.

Por tal razón el uso de Geogebra como un elemento que aportará en la Enseñanza de las Estructuras Aditivas con Fracciones Propias posibilitará:

- Fortalecer el aprendizaje del concepto de fracción de manera más interactiva, donde los estudiantes, realicen procedimientos conscientes de lo que están haciendo, más no, algoritmos solamente mecánicos.
- Que el estudiante utilice distintas estrategias de aprendizaje, con la ayuda del software; lo que le permita a aprender autorregularse[1], es decir jerarquizar la información entregada, avanzar a su propio ritmo
- Proporcionar un entorno en el que los estudiantes pueden experimentar una formación de otra manera, "lo que les lleva a desarrollar formas no tradicionales de aprendizaje de procedimientos y conceptos matemáticos" (González-López, 2001, pág. 46).
- Vincular y compartir con la comunidad educativa y los docentes de la institución nuevas experiencias de ver la enseñanza de las matemáticas, de aplicar las tecnologías en el aula de clase y animarlos a su uso permanente y en contexto con las situaciones de clase.

[1] Meece (1994) considera que el aprendizaje **autorregulado** hace referencia sobre todo al proceso mediante el cual los alumnos ejercen el control sobre su propio pensamiento, el afecto y la conducta durante la adquisición de **conocimientos** o destrezas.

4 OBJETIVOS

4.1 OBJETIVO GENERAL.

Caracterizar el impacto del software GeoGebra en la resolución de situaciones problema relacionadas con las estructuras aditivas de fracciones propias, en estudiantes de quinto grado del Colegio Sagrado Corazón de Jesús- Hermanas Bethlemitas Bucaramanga.

4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Analizar las dificultades de los estudiantes de quinto grado al abordar problemas relacionados con estructura aditiva de fracciones propias, mediante la interpretación de la representación numérica y gráfica.
- Plantear y diseñar estrategias que fortalezcan la resolución de problemas, en situaciones relacionadas con estructuras aditivas con fracciones propias.
- Evaluar el impacto del uso del software educativo GeoGebra, a partir de la identificación de los niveles de resolución de problemas, relacionados con las estructuras aditivas de fracciones propias

5 CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO

5.1 ANTECEDENTES

Este trabajo se enfoca en caracterizar el impacto del software GeoGebra en la resolución de situaciones problema relacionadas con las estructuras aditivas de fracciones propias, en estudiantes de quinto grado, por lo tanto, se presentarán algunos autores que han hecho investigaciones similares en el campo de GeoGebra y fracciones, que constituirán un aporte muy importante para este proyecto.

5.1.1 Fracciones.

En este apartado se mencionarán los trabajos realizados por Carreño (2015), Herrera (2014), Plazarte (2016), Murillo (2014), Orozco (2013) y León (2010) en el campo de las fracciones.

Carreño (2015), enfatiza la importancia del uso de software educativo en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las operaciones con fracciones del séptimo año de educación general básica en Ecuador; y lo complementa con la exposición de la formación docente en TICs. Concluye que el uso de software en matemáticas puede ayudar a complementar y reforzar los conocimientos dentro y fuera del aula. Así mismo formuló una serie de sugerencias para ser utilizados por el profesor en los diferentes momentos de una clase de matemática. Por ejemplo, como apoyo para el proceso de enseñanza en la suma de fracciones, se puede utilizar el software "PedaZZitos"[2], éste presenta varias opciones de trabajo, divididas en tres secciones: "Aprende", "Practica" y "Resultados". En las opciones "Aprende" y "Practica" se puede encontrar la opción "Suma y Resta", con la cual se puede reforzar el concepto de suma-resta de fracciones. Resaltando la importancia de que "el docente reciba formación en la implementación de las TIC como apoyo a su actividad docente, tanto en sus años universitarios como en su formación continua" (Carreño, 2015, pág. 90). Es importante recalcar en esta investigación el uso de un medio tecnológico para

[2] PedaZZitos es un software GNU (son sistemas operativos de tipo Unix, lo cual significa que se trata de una colección de muchos programas: aplicaciones, bibliotecas, herramientas de desarrollo y hasta juegos.) (Fernández Alcalde, 2011)

enseñar las operaciones en fracciones, además de incentivar la formación de los docentes en lo referente al uso de las herramientas tecnológicas, con el fin de desarrollar habilidad al momento de escoger el software más apropiado para el aprendizaje de las operaciones con fracciones en el área de matemática. De este trabajo, las sugerencias que se tomaron para el presente proyecto fue la forma de cómo manejan el concepto de fracción y usar un medio tecnológico ya sea online u offline, para diseñar las actividades que serán presentadas a los estudiantes. Aunque el entorno que ofrece el software PedaZZitos, facilita la relación entre la representación numérica y gráfica para fracciones homogéneas, se queda corto al momento de usar las fracciones heterogéneas, ya que centra su atención solo en su representación numérica. Carreño (2015), recomienda "no dejar de lado otros procesos, tales como: aprendizaje colaborativo, el juego o uso de material concreto" (p. 93).

De igual manera, Herrera (2014) presentó en su investigación una estrategia metodológica a estudiantes de grado sexto en Colombia, basada en la enseñanza de los números racionales positivos expresados como fraccionarios, teniendo como línea principal de trabajo la resolución de problemas de Pólya (1998) y las TICs. Su propuesta se fundamentó en el socioconstructivismo como teoría de aprendizaje, en la que se plantea que en un sujeto el aprendizaje está dado por las interacciones sociales. Igualmente, se sustentó en los cuatro pasos de Pólya para resolver una situación problema, "partiendo de la comprensión del texto, seguido por el planteamiento de una estrategia y su respectiva aplicación y por último verificando que el camino tomado si genere la mejor solución a la situación planteada" (Herrera, 2014, pág. 18).

Como metodología, para evaluar la efectividad de la propuesta, el autor uso una estrategia estadística llamada intervalos de confianza, por medio de un grupo experimental y en el grupo control; lo cual permitió validar la estrategia de enseñanza aplicada en el grupo experimental. Resalta, la investigadora, la importancia de "diseñar actividades que realmente generen en los estudiantes motivación y deseos de aprender" (Herrera, 2014, pág. 3). El aporte principal de esta investigación, es la reflexión y conclusión que se hace sobre la forma de abordar la enseñanza del concepto de número racional, ya que durante mucho tiempo se había abordado sin la importancia que este conjunto numérico se merece, se definía, pero no se profundizaba en sus diferentes representaciones, por ejemplo, como fracciones, razones, decimales, entre otros. Lo que también causaba la apatía de los estudiantes ya que se daba una enseñanza descontextualizada.

Así mismo, Plazarte (2016) desarrolló una investigación cuasi-experimental y analizó la incidencia del software K-bruch (es un programa informático para el entorno de ventanas KDE cuyas funciones permiten practicar cálculos con fracciones (Stein y Mahfouf, 2010)) en la enseñanza de operaciones con fracciones, para esto trabajó con dos grupos de noveno año de educación general básica en Ecuador; uno experimental y otro de control. En el grupo experimental se dieron clases utilizando el programa, mientras que en el grupo de control se dictaron clases de la forma tradicional. Se utilizó además la investigación documental o bibliográfica debido a que se recabó información de libros, revistas y tesis para la realización de la fundamentación teórica. El autor expresa que al aplicar en el aula el software K-bruch "se observó una mayor incentivación en los estudiantes, ya que es un programa nuevo e innovador el cual despertó el interés por aprender matemática" (Plazarte, 2016, pág. 90). Más que usar este programa, que genera procesos intuitivos y facilita la interacción entre el estudiante y el software, o las actividades que con él aplico, el investigador quiere resaltar el uso de una herramienta que busque la innovación, y no estancarse en lo tradicional (visión acumulativa y mecánica), para generar interés en los estudiantes. También, recomienda a las universidades incluir en el proceso de enseñanza y aprendizaje el uso de herramientas científicas y tecnológicas con el fin de que "los docentes adopten modernas metodologías y técnicas de enseñanza en las que se incluyan las TIC" (p. 91); del mismo modo "recomienda usar el programa educativo k-bruch pero solo en el caso de suma y resta ya que en contenidos más avanzados como es el caso de operaciones combinadas con fracciones y fracciones complejas no es de gran utilidad" (Plazarte, 2016, pág. 91), además, se queda corto en visualizar la relación gráfica y numérica, entre las operaciones con fracciones. El aporte que genera este trabajo para la presente investigación, posibilitará, basado en la experiencia anterior, en la medida de que se innove, se pueden obtener una comprensión más profunda de las estructuras aditivas entre fracciones. Otro aporte que se puede resaltar, es el no usar solo este software, como lo sugiere implícitamente el investigador, al describir las dificultades que posee. Esta es una de las motivaciones para que la presente investigación seleccione GeoGebra.

De otro modo, Murillo (2014) en su propuesta examina las conexiones entre las prácticas de enseñanza empleadas por docentes de matemáticas, en especial del concepto de fracciones, y como se reflejan en los estudiantes y las destrezas que éstos desarrollan al resolver situaciones cotidianas con fracciones. Es una investigación bajo el paradigma cualitativo, con un enfoque de la teoría fundamentada y una estrategia metodológica basada en el estudio de casos. Se centra en estudios y experiencias nacionales, confrontados con la literatura existente en Latinoamericana, Norteamérica y algunos países de Europa. Concluye que la diversidad de significados asociados con la fracción incide en las dificultades de comprensión y recomienda a los docentes, al inicio del abordaje del concepto,

> propender por emplear en sus prácticas de enseñanza, el planteamiento de situaciones cotidianas, pues ello posibilita detectar qué conceptos previos y errores poseen los estudiantes, teniendo en vista cómo debería abordar un tema específico, y a que debe apuntarle, mejorando quizás, la comprensión de los estudiantes. (Murillo, 2014, pág. 135)

Este proyecto da un punto de vista diferente a los mencionados anteriormente, dado que no solo se ubica en cómo aprende el estudiante, sino que también, cómo enseña el maestro, dando aportes en sus principales errores, por ejemplo, si el maestro inicia el concepto fracción mediante la relación parte todo, debería abordar todas las operaciones homogéneas mediante amplificación o simplificación, y no realizar algoritmos mecánicos descontextualizados, es el caso de multiplicar en diagonal.

Igualmente, Orozco (2013) en su trabajo coincide con otros autores en señalar que una de las problemáticas en la escuela primaria y que constituyen retos y dificultades que enfrentan los docentes, es la enseñanza de las fracciones; por este motivo se propuso elaborar estrategias didácticas para la enseñanza de las fracciones en el tercer ciclo de educación primaria en México, utilizando material concreto. Usa recursos didácticos como el tangram, material Montessori de resaques y el uso de montones-unidad a través del juego. Concluye que es importante que el docente este en capacidad de utilizar diversos materiales y dinámicas para propiciar la participación en parejas, utilizando como recurso el juego, ya que a través de este “se puede aprovechar las experiencias y conocimientos que los niños poseen, lo que favorece que los niños se interesen y motiven para construir conceptos relacionados con los diferentes significados de las fracciones” (Orozco, 2013, pág. 108). Es importante resaltar la estrategia que uso este investigador para desarrollar el concepto de fracción y sus operaciones, mediante el uso de materiales concretos, con el fin de facilitar la interacción o manipulación de los elementos por parte del estudiante, y de esta forma apropiarse de dicho concepto. Aunque los materiales concretos ofrecen una explicación clara entre las operaciones entre fracciones homogéneas no evidencia situaciones en las que se usen heterogéneas, circunstancias que se pretenden abordar con el uso de GeoGebra.

Además, León (2010) presenta herramientas fundamentales al proponer una unidad didáctica3 que desarrolla una propuesta acerca de las fracciones, dirigida a los alumnos de 1º de E.S.O. (Educación Secundaria Obligatoria) en España, con el fin de motivar a los estudiantes y que despierte en ellos el gusto y la curiosidad por este concepto. Es importante resaltar, los resultados que obtuvo el autor al aplicar la prueba diagnóstica, ya que estos dieron, pautas y guías al investigador del presente trabajo, para diseñar la suya. Por ejemplo, en ocasiones, a la hora de identificar una fracción con su posible representación gráfica, no tienen en cuenta la necesidad de que las partes sean equivalentes en área y se centran tan sólo en el número de partes.

La revisión de los anteriores antecedentes permitió tener un concepto claro de cómo podría ser una forma de abordar la enseñanza de los fraccionarios, viendo la necesidad de crear estrategias diferentes, para no enseñar conceptos descontextualizados, analizando los diferentes puntos de vista, el de cómo aprende el estudiante y cómo enseña el docente, así

[3] “La unidad didáctica es la interrelación de todos los elementos que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje con una coherencia interna metodológica y por un periodo de tiempo determinado” (Ibañez, 1992, 13). La unidad didáctica (U.D.) está dividida en 3 momentos: ubicación, desubicación y reenfoque. Información que se ampliará más adelante.

como de la ayuda que podrían prestar las herramientas tecnológicas en la construcción del concepto de fracción y sus operaciones, debido a que estos software brindan entornos donde los estudiantes tiene material intuitivo e interactivo.

5.1.2 GeoGebra.

En este apartado se mencionarán los trabajos realizados por Rodríguez, Santamaría y Manjarrez (2008), Ruiz (2012), Peñaloza y Suárez (2013), Falcón y Collantes (2013), en el uso del software GeoGebra.

Rodríguez, Santamaría y Manjarrez (2008) destacan la importancia del software Geogebra como herramienta computacional que permite combinar la geometría y el álgebra en un solo conjunto, constituyéndose en una buena opción para el proceso de enseñanza y aprendizaje. Su trabajo recopila y analiza experiencias de aula como docente, con el fin de realizar actividades apoyadas en el uso de la tecnología por medio del software GeoGebra, "para favorecer en los estudiantes el aprendizaje significativo de las funciones cuadráticas, gráficas y los diferentes elementos que la conforman" (Rodríguez Santamaría y Manjarrez, 2008, pág. 8). Este proyecto es importante porque apoya el uso del software como un medio para el aprendizaje matemático, no solo por el hecho de ser innovador, si no, por posibilitar la interacción dinámica de conceptos abstractos, debido a los efectos que se produce sobre la gráfica ante la modificación de su representación numérica y algebraica, en tiempo real, generando en los estudiantes la capacidad de pasar de un registro a otro.

Del mismo modo, Ruiz (2012) orienta su propuesta hacia el desarrollo de competencias geométricas y didácticas mediante el software GeoGebra en la formación de docentes de primaria, indaga acerca de sus problemas y el origen de que algunos se les dificulten desarrollar las competencias en matemáticas necesarias para ejercer su labor como futuros maestros. Para esto analiza los procesos cognitivos que están detrás del empleo de ciertas técnicas usadas en los entornos dinámicos de resolución de problemas, utilizando un registro que permite reproducir cada sesión de resolución de problemas en el entorno de GeoGebra. Concluye que "GeoGebra es una herramienta útil para el desarrollo de estas competencias en todo tipo de estudiante o docente, incluido el que no tiene grandes conocimientos tecnológicos. Esto puede explicarse por el carácter intuitivo del software" (pág. 246). Además "el uso de una metodología activa de enseñanza acompañada de un Taller semanal de resolución de problemas con GeoGebra resulta eficaz para desarrollar las competencias didáctico-geométricas de los futuros maestros" (pág. 300). Un aspecto que llama la atención de este trabajo es la metodología utilizada para el análisis del proceso de resolución de problemas con GeoGebra: la autora utiliza tablas e integra la información recogida mediante diferentes instrumentos, lo cual al final le permite describir los elementos estudiados, las técnicas utilizadas, tipos de arrastre, obstáculos, interacción entre la pareja, interacción profesora-pareja.

Así mismo, Peñaloza y Suárez (2013) en su propuesta ofrecen información importante al trabajar con el software GeoGebra, donde proponen tres escenarios dinámicos buscando relacionar el cálculo diferencial y el integral a través de la construcción comprensiva del teorema fundamental del cálculo. Estos escenarios usaron como base las cuatro fases que sustentan el uso de las herramientas tecnológicas en la resolución de un problema propuestas por Santos y Moreno (2013). Concluyen que "el uso de la tecnología, en particular el ambiente que ofrece GeoGebra, permite a los estudiantes crear representaciones mentales de los conceptos matemáticos, a través de la visualización que hacen al realizar las actividades propuestas por el docente" (Peñaloza y Suárez, 2013, pág. 4). Es importante hacer énfasis en el uso de herramientas nuevas que incentiven el deseo de aprender en los estudiantes, en este caso particular, con el software GeoGebra, que brinda la oportunidad de interactuar con los elementos geométricos, desarrollando en los estudiantes una construcción empírica de los conceptos

> La comprensión de las relaciones que se dan entre ejemplos particulares, puede promover la construcción de generalizaciones que sean más intuitivas para los estudiantes. Esto se logra gracias a la problematización de una situación matemática y las potencialidades de representarla en un medio visual (Peñaloza & Suárez, 2013, pág. 4).

Una contribución que hay que resaltar de la anterior investigación, es el uso de una representación visual para la comprensión de un concepto, explorando la herramienta "mueve" permite la construcción de este, idea que se pretende abordar en la presente investigación, analizando la estructura aditiva entre fracciones mediante sus representaciones.

De la misma manera, Rey, Bulla, Jiménez y Rojas, (2012) trabajaron con una población de estudiantes de licenciatura en educación básica en Colombia, en la construcción del concepto de transformaciones de funciones, haciendo uso del software GeoGebra. Se propuso una situación basada en la elaboración de animaciones creativas donde la representación gráfica en un sistema de coordenadas cartesiana de funciones, sus dominios y rangos, movimientos rígidos como translaciones y reflexiones, fueron los elementos básicos para la construcción de la animación. El impacto de esta investigación genera, en la Educación Superior, la transformación de procesos de enseñanza a través de experiencias de aprendizaje a profundidad en los docentes en formación. A pesar que la propuesta no apunta hacia las operaciones entre fracciones propias, se resalta el uso de las herramientas que pueden ser aplicadas en la presente investigación, por ejemplo, los deslizadores para interactuar y dar movimiento a las funciones.

Además, Falcón y Collantes (2013), en su investigación, describen la creación de actividades con GeoGebra, donde muestran cómo crear ejercicios auto evaluables que se adapten al nivel del alumnado, ya sea de profundización, consolidación o repaso, a medida que el alumno vaya dando su respuesta, aumentando la dificultad si va respondiendo de forma correcta o disminuyéndola en caso contrario, aprovechando las múltiples herramientas que ofrece el software en la versión 4.2 de GeoGebra. Una conclusión que aportan los autores acerca de la importancia de este tipo de actividad es que "posibilita tanto conocer el nivel inicial del alumnado ante un nuevo contenido matemático como una profundización en el mismo de forma autodidacta" (Falcón y Collantes, 2013, pág. 8). Aunque las actividades de la presente investigación no son auto evaluables, este trabajo proporciona herramientas que ayudan en la programación de actividades, por ejemplo, casillas de control, casillas de entrada de texto, botones, operadores booleanos y códigos de guion-script, para personalizar situaciones intencionadas en el entorno del software.

Al realizar una búsqueda en la web, se ha encontrado poca información acerca de GeoGebra en la enseñanza de las operaciones entre fracciones. Sin embargo, los autores de los antecedentes previamente vistos, han desarrollado estrategias que aportan significativamente en la comprensión del concepto de fracción, algunos de ellos se apoyan en el uso de software como recurso didáctico, basándose en el empleo de las TIC, y otros aplican específicamente, GeoGebra, herramienta tecnológica que se trabajará en esta propuesta. El uso que se le da a este instrumento dinámico, en ocasiones, se queda en: funciones, derivadas o límites, dejando atrás conceptos como, las fracciones y en especial, operaciones entre fracciones. Por lo anterior, es posible expresar que al trabajar las operaciones entre fracciones con el software, se podrá desarrollar un trabajo más contextualizado para los estudiantes, realizando actividades intencionadas, que busquen el análisis no solo de las sumas y restas si no de las estructuras que estas conforman mediante sus representaciones, y así llegar finalmente a aplicar algoritmos en la resolución de situaciones problemáticas.

5.2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

En este apartado se presentará la fundamentación teórica de los conceptos del proyecto, los cuales son: fracciones, representaciones semióticas, estructuras aditivas, GeoGebra, resolución de problemas y unidad didáctica.

5.2.1 Fracción

En este apartado se abordará algunos conceptos que darán herramientas teóricas al momento del análisis de los datos, por ejemplo, el concepto de fracción como parte-todo, sus sistemas de representación y su relación con registros de representación, propuestos por Duval (2004). Por representación se comprenderá cualquier modo de hacer presente un objeto, concepto o idea. Conceptos y procedimientos matemáticos se hacen presentes mediante distintos tipos de símbolos, gráficos o signos como se puede observar a continuación, y cada uno de ellos constituye una representación. Habitualmente los libros de textos, en su mayoría, ofrecen, para el tratamiento de conceptos matemáticos, escenarios algebraicos con algunos indicios de enfoques numérico y geométrico, sin una relación entre sí. Esto trae como consecuencia que se tenga una visión parcial del concepto considerado, puesto que para comprenderlo totalmente se necesita establecer articulaciones entre los diferentes registros, donde los docentes hagan hincapié en los distintos registros y sus representaciones, en el tratamiento de los mismos y en la conversión de un registro en otro.

Martínez (2001) señala que el educador de Matemática en su práctica cotidiana se puede encontrar con varias dificultades relacionadas con el aprendizaje de conceptos matemáticos, entre ellos, la fracción. La enseñanza de las fracciones no puede limitarse a la consideración de la muy tradicional relación parte-todo (Valdemoros, 2010), sino como una fuerte herramienta que ayuda a realizar divisiones o reparticiones en partes equitativas, debido a que su definición centra su trabajo en fracciones propias; por ello, puede resultar conveniente para su enseñanza la utilización de recursos como material concreto o software educativo, que puedan mejorar la comprensión de este concepto.

Para la relación parte-todo, que se nombró anteriormente, Linares y Sánchez (1988), proponen siete atributos que caracterizan a dicha relación, y que pueden ser de ayuda al docente en el momento de planificar su clase respecto al concepto de fracción y sus operaciones:

1. Un todo está compuesto por elementos separables. Una región o superficie es vista como divisible.

2. La separación se puede realizar en un número determinado de partes. El “todo” se puede dividir en el número de partes pedido.

3. Las subdivisiones cubren el todo; las divisiones que se hagan deben abarcar el “todo” sin que sobre.

4. El número de partes no coincide con el número de cortes.

5. Los trozos —partes— son iguales. Las partes tienen que ser del mismo tamaño —congruentes—.

6. Las partes también se pueden considerar como totalidad (un octavo de un todo se puede obtener dividiendo los cuartos en mitades).

7. El “todo” se conserva.

Estas recomendaciones dan cuenta de la necesidad de comprender la complejidad de los fraccionarios ya que implica varios aspectos y los cuales pueden ser representados de múltiples formas (gráfica, lenguaje natural, entre otras); complejidad que demanda del estudiante y docente un manejo de actividades cognitivas importantes como la conceptualización y el razonamiento. Por lo anterior y teniendo en cuenta a Valdemoros (2010), la presente investigación va a trabajar el concepto de fracción como una herramienta que ayuda a realizar reparticiones en partes equitativas, analizado desde diferentes contextos en situaciones problema y representando de dos formas, numérica y grafica con la ayuda de GeoGebra

5.2.1.1 Sistemas de representación matemática de las Fracciones

En la década de los 80 surge un interés académico por estudiar la noción de representación en Educación Matemática. Las representaciones matemáticas se han entendido desde entonces, en sentido amplio, como “todas aquellas herramientas —signos o gráficos— que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas” (Rico, 2009, pág. 3). Por ejemplo, el número siete se puede representar de las siguientes formas

Figura 2. Representación del número siete.

Fuente. Castillo (2016)

Desde una aproximación semiótica[4], Duval ha sido uno de los teóricos más significativos en esta rama de la representación y la comprensión de los objetos matemáticos desde comienzos de la década de los 80. Según este autor, el aprendizaje de la matemática es un campo fecundo para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Enseñar y aprender matemática supone además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de distintos registros[5] de representación y de expresión (Duval, 2004).

> En la matemática encontramos distintos sistemas[6] de escritura para los números, notaciones simbólicas para los objetos, escrituras algebraicas, lógicas, funcionales que se tornan en lenguajes paralelos al lenguaje natural para expresar relaciones y operaciones, figuras geométricas, gráficos cartesianos, redes, diagramas de barra, diagramas de torta, etc. Cada una de las actividades anteriores constituye una forma semiótica diferente, entendiéndose por tal a la actividad de formación de representaciones realizadas por medio de signos. El dominio de las operaciones necesarias para cambiar la forma mediante la cual se representa un conocimiento es primordial, ya que se constituye en una operación cognitiva básica que está muy relacionada con los tratamientos de comprensión y con las dificultades del aprendizaje conceptual. Esto puede ser la causa de obstáculos que sólo la coordinación de varios registros semióticos ayuda a remontarlos, y en consecuencia el dominio de la habilidad para cambiar de registro de cualquier representación semiótica en el aprendizaje de la matemática se torna fundamental (Oviedo y Kanashiro, 2012, pág. 30).

Según lo anterior, existen diversos tipos de registros en la que se presenta un concepto, por ejemplo, el lenguaje común y el numérico de las fracciones, una de sus representaciones seria respectivamente, un medio y 1/2. También adiciona, que el

[4] Según Hernández-Moreno, Cervantes-Barraza, Ordoñez-Cuastumal y García-González (2017), el estudio de los signos-síntomas es reconocido como semiótica

[5] Para Duval (1998) un registro de representación semiótica es entendido como un sistema de signos que tiene como función principal la comunicación.

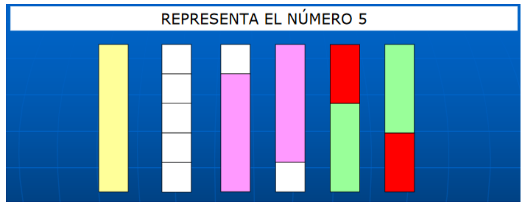
[6] Oviedo y Kanashiro (2012) también aclaran que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación si permite las tres actividades cognoscitivas fundamentales ligadas a la semiósis: Formación de una representación, Tratamiento y Conversión. Más adelanta se profundizarán estos aspectos.

aprendizaje no se genera únicamente conociendo una de ellas, si no, además, haciendo la transición entre las representaciones de un registro, a lo que llama, tratamiento, por ejemplo, en el registro del leguaje usual de las fracciones, un cuarto y uno sobre cuatro. Al igual, ir de un registro a otro, lo que denomino conversión. Un medio y 1/2, sería una explicación a lo antes mencionado, debido a que compara el lenguaje común y el numérico.

Dentro de los modos convencionales de representación es usual distinguir dos grandes sistemas: representaciones simbólicas y representaciones gráficas, las cuales constituyen actividades usuales en el aprendizaje de las matemáticas. Las representaciones poseen un equivalente significativo en la mente del estudiante, mediante los símbolos y gráficas generan instrumentos para comunicar, calcular, pensar y compartir información, estableciendo un desarrollo importante en la comprensión y aprendizaje de las fracciones; estas representaciones (simbólicas y gráficas), podrían ser enseñadas como instrumento para desarrollar la comprensión y comunicación, permitiendo que el estudiante llegue a la resolución de problemas. Según Castro y Castro (1997), entre las representaciones simbólicas se encuentran las representaciones de carácter alfanumérico, que se pueden simular mediante programas informáticos y cuya sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas de procedimiento, por el ejemplo, el sistema numérico con base 36, (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, A, B, C, ...). Los sistemas de representación gráficos recogen las representaciones de tipo figurativo, de carácter analógico, cuya sintaxis viene dada principalmente por reglas de composición y convenios de interpretación, un ejemplo sería las regletas de Cuisenaire[7], de la siguiente manera:

[7] Las regletas son prismas cuadrangulares de $1cm^2$ de base y cuya longitud oscila entre 1 y 10 cm.

Figura 3. Representación del número 5



Fuente. Martín (2015)

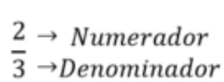
Con el fin de favorecer la labor pedagógica, el desarrollo del pensamiento funcional en los primeros niveles, entendido este como pensamiento sobre relaciones cuantitativas entre dos o más variables, la generalización y las representaciones son elementos fundamentales que deben ser trabajados con mucha constancia en la labor docente (Warren, Cooper, y Lamb, 2006). En este apartado teórico se evidencia, la representación como una herramienta fundamental para conocer que sucede durante el proceso de aprendizaje de un estudiante, cómo empieza a relacionar conceptos con símbolos pictóricos y escritos es muy importante para lograr entender como enlaza los operadores con fraccionarios, el concepto de equivalencia, entre otros.

A continuación, se presentan los distintos tipos de representaciones que son aplicables al concepto de fracción (verbal, numérico, gráfico y manipulativo), explicando su significado y presentando algunos ejemplos desde el marco teórico que expone León (2010):

5.2.1.1.1 Representación Numérica.

Una fracción se representa por números que están escritos uno sobre otro y que se hallan separados por una línea recta horizontal llamada raya fraccionaria. La fracción está formada por dos términos: el numerador y el denominador. El numerador es el número que está sobre la raya fraccionaria y el denominador es el que está bajo la raya fraccionaria.

Figura 4. Representación Numérica



Fuente. Elaboración propia. (2018)

5.2.1.1.2 Representación Verbal.

Vinculado al sistema de representación numérico está el verbal, en el que las reglas del lenguaje organizan y condicionan la representación de los números racionales: un medio, un tercio, dos quintos... De once en adelante se pone la palabra avos después del número:

Tabla 3. Representación Verbal.

Partes en que se divide la unidad	Nombre de cada una de las partes
2	Medios
3	Tercios
4	Cuartos
⋮	⋮

Fuente. Elaboración propia. (2018)

De esta manera, cuando se vaya a leer una fracción, primero se menciona el numerador, luego el tipo de partes que se están tomando. Por ejemplo:

Figura 5. Representación Verbal.

$$\frac{2}{3} \rightarrow \textit{Dos tercios}$$

Fuente. Elaboración propia. (2018)

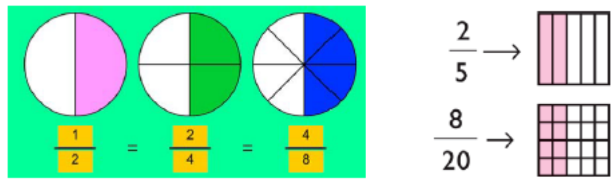
5.2.1.1.3 Representación Gráfica.

Dentro de este tipo de representación se pueden distinguir dos casos:

5.2.1.1.3.1 Representación gráfica continúa:

a). Modelos de áreas: Una figura, principalmente rectangular o circular, se divide en partes iguales, sombreando la parte correspondiente a la fracción representada. Este tipo de situaciones de medida o comparación de áreas (con figuras rectangulares o circulares) se pueden utilizar como modelos de otras situaciones de contextos no geométricos.

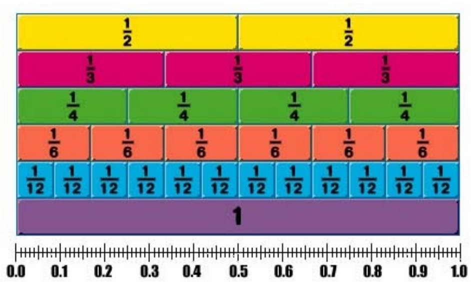
Figura 6. Modelos de área



Fuente. León (2010)

b). Modelos lineales: Al igual que en el caso de los números naturales, podemos visualizar las fracciones a lo largo de una recta. Tomamos en ella una cierta longitud como unidad a repartir, y a partir de ella representamos la fracción.

Figura 7. Modelo Lineal

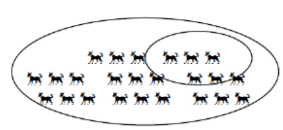


Fuente. León (2010)

5.2.1.1.3.2 Representación gráfica discreta.

Cuando el conjunto que se quiere dividir es discreto y el número de objetos es múltiplo de las partes, una representación de los objetos puede visualizar el problema de reparto.

Figura 8. Representación gráfica discreta.



Fuente. León (2010)

Hay múltiples modos semióticos y existen unas formas para trabajar con las representaciones, que son el tratamiento y la conversión. Usar múltiples modos semióticos ayuda al estudiante a poder desenvolverse no solo en una situación que se le presente sino en varias y con distintos contextos. Según Álvarez (2013):

> …el emplear múltiples representaciones externas al momento de enseñar permitirá retroalimentar los diferentes procesos conceptuales en la enseñanza de un curso, el pasar de una representación gráfica a una proposicional o viceversa llevará a que el estudiante desarrolle varios procesos cognitivos como la categorización, formación de conceptos, evolución conceptual o cambio conceptual (Álvarez, 2013, p. 127).

Según Duval (1998), un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiósis[8]:

1) La presencia de una representación identificable.

2) El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formulada.

3) La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.

Para este trabajo nos centramos en los registros que explican Oviedo y Kanashiro (2012) como lenguaje aritmético y esquema grafico (los cuales llamamos en el proyecto como numérico y pictórico), mediante el siguiente ejemplo:

Designemos por:

r^m = registro semiótico m-ésimo, con m = 1, 2, 3…

[8] La semiosis puede ser definida como un proceso de formación de signos o de engendramiento de signos de primeridad hacia terceridad y viceversa; es decir, va del *Representamen* al Objeto y al Interpretante, para luego revertir el proceso al convertirse ese Interpretante en un nuevo *Representamen* (Mosquera y Finol, 2012, pág. 12)

R_i^m (A)= representación semiótica i-ésima (i= 1, 2, 3…) de un objeto A en el registro semiótico r^m. Si se produce un cambio de registro semiótico también se modifica la representación semiótica, en cambio si se produce un cambio de representación semiótica no necesariamente cambia el registro.

Por ejemplo:
Concepto: **Número Fraccionario**
Registro semiótico r^2: **lenguaje aritmético**
Representación semiótica R_1^2: $\frac{1}{4}$ (escritura fraccionaria)
Representación semiótica R_2^2: 0,25 (escritura decimal)
Representación semiótica R_3^2: 25×10^{-2} (escritura exponencial).
Registro semiótico r^4: **esquemas gráficos**

Representación semiótica R_1^4: 

Representación semiótica R_2^4: 

Conversión: $\frac{1}{4} \rightarrow$  (de Registro lenguaje aritmético al Registro de esquemas gráficos) (Oviedo & Kanashiro, 2012).

5.2.2 Estructuras Aditivas

A continuación se expondrán las propiedades al momento de trabajar el concepto de fracción y estructura aditiva, de esta forma enriquecerán el análisis y apoyados en los niveles de resolución de Tamayo, darán pie a una comparación más profunda para caso de estudio.

La estructura es un fenómeno importante que capacita al hombre para actuar en situaciones que no son exactamente las mismas como las que conocieron antes, según Van-Hiele, (1986):

> La estructura le ahorra al hombre una vida interminable de ensayo y error, y lo capacita para comprender otras cosas. Una persona que actúa con intención no actúa al azar, el acto es acorde a la estructura que el percibe, hay una correspondencia entre su estructura mental y la estructura esperada (p. 11)

La estructura aditiva de las fracciones, relacionan situaciones donde se identifiquen, comprendan y aborden aplicación de suma o resta, en este caso, con el concepto de fracción, desarrollando habilidades en el estudiante para enfrentarse a problemas que exijan un razonamiento a profundidad y además lo conduzca a una solución hábil de dichos problemas, mediante el uso de patrones y diferentes representaciones.

Según Ordoñez (2014), se distinguen diversas situaciones numéricas o usos de los números, por ejemplo: los estados, expresan la medida de una cantidad de una magnitud en cierto instante; Ana tiene 30 muñecas, las variaciones, expresan los cambios que se producen en función del estado con el transcurso del tiempo; Ana regalo 3 de sus muñecas, comparaciones, expresan la diferencia entre dos estados; En Tenerife hay 4 grados menos que en México De estas situaciones numéricas se obtiene cuatro diferentes estructuras aditivas, cada una con tres problemas dependiendo de la posición de la incógnita, a partir de las cuales se hace el paralelo con los números fraccionarios:

- **Combinación.** (Combinación de estados) Estado 1+ estado 2 = estado total:
  Hace referencia a la relación que existe entre un conjunto y dos subconjuntos disjuntos del mismo.
  - Carlos tenía 8 colores verdes y 4 amarillos. En total tiene 12 colores.
  - Pedro tenía 2/6 de un metro de cinta verde y 1/6 de cinta amarilla. En total tiene 3/6 de un metro de cinta.
- **Cambio** (variación de un estado) Estado + variación = estado final:
  Implica un incremento o disminución de una cantidad inicial hasta crear otra final.
  - María tenía 7 revistas. Compró 5 revistas más. Ahora tiene 12 revistas.

    - Sandra tenía 1/4 de un kilo de arroz. Compró 1/2 de un kilo más. Ahora tiene 3/4 de un kilo de arroz.
- **Comparación** (Comparación de estados) Estado1 + comparación = estado 2. Estos Problemas implican una comparación entre dos conjuntos.
    - Mateo tiene 6 libros y José tiene 4 libros más que Mateo. José tiene 10 libros.
    - Ana tiene 2/7 de un litro de leche y Juan tiene 1/7 de un litro más que Ana. Juan tiene 3/7 de un litro de leche.
- **Dos cambios** (combinación de variables sucesivas) Variación1+ variación 2= variación total:
  En esta cuarta estructura aditiva se consideran las tres anteriores, debido a que en las de cambio y comparación se produce alguna acción relacionada con la comparación de dos conjuntos disjuntos
    - Carlos ganó 5 caramelos por la mañana y ganó 4 caramelos por la tarde. A lo largo del día ganó 9 caramelos.
    - Miguel compró 1/4 de un litro de aceite para su moto por la mañana y compró 2/4 en la tarde. A lo largo del día compró 3/4 de un litro de aceite.

Las operaciones aritméticas utilizadas para trabajar con fracciones son las siguientes:

Figura 9. Operaciones básicas con fracciones.

1. $\frac{a}{k} + \frac{b}{k} = \frac{a+b}{k}$ (suma de fracciones con igual denominador)
2. $\frac{a}{k} + \frac{b}{n} = \frac{a \cdot n + k \cdot b}{k \cdot n}$ (suma de fracciones con distintos denominadores)
3. $\frac{a}{k} - \frac{b}{k} = \frac{a-b}{k}$ (resta de fracciones con igual denominador)
4. $\frac{a}{k} - \frac{b}{n} = \frac{a \cdot n - k \cdot b}{k \cdot n}$ (suma de fracciones con distintos denominadores)
5. $\frac{a}{k} \cdot \frac{b}{n} = \frac{a \cdot b}{k \cdot n}$ (producto de fracciones)
6. $\frac{a}{k} : \frac{b}{n} = \frac{a \cdot n}{k \cdot b}$ (cociente de fracciones)
7. $\frac{a}{k} + \frac{b}{n} + \frac{c}{m} = \frac{a \cdot n \cdot m + b \cdot k \cdot m + c \cdot k \cdot n}{k \cdot n \cdot m}$ (suma de tres fracciones)
8. $\frac{a}{k} + \frac{b}{n} - \frac{c}{m} = \frac{a \cdot n \cdot m + b \cdot k \cdot m - c \cdot k \cdot n}{k \cdot n \cdot m}$ (suma y resta de tres fracciones)

Fuente. García y Rodríguez (2013)

Para sumar (o restar) fracciones se reducen primero a común denominador y, después, se suman (o restan) los numeradores. Sin embargo, este paso es uno de los que más representa dificultades para los estudiantes.

Las propiedades de la suma de fracciones son las siguientes:

Propiedad conmutativa: La suma de dos fracciones cualesquiera no depende del orden de los sumandos.

Figura 10. Propiedad conmutativa.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

Fuente. La Escuela en Casa. (2014)

Esto significa que podemos sumar fracciones en el orden que queramos, es decir, la suma de fracciones no depende de los sumandos, por lo tanto, puede aplicarse en cualquier otra suma de números fraccionarios.

Propiedad asociativa: La suma de varias fracciones no dependen del orden en que se asocien:

Figura 11. Propiedad asociativa.

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{m}{n}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{m}{n}\right)$$

Fuente. La Escuela en Casa. (2014)

Esto quiere decir que, cuando tenemos sumas de varias fracciones, podemos empezar a sumar las fracciones en cualquier orden. Pueden sustituirse dos o más sumandos por su suma ya efectuada, y la suma total no experimenta diferenciación.

Elemento neutro para la suma: El elemento neutro para la suma de fracciones es el cero porque si a cualquier fracción le sumamos el cero, obtenemos la misma fracción. El número 0 se puede representar como una fracción con el 0 en el numerador y cualquier entero, exceptuado el mismo cero, en el denominador.

Figura 12. Elemento neutro.

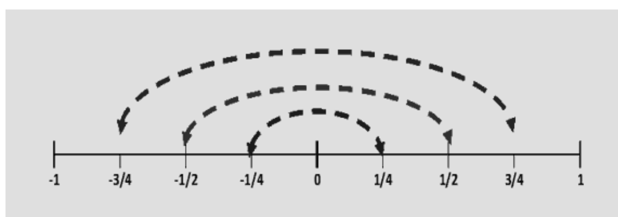
$$\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$$

Fuente. La Escuela en Casa. (2014)

Esta operación se aplica mediante un número racional que sumado a cualquier otro da como resultado este último número.

Elemento opuesto o simétrico: Las fracciones opuestas o simétricas son fracciones que si se suman el resultado es cero. Para todo número racional existe otro elemento opuesto, tal que al sumarse ambos dan como resultado el elemento neutro. El opuesto de un número racional es el mismo número cambiado de signo

Figura 13. Elemento opuesto.



Fuente. La Escuela en Casa. (2014)

Resolver las operaciones entre fracciones, según lo mencionado, no implica solucionar problemas, antes, el estudiante debe tener la capacidad de identificar, comprender, y abordar las situaciones en las que tienen aplicabilidad las operaciones y estructuras.

5.2.3 Enfoque De Resolución De Problemas

La importancia de emplear la resolución de problemas en el campo de las matemáticas es que crea en el estudiante una visión para explorar e investigar, no olvidado de alguna manera de los procesos mecánicos, y se prioriza la creatividad a partir de un problema.

Según García (1998), un problema es:

> … una situación que presenta una oportunidad de poner en juego los esquemas de conocimiento, que exige una solución que aún no se tiene y en la cual se debe hallar interrelaciones expresas y tácitas entre un grupo de factores o variantes, búsqueda que implica la reflexión cualitativa, el cuestionamiento de propias ideas, la construcción de

> nuevas relaciones, esquemas y modelos mentales, es decir y en suma, la elaboración de nuevas explicaciones que constituyen la solución al problema (pág. 25).

Teniendo en cuenta lo anterior, las situaciones problemas son objetivas, generan un estado psíquico de dificultad intelectual, provocan preguntas y la necesidad de elaborar respuestas, poniendo a prueba los conocimientos y como estos se pueden relacionar entre sí, de algún modo, marca el momento inicial del pensamiento, debido a la relación que hace éste con el contexto que lo rodea. Las situaciones problema exigen las interpretaciones de circunstancias reales, lo que requiere de la comprensión, la creación, modificación y adaptación de modelos para seleccionar, organizar e interpretar la información a partir de la situación y de estrategias para utilizar y transformar esta información para llegar a la resolución del problema.

Para este proyecto se estructuraron unidades didácticas con el fin de abordar las estructuras aditivas con números fraccionarios. En ellas se parte de situaciones problema con contenido matemático en donde el estudiante tendrá que poner en juego la implementación de estrategias que le permitan dar con una solución acertada, tomando como apoyo el software Geogebra que facilitará la visualización de los procesos, debido a los atributos con los que cuenta.

Propuestas curriculares internacionales, como en los Estándares para Matemáticas, se consideran fundamentales en el desarrollo del pensamiento matemático "aspectos como la resolución de problemas, la necesidad de comunicarse matemáticamente y la búsqueda de las conexiones de las matemáticas con otras disciplinas" (National Council of Teachers of Mathematics, 2000, pág. 8). Esta propuesta curricular de la NCTM ha sido un referente importante en la construcción de la propuesta curricular a nivel nacional, por tanto, las políticas educativas nacionales proponen el Enfoque de Resolución de Problemas como un método que debe guiar la actividad matemática del individuo para fortalecer las competencias científicas.

Heyworth (1999) señala la resolución de problemas como uno de los objetivos fundamentales en el desarrollo de la ciencia, "la enseñanza en las ramas de ciencia tiene generalmente como fin alcanzar dos objetivos: la adquisición de un cuerpo de conocimiento organizado en un dominio particular y la habilidad para resolver problemas en ese dominio" (p.30). Luego, la resolución de problemas constituye un tipo de actividad que la escuela debe promover en el proceso educativo de los estudiantes.

Entre los pioneros en la investigación en Educación Matemática del Enfoque de Resolución y Planteamiento de Problemas se encuentran las contribuciones de Polya, las cuales se enmarcan en comunicar su propia experiencia como matemático al resolver problemas. Polya compartía que las estrategias y preguntas de un experto al resolver problemas podían ser modeladas por los maestros en el salón de clase. El proceso para resolver problemas propuesto por Polya (1945) pone especial énfasis a los métodos heurísticos, este proceso se basa en tres etapas: a) entendimiento del problema; b) configurar un plan; y c) ejecutar el plan.

Lester y Kehle (2013) indican que la enseñanza desde este enfoque teórico debería ser encarada como una comprensión conceptual, que posibilite en los estudiantes, la habilidad de aplicar lo aprendido con flexibilidad y criterio. Además, proveer la oportunidad de explicar un amplio rango de problemas y situaciones problemáticas, que vayan desde los ejercicios hasta los problemas abiertos y situaciones de exploración, ayudando a desarrollar un punto de vista matemático. Esto indica que el proceso de enseñanza debe estar caracterizado por la habilidad de analizar y comprender, de percibir estructuras y relaciones estructurales, de expresarse oralmente y por escrito con argumentos claros y coherentes; es decir los estudiantes deben ver la matemática como una herramienta que permite analizar el mundo que le rodea, modelarlo y, a partir de esto, comprender las situaciones y plantear posibles soluciones a su realidad.

Para este trabajo se tuvieron en cuenta los aportes de Tamayo, Loaiza y Zona (2014), quienes:

> …proponen cinco niveles en la resolución de problemas en el área de las ciencias: Nivel 1 (Redescripción de la experiencia, enuncia el problema y describe el experimento según sus observaciones o utiliza datos de las instrucciones para justificar sus respuestas). Nivel 2 (Redescripción de la experiencia de manera libre, ha realizado la experiencia anteriormente, utiliza opiniones, describe lo que sintió durante las experiencias y/o utiliza analogías). Nivel 3 (Identificación de una o dos variables, en este

> nivel se reconocen las variables sin realizar algún tipo de relación entre ellas). Nivel 4 (Resolución del problema de manera inadecuada, identificando y relacionando variables y justificando o no dichas relaciones). Nivel 5 (Resolución de problema de manera adecuada, identificando y relacionando variables y justificando o no dichas relaciones) (pág. 190).

Se escoge la perspectiva de estos autores porque dan importancia a desarrollar situaciones en contextos diferentes, y a partir de ellas planear algunos problemas, los primeros asequibles para involucrar a los estudiantes en la actividad y los demás problemas de mayor complejidad, como una forma de generar discusión entre los pequeños grupos que posibilitará a los estudiantes profundizar en ideas matemáticas claves. Además, usa un sistema de niveles que no hacen otros autores, y serán de utilidad al momento del análisis, clasificándolos desde el nivel 1, en donde el estudiante enuncia los datos, hasta el nivel 5, donde plantea una interpretación y solución correcta.

5.2.3.1 GeoGebra

En la presente propuesta, se utiliza el software austriaco GeoGebra creado por Markus Hohenwarter, con el cual se trabaja geometría y algebra, puede ser usado en la enseñanza de la matemática debido a reúne dinámicamente: aritmética, geometría, álgebra, cálculo y análisis; en un único conjunto sencillo a nivel operativo y potente.

Como afirma Ruíz (2012):

> GeoGebra puede considerarse un Software de Matemática Dinámica (SMD) porque, además de tener las posibilidades de un SGD, incluye otras particularidades algebraicas y de cálculo que permiten relacionar varias áreas matemáticas. La idea básica de los creadores y desarrolladores de este software ha sido unir geometría, álgebra y cálculo (las distintas representaciones de un mismo objeto se conectan dinámicamente) en un único programa de uso intuitivo que permita la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles educativos (pág. 55).

En GeoGebra se realizan construcciones dinámicas de todo tipo, que pueden elaborarse empleando tanto herramientas como comandos, admiten representaciones diversas de los diferentes objetos matemáticos; Geogebra puede convertirse en una de las mejores herramientas de enseñanza del profesor siempre y cuando se le dé un enfoque educativo y no operativo. También cabe recalcar que este software se convierte en una fuente de motivación para los estudiantes por su plataforma dinámica, además, brinda la oportunidad de manipular las figuras geométricas e interactuar con ellas, de esta forma crear generalizaciones.

Unas de las ventajas que ofrece GeoGebra es el poder modelar y simular diferentes situaciones problema, esto es un recurso importante como estrategia para la resolución de problemas, puesto que una buena representación de la situación ayuda a aclarar y obtener información del problema presentado. Desde el software, se entiende por modelar o simula runa construcción que ilustra una representación gráfica de algún objeto, teniendo en cuenta todas sus características.

Según Shannon (1975):

> La simulación es el proceso de diseñar un modelo de un sistema real y llevar a término experiencias con él, con la finalidad de comprender el comportamiento del sistema o evaluar nuevas estrategias dentro de los límites impuestos por un cierto criterio o un conjunto de ellos para el funcionamiento del sistema (p. 5).

Por otro lado, podría decirse que una simulación es una construcción que ilustra una representación gráfica de algún objeto, para experimentar y obtener información sobre el fenómeno en estudio.

Además, y coincidiendo con Ruiz (2012), una característica fundamental a la hora de haber elegido GeoGebra para realizar la presente investigación, ha sido la enorme vitalidad de la comunidad de usuarios, que no para de crecer y de intercambiar recursos, realizar congresos y jornadas para difundir sus logros y desarrollar el software para adaptarlo a nuevos soportes (tabletas, móviles, netbooks). Los institutos de GeoGebra son los encargados de la formación docente y la difusión de novedades. Es importante resaltar que al ser una herramienta que está en constante actualización, los resultados que se obtengan en la investigación posibilitaran a la mejora del mismo.

Teniendo en cuenta la importancia de la ejecución de estrategias que involucren el uso de las nuevas tecnologías como herramientas que apoyen a la construcción del conocimiento de forma activa y dinámica, GeoGebra ayuda al mejoramiento del rendimiento escolar en el área de matemática permitiendo, hacer relaciones desde la geometría al algebra, relación que es importante mencionar, desde un punto de vista ontosemiótico[9], el uso de representaciones genera aprendizaje.

5.2.3.2 Unidad Didáctica

La unidad didáctica (UD), según Bayles (1934), o también conocida como plan Morrison, debido a su autor Henry C. Morrison (1871-1945), superintendente del estado de New Hampshire, se origina en el año 1920, pero fue en 1965 donde se torna popular en las comunidades académicas. Morrison (2005), exponía este plan en 5 fases:

-Fase de la exploración. El profesor efectúa un sondeo acerca de los conocimientos del alumno respecto del asunto a estudiar.

-Fase de Presentación. En posesión de los datos obtenidos en la primera fase, el profesor efectúa una exposición de asunto centrando el tema en lo esencial y adaptándolo a la realidad de la clase. Dice Morrison (2005): "Ese paso constituye la mayor oportunidad del Profesor para llevar a cabo una enseñanza directa y efectiva" (p. 7). Como final de la presentación, el profesor aplicará pruebas de verificación que versen sobre lo que fue expuesto

-Fase de Asimilación. El alumno debe aprender a ampliar por sí mismo lo que el profesor presentó. Lo hará a través del estudio dirigido, de la investigación y de la experiencia, según la disciplina de que se trate. Con relación al quehacer del profesor en esa fase, dice Morrison (2005): "El profesor debe ser un persistente y hábil proveedor de nuevos y mejores materiales de investigación, inspector y director de estudios, y permanente estudioso de las dificultades individuales de los alumnos, a fin de orientarles" (p. 156).

[9] Para Torres (2011), el enfoque ontosemiótico (EOS) es un marco teórico amplio que organiza, unifica y clarifica nociones de otras teorías, enfoques y modelos con el fin de describir e investigar, de forma holística, los procesos de aprender y enseñar matemáticas.

-Fase de Organización. Se lleva a cabo mediante un trabajo de integración y revisión del aprendizaje, que puede ser orientado por el profesor, pero con el máximo de participación del alumno

-Fase de Recitación. Algunos alumnos hacen la presentación oral de la unidad -a parte de ella- según lo determine el profesor; después de su exposición deben responder a las interrogaciones de los compañeros acerca del asunto expuesto. Ese trabajo no debe ser un mero repetir o recitar, toda vez que los expositores pueden manifestar sus críticas y sus puntos de vista personales. Los alumnos que no toman parte en la exposición oral están obligados a hacerlo por escrito (Morrison, 2005).

Teniendo en cuenta lo anterior, una unidad didáctica debe generar actividades intencionadas, donde fomente el desarrollo conceptual (el saber), procedimental (como lo hace) y actitudinal (como es su actitud), ante situación que pueden suceder en la vida cotidiana. De esta manera y tomando como referencia la perspectiva que realiza la Maestría en la Enseñanza de las Ciencias, de la Universidad Autónoma de Manizales, además, según Tamayo (2010), la UD que siguió la presente investigación, resaltara tres momentos;

Ubicación: Durante esta fase se recogerá información sobre las ideas de los estudiantes en las diferentes unidades didácticas sobre las cuales se realizará la investigación. De igual manera se caracterizarán los diferentes lenguajes empleados por los estudiantes en el aprendizaje de las ciencias.

Desubicación: Durante esta fase los docentes deben diseñar ambientes de aprendizaje en los que las TICs se constituyan como el soporte para favorecer la construcción de múltiples representaciones sobre los fenómenos estudiados y, asimismo, permitan evidenciar la evolución conceptual de los estudiantes. De igual manera se ejecutarán las diferentes unidades didácticas y se hará seguimiento a cada una de las categorías estudiadas.

Reenfoque: Se inicia esta fase con el análisis y la discusión de la información recolectada en las fases anteriores. Su propósito es establecer posibles relaciones entre los procesos de enseñanza mediados por las TICs.

6 CAPÍTULO III. METODOLOGÍA

Con el fin de caracterizar el impacto del software GeoGebra en la resolución de situaciones problema relacionadas con las estructuras aditivas de fracciones propias, en estudiantes de quinto grado del Colegio Sagrado Corazón de Jesús- Hermanas Bethlemitas Bucaramanga, se presenta este capítulo de metodología.

6.1 ENFOQUE DE LA INVESTIGACIÓN

Esta investigación tiene un enfoque descriptivo, con carácter cualitativo, en un estudio de casos, porque al momento de observar el "aprendizaje" de los estudiantes se analizan características que no necesariamente tiene una equivalencia numérica para su análisis, dado que éste enfoque permite "comprender y profundizar en los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con el contexto." (Hernández, Fernández-Collado, y Baptista, 2010, pág. 364).

Además, las investigaciones de tipo cualitativo, según Acero (2012), tienen el objetivo de evaluar algunas características de una población o situación particular. Las características más representativitas, según este autor, pueden ser:

- Estudia una metodología cualitativa.
- Suele ser un primer abordaje al objeto de estudio y funcionar como un catalizador de nuevas investigaciones.
- Permite obtener muchos datos precisos sobre el objeto de estudio.
- Usa distintas técnicas e instrumentos para la recolección de datos: entrevistas, encuestas, documentación, observación participante, etc.

Del mismo modo, esta investigación hace estudio de casos que proporcionan generalizaciones ligadas al contexto para investigaciones futuras (Peshkin, 1993). Así, cada estudiante se concibe como un caso, en el que se alcanzan a presentar conclusiones mediante la observación y el análisis (McMillan 2005). Por consiguiente, a lo largo del capítulo de análisis, se presentarán estados de cada caso frente a las situaciones problema que se proponen en clase.

Este tipo de investigación permite dar una explicación según la observación que se ha tenido, y también reflexionar sobre la práctica docente y cómo mejorar, los métodos de enseñanza, proporcionando al maestro una serie de técnicas que le permiten recoger información de la realidad que desea transformar.

6.2 DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación cualitativa tiene unas fases metodológicas en el proceso de su investigación, las cuales permiten el acceso a enunciaciones comprensivas y explicativas. Estas fases que caracterizan una investigación son: formulación, diseño, gestión y cierre.

A continuación, se explica cada una de estas fases, además, se presenta a modo resumen, una tabla donde se explica la relación entre los objetivos, las técnicas e instrumentos:

- **Formulación:** "Es el punto de partida formal de la investigación y se caracteriza por explicitar y precisar ¿Qué es lo que se va a investigar y por qué? En la lógica multicíclica que tipifica a la investigación cualitativa da lugar a por lo menos tres submomentos, que podemos denominar: inicial, intermedio y final." (Sandoval Casilimas, 2002, pág. 35). Desde la investigación en curso, se identifica como momento inicial, el diseño de una prueba diagnóstica, intermedio, la aplicación de ésta, y en el último momento, el análisis de la misma, buscando dificultades en el concepto de fracción.

Tabla 4 Fase Formulación

Fase uno: Formulación
Objetivo de esta fase Describir las dificultades de los estudiantes de quinto grado al abordar problemas relacionados con estructura aditiva de fracciones propias, mediante el análisis de la representación numérica y gráfica.

Técnica	Instrumento
• Entrevista	• Actividad Diagnóstica en el momento de ubicación, que evalúa temas previos a las estructuras aditivas, como son las fracciones y sus representaciones, la fracción de un número, fracciones equivalente y orden de las fracciones (ver anexo 1)
Actividades	
• Elaboración y ejecución de una actividad, en la cual se identifiquen las falencias de los estudiantes en la estructura aditivas entre fraccionarios. (Tiempo, 60 minutos) • Análisis de los resultados obtenidos.	

Fuente: Autor del Proyecto

Como se presenta en la tabla anterior, la fase de formulación estableció un diagnóstico de los estudiantes para dirigir la investigación al problema encontrado, usó como instrumento de identificación una actividad tipo evaluación, la cual permitió identificar el nivel en el que estos se encuentran.

- **Diseño:** Esta etapa indaga la preparación de un plan emergente que permita orientar el contexto de los participantes de la investigación y la manera de cómo construir conocimiento a través de ella. "Busco responder a las preguntas ¿Cómo se adelantará la investigación? y ¿en qué circunstancias de modo, tiempo y lugar? Al igual que la formulación, el diseño atravesó por varios submomentos: uno inicial, otros intermedios y uno final." (Sandoval Casilimas, 2002, pág. 35). En la investigación presente, se diseñó una unidad didáctica (revisar Anexo 2) para Caracterizar el impacto del software GeoGebra en la resolución de situaciones problema relacionadas con las estructuras aditivas de fracciones propias, que tendrá a su vez tres submomentos, ubicación, desubicación y reenfoque.

Tabla 5. Fase de Diseño.

Fase dos: diseño	
Objetivo de esta fase	
Diseñar una unidad didáctica para caracterizar el impacto del software GeoGebra en la resolución de situaciones problema relacionadas con las estructuras aditivas de fracciones propias.	
Técnica	Instrumento

• Observación.	• Actividad Diagnostica
Actividades	
• Elaboración de una unidad didáctica mediada por el software GeoGebra. • Realización de formato o guías a estudiantes.	

Fuente: Autor del Proyecto

Para la fase de diseño se tomaron los resultados obtenidos de la primera etapa, con la intención de esquematizar una propuesta que permitiera mejorar las falencias de los estudiantes. De acuerdo con lo anterior, para esta fase se elaboró una unidad didáctica (Anexo 2 al 5) basada en los siguientes momentos:

- Momento de Ubicación: Esta etapa se realizó en el aula de clase, se aclaró el concepto de fracciones y recordó, de manera general, las operaciones básicas de las fracciones que los estudiantes vieron en cuarto grado.
- Momento de Desubicación: Este momento se desarrolló en la sala de cómputo, donde con solo las instrucciones que traen las actividades y mediante la ayuda de GeoGebra, los estudiantes debían resolver las situaciones allí propuestas. Teniendo en cuenta la importancia de la argumentación, además, se plantearon preguntas de reflexión en las que los estudiantes pudieran identificar y confrontar sus saberes previos en la práctica con sus compañeros.
- Momento de reenfoque: Aquí se recopilaron las conclusiones de los dos primeros momentos ya trabajados y realizó una última prueba que reunió todo el conocimiento trabajado. En este momento cada estudiante tuvo la responsabilidad de reconocer sus dificultades más generales y reenfocarlas de acuerdo a la conceptualización realizada.

- **Gestión:** "Este momento corresponde al comienzo visible de la investigación y tiene lugar mediante el empleo de una o varias estrategias de contacto con la realidad o las realidades objeto de estudio." (Sandoval Casilimas, 2002, pág. 35). En esta fase se ubica el momento de la implementación de la UD, y las herramientas que se usaron para identificar, en los estudiantes, los niveles de resolución de problemas relacionados con las estructuras aditivas

Tabla 6. Fase de Gestión

Fase tres: Gestión	
Objetivo de la fase Desarrollar la unidad didáctica que se diseñó en la fase anterior, con el fin de superar algunas dificultades e identificar, en los estudiantes, los niveles de resolución de problemas relacionados con las estructuras aditivas.	
Técnica	Instrumento
• Observación • Entrevistas • Grabación de video • Notas de campo • Fotos • Diario de campo	• Unidad didáctica
Actividades	
• Desarrollo de la unidad didáctica. • Realización actividades y juegos propuestos en la unidad. (Tiempo, 2 meses). • Registro en el diario de campo. • Registro notas de campo. • Registro de fotos en algunas s**esiones de la unidad didáctica y** Grabación de las sesiones.	

Fuente: Autor del Proyecto

La fase de gestión se centró en el desarrollo de la unidad didáctica, a partir de los formatos de planeación de las clases y las observaciones que hace de esta. A su vez se realizaron algunas fotografías de los momentos más significativos como evidencia y para el cierre de la UD. En esta fase se presentó a los estudiantes la estructura aditiva de las fracciones mediante el algoritmo y también usando algunas representaciones gráficas, primero en el aula de clase y después con el uso del software GeoGebra.

- **Cierre:** "Las actividades desarrolladas en esta etapa de la investigación sistematizaron de manera progresiva el proceso y los resultados del trabajo investigativo"

(Sandoval Casilimas, 2002, pág. 37). Es decir, conlleva todo lo referente al análisis y conclusiones de la investigación.

Tabla 7. Fase de Cierre.

Fase cuatro: Cierre	
Objetivo de la fase	
Evaluar el impacto del uso del software educativo GeoGebra en el proceso de aprendizaje de adición de fracciones.	
Técnica	Instrumento
• Triangulación de datos	• Unidad didáctica.
Actividades	
• La triangulación como un proceso de análisis de la investigación realizada.	

Fuente: Autor del Proyecto

Para la fase de cierre se tuvo en cuenta lo realizado en las anteriores etapas, para hacer una triangulación[10] como proceso de análisis de la investigación. En la triangulación se relacionaron los datos, la teoría y la interpretación del investigador con respecto a la teoría y así elaborar las conclusiones de la investigación. De igual manera, se tuvo en cuenta la grabación de los videos y las notas de campo. En esta etapa se realizó un análisis de la última prueba que desarrollaron los estudiantes.

La Triangulación es una técnica en donde se usan varias fuentes de información, las cuales pueden ser cualitativos y/o cuantitativos. Según Oppermann, (2000), el prefijo tri de triangulación no hace referencia literal a la utilización de tres tipos de medida, sino a la pluralidad de enfoques e instrumentos de investigación (p. 88). Es decir, cuando se realiza este tipo de procesos al emplear al menos tres aspectos diferentes, se contará con la fiabilidad para reducir las replicaciones y también suprimir la incertidumbre de un solo método.

Desde una perspectiva general, se puede decir que la triangulación de fuentes de datos permite utilizar el mismo método para obtener la máxima ventaja teórica. Al verificar una

[10] Denzin (1970), la triangulación puede ser de datos, análisis de los investigadores, teorías, métodos o múltiple.

determinada teoría de distintas formas, se reduce el sesgo del investigador y se facilita el descubrimiento de hipótesis alternativas.

En la triangulación de datos se tomó el diagnóstico realizado a los estudiantes y el desarrollo de la secuencia didáctica para soportar los análisis de cada una de las sesiones, para así elaborar las conclusiones a partir de los resultados obtenidos en la presente investigación. Esta triangulación permitió verificar la interpretación de los datos recopilados y alcanzar nuevos referentes de gran interés que no pudieron ser observados en un primer nivel, apuntando hacia la objetividad de la investigación (Mckernan J. 1999, pág. 205).

6.3 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS:

A continuación, se describirán las técnicas que se ejecutaron en las fases mencionadas. Teniendo en cuenta lo mencionado por Carbajal (2012):

- **Técnica:** conjunto de reglas y procedimientos que permiten al investigador establecer la relación con el objeto o sujeto de la investigación. Es decir, el "cómo".
    - **Observación participante:** "se puede definir como la práctica de hacer investigación tomando parte en la vida del grupo social o institución que se está investigando" (Mckernan., 1999., pág. 84). En esta investigación fue importante interactuar de forma directa con los sujetos objeto de estudio y por ello se hizo necesario utilizar la observación participante como técnica de obtención de datos, ya que el investigador pudo aprender acerca de las actividades, eventos y comportamientos en el escenario social de los mismo; a su vez le posibilitó comprender cómo estos interactúan entre sí, para obtener una interpretación más precisa del contexto y el fenómeno de estudio.
    - **Grabación de video:** Con el fin de evitar pérdida de información valiosa a la hora de registrar los sucesos en las notas de campo, fue importante realizar videos, puesto que estos captaron imágenes y sonidos de la experiencia en el aula que en ocasiones se podían escapar a los sentidos del investigador. Los procesos de observación, recolección y registro de datos deben realizarse de forma organizada y sistemática, para así tener una reconstrucción más precisa

de la problemática y poder reflexionar acerca de la puesta en marcha de la unidad didáctica. Esta técnica "permite al profesor acompañado por una cámara/observador, registrar y acoplar imágenes auditivas y visuales" (Mckernan. 1999, pág. 124).

- **Notas de campo:** En el ámbito educativo es importante tomar notas claves de lo que sucede en el entorno inmediato. Esta es una manera de recolectar información inesperada y que le proporciona al investigador la interacción con la población objeto de estudio. En este sentido, las notas de campo "son una herramienta científica fundamental que tienen que ver con los acontecimientos experimentados mediante la escucha y la observación directa en el entorno" (Mckernan. 1999, pág. 121).
- **Fotografías:** Representan los escenarios y la población que se está analizando. Según McKernan, "Las fotografías se consideran documentos, artefactos y pruebas de la conducta humana en entornos naturalistas; en resumen, funcionan como ventanas al mundo de la escuela" (Mckernan. 1999, pág. 122).
- **Entrevistas:** Para Denzin y Lincoln (2005, p. 643, tomado de Vargas, 2012) la entrevista es "una conversación, es el arte de realizar preguntas y escuchar respuestas". Como técnica de recogida de datos, está fuertemente influenciada por las características personales del entrevistador.

- **Instrumento:** mecanismo que usa el investigador para recolectar y registrar la información, estos pueden ser: formularios, pruebas, test, escalas de opinión, listas de chequeo, entre otros. Está relacionado con el "Con qué".

6.4 POBLACIÓN.

Esta investigación analizó una muestra de la población del Colegio Sagrado Corazón de Jesús, ubicado en la ciudad de Bucaramanga de carácter católico, que estable en su Proyecto Educativo, los criterios, las orientaciones y conclusiones del Magisterio Universal de la Iglesia y de la Conferencia Episcopal Colombiana.

Para el desarrollo de este proyecto y la ejecución de la unidad didáctica diseñada, los participantes fueron 12 estudiantes con edades entre 9 y 10 años del grado quinto. Sin embargo, solo se analizó el trabajo de 3 niños, cuyos padres y rectora estuvieron de acuerdo con el manejo de seudónimos y material audiovisual (ver anexo 5)[11]. Para la selección de los estudiantes, se tuvieron en cuenta los desempeños académicos: básico, alto y superior; con el fin de poder identificar el nivel inicial de cada uno y los logros obtenidos después de la investigación. Los estudiantes seleccionados fueron:

- **Daniela:** Es una estudiante creativa, innovadora y puntual en la presentación de los trabajos académicos, además de analítica y critica en sus cuestionamientos.
- **David:** Se caracteriza por desarrollar actividades curriculares específicas a tiempo, con cierto grado de análisis crítico, también reconoce y supera sus dificultades de comportamiento y académicas cuando las tiene.
- **Laura:** Es una niña perseverante que alcanza sus metas propuestas con algunas dificultades, además, maneja buenas relaciones con sus compañeros.

6.5 CATEGORÍAS DE ANÁLISIS.

Con el fin de caracterizar el impacto del software GeoGebra en la resolución de situaciones problemas con las estructuras aditivas de fracciones propias, en estudiantes de quinto grado del Colegio Sagrado Corazón de Jesús- Hermanas Bethlemitas Bucaramanga, se propone la categoría Resolución de Problemas, debido que a partir de ella se transversaliza el concepto de fracción, con el uso del software GeoGebra.

6.5.1 Categoría: Resolución de problemas.

Existe diversos puntos de vista, acerca de cómo la resolución de problemas aporta en el pensamiento matemático, algunos de estos, la consideran una habilidad (Laskey y Gibson, 1997; Halpern, 1998), otras una actitud (Paul, Elder y Bartell, 2003), un elemento

[11] La presente solicitud de autorización atiende y respeta las disposiciones jurídicas consagradas en la Ley Estatutaria (No. 1581, 2012) y el Decreto Reglamentario (No. 1377, 2013), así como lo manifestado por la Corte Constitucional mediante Sentencia (C-748, 2011)

constituyente (Tamayo, Zona y Loaiza, 2014) o el escenario donde se lleva a cabo el pensamiento crítico (Bailin, 2002). Reconociendo la importancia de la resolución de problemas en el desarrollo del pensamiento crítico, las subcategorías de análisis para esta investigación se basan en los niveles propuestos por Tamayo (2013), donde cada nivel, así mismo menciona unos descriptores, que guiaron al investigador para analizar cada caso de estudio.

6.5.1.1 Subcategorías:

6.5.1.1.1 Niveles en Resolución de Problemas:

- **Nivel 1 Redescripción de la experiencia**: Enuncia el problema y describe el experimento según sus observaciones o utiliza datos de las instrucciones para justificar sus respuestas.

  Descriptores para esta investigación:

  a. Expone los números presentes en el problema.
  b. Registra los números fraccionarios mencionados en el problema.

- **Nivel 2 Redescripción de la experiencia de manera libre**: Ha realizado la experiencia anteriormente, utiliza opiniones, describe lo que sintió durante las experiencias y/o utiliza analogías.

  Descriptores para esta investigación:

  a. Representa los números fraccionarios mencionados en el problema.
  b. Reconoce la estructura aditiva que indica el problema.
  c. Identifica el concepto de fracción como operador.

- **Nivel 3 Identificación de una o dos variables**: En este nivel se reconocen las variables sin realizar algún tipo de relación entre ellas.

  Descriptores para esta investigación:

  a. Identifican los números fraccionarios y los aplica en la solución de un problema.
  b. Representa la estructura aditiva entre fracciones.
  c. Reconoce el concepto de fracción como operador y lo aplica en la solución.

- **Nivel 4 Resolución del problema de manera inadecuada**: Identificando y relacionando variables y justificando o no dichas relaciones.

  Descriptores para esta investigación:

  a. Identifican los números fraccionarios en el problema y los relaciona con sus representaciones para encontrar su solución.

  b. Reconoce la estructura aditiva entre fracciones y las relaciona con su representación.

  c. Relaciona el concepto de fracción como operador, desde el lenguaje común al numérico.

- **Nivel 5 Resolución de problema de manera adecuada**: Identificando y relacionando variables y justificando o no dichas relaciones

  Descriptores para esta investigación:

  a. Aplica las estructuras aditivas entre fracciones, relacionándolas con sus representaciones para resolver problemas.

  b. Identifica y representa los números fraccionarios para resolver problemas.

  c. Implementa el concepto de fracción como operador apoyándose de sus representaciones para resolver problemas.

7 CAPÍTULO IV. ANÁLISIS

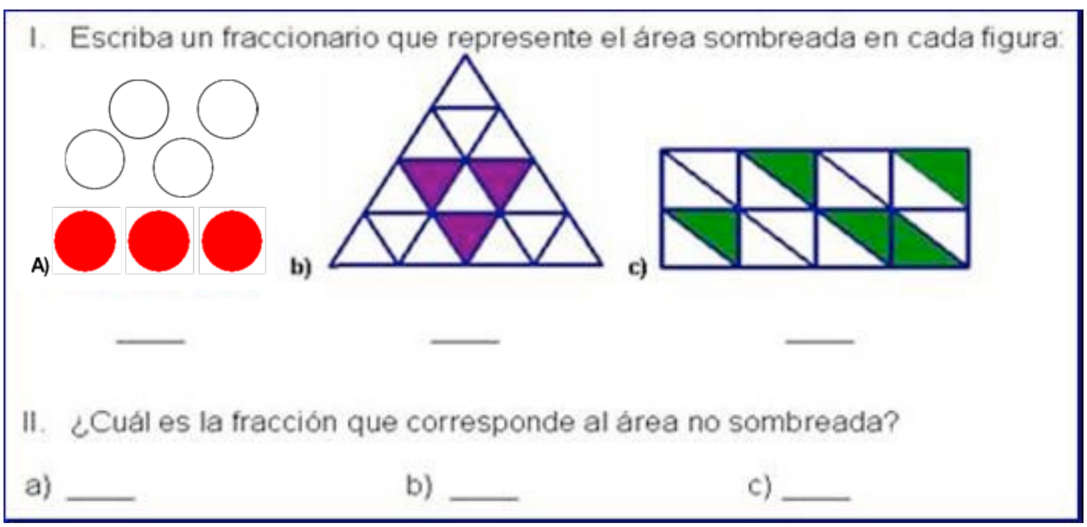
7.1 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

A continuación, se desarrollará el análisis de los momentos en los que se distribuyó la unidad didáctica: ubicación, desubicación y reenfoque. Así, se presentan diálogos, una descripción y análisis de cada caso, y se relaciona con los teóricos y los descriptores propuestos en cada nivel de resolución.

7.1.1 Momento De Ubicación

Este momento está enfocado en analizar las dificultades de los estudiantes de quinto grado al abordar problemas relacionados con estructura aditiva de fracciones propias, mediante la interpretación de la representación numérica y gráfica. Durante el proceso se presentará información sobre las ideas de los estudiantes acerca de las fracciones. De igual manera, se describirán las diferentes representaciones empleadas por los estudiantes en su aprendizaje.

Figura 14. Fracciones para nombrar partes de un conjunto.

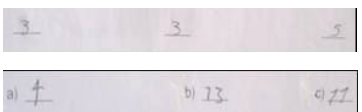
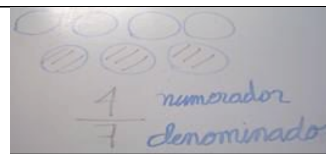
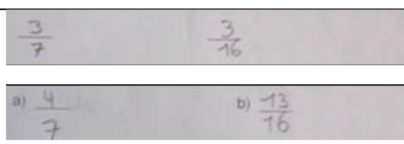
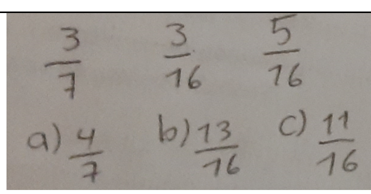


Fuente. Elaboración propia (2017)

Como ejemplo a un registro gráfico está la representación de una magnitud discreta en el inciso a) de la primera parte, y como ejemplo de una representación de magnitud continua se tienen los incisos b) y c). En las respuestas de estos incisos se puede observar que la mayoría de los estudiantes no recordaban cómo representar el área sombreada y no sombreada de cada figura, debido a que mientras algunos estudiantes escribían estas áreas con números enteros, otros se confundían al escribir las fracciones, ya que en el numerador escribían la cantidad sombreada y en el denominador la cantidad no sombreada, al compartir estas respuestas con sus compañeros, los estudiantes realizaron algunas correcciones.

Las respuestas dadas por los estudiantes a la pregunta 1 de la actividad diagnóstica, que fue aplicada de manera individual y posteriormente se socializo, se reúnen de este modo:

Tabla 8. Respuestas a la actividad de Fracciones para nombrar partes de un conjunto

Respuesta de los estudiantes	Respuesta posterior a la corrección	Descripción
 Laura (2017)		Laura escribió las representaciones de las áreas sombreadas con números enteros y no con fracciones
 Daniela (2017)		Daniela responde la pregunta de manera acertada usan las representaciones numérica y gráfica.
 David (2017)	No participo.	David abordo el ejercicio usando solo la representación numérica.

Fuente: Autor del proyecto

Con el propósito de que los estudiantes adquieran seguridad para hacer preguntas, explicar lo que piensa, opinar, argumentar y resolver problemas o dudas, la actividad fue corregida en el tablero, donde se presentaron los siguientes diálogos, con Daniela, Laura y David (2017):

Docente: – *¿recuerda qué son fracciones?*

Laura: –*"No sé, es que no me acuerdo*"-

Daniela: –*"las fracciones son divisiones, que tienen dos partes: el numerador y el denominador… el numerador me indica las partes que tomo de la unidad y el denominador me indica las partes en que se divide la unidad".*

Docente: – *¿qué quiere decir con unidad o qué es unidad*?,

Daniela: –*"la unidad es la que yo divido".*

Docente: –*Sí, pero ¿qué es lo que se va dividir?*,

Daniela: –*"ah, una figura o un conjunto como las bolitas".*

Docente*: –Bien*.

Docente: *¿entendido la explicación que hizo Daniela*?,

Laura: *sí,* con un poco de duda.

Docente: *escriba la fracción que representa el área no sombreada de esta misma.*

Laura: *"¿cómo era?, el número de la parte no sombreada es 4 pero ¿dónde lo escribo, arriba o debajo de la raya?".*

David: –*"el número de arriba de una fracción se llama numerador y me indica las partes que tomo de la unidad, y el de abajo se llama denominador este indica las partes en que divido la unidad"*

Laura: –*"ah, arriba escribo 4 que son las partes que tomo y abajo 7 que son las partes que tiene el conjunto de bolitas"*

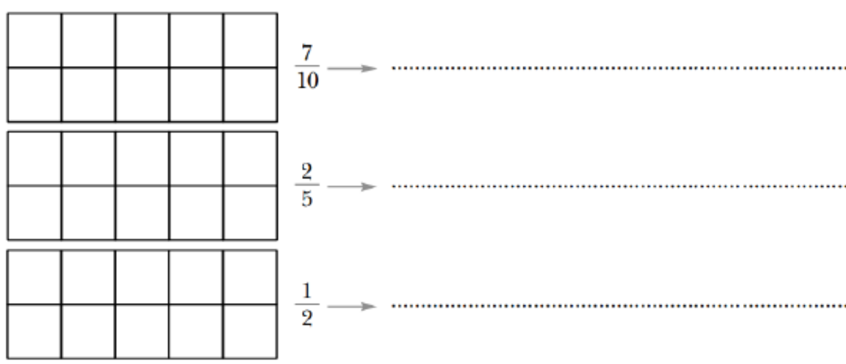
Los estudiantes en el manejo de las magnitudes discretas como en el de las magnitudes continuas, relacionan, con alguna dificultad, la parte y el todo, también recuerdan parcialmente, o con ayuda los conceptos de fracción, numerador y denominador. Como lo afirma Revelo (2014), los estudiantes comprenden mejor cuando los conceptos son explicados por sus compañeros. De esta manera, compartiendo con sus compañeros, Laura pudo entender al final, qué era el numerador y el denominador. En ocasiones se confunden o no recuerdan, según Gonzales (2015), porque se presentan de forma esporádica y falta concentración o hay despistes en los estudiantes, como se ve en Laura cuando no logró ubicar el numerador.

En esta actividad se reconoció el planteamiento de situaciones con registro gráfico, además, se tuvo la oportunidad de identificar de manera intuitiva, las diferentes formas de representación de este registro, entre discreto o continuo, para dar solución a los planteamientos. En este sentido hay que tener en cuenta lo planteado por Chamorro (2003), la representación matemática es el instrumento para la generación de competencias matemáticas, es decir, el estudiante identifica el concepto de fracción en esta actividad, si representa el registro gráfico.

Prosiguiendo con los resultados y evaluando el progreso de los estudiantes, se presentan las respuestas al punto 5 de la actividad, sobre composición y transformación de medidas.

Figura 15. Punto 5. Composición y transformación de medidas.

5. Colorea la parte que se indica en cada caso y escribe cómo se lee cada fracción.

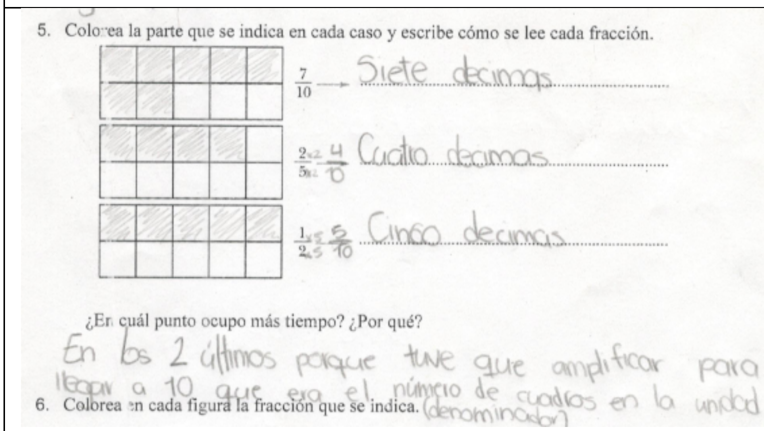
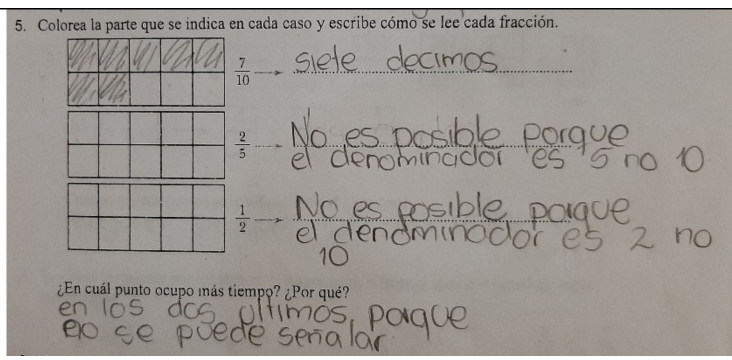


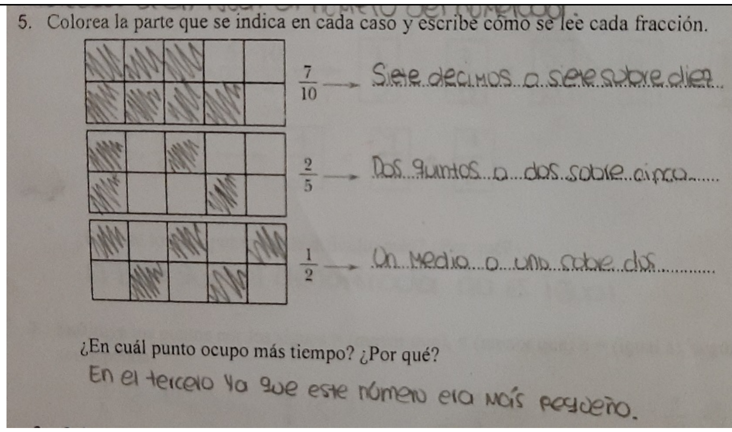
¿En cuál punto ocupo más tiempo? ¿Por qué?

Fuente. Elaboración propia (2017)

Esta actividad propone relacionar la unidad como un todo, para de esta forma, plantear representaciones equivalentes, de lo numérico a lo gráfico. Según Duval (1998), es tipo de relación se le denomina conversión. En este punto los estudiantes superaron las dificultades al momento de identificar una fracción, mediante las retroalimentaciones realizadas posteriormente, aunque algunos, mostraron desconocimiento en la conversión.

Tabla 9. Respuestas a la Actividad de Composición y transformación de medidas.

Respuesta de los Estudiantes	Descripción
 Daniela. (2017)	Identifica la conversión, desde la representación numérica a la gráfica y lenguaje común, además describe un tratamiento donde realiza una trasformación dentro del mismo registro numérico, de 1/2 a 5/10
 Laura. (2017)	Presenta desconocimiento al abordar los puntos de conversión, específicamente en los casos donde debe realizar un tratamiento, dentro del registro numérico, es decir, una trasformación de la representación numérica 2/5 a 5/10.

<table>
<tr>
<td>

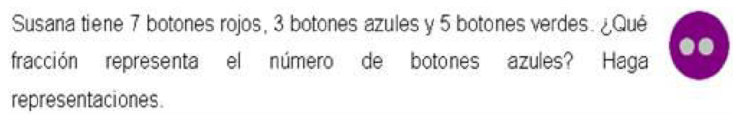
David. (2017)</td>
<td>Evidencia el proceso de conversión desde la representación numérica a las representaciones del lenguaje común y gráfica. Así mismo, hace implícito el tratamiento que realiza en el registro numérico, donde el texto le daba la fracción 1/2 y el estudiante represento 5/10, además, sombrea de una manera no lineal el numerador de algunas fracciones</td>
</tr>
</table>

Fuente: Autor del proyecto

Hasta el momento se observa que Daniela posee una gran facilidad para la representación de fracciones, sin embargo, existe una dificultad a la hora de plantear la solución a un ítem, puesto que toma la unidad como una división de un numero de partes determinadas y no como un todo, impidiendo identificar la fracción de ½ y debe verlo como 5/10 haciendo uso del concepto de amplificación de fracciones al igual que lo sucedido con la fracción 2/5. Según González (2014), este tipo de errores se presentan debido a la multitud de interpretaciones que admiten los racionales. Por otro lado, Laura, no realiza la conversión de los dos últimos puntos, teniendo en cuenta los errores que describe Gonzáles (2014), se clasificaría en los de falta de conocimiento acerca de un concepto. En el caso de David, se resalta la habilidad para realizar la conversión desde el registro gráfico, con la representación de una magnitud continua, a los registros numérico y del lenguaje común.

Por otro lado, si las representaciones son empleadas como instrumentos para desarrollar la comprensión y la comunicación, los estudiantes deben usarlas para un fin, como por ejemplo para resolver problemas. De igual forma, la fracción como parte–todo implica procesos de medición en los cuales se puede establecer la parte y el todo, además, obliga a escoger la magnitud con la cual se va a trabajar, debido a que el todo, ya sea continuo o discreto, es divido en partes iguales. Así como en el ejemplo anterior, se puede observar con las respuestas dadas por los estudiantes en el tercer punto de esta misma actividad consiste en:

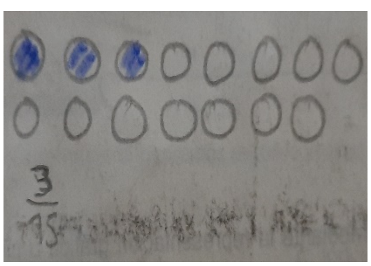
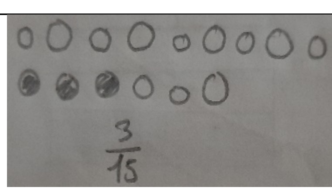
Figura 16. Tercer punto

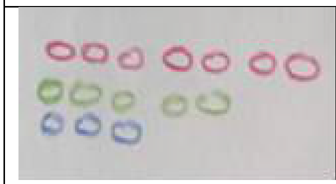
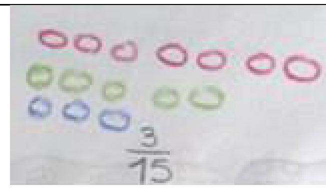

Susana tiene 7 botones rojos, 3 botones azules y 5 botones verdes. ¿Qué fracción representa el número de botones azules? Haga representaciones.

Fuente. Elaboración propia (2017)

En este punto, los estudiantes deben representar los datos de la situación por medio de un gráfico y realizar una conversión a su representación numérica.

Tabla 10. Respuestas al tercer punto

Respuestas de los estudiantes	Posterior a la corrección.	Descripción.
 Daniela. (2017)	No participo	Identifica el concepto de fracción dando respuesta a la situación usando la representación gráfica, luego realiza la conversión entre dos representaciones, del grafico al numérico.
 Laura. (2017)	No participo	Realiza la conversión entre la representación gráfica a la numérica, aunque efectúa particiones

		no equivalentes de la unidad.
 David (2017)		Se le dificulta identificar el concepto de fracción en una situación problema, debido a que plantea inicialmente la representación gráfica, y con ayuda, realiza la conversión a una numérica, además, usa colores para identificar los distintos botones.

Fuente: Autor del proyecto

En las respuestas dadas por los estudiantes se observa que todos usaron un registro grafico mediante la representación de una magnitud discreta para los datos del enunciado, aunque algunos no escribieron la fracción que representaba dicha cantidad. Así, por ejemplo, David en este punto de la actividad sólo hace las representaciones de los botones y los hace con el color y la cantidad correspondiente a la enunciada en el texto, pero no llega a ninguna conclusión numérica o con palabras.

En un dialogo con el estudiante (David, octubre del 2017), expresaba:

David: *"yo dibujé los botones, pero no sabía cómo escribir la fracción que representaba los botones azules".*

Docente: *Es importante que junto a las representaciones gráficas escriban también las representaciones numéricas, en este caso fracciones. David, ahora que recuerda cómo escribir la fracción que lo representa y tiene los botones dibujados ¿podría decir o escribir cuántos son?*

David: –*"Sí, son tres quinceavos"*

Docente: *¿Por qué tres quinceavos?,*:

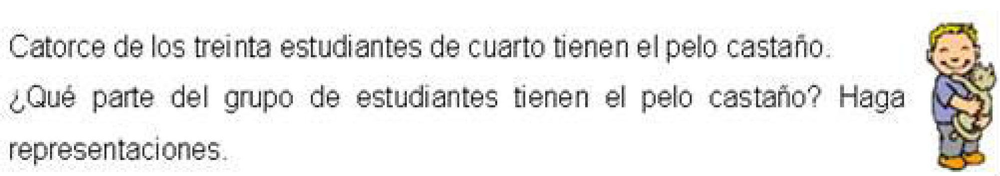
David: *“tres, porque son tres botones azules, y quince, porque son quince botones en total”.*

Por otro lado, una evidencia acerca de responder al azar o despiste, como plantea González (2014), es el caso de Laura, aunque realiza una representación numérica correcta, olvida al momento de representar el registro gráfico, que todas las particiones de la unidad en este caso los botones, deben ser equivalentes. En los demás casos, se observa que los estudiantes entienden este concepto y realizan divisiones equitativas al momento de representar la situación.

En el caso de Daniela, se identifica su dominio en el concepto de fracción y su habilidad para ir de un registro a otro, en esta ocasión, de grafico a numérico, según Duval (1993), la adquisición conceptual de un objeto matemático se basa en el uso de más de un registro de representación semiótica

El cuarto punto de esta actividad, consistió en:

Figura 17. Cuarto punto.


Catorce de los treinta estudiantes de cuarto tienen el pelo castaño.
¿Qué parte del grupo de estudiantes tienen el pelo castaño? Haga representaciones.

Fuente. Elaboración propia (2017)

Tabla 11. Respuestas al Cuarto punto.

Respuesta de los Estudiantes.	Descripción.
 Daniela (2017)	Identifica el concepto de fracción en una situación problema, mediante un registro gráfico y los sombrea de manera lineal y continúa.

 David (2017)	Identifica el concepto de fracción en una situación problema, mediante un registro gráfico, además, realiza las particiones de la unidad en partes equitativas.
 Laura (2017)	Identifica el concepto de fracción en una situación problema, mediante un registro gráfico. Aunque presta poca atención a la equivalencia entre las particiones de una unidad, por otro lado presenta una conversión entre el registro gráfico y lenguaje común.

Fuente: Autor del proyecto

Con la respuesta que dieron los estudiantes a esta situación, se observa que Laura, Daniela y David se inclinan por el registro gráfico y con preferencia en la representación de una magnitud continua. Daniela y David, asumieron que el registro grafico bastaba para dar la solución a la respuesta, en cambio Laura adiciono registro entre lenguaje común y numérico, además, empleó la magnitud continua, por medio de un rectángulo, hizo tantas particiones como niños indica la situación y sombrea la cantidad de niños que tienen el pelo castaño. Aunque escogió la figura para representar los datos del enunciado y se esforzó por que las particiones le quedaran de igual tamaño, no tuvo gran éxito, ya que las magnitudes continuas se deben hacer con la ayuda de una regla para que sus particiones queden de igual medida.

Cabe resaltar que Laura no utilizó la regla, pero obtuvo una respuesta correcta, es importante valorar estos aciertos. Para McCombs (2001) la enseñanza centrada en el alumno considera el elemento afectivo en el aprendizaje para lograr que el estudiante sea exitoso.

Es importante enfatizar que los estudiantes antes de realizar representaciones de un problema requieren de un cambio y una reestructuración para lograr solucionar los problemas, no se necesita un talento especial sino más bien, ver con claridad las ideas y acciones que entran en juego en la solución de estos (Watzlawick, 1995; Weisberg, 1989). En este caso, los estudiantes deben preguntarse: ¿cuál es la medida adecuada?, también hay que tener presente la habilidad para realizar estos tipos de gráficos, es decir, dividir figuras geométricas de tal manera que sus particiones queden de igual medida. Finalmente, se puede concluir que los estudiantes hicieron representaciones creativas, evidenciando que las particiones tanto de las magnitudes continuas como de las discretas deben quedar divididas en partes iguales.

El manejo de los fraccionarios es usado por los estudiantes tanto dentro como fuera de la escuela, así como actividades donde los involucran, siendo estas importantes para la adquisición de los conceptos matemáticos. Bien es sabido, que la mayoría de los estudiantes se han involucrado en situaciones tales como: "gástese la mitad del valor del billete", "cómase un cuarto del bizcocho", "cómpreme dos cuartos de queso", en estos casos, el concepto de fracción está siendo usado como operador, es decir, una parte sobre una cantidad total. Según López (2013), la perspectiva histórico-cultural da elementos claves desde el discurso y la palabra al concepto de fracción. Los estudiantes de esta edad deben tener presente a qué le están aplicando un operador fraccionario, debido a que los operadores fraccionarios se aplican a cantidades o magnitudes de masa, peso, volumen, longitud, área, etc.

Es así que, en la actividad "Operadores Fraccionarios" se plantearon cuatro situaciones, dos de las cuales se realizaron tanto de forma numérica como con el uso de material concreto, por ejemplo, lana, cinta, cabuya o pita. Estas actividades dan pie, al reconocimiento de las estructuras aditivas, teniendo en cuenta lo mencionado por M.E.N. (2011), el aprendizaje de las matemáticas se inicia en las matemáticas informales de los estudiantes en contextos del mundo real y cotidiano escolar y extraescolar. Así, por ejemplo, se tiene el primer punto de esta actividad:

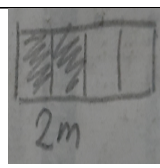
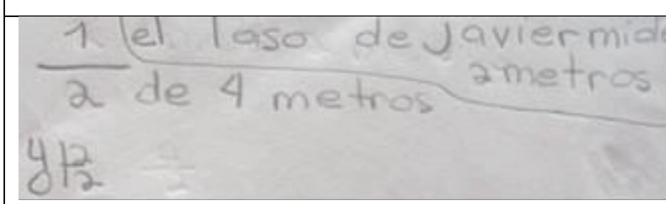
Figura 18. Pregunta 1, Operadores Fraccionarios

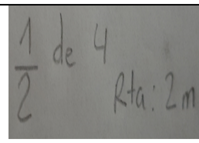
Javier quiere jugar con un lazo que mide 4 metros, pero lo parte por la mitad porque es muy largo y no le sirve. ¿Cuánto mide ahora el lazo de Javier? Explique su respuesta.

Fuente. Elaboración propia (2017)

Para darle solución a esta actividad se le pidió a los estudiantes que el material, ya sea, cinta, cabuya, lana o pita, tuviera una longitud de cuatro metros.

Tabla 12. Respuestas a la Actividad de Operadores Fraccionarios

Respuesta de los estudiantes	Descripción
 Daniela (2017)	Identifica la fracción mediante la práctica, apoyándose de un registro grafico que representa mediante una magnitud continua, aunque no expresa la respuesta de manera explícita, realiza una conversión del registro gráfico al numérico.
 Respuesta de David. (2017)	Identifica la fracción mediante la práctica, pero se inclina por el uso de un registro numérico, representando la fracción como cociente, además, usa un tratamiento entre las representaciones del registro numérico para dar su respuesta donde transforma 1/2 de la cuerda a 2 metros.

 Laura (2017)	Identifica la fracción mediante la práctica, usa un registro numérico para plantear lo mencionado en el enunciado, y además plantea su respuesta mediante un tratamiento entre las representaciones de este mismo registro, de manera que 1/2 de 4 metros es equivalente a 2 metros.

Fuente: Autor del proyecto

Se observó que todos respondieron satisfactoriamente a la pregunta planteada, a medida que solucionaban la situación se presentaron algunos diálogos (David, octubre del 2017):

David: *"como la lana mide cuatro metros y al partirla por la mitad me da dos, porque la mitad de cuatro es dos entonces queda midiendo dos metros"*. La estudiante escribe numéricamente las cantidades que se mencionaban en el texto, y dice: "*la mitad de cuatro metros*", y escribe en su hoja: "$\frac{1}{2}$ *de 4 metros*", aclarando que la mitad se escribe numéricamente como un medio, sin darse cuenta usa otra conversión de la representación numérica al lenguaje verbal. Según Duval (2004), enseñar y aprender matemática supone además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización y relación de distintos registros de representación y de expresión; para Neira (2011), la conversión es un proceso o transformación semiótica fundamental para la comprensión en matemáticas. Se evidencia en David de acuerdo a su respuesta, el manejo de la fracción como operador, además, aplica el concepto de numerador y denominador para operar la fracción con el entero dado, también el reconocimiento de algunas representaciones y sus conversiones. Después de resolver esta pregunta, se les pregunta a los estudiantes, donde responde (Laura, octubre del 2017):

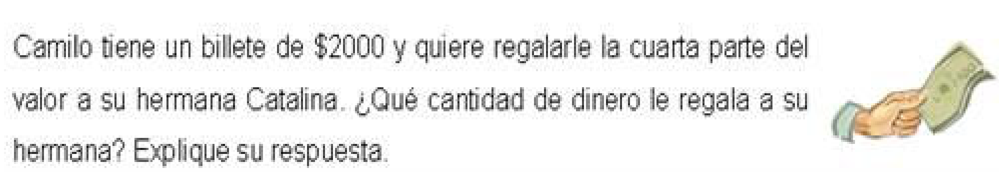
Docente: – *¿la mitad a qué se le aplica? ¿Al lazo?, ¿a lana? o ¿a la longitud del lazo*?

Laura: "*a la longitud del lazo, porque al lazo no se puede*".

En el caso de Laura, reconocía que el operador se le aplica a longitud, más no al material concreto o al objeto que esté manipulando. Vasco (1996) afirma que cuando se argumenta que el operador fraccionario es considerado como un transformador (simplificador o amplificador) de una cantidad de magnitud, el cual tiende a ser considerado como el producto de m por 1/n. Este transformador es una acción mental que concibe la fracción como una sucesión de multiplicaciones y divisiones.

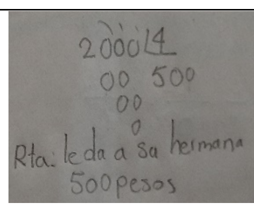
Otro ejemplo para resolver situaciones con el uso de material concreto, es el siguiente:

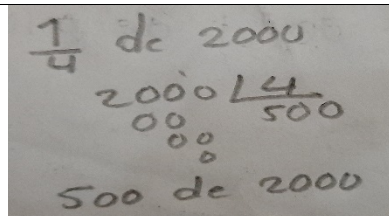
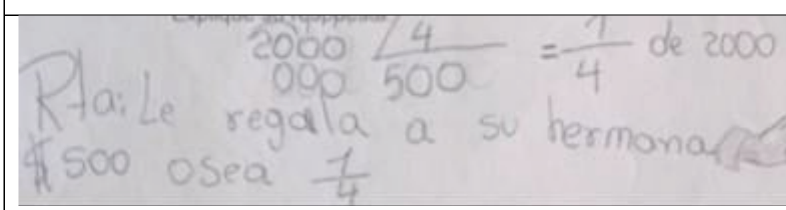
Figura 19. Para resolver situaciones



Fuente. Elaboración propia (2017)

Tabla 13. Respuestas a la Actividad, para resolver situaciones

Respuesta de los estudiantes.	Descripción
 David (2017)	Aborda el concepto de fracción como operador, para dar solución a una situación problema, mediante registros numéricos. Por otro lado, realiza conversiones del lenguaje común al numérico, incluso efectúa tratamientos dentro del registro del lenguaje común, al evidenciar la

	equivalencia entre la cuarta parte de 2000 pesos y 500 pesos
 Laura (2017)	Aborda el concepto de fracción como operador, para dar solución a una situación problema, mediante un tratamiento entre las representaciones de registros numéricos. Por otro lado, realiza conversiones del lenguaje común al numérico, incluso efectúa tratamientos dentro del registro numérico, al evidenciar la equivalencia entre 1/4 de 2000 y 500.
 Daniela (2017)	Aborda el concepto de fracción como operador, para dar solución a una situación problema, mediante un tratamiento entre las representaciones de los registros numéricos, además, hace explicita esta relación al escribirlo en la respuesta.

Fuente: Autor del proyecto

Para resolver esta situación se llevó un billete de dos mil pesos, donde los participantes, (Daniela, Laura y David, octubre del 2017), respondieron:

Docente: –*supongan que este es el billete que le dieron a Camilo. Ahora, ¿qué significa la cuarta parte*?

Todos responden: –"*la cuarta parte significa dividir por cuatro*".

Docente: –*Muy bien*, *y entonces Camilo debe partir el billete en cuatro partes y darle una a la hermana.*

Todos: –*"noooo*",

Docente: –*entonces ¿qué debe hacer Camilo?*

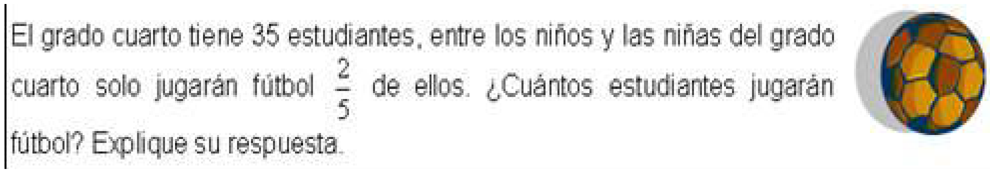
Daniela: –"*dividir dos mil entre cuatro que da quinientos y después debe cambiar el billete y darle los quinientos pesos que le corresponden*".

De esta manera, al realizar la equivalencia de $\frac{1}{4}$ de 2.000 a 500, evidencian el concepto que Duval (1998) define como tratamiento, el cual consiste en utilizar las posibilidades de transformación propias a cada registro, en este caso, el numérico.

Ante esta situación, se puede demostrar, que los estudiantes tienen en cuenta que el operador un cuarto, en este caso, se le está aplicando a la magnitud, que es dos mil pesos y no al billete. Donde el objetivo es hallar la cuarta parte a la magnitud o número del billete más no al billete como objeto.

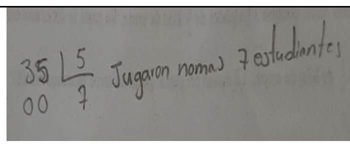
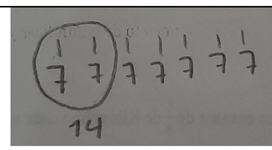
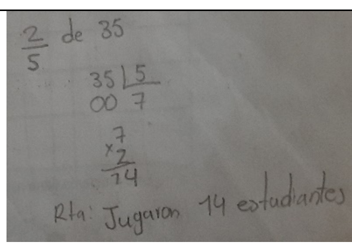
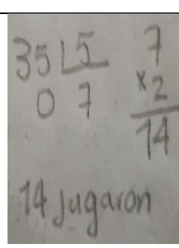
Aunque en el lenguaje usual parece que los operadores fraccionarios se aplicaran a los objetos mismos, se debe tener presente, que estos se aplican sólo a las diferentes magnitudes que empleamos en las diversas situaciones que manejamos a diario. Las otras dos situaciones de esta actividad se resolvieron sin hacer uso de material concreto, pero son situaciones en las cuales los estudiantes se ven involucrados en la vida diaria, además podían hacer uso de representaciones gráficas. Estas situaciones fueron planteadas de tal manera que el resultado final fuera un número entero, dado el grado de escolaridad de los mismos. Observando los resultados anteriores, se evidencia que la mayoría de los estudiantes saben que un medio, indica dividir entre dos una cierta cantidad, un tercio entre tres, un cuarto en cuatro, y así sucesivamente, pero algunos se les dificultan, cuando el numerador es un número diferente de uno.

Figura 20. Punto 3 de la Actividad, Fracción como operador.


El grado cuarto tiene 35 estudiantes, entre los niños y las niñas del grado cuarto solo jugarán fútbol $\frac{2}{5}$ de ellos. ¿Cuántos estudiantes jugarán fútbol? Explique su respuesta.

Fuente. Elaboración propia (2017)

Tabla 14. Respuestas de la Actividad, Fracción como operador.

Respuesta de los estudiantes	Posterior a la corrección	Descripción.
 Laura (2017)		Debe recordar el concepto para llegar a la respuesta, puesto que toma el 7 como respuesta, en otras palabras, no tiene claro el concepto de fracción como parte de una magnitud.
 Daniela (2017)	No Participo	Identifica y representa el concepto de fracción, mediante un registro numérico, realizando diferentes trasformaciones propias de dicho registro. Por ejemplo, 2/5 de 35 a 14.
	No participo.	Identifica y representa el concepto de fracción, mediante un registro numérico, realizando

David. (2017)		diferentes trasformaciones propias de dicho registro.

Fuente: Autor del proyecto

Para el momento de la corrección, se le pregunto a (Laura, octubre del 2017), su opinión.

Laura: *"jugarán no más 7 estudiante. Yo cogí 35 que son los estudiantes y lo dividí entre 5 que es el denominador de la fracción y me dio 7"*.

Docente: – *¿Por qué divide entre cinco?*

Laura: –"*Porque el denominador de la fracción es 5 y esto significa que se divide entre 5 la unidad de la fracción, o sea 35*"

Docente: –*Bien, y entonces ¿qué se hace con el numerador de la fracción?*

Laura: –*"No sé cómo hacerlo"*

Docente: –*Pero recuerda ¿qué indica el numerador?*

Laura: –"*Sí, es la parte que tomo de la unidad*"

Docente: –*Correcto, pero ahora, ¿qué entiende con la división que hizo?*

Laura: –"*¿Qué tengo 5 grupitos de 7 estudiantes?"*-responde con duda.

Docente: – *Exactamente, eso es correcto. Entonces, con lo que me acaba de decir y lo que entiende acerca del numerador, ¿qué debe hacer?*

Laura: –*"¿tomo dos grupos de 7 estudiantes?"* -responde con duda.

Docente: –*Eso está bien, y ¿cuánto le daría?*

Laura: –"*me da 14 porque 7 más 7 da 14*"

Docente: –*Muy bien, y ¿cómo quedaría entonces la respuesta*?

Laura: –"*Jugarán 14 estudiantes*".

Docente: – *"¿Cuántos grupos se deben hacer y de a cuántos estudiantes?"*

Laura: –*"como se divide entre 5 se deben hacer 5 grupitos de 7 estudiantes."*

Docente: – *"Bien, ahora mire la representación que hizo*".

Laura: – *"Ahí sí profe, me quedó mal, porque lo hice, pero, al contrario."*

Docente: – *"¿Cómo así que al contrario?"*

Laura: – *"Sí, es que yo hice 7 grupos de 5 estudiantes y era 5 grupos de 7 estudiantes."*

Docente: – *"Muy bien, y entonces ¿cómo lo debes corregir?"*

Laura: – *"Ah, pues entonces debo quitar dos grupos para que así me quede bien"*.

Este tipo de errores que presenta Laura en su intervención, afirma De León (1998), se presentan debido a que identifican la fracción como un solo número, de allí que también se tengan dificultades para entender la equivalencia entre ellas, pues una fracción es una pareja de números. Laura para el desarrollo del punto toma 35 (el total de estudiantes) y lo divide entre 5 dándole 7, de ahí responde, siete son los estudiantes que jugarán fútbol. Además, la respuesta escrita que dio evidencia su confusión al hacer la representación gráfica, ya que no hizo 5 grupos de 7 en vez de 7 grupos de 5. Por este motivo el docente le realizó, para guiarla. Según De Velde (2014), sin 'buenas preguntas' no habrá un proceso genuino de aprendizaje:

Además, mediante la práctica, se identifica que los operadores fraccionarios, son una operación matemática doble, en la cual el numerador multiplica y el denominador divide. Según de León (2011), aplicar el operador a/b sobre una situación requiere una acción de multiplicar por a una magnitud y luego dividirla por b, o a la inversa.

Por otro lado, en la solución de problemas, donde se tiene la fracción como operador, como cociente y como parte todo, los estudiantes no lograron evidenciar que esta era más allá de un cociente y cuando se hacían las operaciones matemáticas correspondientes presentaban dificultades a tal punto que en ocasiones la respuesta daba mayor que la unidad que se tomaba como referencia. Cabe resaltar que el proceso de hallar la operación de la fracción de un número es el mismo si se multiplica y divide o viceversa, es decir, se evidencia un algoritmo teniendo como base la fracción como cociente. Este análisis se evidencia en las preguntas 10, 11 y 12 de la actividad diagnóstica:

Figura 21. Pregunta 10, 11 y 12 del momento de Ubicación

10. Calcula

a) Los $\frac{3}{4}$ de 100 euros $\longrightarrow$ ....

b) Los $\frac{3}{5}$ de 400 litros de agua $\longrightarrow$ ....

c) Los $\frac{7}{10}$ de 1 000 metros $\longrightarrow$ ....

¿Qué estrategia uso para poder resolver los tres ejercicios anteriores?

11. De una cuerda de cien metros, Manuel cogió $\frac{2}{5}$, y Sergio, $\frac{3}{10}$ ¿Qué longitud de cuerda cogió cada uno?

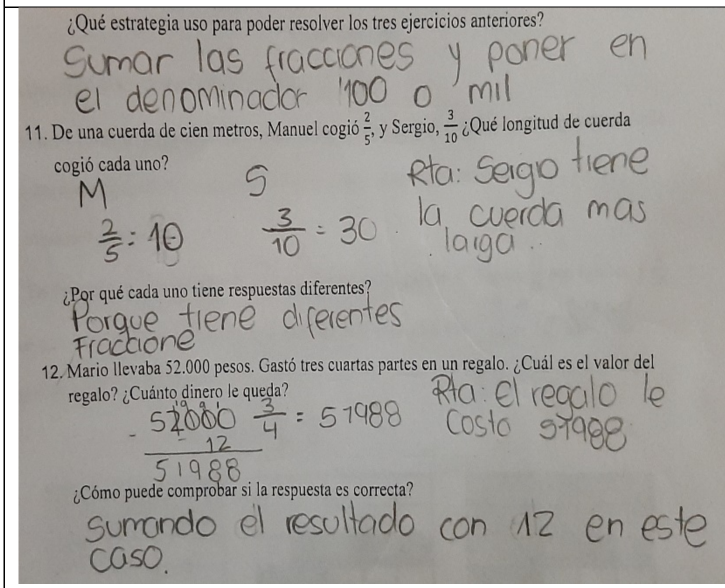
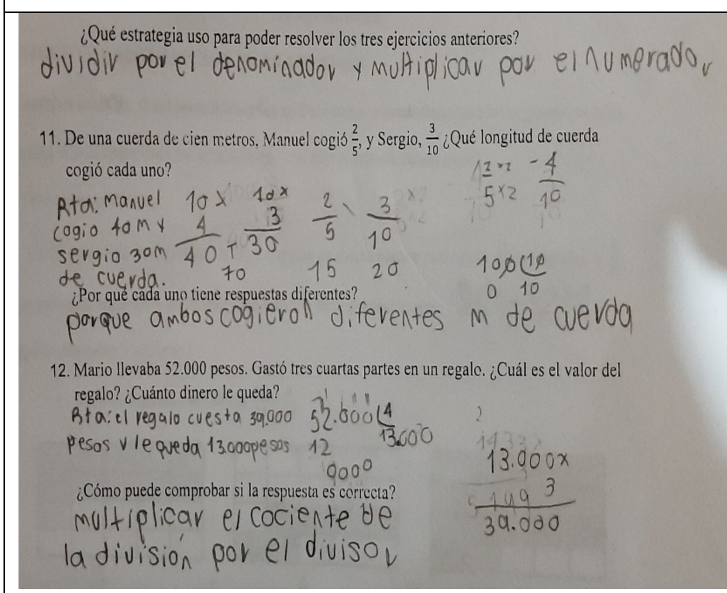
¿Por qué cada uno tiene respuestas diferentes?

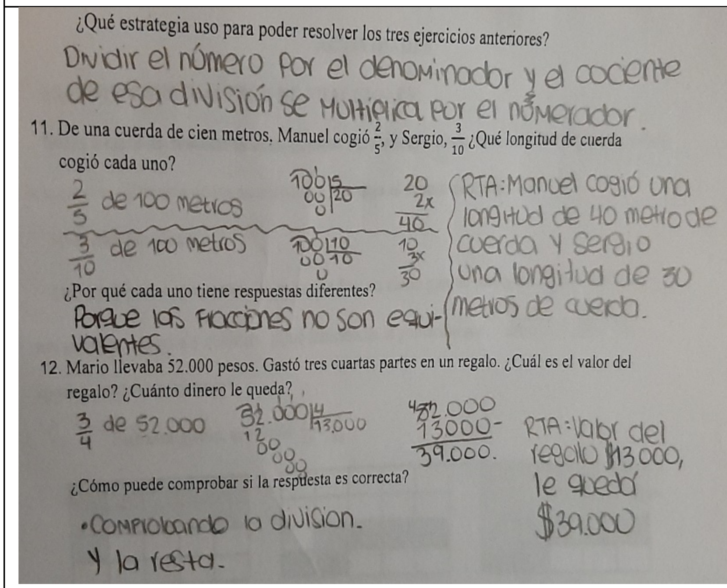
12. Mario llevaba 52.000 pesos. Gastó tres cuartas partes en un regalo. ¿Cuál es el valor del regalo? ¿Cuánto dinero le queda?

¿Cómo puede comprobar si la respuesta es correcta?

Fuente. Elaboración propia (2017)

Tabla 15. Respuestas de las Preguntas 10, 11 y 12 del momento de Ubicación

Respuesta de los estudiantes	Descripción.
 ¿Qué estrategia uso para poder resolver los tres ejercicios anteriores? Sumar las fracciones y poner en el denominador 100 o mil 11. De una cuerda de cien metros, Manuel cogió $\frac{2}{5}$, y Sergio, $\frac{3}{10}$ ¿Qué longitud de cuerda cogió cada uno? M $\frac{2}{5} : 10$ S $\frac{3}{10} = 30$ Rta: Segio tiene la cuerda mas laiga. ¿Por qué cada uno tiene respuestas diferentes? Porque tiene diferentes Fraccione 12. Mario llevaba 52.000 pesos. Gastó tres cuartas partes en un regalo. ¿Cuál es el valor del regalo? ¿Cuánto dinero le queda? 52000 $\frac{3}{4}$ = 51988 Rta: el regalo le costo 51988 52000 - 12 = 51988 ¿Cómo puede comprobar si la respuesta es correcta? sumando el resultado con 12 en este caso. Laura (2017)	No reconoce el algoritmo de fracción como operador, puesto que interpreta las magnitudes del punto 10 como fracciones, de esta forma realiza una suma de las mismas. Por consiguiente, se le dificulta responder las preguntas 11 y 12.
 ¿Qué estrategia uso para poder resolver los tres ejercicios anteriores? dividir por el denominador y multiplicar por el numerador 11. De una cuerda de cien metros, Manuel cogió $\frac{2}{5}$, y Sergio, $\frac{3}{10}$ ¿Qué longitud de cuerda cogió cada uno? Rta: Manuel cogio 40 m y sergio 30m de cuerda. ¿Por qué cada uno tiene respuestas diferentes? porque ambos cogieron diferentes m de cuerda 12. Mario llevaba 52.000 pesos. Gastó tres cuartas partes en un regalo. ¿Cuál es el valor del regalo? ¿Cuánto dinero le queda? Rta: el regalo cuesta 39.000 pesos y le queda 13.000 pesos 52.000 ÷ 4 = 13.000 13.000 x 3 = 39.000 ¿Cómo puede comprobar si la respuesta es correcta? multiplicar el cociente de la división por el divisor David (2017)	Planea el algoritmo del concepto de fracción como operador en el punto 10 y lo aplica correctamente en las preguntas posteriores. Usando la representación numérica realiza las particiones de una magnitud y luego toma las necesarias para llegar a la respuesta. Igualmente, realiza conversiones del registro del lenguaje común al numérico, paralelamente, identifica el concepto de fracción como

	operador, es el caso de 2/5 de 100 es 40.
 ¿Qué estrategia uso para poder resolver los tres ejercicios anteriores? Dividir el número por el denominador y el cociente de esa división se multiplica por el numerador. 11. De una cuerda de cien metros. Manuel cogió $\frac{2}{5}$, y Sergio, $\frac{3}{10}$ ¿Qué longitud de cuerda cogió cada uno? $\frac{2}{5}$ de 100 metros 100 | 5 00 20 0 20 2x 40 $\frac{3}{10}$ de 100 metros 100 | 10 00 10 0 10 3x 30 RTA: Manuel cogió una longitud de 40 metro de cuerda y Sergio una longitud de 30 metros de cuerda. ¿Por qué cada uno tiene respuestas diferentes? Porque las fracciones no son equivalentes. 12. Mario llevaba 52.000 pesos. Gastó tres cuartas partes en un regalo. ¿Cuál es el valor del regalo? ¿Cuánto dinero le queda? $\frac{3}{4}$ de 52.000 52.000 | 4 13000 12 00 00 52.000 13000 - 39.000. RTA: valor del regalo $13000, le quedó $39.000 ¿Cómo puede comprobar si la respuesta es correcta? • Comprobando la division. y la resta. Daniela (2017)	Planea el algoritmo del concepto de fracción como operador en el punto 10 y lo aplica correctamente en las preguntas posteriores. Usando la representación numérica realiza las particiones de una magnitud y luego tomas las necesarias para llegar a la respuesta. Así mismo realiza conversiones desde el registro del lenguaje común al numérico donde efectúa tratamientos en este mismo registro

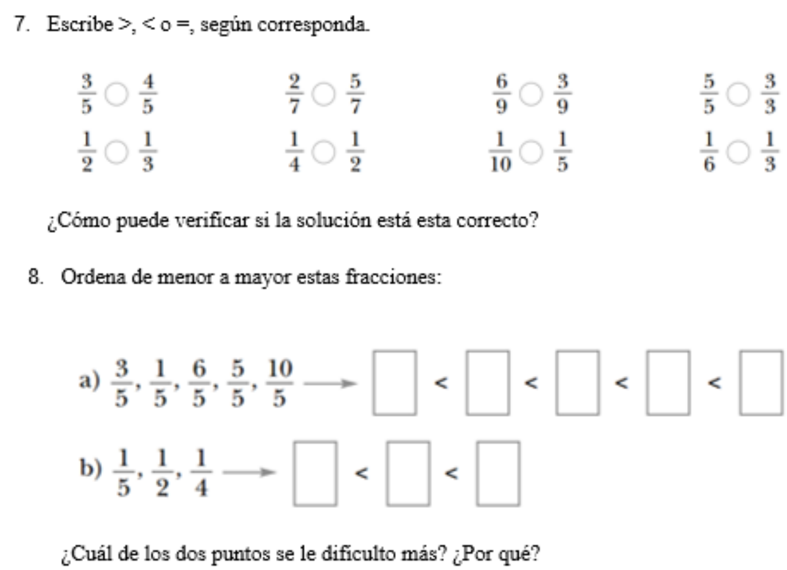
Fuente: Autor del proyecto

Las dificultades que tiene Laura para aplicar la fracción como operador en los problemas, se presenta comúnmente. Según De León (2011), el estudiante no se da cuenta que el mismo todo se puede dividir en diferente número de partes iguales y que puede elegir el número de partes. Adiciona también que este tipo de situaciones se pueden ocasionar por la confusión que generan las diversas interpretaciones de las fracciones o por el desconocimiento de este concepto, ya que en este grado de escolaridad solo se conocen los números naturales.

Por otro lado, David y Laura realizan un plan y lo ponen en práctica, para abordar las situaciones del punto 11 y 11 y encontrar la solución correcta. Según Polya, (965), para resolver un problema, uno hace una pausa, reflexiona y hasta puede ser que ejecute pasos originales que no había ensayado antes para dar la respuesta.

Siguiendo con los puntos 7 y 8 en el momento de ubicación, estos buscaban identificar, en los estudiantes, el orden que ellos asignan al comparar números fraccionarios.

Figura 22. Punto 7 y 8 del momento de ubicación.



7. Escribe >, < o =, según corresponda.

$\frac{3}{5} \bigcirc \frac{4}{5}$ $\quad \frac{2}{7} \bigcirc \frac{5}{7}$ $\quad \frac{6}{9} \bigcirc \frac{3}{9}$ $\quad \frac{5}{5} \bigcirc \frac{3}{3}$

$\frac{1}{2} \bigcirc \frac{1}{3}$ $\quad \frac{1}{4} \bigcirc \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{10} \bigcirc \frac{1}{5}$ $\quad \frac{1}{6} \bigcirc \frac{1}{3}$

¿Cómo puede verificar si la solución está esta correcto?

8. Ordena de menor a mayor estas fracciones:

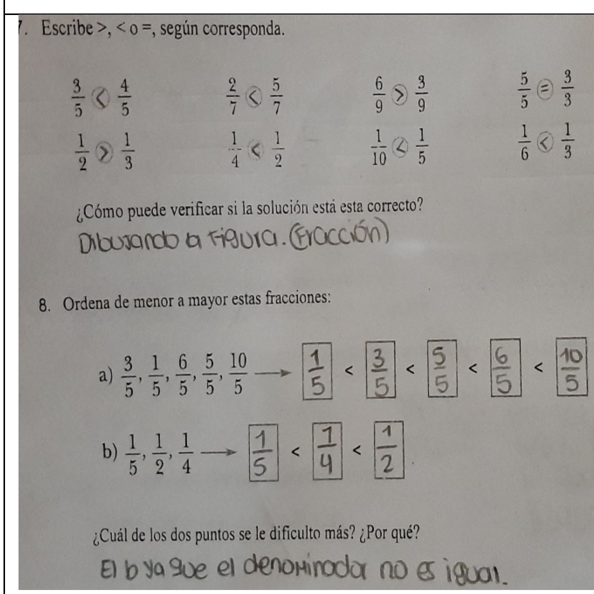
a) $\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{6}{5}, \frac{5}{5}, \frac{10}{5} \longrightarrow \square < \square < \square < \square < \square$

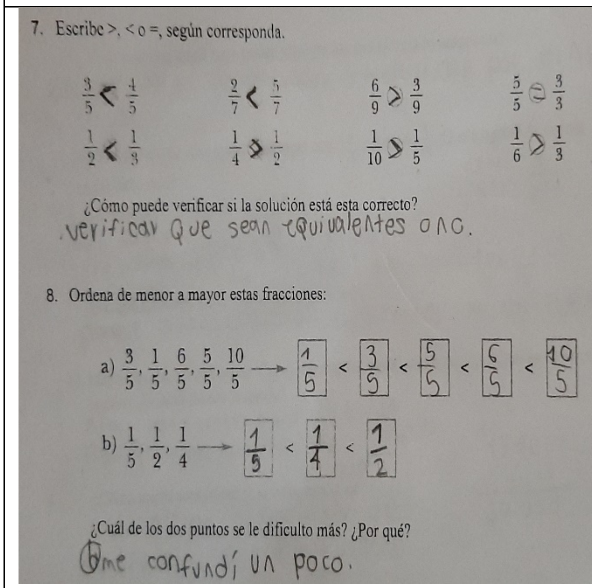
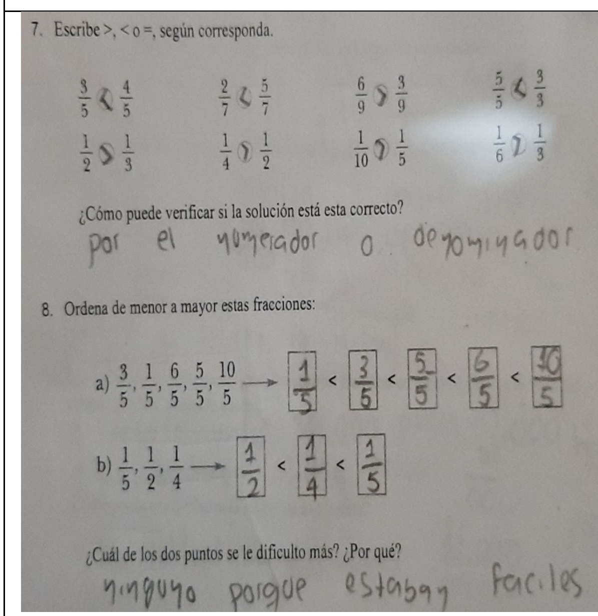
b) $\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \longrightarrow \square < \square < \square$

¿Cuál de los dos puntos se le dificulto más? ¿Por qué?

Fuente. Elaboración propia (2017)

Tabla 16. Respuestas de los Puntos 7 y 8 del momento de ubicación.

Respuesta de los estudiantes.	Descripción.
	Demuestra habilidad para comparar fracciones de diferentes tipos, usando algún tipo de registro gráfico, el cual nombra en la pregunta del punto 7, pero no amplia esta información.

Daniela. (2017)	
 David. (2017)	Se le dificulta comparar fracciones con distinto denominador, dado que en el punto 7 respondió de manera incorrecta los ejercicios con esta característica, 1/4 > 1/2, además, lo hace explícito al responder la pregunta 8b.
 Laura. (2017)	Se le dificulta comparar fracciones cuando estas representan la unidad completa, o poseen diferente denominador, porque en el punto 7 soluciona de manera errada ejercicios como; 5/5 es menor que 3/3 o 1/10 es mayor que 1/5.

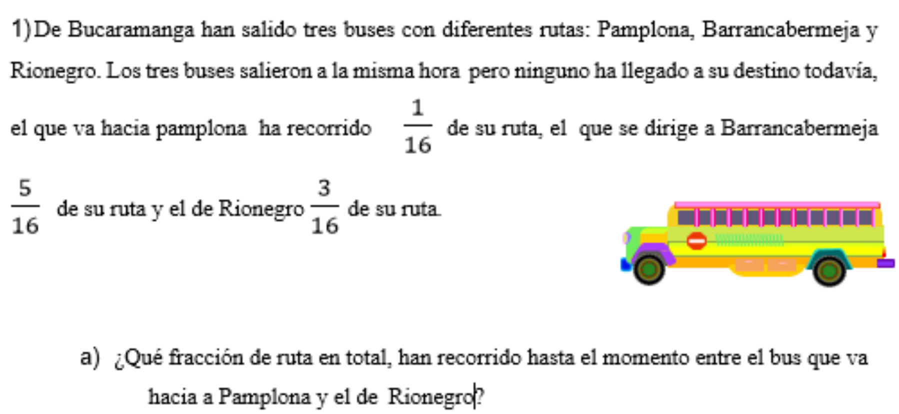
Fuente: Autor del proyecto

Se evidenció que en Laura y David presentaron dificultades similares, puesto que, al comparar las fracciones, las tomaban como una relación de términos donde comparaban los numeradores y los denominadores a la par y se determinaba la fracción mayor, de acuerdo a cuál era el mayor numerador o denominador. Según León (2011), los estudiantes extrapolan los conocimientos de cálculo (reglas y algoritmos) de los números naturales a las fracciones, generándose las dificultades mencionadas.

En el caso de Daniela, ella presenta la forma correcta como debería abordarse este problema. Según Tamayo (2014), se puede dar que el estudiante identifique y relacione las variables para llegar a la solución justificándolas o no dichas relaciones. De esta forma, Daniela mediante los registros gráficos, compara las fracciones, aunque no deje evidencia de este proceso.

Las situaciones planteadas tuvieron en cuenta las características de la formulación del enunciado, debido a que la mayoría de las dificultades que se han encontrado en la resolución de problemas tienen que ver con la lectura y comprensión del enunciado, selección y organización de los datos, y la traducción de estas organizaciones en términos matemáticos. De esta manera, la primera situación se planteó, usando una estructura aditiva de combinación, donde Ordoñez (2014) hace referencia aquellas relaciones que existe en un instante de tiempo entre un conjunto y dos subconjuntos disjuntos del mismo.

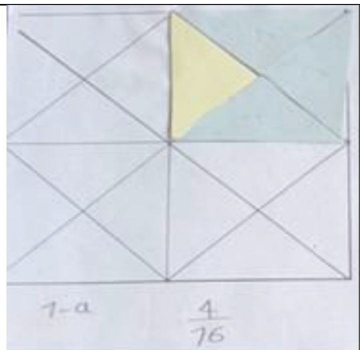
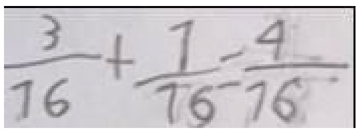
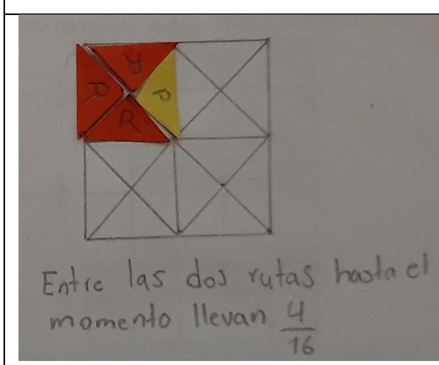
Figura 23. Problemas con fraccionarios


1) De Bucaramanga han salido tres buses con diferentes rutas: Pamplona, Barrancabermeja y Rionegro. Los tres buses salieron a la misma hora pero ninguno ha llegado a su destino todavía, el que va hacia pamplona ha recorrido $\frac{1}{16}$ de su ruta, el que se dirige a Barrancabermeja $\frac{5}{16}$ de su ruta y el de Rionegro $\frac{3}{16}$ de su ruta.

a) ¿Qué fracción de ruta en total, han recorrido hasta el momento entre el bus que va hacia a Pamplona y el de Rionegro?

Fuente. Elaboración propia (2017)

Tabla 17. Respuestas a la actividad, Problemas con fraccionarios

Respuesta de los estudiantes	Descripción.
  David (2017)	Interpreta la situación mediante un registro gráfico de los elementos, para luego plantear una conversión al registro numérico, reconociendo la suma como la operación que da solución al problema. Además, deja explicito este hecho.
Laura no responde	Laura se le dificultó abordar la situación, no tenía claro que debía hacer y manifestó, que no entendía el problema.
 Daniela (2017)	Interpreta la situación mediante un registro grafico de los elementos, para luego plantear una conversión al registro numérico. Además, se evidencia una adición implícita al momento de responder 4/16.

Fuente: Autor del proyecto

En esta actividad, puede observarse que algunos estudiantes, al representar los datos de la situación, lo hacían de tal manera que tomaban un color diferente para representar cada caso y otros tomaban triángulos de colores diversos, poniendo encima de cada uno especificaban que cantidad representaba, es decir, escribían la letra R para indicar que representaban la ruta de Rionegro, P para la ruta de Pamplona y la B para la ruta de Barrancabermeja. Otros tan sólo tomaban la cantidad de triángulos que necesitaban, de diferentes colores, y realizaban la representación. Se identificó que a Laura se le dificultaba este tipo de problemas, ya que no participaban, dejaba las preguntas en blanco o respondían que no sabían, es posible que, para ella, eran nuevos este tipo de problemas.

Según Kontorovich y Koichu (2009), una tarea de planteamiento de un problema abierto puede no requerir la ejecución de un procedimiento conocido, sino una exploración de la situación a la que se referirá el problema y su solución, de este modo, para ayudar a Laura con la exploración y encontrar una posible solución, se le sugirió que trabajar con David. Además, como dice Revelo (2014), los estudiantes comprenden mejor cuando los conceptos son explicados por sus compañeros. Teniendo en cuenta esta unión, los análisis que se presentarán a continuación:

Por ejemplo, el grupo de David y Laura para tomar los datos de la parte a) del problema usaron un triángulo de color amarillo para representar la cantidad 1/16 que es la ruta que ha recorrido el bus que va hacia Pamplona y luego tomaron tres triángulos verdes como la cantidad 3/16 que es la de Rionegro y las pegaron en uno de los cuadrados. Debajo del cuadrado donde hicieron la representación, escribieron, la fracción 4/16, además especificaron que esta es la solución del primer punto la parte a), para lo cual escriben "1−a".

En la hoja de la actividad realizaron la suma mediante un registro numérico, donde evidencian que, de manera intuitiva, reconocen la estructura aditiva de combinación, siguiendo a Ordoñez (2014), plantean los dos subconjuntos disjuntos, en este caso las rutas recorridas hasta el momento. A medida que llegaron a la respuesta se presentaron los siguientes diálogos, (David, octubre del 2017)

David: "*como preguntan por la cantidad de ruta de los buses, entonces pegamos la de Pamplona que es 1/16 y la de Rionegro que es 3/16 después los triángulos y nos da 4/16 que es la cantidad que recorren, pero es lo mismo que sumarlas*".

Docente: *–Muy bien, pero ¿cómo hizo para sumar las fracciones?*

David: –*"Como las fracciones son homogéneas entonces sumamos los numeradores y el denominador lo dejamos igual*".

Con este dialogo y la ayuda de las representaciones, utilizan el material concreto para dar la respuesta. En el caso de Daniela, ella omitió la representación numérica de la suma y paso directamente a la respuesta, "*Entre las dos rutas hasta el momento llevan 4/16",* identificando intuitivamente la estructura aditiva de combinación. Teniendo en cuenta lo mencionado por Vergnaud (1995), apropiarse del concepto de estructura aditiva, es tener la capacidad de identificar, comprender y abordar las situaciones en las que tiene aplicabilidad las operaciones de suma y resta.

Otra situación problema presentada a los estudiantes fue:

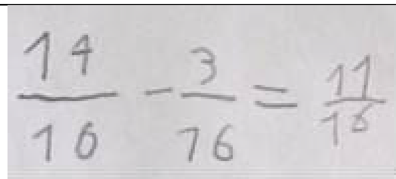
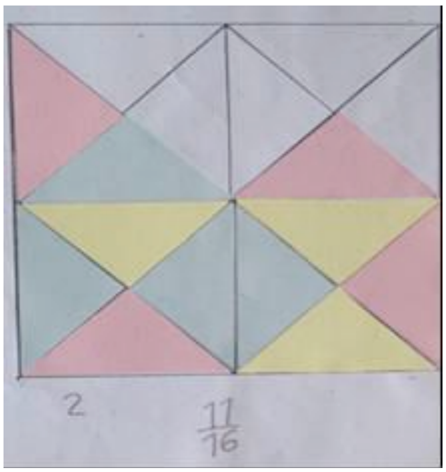
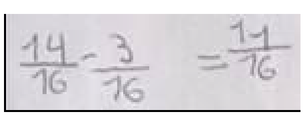
Figura 24. Problema 2

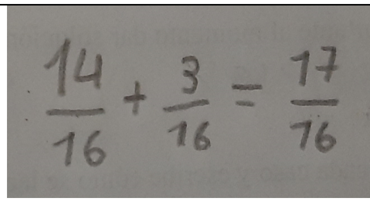
El bus que viajaba hacia Pamplona llevaba $\frac{14}{16}$ del cupo total de Pasajeros, pero en Berlín se quedaron. $\frac{3}{16}$ ¿Cuántos pasajeros llegaron al terminal de Pamplona? Explique su respuesta.

Fuente. Elaboración propia (2017)

Este tipo de situación se puede apreciar lo mencionado por Ordoñez (2014), acerca de las estructuras aditivas de cambio, las cuales implican un incremento o disminución de una cantidad inicial hasta crear otra final, en este caso se empieza con una cantidad de pasajeros y se disminuye en una parada.

Tabla 18. Respuestas al Problema 2

Respuesta de los estudiantes	Descripción.
  Daniela. (2017)	Identifica la estructura aditiva de cambio, además realiza conversiones desde el registro numérico al gráfico. Evidencia la operación que aplicó para llegar a la solución.
  David. (2017)	Identifica la estructura aditiva de cambio, además realiza conversiones desde el registro grafico al numérico. Evidencia la operación que aplicó para llegar a la solución.

 Laura. (2017)	Aplica un procedimiento mecánico, suponiendo que todos los problemas se resuelven aplicando la misma operación. Incluso, escoge el registro numérico para su representación, omitiendo la representación gráfica.

Fuente: Autor del proyecto

Según Hurtado (2012), Laura presenta dificultades en la interpretación de textos que involucran las fracciones y en la solución de problemas que requieren de los conocimientos básicos de la fracción, debido a que sus experiencias y conocimientos sobre las fracciones han sido adquiridas a través de la aplicación mecánica de algoritmos, sin la construcción de significados.

Por otro lado, David representó los datos pegando el número de triángulos que representaban las cantidades, pero como la situación indica una disminución, entonces no se podían dejar todos los triángulos pegados como respuesta al problema, por tanto, doblaba una de las puntas del triángulo. En cambio, Daniela tan sólo pegaba la cantidad de triángulos que representaban la respuesta.

En el desarrollo de la situación se presentaron algunos diálogos con (Daniela, octubre del 2017):

Daniela: *–"es que el bus llevaba 14/16 pasajeros, pero después se bajaron 3/16 de los pasajeros entonces hice una resta porque ellos ya no estaban*".

Docente: *–Bien, pero ¿qué quiere decir con ellos ya no estaban?*

Daniela: –"*Es que ellos no llegaron al terminal*"

Docente: *–Bien, y ¿cómo realizó la operación con estas fracciones?*

Daniela: *–"Como las fracciones son homogéneas entonces resté los numeradores y el denominador lo dejé igual, entonces me dio 11/16 que son los pasajeros que llegaron al terminal".*

Docente: *–Y ¿cómo hizo para hacer la representación?*

Daniela: –*"Con el resultado de la resta cogí once triángulos y los pegué y escribí la fracción que me dio"*

Docente: – *¿Por qué no hizo primero la representación y después la resta?*

Daniela: –*"Es que no sabía cómo hacer para representar los pasajeros que se bajaron*"

Con esta respuesta se puede interpretar que Daniela, aunque no sabía cómo representar gráficamente los datos iniciales para llegar a la respuesta, comprendió la situación y pudo emplear la definición de una estructura aditiva de cambio, mediante la resta de fracciones homogéneas para dar una respuesta acertada. Según Ordoñez (2014), las estructuras aditivas no implican adición en todos los casos, dependiendo de la variable, en ocasiones se debe emplear una resta.

Otro ejemplo del uso de material concreto en esta situación es el procedimiento que realizó David para resolver el problema. El empezó a leer el texto e iba contando los triángulos, cuenta catorce triángulos amarillos con los cuales representa los 14/16 pasajeros que lleva el bus y los pegan en uno de los cuadrados, al seguir leyendo el texto, nota que tienen que quitar tres triángulos de los que habían pegado, ya que 3/16 de los pasajeros se quedaron, entonces pregunta (David, octubre del 2017):

David: – *"¿profe puedo dejar los triángulos doblados para decir que estos se quedaron?, es que se rompe la hoja si los quito*".

Docente: –*Sí, puede dejarlos doblados*.

David: "*llegaron 11/16 pasajeros. Es lo mismo que restar las fracciones porque cuando resto los numeradores, catorce y tres, me da once y el denominador lo dejo igual porque son fracciones homogéneas*".

Así, con este razonamiento es evidente que ella asocio de manera intuitiva la estructura aditiva de cambio con la operación resta mediante palabra "quedar". De cierta forma, está realizando una conversión desde el registro del lenguaje usual al registro gráfico y por último numérico. Es importante resaltar este tipo de relaciones ya que, según Sasaki (1993), indica que muchos alumnos pueden efectuar cálculos operatorios correctamente y aplicar fórmulas, pero no pueden usar este conocimiento para resolver problemas. Además, se debe tener en cuenta que el contexto de los problemas es importante, y como lo afirma el Ministerio de Educación Nacional (1998, p. 55), “el contexto del problema no sólo da ideas para plantear las operaciones apropiadas sino para los números que se usan en estas operaciones matemáticas”.

Al terminar el análisis del primer momento, es posible identificar ciertas dificultades en los estudiantes, las cuales son:

- Hay un uso de procedimientos mecánicos con poco significado en sus algoritmos, porque plantean las mismas soluciones de problemas previamente corregidos en situaciones que son diferentes.
- Poco reconocen las estructuras aditivas de cambio y combinación, porque aplicaban los mismos procedimientos de una en la otra, además, se les dificulta representarlas en sus distintos registros.
- Se les dificulta, en ocasiones, identificar conversiones entre los distintos registros posibles del concepto de fracción, porque falta relacionar algunos registros gráficos con los simbólicos o viceversa.

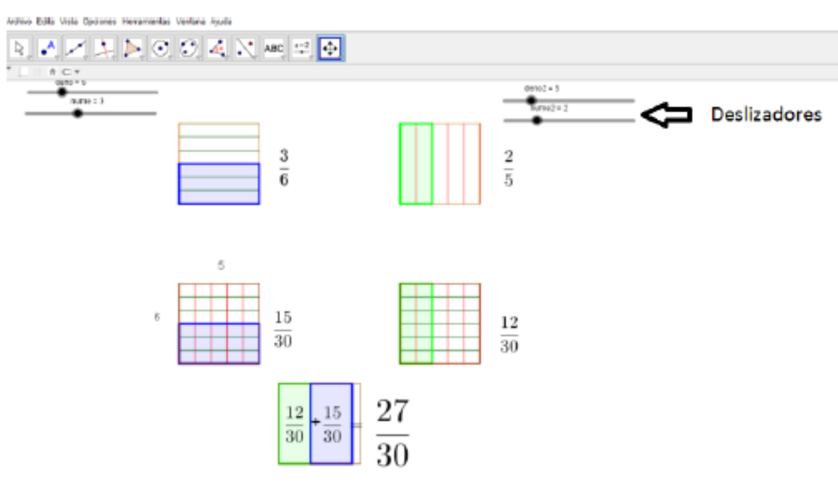
Estas dificultades se observaron con mayor recurrencia en Laura, además, según lo niveles de resolución de Tamayo (2014), estaría ubicada en el nivel 1, y debido a que para estar en el nivel 2, según los descriptores mencionadas en la categoría de análisis, debe reconocer las estructuras aditivas.

Por otro lado, Daniela y David, poseen ciertas habilidades como: identificar los números fraccionarios y los aplican en la solución de un problema, también, representan las estructuras aditivas entre fracciones. Es por esto que estarían ubicados en el nivel 3, más no en el 4, debido a que no dominan los descriptores, en el caso de David, identificar los números fraccionarios en una situación problema y relacionarlos con sus representaciones para encontrar su solución; también, en ocasiones, presentó dificulta en la representación del registro numérico. Por su lado, Daniela, reconoce la estructura aditiva entre fracciones y la relaciona con su representación y, aunque en los análisis ella abordo correctamente los problemas, se identificó su poco dominio con la representación del registro grafico para estos casos.

7.1.2 Momento de Desubicación

Desde el punto de vista educativo, las fracciones pueden adoptar diversos estilos o formas de enseñanza, de esta manera, la actividad trabajada con el software, compuesta por siete puntos, donde se analizaron todos los puntos pero se describen cinco[12], fue seleccionada para facilitarle a los estudiantes entender y reforzar los diversos significados de la fracción. Esta ayuda se enfocó en brindar herramientas desde los registros numéricos y gráficos, además, mostrando la conversión entre estos dos, para que las aplicarán en la solución de problemas. Teniendo en cuenta lo mencionado por Neira (2011), lo que resulta más difícil y más desconcertante para los alumnos es pasar de una representación de un registro a una representación de otro, donde se hace evidente la complejidad, de la articulación entre ellos y el nivel de habilidad que deben tener para hacerlo.

Figura 25. Software Geogebra



Fuente. Elaboración propia (2017)

[12] Las actividades iniciales se crearon con el fin de facilitar la interacción del entorno dinámico con el estudiante, de esta forma no se describieron algunas de ellas, debido a que no aportaban a profundidad con el objeto matemático.

Debido a que para algunos estudiantes el uso de esta herramienta era nuevo, se plantearon algunas preguntas para guiarlos en la simulación de las actividades:

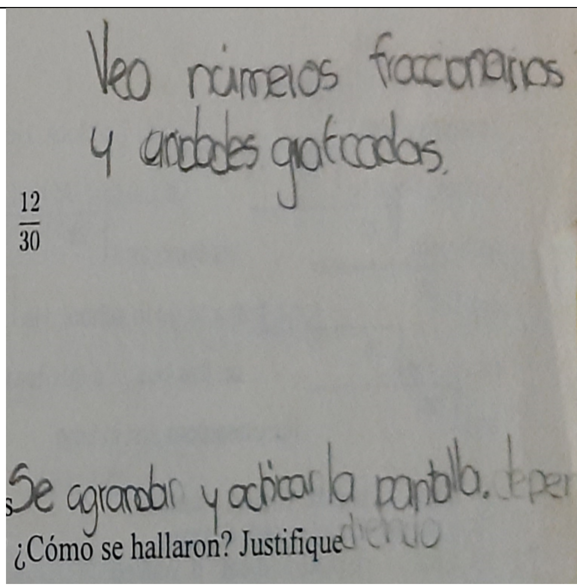
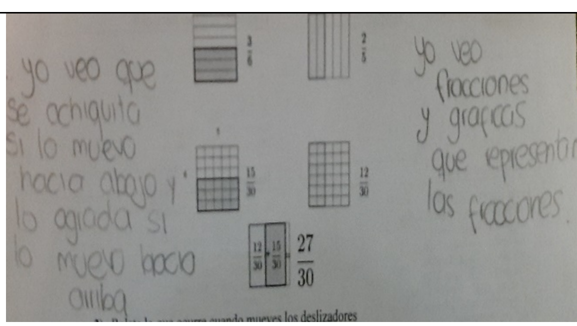
Figura 26. Preguntas 1 y 2. Momento de desubicación

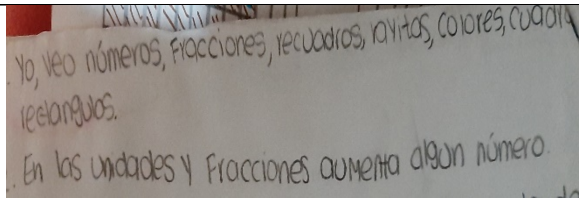
1) Ingrese al archivo *actividad 1* que se encuentra ubicada en el escritorio. Describa el entorno y los elementos que en él se encuentran

2) Relate lo que ocurre cuando mueves los deslizadores

Fuente. Elaboración propia (2017)

Tabla 19. Respuestas a las Preguntas 1 y 2 del momento de desubicación

Respuestas de las Preguntas	Descripción
 David (2017)	Identifica los registros numéricos y gráfico del concepto de fracción, debido a su respuesta. Al mover el deslizador, responde que el tamaño de la pantalla se altera.
	Identifica los registros numérico y gráfico del concepto de fracción, resalta la relación entre estos dos al sugerir, "veo fracciones y graficas que representan las fracciones", además, responde que al

Laura (2017)	mover el deslizador de ciertas formas se altera los números.
 Daniela (2017)	Identifica los registros numéricos y grafico del concepto de fracción, además, responde que al mover el deslizador de ciertas formas se altera las fracciones.

Fuente: Autor del proyecto

Realizar este tipo de introducción a estudiantes que no han usado una herramienta tecnológica, afianza su dominio. Según Aguilar (2015), los estudiantes proceden a explorar el entorno, aunque muestran cierto temor al creer que pueden malograrlo.

Duval (1993) afirma que la adquisición conceptual de un objeto matemático se basa en el uso de más de un registro de representación semiótica. Por eso, el escenario planteado en el software, mostraba de manera simultánea los distintos tratamientos que se realizaban en el registro gráfico y el numérico, de esta forma el estudiante mediante la interacción con el entorno identificaba el concepto de fracciones, además, de ciertas condiciones para dar solución a una suma o resta. De esta forma, la actividad propuesta mostraría la diferencia entre las estructuras aditivas entre diferentes números, dado que como expresa González (2015), los estudiantes en ocasiones extrapolación del cálculo de los naturales a las fracciones, sumando o restando indiscriminadamente numerador y denominadores.

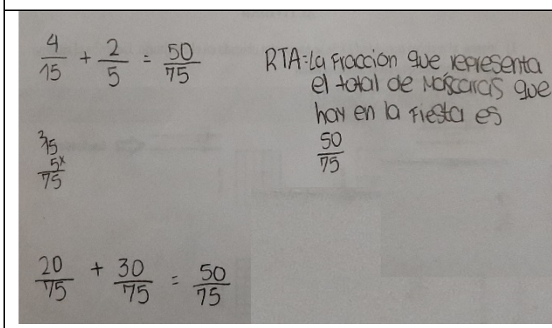
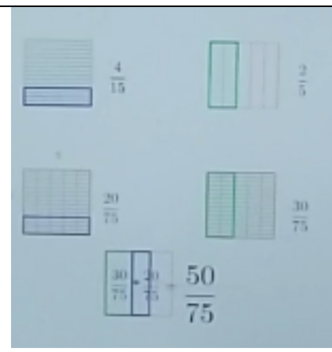
Se planteó un problema siguiendo una estructura aditiva de combinación, donde se dan dos subconjuntos disjuntos, máscaras de animales y de monstruos, y se pide un total entre los dos.

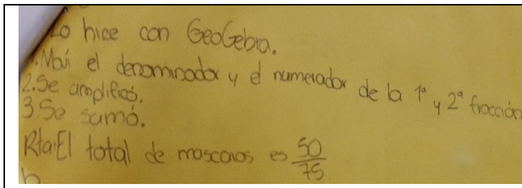
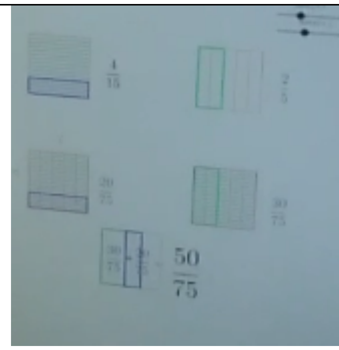
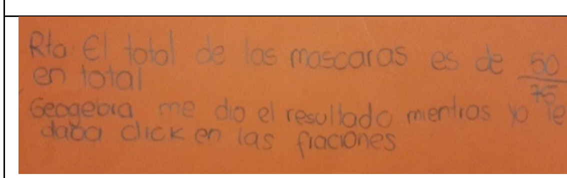
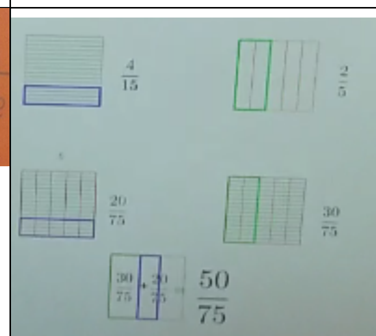
Figura 27. Actividad 1 del Momento de desubicación.

En una fiesta de disfraces, $\frac{4}{15}$ de las máscaras que hay son de animales y $\frac{2}{5}$ son de monstruos. ¿Qué fracción representa el total de máscaras de animales y de monstruos que hay en la fiesta?

Fuente. Elaboración propia (2017)

Tabla 20. Respuestas a la Actividad 1 del Momento de desubicación.

Respuestas de los estudiantes	GeoGebra	Descripción
 Daniela (2017)		Identifica y representa la estructura aditiva de tipo combinación para llegar a la solución, así mismo usa el software para representar los registros numérico y gráfico, interiorizando la relación entre estos, mediante la conversión que realiza el programa.

 David (2017)		Identifica el concepto de fracción mediante la estructura aditiva de combinación. Además, describe el procedimiento que realizó en el software para llegar a la solución, usando términos propios de la matemática. “moví el denominador de la 1ª y 2ª fracción”
 Laura (2017)		Identifica el concepto de fracción mediante la estructura aditiva de combinación,

		aunque se apoya totalmente en el software, no realiza algún procedimiento escrito para verificar su respuesta.

Fuente: Autor del proyecto

Es posible afirmar que Daniela hace una conversión desde un registro del lenguaje común, a uno numérico, y posteriormente un tratamiento, a una representación del registro numérico usando la amplificación. Por otro lado, Laura describe que el software le dio la respuesta, evidenciando una inclinación por confiar en el software y no verificar los datos, algo similar a una calculadora. Según El Informe Cockcroft (1985), citado por Fraile (1997), la investigación ha demostrado que los alumnos habituados a usar la calculadora mejoran su actitud hacia la Matemática, es decir, GeoGebra posibilita, una mejor disposición al momento de abordar un problema, dado a la facilidad del cálculo de operaciones.

De igual forma David, apoya su respuesta en el cálculo que hizo GeoGebra, aunque no describe el desarrollo de la operación, propone un plan de solución, en el que, según Tamayo (2014), relaciona los datos con las variables de problema. Por ejemplo, representa los datos moviendo los deslizadores para encontrar la variable, en este caso, es la suma que arroja el software.

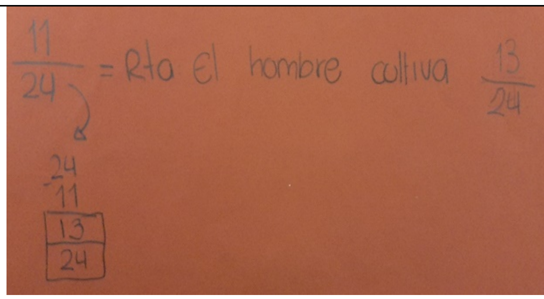
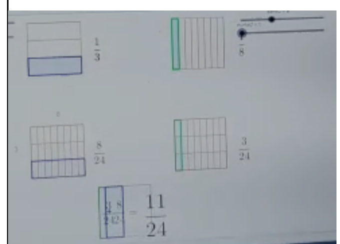
En la siguiente actividad se desarrolló un problema que seguía una estructura aditiva a dos cambios, debido a que se plantea dos variaciones, la primera donde vende una parte de su finca y la segunda cuando se alquila, según Ordoñez (2014), las variaciones expresan los cambios que se producen en función del estado con el transcurso del tiempo.

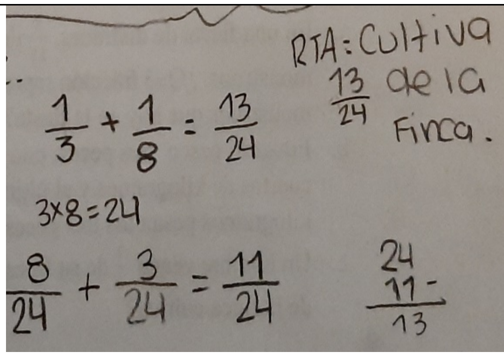
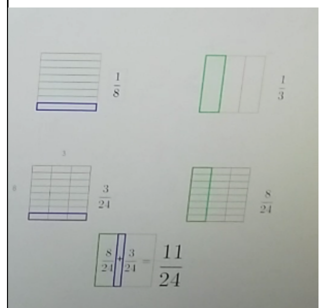
Figura 28. Punto 4 b) del momento de desubicación

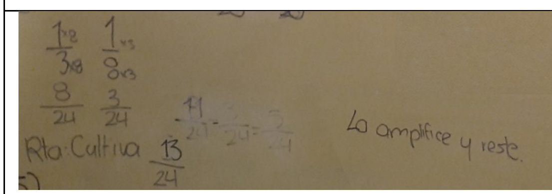
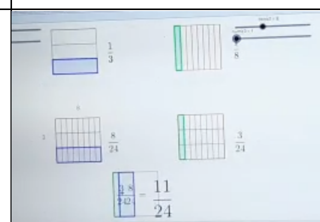
Un hombre vende $\frac{1}{3}$ de su finca, alquila $\frac{1}{8}$ y lo restante lo cultiva. ¿Qué fracción de la finca cultiva?

Fuente. Elaboración propia (2017)

Tabla 21. Respuestas al Punto 4 b) del momento de desubicación

Respuesta de los estudiantes	GeoGebra	Descripción
 Laura (2017)		La estudiante identifica el registro numérico realizando una conversión del lenguaje común al numérico. Desde una estructura aditiva de dos cambios, interpretó el concepto de fracción como parte de un todo, así mismo interactúa con el programa para realizar los cálculos escritos

 Daniela (2017)		La estudiante identifica el registro numérico realizando una conversión del lenguaje común al numérico, representado la estructura aditiva de dos cambios, en donde interpretó el concepto de fracción como parte de un todo. Aunque llego a la respuesta correcta se equivocó en relacionar la operación con su resultado, paralelamente se apoyó en el programa para determinar que el espacio vacío o en blanco de la

		unidad, determinaba la parte que le quedaba para cultivar, de ahí justifica implícitamente su resta entre 24 y 13.
 David (2017)		El estudiante identifica el registro numérico realizando una conversión del lenguaje común al numérico, representado la estructura aditiva de dos cambios, en donde interpretó el concepto de fracción como parte de un todo. Aun cuando llego a la respuesta correcta, no la

		relaciona con su procedimiento de manera explícita. Se asume que el estudiante realizó un cálculo mental apoyado en los datos que observaba en el entorno del software.

Fuente: Autor del proyecto

Observando lo escrito por Laura, y comparándolo con lo que había hecho en los problemas del momento de ubicación, se evidencia un avance, según Del Puerto y Minnaard (2002), afirman que este tipo de herramientas son valiosas, enriquecen la comprensión matemática de los alumnos y proporcionan a los maestros y alumnos el tiempo necesario para fomentar la exploración natural de estrategias en la resolución de problemas y la aplicación de procedimientos intuitivos. En este caso Laura toma el resultado, del registro grafico final, donde aparece la fracción que representa lo vendido en un color y lo alquilado de otro, asumiendo que lo que está sin color es la respuesta. Para Ruiz (2013), la primera aproximación que tienen los niños al concepto de fracción es a partir de una unidad concreta dividida en partes iguales (congruentes) de la cual toman alguna(s) parte(s), es lo que comúnmente conocemos como la interpretación parte-todo, y que Laura está teniendo en cuenta al momento de resta 24 con 11. Además, Ellerbruch y Payne (1978) sugieren introducir el concepto de fracción con una interpretación simple, resaltando que la relación parte-todo es la más natural para los niños.

Por otro lado, Daniela y David, se inclinan por homogeneizar las fracciones para poder realizar la operación, debido al registro gráfico que está en el software deben tener el mismo denominador para ser representadas en la misma unidad. Según Murillo (2014), si el maestro inicia el concepto fracción mediante la relación parte-todo, debería abordar todas las operaciones homogéneas mediante amplificación o simplificación, y no realizar algoritmos mecánicos descontextualizados, es el caso de multiplicar en diagonal. Ahora, en el caso particular de Daniela, se presenta un error, mencionado previamente por González (2014), donde por descuido o distracción, plantea una equivalencia entre la suma y la parte correspondiente al terreno para cultivar. De la misma manera, David, aunque muestra desarrollo detallado, usando el registro numérico, al final concluye la repuesta correcta sin relacionarla con los datos.

Continuando con el análisis, se identifica ciertas relaciones a las respuestas que dieron los estudiantes a las siguientes dos preguntas.

Figura 29. Puntos 5 y 6 Momento de desubicación

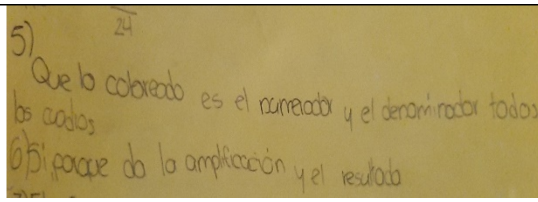
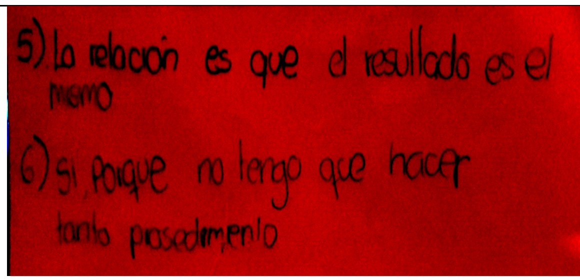
¿Qué relación observó entre los resultados de cada problema y la expresión gráfica que aparecía en el archivo de GeoGebra?

¿podría afirmar que el uso de esta herramienta facilito resolver los problemas? ¿Por qué?

Fuente. Elaboración propia (2017)

Tabla 22. Respuestas a los Puntos 5 y 6 Momento de desubicación

Respuesta de los estudiantes	Descripción
13 5. Que la fracción corresponde con la grafica 6. Si porque facilita las operaciones Daniela (2017)	Identifica la conversión entre registro y reconoce que el software le ayuda a desarrollar los cálculos, aunque no argumenta lo mencionado.

 David (2017)	Identifica la conversión entre registro y reconoce que el software le ayuda a desarrollar los cálculos. Además, describe el concepto de fracción, mostrando relaciones entre los registros numéricos y los elementos que la componen, numerador y denominador.
 Laura (2017)	Identifica la conversión entre registro numérico y gráfico, al responder, "la relación es que el resultado es el mismo" asumiendo que lo numérico es igual a lo gráfico y reconoce que el software le ayuda a desarrollar los cálculos.

Fuente: Autor del proyecto

El razonamiento de las estudiantes en la solución de las situaciones muestra cómo se puede aplicar situaciones diversas sin tener que recurrir siempre a los algoritmos, señala una forma de interpretar y aplicar los conceptos recibidos en clase; así mismo ha sido importante tener como punto de partida el trabajo del momento de ubicación, partiendo de los errores de los estudiantes, puesto que ha permitido la confrontación entre lo que se hizo y lo que se debió hacer, conllevando al análisis de las causas para superar las dificultades en un proceso de construcción de nuevos conocimientos.

Analizando el caso de Daniela, donde no argumenta su respuesta, acerca de la facilidad en las operaciones con el software, es evidente que, en algunos procesos, aunque tenía equivalencias incorrectas, concluía con la respuesta verdadera, de esta manera es claro que usó la herramienta para este proceso. La estudiante sigue teniendo dificultades para relacionar algunas variables con los datos, pero muestra un avance en la representación de las estructuras aditivas, desde los niveles de resolución se ubicaría en el nivel 4.

Caso contrario pasa con David, donde argumenta porque se le facilita el desarrollo de los problemas con el uso del GeoGebra, indicando que le proporciona la amplificación y el resultado. Del Puerto y Minnaard (2002) mencionan que este tipo de instrumentos junto con las destrezas mentales, aquellas con lápiz y papel, y la estimación, cuando son apropiadas, componen las herramientas que ayudan al alumno a resolver problemas. Después de analizar el momento de desubicación, el estudiante muestra avances con el uso de las representaciones numéricas, aunque todavía presenta dificultades para relacionar algunas variables, tomando en cuenta los niveles de resolución se ubicaría en el 4, donde se resalta su progreso en .reconocer la estructura aditiva entre fracciones y las relaciona con su representación, debido a que, en el siguiente nivel, debe aplicar la resolución de problema de manera adecuada, identificando y relacionando variables y justificando o no dichas relaciones.

Analizando el caso de Laura, ella responde que la herramienta le ahorra hacer tanto procedimiento, por lo que no argumenta su respuesta, es claro que en el momento de desubicación mostro un avance, sobre las dificultades que tenía, por ejemplo, reconocer estructuras aditivas e identificar conversiones entre los registros. Del Puerto y Minnaard (2002) identifican que este tipo de herramientas gráficas facilitan la exploración y el descubrimiento, favoreciendo una activa aproximación al aprendizaje. Además, en los problemas analizados, Laura llegó a la respuesta correcta, es por esto que estaría ubicada en el nivel 3, donde se resalta una avance en la identificación de los números fraccionarios y su aplicación para encontrar una solución, más no en el 4, porque no es claro que identifique ciertas relaciones entre las variables de los problemas, debido a sus cortos procesos en el desarrollo.

A nivel general se evidencia en los estudiantes que han superado las siguientes dificultades

- Exponen los números presentes en el problema.
- Registran los números fraccionarios mencionados en el problema.
- Representan los números fraccionarios mencionados en el problema.
- Reconocen la estructura aditiva que indica el problema.

- Identifican el concepto de fracción como operador.
- Identifican los números fraccionarios y los aplica en la solución de un problema.
- Representan la estructura aditiva entre fracciones.
- Reconocen el concepto de fracción como operador y lo aplica en la solución.

Pero algunos continúan en:

- Identificar los números fraccionarios en el problema y relacionarla con sus representaciones para encontrar su solución.
- Reconocer la estructura aditiva entre fracciones y relacionarla con su representación.
- Relacionar el concepto de fracción como operador, desde el lenguaje común al numérico.

7.1.3 Momento de Reenfoque

En este momento culmina la unidad didáctica con la aplicación de una actividad de cierre que consistió en una prueba escrita, donde se plantearon dos problemas siguiendo las estructuras aditivitas mencionadas en el marco teórico: combinación, cambio, comparación y dos cambios[13].

Figura 30. Problema 1, Momento de Reenfoque.

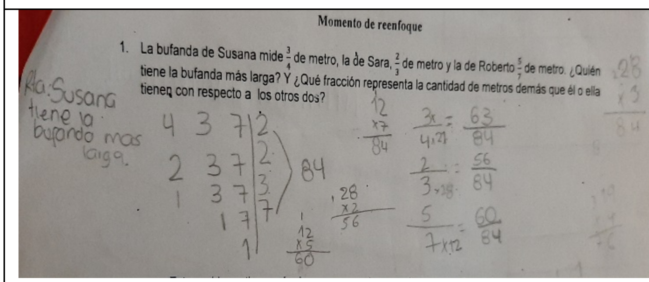
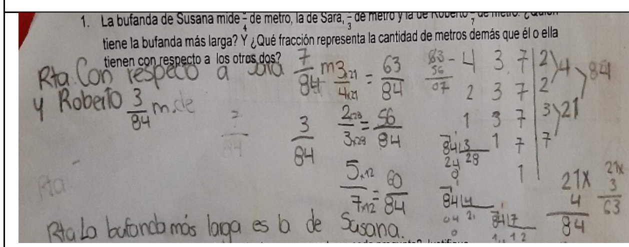
1. La bufanda de Susana mide $\frac{3}{4}$ de metro, la de Sara, $\frac{2}{3}$ de metro y la de Roberto $\frac{5}{7}$ de metro. ¿Quién tiene la bufanda más larga? Y ¿Qué fracción representa la cantidad de metros demás que él o ella tienen con respecto a los otros dos?

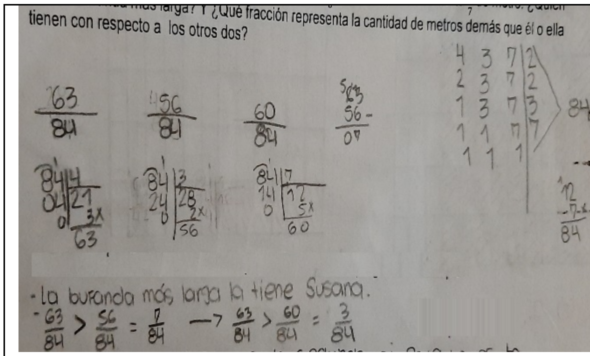
Fuente. Elaboración propia (2017)

[13] Este momento no fue filmado, por este motivo el registro que se hizo previamente desde las capturas de pantalla con el GeoGebra no va estar presente para el análisis, debido a que el autor de la presente investigación quiso posibilitar un espacio de concentración en la prueba escrita no generando distracciones con la cámara o, de alguna forma, ocasionando estrés al momento de abordar un problema.

Este problema plantea dos preguntas y siguen una situación donde implican una comparación entre dos conjuntos, es decir, una situación aditiva de comparación. Las respuestas de los estudiantes dieron las siguientes respuestas:

Tabla 23. Respuestas al Problema 1, Momento de Reenfoque.

Respuesta de los estudiantes	Descripción
 Laura (2017)	La estudiante realiza una conversión desde el registro del lenguaje común al registro numérico, se inclina por usar este sobre el grafico, así mismo efectúa tratamiento dentro este registro, usando métodos de amplificación. Además, responde a la primera pregunta más no de la segunda.
 Daniela (2017)	La estudiante realiza una conversión desde el registro del lenguaje común al registro numérico, se inclina por usar este sobre el grafico. Además, encuentra y responde las dos preguntas, paralelamente al procedimiento, realiza tratamientos del registro numérico para comparar las fracciones.

 David (2017)	El estudiante realiza una conversión desde el registro del lenguaje común al registro numérico, se inclina por usar este sobre el grafico. Además, encuentra las dos respuestas a las preguntas planteadas, pero solo responde a una de ellas. Así mismo realiza tratamientos entre el registro numérico, para realizar comparaciones y encontrar diferencias entre las fracciones.

Fuente: Autor del proyecto

Observando las respuestas dadas por los estudiantes, se analiza en Daniela un desarrollo a detalle, en donde ve la necesidad de homogeneizar las fracciones para poder compararlas. Según Ruiz (2013), la interpretación parte-todo consiste en una unidad concreta dividida en partes iguales (congruentes) de la cual toman alguna(s) parte(s), es decir, que para poder comparar dos fracciones es necesario que ambas unidades sean divididas por el mismo número de partes. De igual forma, Laura y David llegan al mismo análisis, aunque David, olvido escribir la respuesta a pesar que en su desarrollo evidencia el proceso; por otro lado, Laura no abordo la pregunta. En estos casos el error se atribuye, según González (2014), a descuidos, distracción o por desconocimiento de la respuesta.

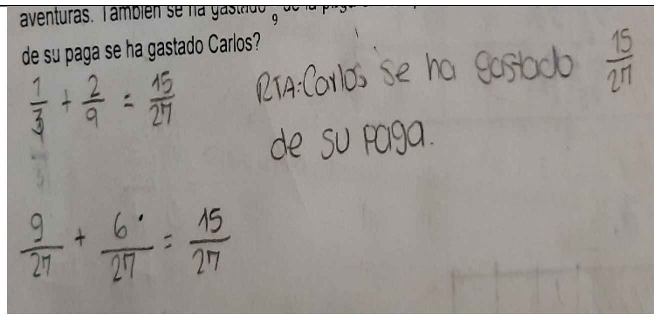
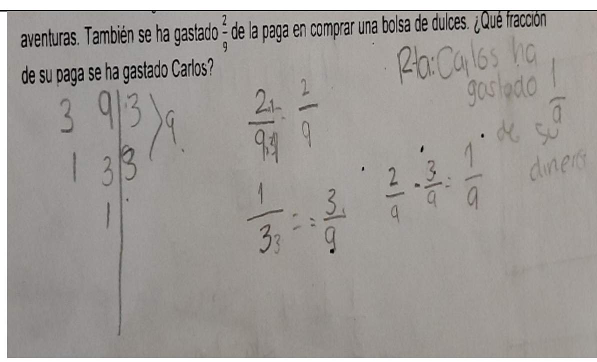
También se planteó el segundo punto, que obedecía a una estructura aditiva de dos cambios, en el que se presentaban dos variaciones, la primera por un gasto en un libro y la segunda por una compra de dulces.

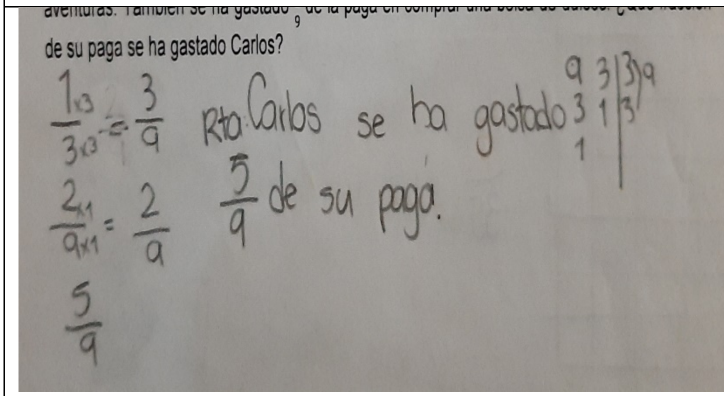
Figura 31. Problema 2, Momento de Reenfoque.

2. Carlos se ha gastado $\frac{1}{3}$ del dinero que le dieron de paga sus abuelos en comprar un libro de aventuras. También se ha gastado $\frac{2}{9}$ de la paga en comprar una bolsa de dulces. ¿Qué fracción de su paga se ha gastado Carlos?

Fuente. Elaboración propia (2017)

Tabla 24. Respuestas al Problema 2, Momento de Reenfoque

Respuesta de los estudiantes	Descripción
 David (2017)	El estudiante identifica y representa la estructura aditivita de dos cambios mediante el registro numérico, luego, realiza un tratamiento hacia una representación de fracciones homogéneas para responder la pregunta, adicionalmente realiza una conversión desde el registro del lenguaje común al numérico, es decir trasforma el enunciado en datos numéricos.
 Laura (2017)	La estudiante identifica las fracciones y realiza una conversión desde el registro del lenguaje común al numérico, además, realiza tratamientos en este registro para hallar fracciones homogéneas. Por otro lado, se le dificulta reconocer la estructura aditiva de dos cambios, ya que en este

	caso, realiza una resta, en vez de una suma.
 Daniela (2017)	La estudiante identifica y representa la estructura aditivita de dos cambios mediante el registro numérico, luego, realiza un tratamiento hacia una representación de fracciones homogéneas, para finalmente responder a la pregunta. Así mismo, el estudiante, efectúa una conversión desde el lenguaje común, que es el enunciado a un registro numérico para su desarrollo.

Fuente: Autor del proyecto

Después de concluir la prueba, los casos de Daniela y David son similares, aunque desarrollan distintas fracciones homogéneas, por ejemplo, Daniela $\frac{3}{9}$ y $\frac{2}{9}$, David $\frac{9}{27}$ y $\frac{6}{27}$ llegan a una respuesta equivalente $\frac{5}{9}$ y $\frac{15}{27}$. Retomando lo mencionado por Duval (1993), la adquisición conceptual de un objeto matemático se basa en el uso de más de un registro de representación semiótica, lo que hacen los estudiantes es un reflejo de esto. De esta manera, se reconoce en estos estudiantes los siguientes descriptores:

- Aplica las estructuras aditivas entre fracciones, relacionándolas con sus representaciones para resolver problemas.
- Identifica y representa los números fraccionarios para resolver problemas.
- Implementa el concepto de fracción como operador apoyándose de sus representaciones para resolver problemas.

Ubicándolos en el quinto nivel de resolución.

En el caso de Laura se resalta el desarrollo de la actividad mediante la representación de las fracciones usando el registro numérico, y aunque asumió que la estructura aditiva de dos cambios se resolvía a través de una resta, cometió un descuido al momento de ubicar las fracciones, ya que el primer término es menor al segundo. Por otro lado, es evidente el poco avanece en los desarrollos de Laura, en el momento anterior logró relacionar las situaciones plateadas con sus diversos registros, se asume que presentar la prueba causa algún tipo de estrés en ella. Según Polo (1996), los estudiantes destacan manifestar niveles superiores de estrés en la realización de exámenes.

Se identifican en Laura los descriptores pertenecientes al nivel 3, debido a su dificultad en que tiene para relacionar las estructuras aditivas con sus representaciones:

- Identifican los números fraccionarios y los aplica en la solución de un problema.
- Representa la estructura aditiva entre fracciones.
- Reconoce el concepto de fracción como operador y lo aplica en la solución.

Se reconoce el avance de los tres estudiantes desde que terminaron el momento de ubicación, además, el apoyo que implico GeoGebra en este desarrollo ya que iniciando la unidad didáctica no se implementó, solo hasta empezar el momento de desubicación.

Brindar herramientas desde los registros numéricos y gráficos, contribuyo en las conversiones desde el registro del lenguaje común, que planteaban los problemas, al registro numérico con el que escribían sus respuestas. Teniendo en cuenta lo mencionado por Del Puerto y Minnaard (2002), con este tipo de herramientas, los estudiantes no «entienden» las matemáticas, pero facilitan considerablemente la comprensión de ellas.

8 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El trabajo desarrollado con los estudiantes de quinto grado y el análisis de los estudiantes Laura, David y Daniela, muestran que el software GeoGebra influye en la motivación, porque facilita el aprendizaje del concepto de fracción y brinda, desde el registro numérico y gráfico, un apoyo en la resolución de problemas relacionados con las estructuras aditivas. Además, el software realiza operaciones y algoritmos mecánicos, para ofrecer un espacio al estudiante en la creación de estrategias al momento de abordar un problema. Así, fueron observables estrategias como, el análisis de la unidad representada por el software, donde el estudiante determinaba cual era la solución a la situación, la parte sombreada o la que estaba en blanco.

Asimismo, al comienzo de la unidad didáctica se interpretaba las estructuras aditivas como una suma indiscriminada de términos, de manera que al final mediante el desarrollo de los distintos tipos de este concepto, se entiende que en ocasiones se usa la operación resta para dar solución a este tipo de problemas

De igual forma, el objetivo general, se desarrolló mediante el cumplimiento de los objetivos específicos. Así, se realiza la descripción detalladas de las dificultades de los estudiantes en donde ellos presentan procedimientos mecánicos, poco significativos en el concepto de fracción, además, se evalúa el impacto de software mediante los niveles de resolución planteados por Tamayo (2014).

Con respecto a las dificultades, se concluye que los estudiantes comenzaron sin identificar los números fraccionarios en una situación problema y relacionarlos con sus representaciones para encontrar su solución, mediante el trascurso de la unidad didáctica fueron superándolas, aunque algunos persisten en identificar conversiones entre los distintos registros posibles del concepto de fracción, porque falta relacionar algunos registros gráficos con los numéricos o viceversa. Así mismo, identificar.

De esta forma al terminar cada momento de la unidad didáctica los estudiantes se ubicaron en los siguientes niveles;

Nivel 1: En este momento el estudiante debe tener la capacidad de registrar los datos más relevantes de un problema, por ejemplo, los números fraccionarios mencionados en el contexto.

Nivel 2: Los estudiantes deben tener la habilidad de registrar los datos de un problema, así mismo, de interpretarla, por ejemplo, la fracción como operador o la estructura aditiva.

Nivel 3: En este nivel, los estudiantes interpretan los datos y variables de la situación, además, realizan algunas representaciones de éstas.

Nivel 4: En este momento el estudiante realiza representaciones de las variables e igualmente, evidencia relaciones entre dichas representaciones, por ejemplo, las conversiones entre los diferentes registros o las representaciones de las estructuras aditivas.

Nivel 5: Los estudiantes a parte de identificar estas relaciones mencionadas las aplican para encontrar la solución al problema.

- Momento de Ubicación:
    - Daniela: Nivel 3
    - David: Nivel 3
    - Laura: Nivel 1
- Momento de Desubicación:
    - Daniela: Nivel 4
    - David: Nivel 4
    - Laura: Nivel 3
- Momento de Reenfoque:
    - Daniela: Nivel 5
    - David: Nivel 5
    - Laura: Nivel 3

De acuerdo a lo anterior, es posible afirmar que la mayoría de estudiantes presentaron un avance y de esta manera dar cumplimiento a la evaluación del impacto, donde se concluye que a partir de los resultados obtenidos en la investigación, la integración del GeoGebra articulado a una estrategia didáctica, influye en la motivación de los estudiantes, porque facilita el aprendizaje del concepto de fracción.

Se presentan las siguientes recomendaciones a la institución que posibilitó la aplicación de la presente investigación:

- Fomentar el uso de software para fortalecer las competencias básicas en el área de matemáticas
- Brindar espacios, tanto a los docentes como estudiantes, para desarrollar su aprendizaje usando como apoyo herramientas dinámicas online u offline.

De igual forma, para futuras investigaciones se recomienda:

- El estudio del software educativo GeoGebra, a partir de la identificación de los niveles de resolución de problemas, relacionados con las estructuras aditivas de fracciones impropias, como una forma de complementar el trabajo realizado en este trabajo investigativo.
- Iniciar desde el momento de ubicación el uso del software GeoGebra, de esta forma los estudiantes interactúan desde el primer momento con la herramienta, facilitando el aprendizaje del concepto de fracción o cualquier otro concepto.
- Profundizar, desde el principio, en una sola estructura, dado inicialmente el proyecto fue ambicioso y abordo tanto estructuras aditivas como multiplicativas.
- La introducción de nuevas tecnologías es uno de los mayores desafíos del sistema educativo actual. La inclusión de herramientas tecnológicas como un medio o ayuda en el desarrollo óptimo de la educación, está generando profundos cambios que incluye las formas de acceder a cualquier información por parte de los docentes. Se hace necesario considerar el uso integral de estas herramientas como elementos a tener en cuenta en la capacitación actual y futura de los profesores, principalmente, en el área de matemáticas.

9 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acero, A. (2012). Método Descriptivo. Obtenido de https://es.scribd.com/doc/111485247/Metodo-descriptivo

Álvarez, J. (2017). Diseño de una unidad didáctica para el aprendizaje cooperativo de números racionales en 2º de la ESO (tesis Máster). (M. U. Matemáticas, Ed.) Obtenido de https://reunir.unir.net/handle/123456789/4723

Alves, L. (1963). *Compendio de didáctica general.* Buenos Aires: Kapelusz. Recuperado el 20 de noviembre de 2017, de https://didacticapep.wikispaces.com/file/view/didactica+de+alves+de+matto.pdf

Area, M. (2005). Las tecnologías de la información y comunicación en el sistema escolar. Una revisión de las líneas de investigación. *Revista ELectrónica de Investigación y EValuación Educativa, v. 11, n. 1.* Obtenido de https://www.uv.es/RELIEVE/v11n1/RELIEVEv11n1_1?iframe=true&width=80%25&height=80%25

Arteta, J. (2012). *Los fraccionarios en primaria, retos, experiencias didácticas y alianzas para aprender matemáticas con sentido.* Colombia: Universidad del Norte.

Avila, A. (2008). Los profesores y los decimales. Conocimientos y creencias acerca de un contenido de saber cuasi invisible. *Educ mat, 20*(2).

Bailin, S. (2002). Critical Thinking and Science Education. In Gilbert, J., Science Education. New York: Editorial matter and selection.

Bayles, Ernest E. 1934. "The Objectives of Teaching with Special Reference to the Morrison Theory." *Educational Administration and Super-vision* 20:561–568.

Becerra, D., Becerra, A., Rodriguez, O., Nocua, E., y Suárez, J. (2006). *Fracciones, Juego y Aprendiendo.* Duitama: -. Recuperado el 20 de noviembre de 2017, de http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-110449_archivo.pdf

Benoit, P., Chemla, K., y Ritter, J. (1992). *Histoire de fractions, fractions d'historie.* Birkhäusen Verlag, Berlín.

Biehler, R. (1994). *Didactics of mathematics as a scientific discipline.* Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática.* Cordoba.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática.* Cordoba, daptándo: Universidad Nacional de Cordoba.

Bruce, A., y Escobar, C. (2010). *Software educativo el mundo de las fracciones*. Obtenido de http://www.tise.cl/2010/archivos/tise01/docs/trabajos/ID67/ID67.htm

Cano L., y Giraldo .D. (2017). *Uso de la herramienta geogebra y su influencia en la comprensión de la construcción del triángulo de Sierpinski en estudiantes de 8° del Instituto Técnico Industrial Pascual Bravo, Medellín (tesis Magister En Informática Educativa).* Lima – Perú.

Carbajal, L. (2012) Técnicas De Recolección De Datos E Instrumentos De Medición. Perú

Carreño, M. (2015). *Software educativo para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las operaciones con fracciones, del bloque numérico de matemáticas en el séptimo año de EGB.* Cuenca: -. Recuperado el 20 de noviembre de 2017, de http://dspace.ucuenca.edu.ec/handle/123456789/23171

Castillo, M. (2016). Teoría de registros de representación semiótica. Obtenido de: https://es.slideshare.net/MelissaCastillo2/teora-de-registros-de-representacin-seimtica

Castro, E., y Castro, E. (1997). *Representaciones y modelización.* Granada: L.Rico.Comp.

Castro, E., Rico, L., y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias, 15,361-371*.

Chamorro, M. (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria.* España: Pearson.

Codina, A. (2008). El trabajo colaborativo y la evaluación formativa en educación matemática. una experiencia con enseñanza virtual. *Enseñanza De la Matemática, 17(2), 59-78.*

De Velde, H. (2014). Preguntar, Preguntar para Aprender. Tomado de: https://www.upf.edu/documents/6602910/7420554/saber_preguntar_vandevelde.pdf/8c6bd20e-9ff7-0d61-bbfb-fc006bc621cf

Denzin, N. K. (1970). *Sociological Methods: a Source Book.* Chicago: Aldine Publishing Company.

De León H. 1998. Procedimientos de niños de primaria en la solución de problemas de reparto. Relime. 1(2):5-28.

Díaz Barriga, Á. (2013). *Profesorado Revista de currículum y formación del profesorado. Secuencias de aprendizaje. ¿Un problema del enfoque de competencias o un reencuentro con perspectivas didácticas? vol. 7. N° 3 (sept.- diciembre 2013). p. 20.*

Duval, R. (1995). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales.* Santiago de Cali: Peter Lang.

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* México: Hitt F.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales.* Universidad del Valle, Colombia.

Duval, R. (2006). *A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning ofmathematics. Educational Studies in Mathematics.* -: Springer. Recuperado el 20 de noviembre de 2017, de http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/artigos/esm_2008_v68/5semiotic.pdf

Española, R. A. (- de - de 2001). *Real Academia Española*. Obtenido de Real Academia Española: http://dle.rae.es/?id=UELp1NP

Falcón, R., y Collantes, R. (2013). *Creación de Actividades Autoevaluables.* Córdoba: -. Recuperado el 20 de Noviembre de 2017, de https://www.researchgate.net/profile/Raul_Falcon2/publication/260157859_Creacion_de_actividades_autoevaluables_con_GeoGebra/links/00b4952fcb3c554f08000000.pdf

Feferman, S. (1989). *The number systems.* Foundations of Algebra and Analysis.

Fernandez, J., Garcia, R., y Posada, F. (1993). *Guía para el diseño curricular en educación física.* Lérida: Agonos. Recuperado el 20 de Noviembre de 2017, de http://altorendimiento.com/que-componentes-debe-tener-la-unidad-didactica-modelo-relacional-globalizador/

Fiallo Leal, J. E., y Parada Rico, S. E. (julio de 2014). Curso de precálculo apoyado en el uso de geogebra para el desarrollo del pensamiento varacional. *revistas.udistrital, 3*(20), 16.

Fraile Martin, Javier (1997): «Más allá de los algoritmos: uso de la calculadora y aprendizaje de estrategias con alumnos de 8 años», en: SUMA (26), pp. 95-102.

Friz Carrillo, M., Sanhueza Henríquez, S., Sánchez Bravo, A., Belmar Mellado, M., & Figueroa Manzi, E. (2008). Propuestas Didácticas Para El Desarrollo De Competencias Matemáticas En Fracciones. Horizontes Educacionales, 13 (2), 87-98.

García, J., y Rodríguez, E. (2013). Resolver Problemas y Modelizar: un modelo de interacción. *Revista Internacional de Investigación en Educación*, 297-333. Recuperado el 20 de Noviembre de 2017, de http://revistas.javeriana.edu.co/index.php/MAGIS

Gonzales, D. (2015). *Errores comunes en el aprendizaje de las fracciones: Un estudio con alumnos de 12/13 años en Cantabria.* (C. U. Cantabria., Ed.)

González-López, M. (2001). *La gestión de la clase de geometría utilizando sistemas de Geometría dinámica.* Granada: Universidad de Granada.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., y Baptista Lucio, M. d. (2010). *Metodología de la investigación* (Quinta edición ed.). México D.F: McGRAW-HILL / Interamericana Editores, S.A. De C.V. Obtenido de https://www.esup.edu.pe/descargas/dep_investigacion/Metodologia%20de%20la%20investigaci%C3%B3n%205ta%20Edici%C3%B3n.pdf

Hernández-Moreno, A. Cervantes-Barraza, J., Ordoñez-Cuastumal, J., García-González, M. (2017) Teoría De Registros De Representaciones Semiótica, México: Universidad Autónoma de Guerreros

Herrera, N. A. (2014). Implementación de una estrategia metodológica basada en la resolución de problemas para la enseñanza de los números racionales positivos expresados como fraccionario en grado sexto, mediante el uso de las TIC (tesis maestria). Medellín: Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias.

Heytworth. (1999). Procedural and conceptual knowledge of expert and novice students for the solving of a basic problem in chemistry. *International Journal Science Education, 21*(no. 2. p. 195-211).

Ibañez, G. (1992). Planificación de unidades didácticas: una propuesta de formación. En Aula, nº 1, abril, pp. 13-15.

Kaput, J. (1987). Representation systems and mathematics. . En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (págs. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Lara, H. (2003). *Perspectivas en torno a la enseñanza de las fracciones mediante el uso de un software educativo.* México: Héctor Gerardo Lara Briseño - UPN. Recuperado el 20 de Noviembre de 2017, de http://xplora.ajusco.upn.mx:8080/jspui/handle/123456789/367

Laskey, M.L. y Gibson, P.W. (1997). College study strategies: Thinking and learning.Needham Heights, MA: Allyn and Bacon.

León, G. (2010). *Unidad Didáctica: Fracciones.* Granada: -. Recuperado el 20 de Noviembre de 2017, de http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Gloria_Leon.pdf

Lester, F., y Kehle, P. (2013). *From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity.* Lawrence Erlbaum Associate.

Linares, S., y Sánchez, M. (1988). *Fracciones: La relación parte-todo.* Madrid: Síntesis.

Llinares, S. (2003). *Didáctica de las Matemáticas para Primaria.* Madrid: Pearson Educación S.A.

López, J. (2013). El Aprendizaje Del Concepto De Fracción, Desde La Perspectiva Histórico-Cultural: Un Camino. Colombia.

Martín, O. (2015). Las Matemáticas con Las Regletas de Cuisenaire. Obtenido de: http://lmespanish.weebly.com/blog/las-matematicas-con-las-regletas-de-cuisenaire

Martínez, E. (2018). Fraccionarios - ¿Cómo se leen las fracciones? Obtenido de: https://edu.gcfglobal.org/es/fraccionarios/como-se-leen-las-fracciones/1/

Martínez González, R. (2007). *La investigación en la práctica educativa.* Madrid, España: FARESO S.A. Obtenido de http://www.gse.upenn.edu/pdf/La%20investigaci%C3%B3n%20en%20la%20pr%C3%A1ctica%20educativa.pdf

Martínez, C. (2001). Acerca de dificultades para la enseñanza y aprendizaje de las fracciones. *Revista EMA, 6*(2), 159-179.

Martínez, C. (2001.). Acerca de dificultades para la enseñanza y aprendizaje de las fracciones. *EMA. vol. 6, num. 2, pág. 159-179.*

Meece, j. L. (1994). The role of motivation on self-regulated learning. En D. H. Schunk y B. j. Zimmerman (Eds.), Self-regulation of learning and performance. Issues and educational applicatios. Hillsdale, Nj: Erlbaum.

Ministerio de Educación Nacional. República de Colombia. . (). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar !, EDUTEKA. Recuperada en Febrero 8, 2011, del sitio Web temoa : Portal de Recursos Educativos Abiertos (REA) en http://temoa.tec.mx/es/node/49170

McCombs, B. (2001), "What do we know about learners and learning? The learner-centered framework: Bringing the educational system into balance", Educational Horizons, Spring, pp. 182-193

Mckernan, J. (1999). *Investigación-Acción y Curriculum.* Madrid: Ediciones Morata, S.L.

Mckernan, J. (1999.). *Investigaccion accion y curriculum.* Ediciones Morata, S.L. Madrid.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *ineamientos Curriculares de Matemáticas.* Santa Fe de Bogotá.

Montes, A., y Vallejo, A. (2016). Efectos de un programa educativo basado en el uso de las tic sobre el rendimiento académico y la motivación del alumnado en la asignatura de tecnología de educación secundaria. . *Educación XX1, 19(2), 229.*

Morrison, G. (2005). *Educación infantil.* Pearson Educación.

Mosquera, A., y Finol, J. (2012). La semiosis infinita y sus fronteras en un software educativo. *Enl@ce: Revista Venezolana de Información, Tecnología y Conocimiento, 9 (1), 11-26.*

Murillo, A. (2014). Las prácticas de enseñanza empleadas por docentes de matemáticas su relación con la resolución de problemas, mediados por fracciones (tesis maestria). *I CEMACYC*, (págs. 983-987). Universidad De Antioquia, Facultad De Educación.

Nacional, M. d. (2017). *Derechos Básicos de Aprendizaje.* Bogotá: -. Recuperado el 20 de noviembre de 2017, de http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-341057_recurso_DBA.pdf

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Sevilla.

Neira, G. (2011). Conferencia la Conversión En La Teoría De Duval: Notas Para Explicar La Comprensión En Matemáticas. Duitama – Boyacá

Orozco, D. (2013). *Estrategias didácticas para la enseñanza de las fracciones en el tercer ciclo de educación primaria.* México: UPN - 098. Recuperado el 20 de Noviembre de 2017, de http://200.23.113.59/pdf/29998.pdf

Ordoñez, L. (2014). Estructuras Aditivas en La Resolución De Problemas Aditivos De Enunciado Verbal (Paev). Colombia. Obtenido de http://bdigital.unal.edu.co/47657/1/34607989_Leysa.pdf

Otero, J. L. (2009). Breve manual para elaborar Secuencia Didáctica. [citado en 13 de diciembre de 2016] [en línea]. Obtenido de http://educacionyculturaaz.com/wp-content/uploads/2014/05/Breve-Manual-para-secuencias-didacticas.pdf

Oviedo, L., y Kanashiro, A. (2012). *Los registros semióticos de representación.* Provincia de Santa Fe: Don Bosco Santa Fe. Recuperado el 20 de noviembre de 2017, de file:///C:/Users/xiomara/Downloads/4112-10405-1-PB.pdf

Paul, R., Elder, L. y Bartell, T. (2003). Study of 38 Public Universities and 28 Private Universities to Determine Faculty Emphasis on Critical Thinking in Instruction (Executive Summary). Recuperado de www.criticalthinking.org/schoolstudy.htm

Peñaloza, W., y Suárez, S. (2013). *El teorema fundamental del cálculo: escenarios para su comprensión.* Bogotá: Revista científica. Recuperado el 20 de Noviembre de 2017, de http://funes.uniandes.edu.co/6732/1/Roa2013Teorema.pdf

Perera, P. (2009.). Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. *Educación Matemática, vol. 21, núm.1, pág 29-61 Abril*. Recuperado el 28 de Mayo de 2018, de <http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v21n1/v21n1a3.pdf>.

Plazarte, F. (2016). Incidencia del programa K-bruch en la enseñanza de operaciones con fracciones, con los estudiantes de noveno año de educación general básica de la Unidad Educativa (tesis pregrado). Quito: Universidad Central Del Ecuador, Facultad De Filosofía, Letras Y Ciencias De La Educación.

Polya, G. (1945). *How to Solve It. Princeton.* Princeton University Press.

Poyla, G. (1998). *Como plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Pozo, J., Pérez, M., y Domínguez, J. &. (1994). *La solución de problemas.* . Madrid: Santillana.

Puig, L. (2006). La resolución de problemas en la historia de las matemáticas. *Matemáticas para el siglo XXI, 39-57.*

Revelo, L. (2014). La Metodología Del Aprendizaje Entre Pares Aplicada En La Enseñanza De La Física En Educación Básica. Colombia

Rey, R., Bulla, A., Jiménez, W., y Rojas, S. (2012). *El dominio, rango y la transformación de funciones construyendo animaciones en GeoGebra.* Medellín: Universidad de Medellín. Recuperado el 20 de Noviembre de 2017, de http://funes.uniandes.edu.co/2644/1/EldominioReyAsocolme2012.pdf

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *Pna, 4(1), 1-14.* Obtenido de http://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/viewFile/6172/5488

Rincón, G., y Pérez Abril, M. (s.f.). La pedagogía por proyectos y la secuencia didáctica entendidas como tipos de configuración didáctica. Fragmento CERLALC, 2009. 35 p. .

Rizo, C., y Campistrous, L. (2013). Fracciones y números fraccionarios en la escuela elemental: el caso de la escuela primaria cubana. *I CEMACYC* (págs. 133-138). República Dominicana: Portal Revistas Académicas Universidad de Costa Rica. Obtenido de https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/18860

Rodríguez Reyes, V. M. (2014). La formación situada y los principios pedagógicos de la planificación: La secuencia didáctica. Universidad autónoma Indígena de México. *Revista Ra Ximhai, vol. 10, núm. 5, julio-diciembre.*

Rodríguez Santamaría, G., y Manjarrez, É. (2008). El uso de geogebra como herramienta dinámica para el análisis de funciones cuadráticas en estudiantes de grado undécimo (tesis especialización) . Bucaramanga: Universidad Industrial De Santander Facultad De Ciencias Escuela De Matemáticas.

Rodríguez-Reyes, V. M. (s.f.). La formación situada y los principios pedagógicos de la planificación: la secuencia didáctica. Ra Ximhai, 10(5).

Ruiz, C. (2013). La fracción como relación parte-todo y como cociente: Propuesta Didáctica para el Colegio Los Alpes IED. Bogotá, Colombia. Universidad Nacional de Colombia.

Ruiz, N. (2012). Análisis del desarrollo de competencias geométricas y didácticas mediante el software de geometría dinámica geogebra en la formación inicial del profesorado de primaria (Tesis doctoral). Madrid, España: Universidad Autónoma de Madrid.

Sáenz, P. (1997). *La educación física y su didáctica.* Sevilla: Wanceulen editorial deportiva. Recuperado el 20 de Noviembre de 2017, de http://altorendimiento.com/que-componentes-debe-tener-la-unidad-didactica-modelo-relacional-globalizador/

Salanova Sánchez, E. (s.f.). *La importancia de Comenius en la Pedagogía [consultado el 12 de diciembre de 2016] Disponible en: http://www.uhu.es/cine.educacion/figuraspedagogia/0_comenius.htm#La_propuesta_pedagógica_de_Comenius_.*

Sandoval Casilimas, C. A. (2002). *Investigación Cualitatva.* Bogotá, Colombia: ARFO Editores e Impresores Ltda. Obtenido de https://panel.inkuba.com/sites/2/archivos/manual%20colombia%20cualitativo.pdf

Santos, M., y Moreno, L. (2013). *Sobre la construcción de un marco conceptual en la resolución problemas que incorporen el uso de herramientas computacionales. En las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas.* México: Trillas.

Sasaki (1993). The constructing meanings by social interaction in mathematical teaching. Proceedings of the XVII PME, 2, 262-268. University of Tsukuba. Japón.

Shannon, R. (1975). *System Simulation: The Art y Science.* New Jersey: Englewood Cliffs, N. J. Prentice-Hall197387 p. Recuperado el 20 de Noviembre de 2017, de http://www.dtic.upf.edu/~gvirtual/master/rv/seccio2/seccio2.htm

Squires, D., y McDougall, A. (2001). *Cómo elegir y utilizar software educativo: guía para el profesorado.* (P. Manzano, Trad.) La Coruña: Ediciones Morata. Obtenido de https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=IwXbRjhn-TsC&oi=fnd&pg=PA10&dq=funcionabilidad+de+software&ots=39b1XpaMrR&sig=LXkYCjY0a1Z94olf112tCvVw0YM#v=onepage&q=funcionabilidad%20de%20software&f=false

Suarez, M. (2009). Técnica de Estudio de Casos. Recuperado de, https://es.scribd.com/doc/13938640/Tecnica-de-Estudio-de-Casos

Tamayo, O. (2001). *Evolución conceptual desde una perspectiva multidimensional. Aplicación al concepto respiración.* Bellaterra: Neus Sanmartí Puig. Recuperado el 20 de Noviembre de 2017, de http://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/4688/oeta1de3.pdf?sequence=1

Tamayo, O. (2006). Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. *Revista Educación y Pedagogía. Vol. XVIII*, 37-49. Recuperado el 20 de Noviembre de 2017, de http://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/revistaeyp/article/view/6085

Tamayo, O. (2013). *Las unidades didácticas en la enseñanza de las Ciencias Naturales, Educación Ambiental y Pensamiento Lógico Matemático.* Bogotá: Bonaventuriana. Recuperado el 20 de Noviembre de 2017, de http://revistas.usb.edu.co/index.php/Itinerario/article/view/1494/1265

Tamayo, O. E., Loaiza Zuluaga, Y. E., y Zona, J. (2014). *Pensamiento crítico en el aula de ciencias.* Manizales, Colombia: Universidad de Caldas.

Tamayo, Ó., Vasco, C., Suárez, M., Quiceno, C., García, L., y Giraldo, A. (2010). *La clase multimodal y la formación y evolución de conceptos científicos a través del uso de tecnologías de la información y la comunicación.* Manizales: Universidad Autónoma de Manizales. Recuperado el 20 de Noviembre de 2017, de http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/bitstream/11182/368/1/Clase%20multimodal%20y%20la%20formaci%C3%B3n%20y%20evoluci%C3%B3n.pdf

Torres, W. (2011). El Enfoque Ontosemiótico Para La Investigación En Educación Matemática: Una Reflexión Crítica. Puerto Rico. Obtenido de: http://cie.uprrp.edu/cuaderno/download/numero_26/vol26_03_wtorres.pdf

Valdemoros Alvarez, M. E. (2010). Dificultades experimentadas por el maestro de primaria en la enseñanza de fracciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en MAtemáticas Educativa, 13*(4), 423-440.

Valdemoros, M. (s.f.). Dificultades experimentadas por el maestro de primaria en la enseñanza de fracciones. *Relime*. Recuperado el 28 de Mayo de 2018., de http://www.clame.org.mx/relime/201024d.pdf

Van-hiele, P. (1986). *Structure and Insighti, a Theory of Mathematics Education.* Orlando: Academic Press.

Vargas, LL. (2012) La Entrevista En La Investigación Cualitativa: Nuevas Tendencias y Retos. Revista Calidad en la Educación Superior. Costa Rica.

Vasco, C. El archipiélago fraccionario, En: Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas. (Vol. II) Punto Exe Editores, 1996.

Vergnaud, G. (1995). La Didactique a-t-elle un sens pour la formation des personnes peu qualifiées et peu motivée? Migrants-formaction(100), 119-131

Vigotsky, L. (1988). Interacción entre enseñanza y desarrollo. *Selección de Lecturas de Psicología de las Edades*.

Villaicencio, S., Guillermo, L., Armijos, Y., y del Cisne, A. (2017). *El plan morrison como estrategia didáctica para potenciar el aprendizaje de secciones cónicas en las alumnas del tercer año de bachillerato general unificado, paralelo b, de la unidad educativa la inmaculada de la ciudad de Loja. Período 2015-2016.* Loja: serie17. Recuperado el 20 de noviembre de 2017, de http://dspace.unl.edu.ec/jspui/bitstream/123456789/18462/1/ADRIANA%20DEL%20CISNE%20YUGA%20ARMIJOS%20.pdf

Warren, E., Cooper, y Lamb, J. (2006). Investigating functional thinking in the elementary classroom: Foundations of early algebraic reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior, 25(3), 208-223*.

Watzlawick, P, (1995) Cambio Formación y Solución de Problemas Humanos, Editorial Heder 9º edición. Colección biblioteca de Psicología, Textos Universitarios.

Weisberg, R. (1989). Creatividad. El genio y otros mitos. Barcelona: Labor.

Zabala, A., y Arnau, L. (2007). *11 ideas clave. Cómo aprender y enseñar competencias.* Graó. Obtenido de http://www.cca.org.mx/ps/profesores/cursos/depeem/apoyos/m1/Zabala%2011%20ideas%20clave.pd

Zimmermann, W., y Cunningham, S. (1991). *Visual Tinking in Calculus. In Visualization in Teaching and Mathematics.* Washington: Maa Notes Number. Recuperado el 20 de noviembre de 2017, de https://pdfs.semanticscholar.org/4633/9bd5e52c9f6785b70ef1e62812f5f02b1ec7.pdf

Anexos

Anexos A. Momento de ubicación. Instrumento para indagar ideas previas

Actividad Diagnóstica

NOMBRE:____

OBJETIVO:
- Recordar el concepto de fracción y sus partes.
- Identifica las partes de una fracción y representa fracciones.

1. Escriba un fraccionario que represente el área sombreada en cada figura:

C)

____ ____ ____

¿Cuál es la fracción que corresponde al área no sombreada?

a) b) ____ c) ____

2. Felipe a su fiesta de cumpleaños invitó a 9 amigos, de los cuales 5 eran niños y 4 eran niñas. ¿Qué parte de todos los invitados eran niñas? ¿Qué parte de todos los invitados eran niños?

Además, corto la torta en 10 pedazos, ¿cuál de las tortas está cortada en décimos?

a) 

b) 

Susana tiene 7 botones rojos, 3 botones azules y 5 botones verdes. ¿Qué fracción representa el número de botones azules? Represente gráficamente.

3. Catorce de los treinta estudiantes de cuarto tienen el pelo castaño. ¿Qué parte del grupo de estudiantes tienen el pelo castaño? Represente gráficamente.

OPERADORES FRACCIONARIOS

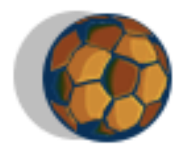
NOMBRE:____

Objetivo:
- Aplicar los operadores fraccionarios a números o magnitudes para resolver problemas cotidianos.

1) Javier quiere jugar con un lazo que mide 4 metros, pero lo parte por la mitad porque es muy largo y no le sirve. ¿Cuánto mide ahora el lazo de Javier? Explique su respuesta.

2) Camilo tiene un billete de $2000 y quiere regalarle la cuarta parte del valor a su hermana Catalina. ¿Qué cantidad de dinero le regala a su hermana? Explique su respuesta.

3) El grado cuarto tiene 35 estudiantes, entre los niños y las niñas del grado cuarto solo jugarán fútbol $\frac{2}{5}$ de ellos. ¿Cuántos estudiantes jugarán fútbol? Explique su respuesta.



4) Doña Olga para preparar huevos en tortilla utiliza $\frac{2}{3}$ de doce huevos que ha comprado en la tienda. ¿Cuántos huevos ha empleado para hacer la tortilla? Explique su respuesta.

COMPOSICIÓN Y TRANSFORMACIÓN DE MEDIDAS

NOMBRE:____

OBJETIVO:
- Resuelve problemas cotidianos usando material concreto.

1) De Bucaramanga han salido tres buses con diferentes rutas: Pamplona, Barrancabermeja y Rionegro. Los tres buses salieron de Bucaramanga a la misma hora pero hasta el momento han recorrido una parte del trayecto, así que han recorrido hacia Pamplona $\frac{1}{16}$ de su ruta, hacia Barrancabermeja $\frac{5}{16}$ de su ruta y hacia Rionegro $\frac{3}{16}$ de su ruta.

a) ¿Qué cantidad de ruta han recorrido los buses que van hacia a Pamplona y Rionegro?

b) ¿Qué cantidad de ruta han recorrido los buses que van hacia a Pamplona y Barrancabermeja?

2) El bus que viajaba hacia Pamplona llevaba $\frac{14}{16}$ del cupo total de Pasajeros, pero en Berlín se quedaron $\frac{3}{16}$ pasajeros. ¿Cuántos pasajeros llegaron al terminal de Pamplona? Explique su respuesta.

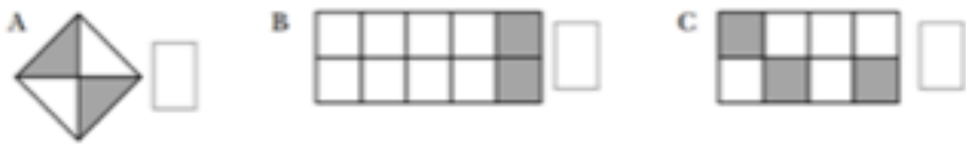
3) Cristina fue de vacaciones a Pamplona donde su abuela y ha tomado

$\frac{15}{16}$ fotos de un rollo, pero

$\frac{3}{16}$ de las fotos salieron dañadas.

¿Cuántas fotos salieron buenas? Explique su respuesta.

1. Escribe la fracción que representa la parte coloreada de cada figura.



¿Cómo puedes verificar que esta es la respuesta correcta?

2. Escribe mediante una fracción la parte coloreada en cada figura y escribe cómo se leen estas fracciones:

¿Puede haber otras respuestas?

3. Escribe la fracción que representa la zona sombreada en cada figura

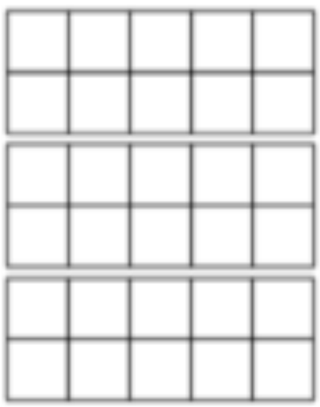
¿Qué dificultades encontró a la hora de resolver el ejercicio?

4. Representa gráficamente cada fracción

A. $\frac{3}{6}$ B. $\frac{2}{8}$ C. $\frac{3}{9}$ D. $\frac{5}{12}$

¿Cuál es el paso que considera más importante al momento dar solución al punto?

5. Colorea la parte que se indica en cada caso y escribe cómo se lee cada fracción.



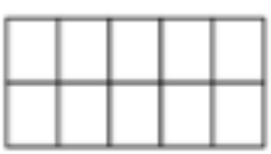
$\frac{7}{10} \rightarrow$ ……………………………………

$\frac{2}{5} \rightarrow$ ……………………………………

$\frac{1}{2} \rightarrow$ ……………………………………

¿En cuál punto ocupo más tiempo? ¿Por qué?

6. Colorea en cada figura la fracción que se indica.


$\frac{7}{10}$


$\frac{3}{8}$


$\frac{2}{6}$

¿Qué pasos siguió para poder encontrar la solución?

7. Escribe >, < o =, según corresponda.

$\frac{3}{5} \bigcirc \frac{4}{5}$ $\frac{2}{7} \bigcirc \frac{5}{7}$ $\frac{6}{9} \bigcirc \frac{3}{9}$ $\frac{5}{5} \bigcirc \frac{3}{3}$

$\frac{1}{2} \bigcirc \frac{1}{3}$ $\frac{1}{4} \bigcirc \frac{1}{2}$ $\frac{1}{10} \bigcirc \frac{1}{5}$ $\frac{1}{6} \bigcirc \frac{1}{3}$

¿Cómo puede verificar si la solución está esta correcto?

8. Ordena de menor a mayor estas fracciones:

a) $\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{6}{5}, \frac{5}{5}, \frac{10}{5} \longrightarrow \square < \square < \square < \square < \square$

b) $\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \longrightarrow \square < \square < \square$

¿Cuál de los dos puntos se le dificulto más? ¿Por qué?

9. Sustituye los puntos por los signos > (mayor que), < (menor que) o = (igual a), según corresponda.

$\frac{3}{5} \bigcirc 1$ $\frac{6}{4} \bigcirc 1$ $\frac{5}{5} \bigcirc 1$ $\frac{3}{10} \bigcirc \frac{7}{10}$

¿En qué se diferencia este punto del resto de los demás?

10. Calcula

a) Los $\frac{3}{4}$ de 100 euros $\longrightarrow$ ....

b) Los $\frac{3}{5}$ de 400 litros de agua $\longrightarrow$ ....

c) Los $\frac{7}{10}$ de 1 000 metros $\longrightarrow$ ....

¿Qué estrategia uso para poder resolver los tres ejercicios anteriores?

11. De una cuerda de cien metros, Manuel cogió $\frac{2}{5}$, y Sergio, $\frac{3}{10}$ ¿Qué longitud de cuerda cogió cada uno?

¿Por qué cada uno tiene respuestas diferentes?

12. Mario llevaba 52.000 pesos. Gastó tres cuartas partes en un regalo. ¿Cuál es el valor del regalo? ¿Cuánto dinero le queda?

¿Cómo puede comprobar si la respuesta es correcta?

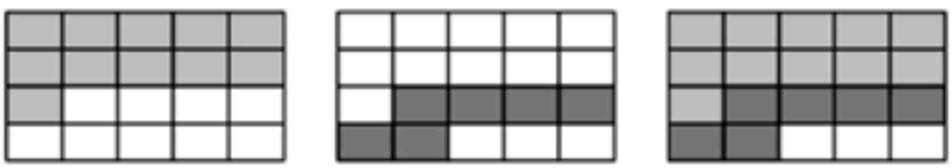
ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE FRACCIONES

Suma o resta de fracciones homogéneas: Para sumar o restar fracciones homogéneas, se halla la suma o la diferencia de los numeradores y se deja el mismo denominador.

Situación problema

De la población aproximada de aves que hay en cierto parque ecológico, $\frac{11}{20}$ son águilas, y $\frac{6}{20}$ son palomas, canarios y colibríes. ¿Qué fracción de la población son águilas, canarios y colibríes?

- Para averiguarlo, se calcula $\frac{11}{20}+\frac{6}{20}$



$$\frac{11}{20} \quad + \quad \frac{6}{20} \quad = \quad \frac{11+6}{20}=\frac{17}{20}$$

***Rta:** Las águilas, las palomas y los colibríes representan* $\frac{17}{20}$ *del total.*

Suma o resta de fracciones heterogéneas: Para sumar o restar fracciones heterogéneas se encuentran fracciones equivalentes homogéneas y luego se halla la suma o la diferencia de las fracciones resultantes.

Situación problema

Para una jornada recreativa, algunos estudiantes del curso de Rafael elaboraron cometas. Si los $\frac{2}{5}$ del total de los niños construyeron cometas de color azul, y los $\frac{3}{7}$, de color amarillo, ¿Qué parte del curso elevó cometa en esta jornada?

Solución:

$\frac{2}{5}=\frac{2 X 7}{5 X 7}=\frac{14}{35}$ $\quad$ $\frac{3}{7}=\frac{3 X 5}{7 X 5}=\frac{15}{35}$

$\frac{14}{35}+\frac{15}{35}=\frac{14+35}{35}=\frac{29}{35}$ Por lo tanto: $\frac{2}{5}+\frac{3}{7}=\frac{29}{35}$

Rta: 29 de 35 estudiantes elevo cometas.

ACTIVIDAD 1.

1.1 calcula los números que faltan en las siguientes adiciones y sustracciones.

a) $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{\square}{\square}$ b) $\frac{8}{12}+\frac{5}{9}=\frac{\square}{\square}$ c) $\frac{5}{9}-\frac{1}{9}=\frac{\square}{\square}$ d) $\frac{7}{15}+\frac{\square}{\square}=\frac{13}{15}$

¿Explica que estrategia uso para resolver cada uno de los puntos?

1.2 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1.2.1 Luis vendió $\frac{4}{10}$ de una caja de imanes esta mañana, y $\frac{3}{10}$ esta tarde. Representa gráficamente la situación y calcula que parte de la caja vendió en total y que parte le queda por vender.

¿Qué dificultades encontró al momento de solucionarlo?

1.2.2 Tres hermanos limpian juntos el baño. Si el mayor limpia $\frac{1}{3}$ de los azulejos, el mediano $\frac{4}{12}$ y el pequeño $\frac{1}{4}$, ¿faltan aún azulejos por limpiar?

¿Qué pasos debo seguir al momento de solucionar problemas similares?

1.2.3. Un grupo de hombres está arreglando carreteras. El lunes reparó $3\frac{1}{3}$ km; el martes $2\frac{1}{2}$ km, y el miércoles desbarató $1\frac{1}{5}$ km.

a) ¿Cuántos km más o cuántos km menos hicieron el lunes que el martes?

b) ¿Cuántos km arreglaron realmente?

¿En qué partes gasto más tiempo? ¿Por qué?

1.2.4 En una fiesta de disfraces, $\frac{4}{15}$ de las mascaras que hay son de animales y $\frac{2}{5}$ son de monstruos. ¿Qué fracción representa el total de máscaras de animales y de monstruos que hay en la fiesta?

¿Qué parte le resulto más sencilla? ¿Por qué?

1.3 Efectúa las adiciones y sustracciones reduciendo las fracciones a común denominador.

a. $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

b. $\frac{4}{5} + \frac{5}{12} = \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

c. $\frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{\square}{\square} - \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

d. $\frac{5}{12} - \frac{1}{3} = \frac{\square}{\square} - \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

¿Describa lo más importante que considere al momento de sumar o resta fracciones?

1.4 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1.4.1 Luisa dice: compre 3 paquetes de $\frac{1}{2}$ kilo de arroz. Su papá le dice: aun teníamos 2 paquetes de $\frac{1}{4}$ de kilo de arroz. La mamá pregunta: ¿Cuánto arroz tenemos ahora?

¿Cómo puedo comprobar la respuesta?

2.4.2 Noelia reparte $\frac{5}{2}$ de Kg de helado en envases de $\frac{1}{8}$ de Kilógramo cada uno. ¿Cuántos envases llenará? Si tiene $\frac{3}{4}$ de litro de refresco y los reparte en vasos de $\frac{1}{4}$ de litro, ¿Cuántos vasos obtendrá?

¿Se podrían encontrar más soluciones? ¿Por qué?

Para este momento nos dirigiremos a la sala de cómputo, donde con solo las instrucciones que trae el taller y mediante la ayuda de GeoGebra, los estudiantes deberán resolver las situaciones allí propuestas. Teniendo en cuenta la importancia de la argumentación a la par de las actividades propuestas se plantearán preguntas de reflexión en las que los estudiantes puedan identificar y confrontar sus saberes previos en la práctica

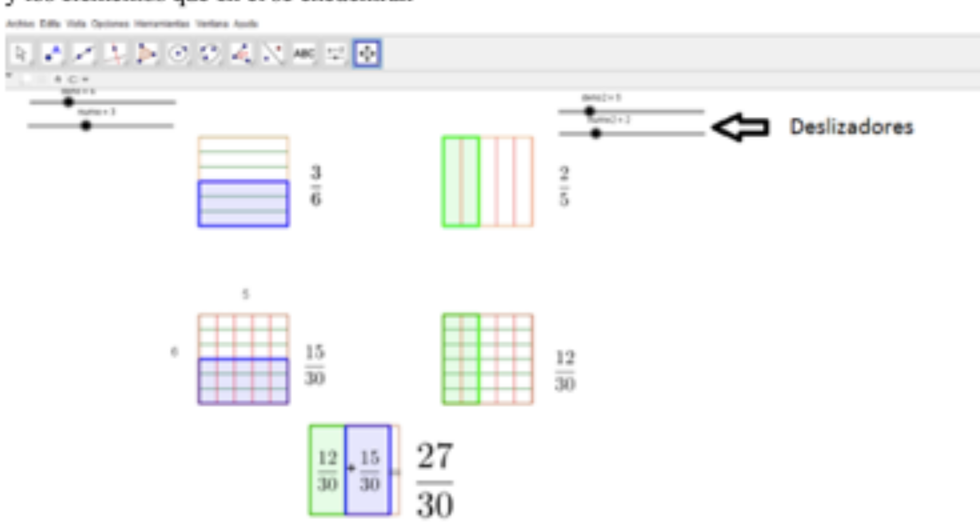
Actividad 1

Objetivos:

- ✓ Interactuar con el programa GeoGebra, para que los estudiantes conozcan algunas de sus funciones.
- ✓ Observar la relación que existe entre el resultado de una suma de fracciones y su representación gráfica.

ACTIVIDAD

1) Ingrese al archivo *actividad 1* que se encuentra ubicada en el escritorio. Describa el entorno y los elementos que en él se encuentran



2) Relate lo que ocurre cuando mueves los deslizadores
3) ¿El segundo par de fracciones, que función cumple? ¿Cómo se hallaron? Justifique

4) Resuelve usando la ayuda de GeoGebra.

a. En una fiesta de disfraces, $\frac{4}{15}$ de las máscaras que hay son de animales y $\frac{2}{5}$ son de monstruos. ¿Qué fracción representa el total de máscaras de animales y de monstruos que hay en la fiesta?

b. Eduardo pesco tres peces: uno de cuatro quintos de kilogramos, otro de tres cuartos de kilogramos y el último de siete decimos de kilogramos ¿Cuantos kilogramos pesan los tres peces?

c. Un hombre vende $\frac{1}{3}$ de su finca, alquila $\frac{1}{8}$ y lo restante lo cultiva. ¿Qué fracción de la finca cultiva?

5) ¿Qué relación observó entre los resultados de cada problema y la expresión gráfica que aparecía en el archivo de GeoGebra?

6) ¿podría afirmar que el uso de esta herramienta facilito resolver los problemas? ¿Por qué?

7) ¿Cuál o cuáles punto (s) se le dificultó? ¿Por qué?

Anexos D. Momento de Reenfoque

NOMBRE:__________________________________GRADO:__________FECHA:

1. La bufanda de Susana mide $\frac{3}{4}$ de metro, la de Sara, $\frac{2}{3}$ de metro y la de Roberto $\frac{5}{7}$ de metro. ¿Quién tiene la bufanda más larga? Y ¿Qué fracción representa la cantidad de metros demás que él o ella tienen con respecto a los otros dos?

2. Carlos se ha gastado $\frac{1}{3}$ del dinero que le dieron de paga sus abuelos en comprar un libro de aventuras. También se ha gastado $\frac{2}{9}$ de la paga en comprar una bolsa de dulces. ¿Qué fracción de su paga se ha gastado Carlos?

Bucaramanga, Santander. Octubre 18 del 2017

ASUNTO: Autorización

COLEGIO DEL SAGRADO CORAZÓN DE JESÚS.

Yo [redacted] padre de familia y/o acudiente del estudiante [redacted] de 11 años de edad y quien cursa actualmente el grado 5-01 en esta institución, autorizo a mi hijo (a) y/o acudido(a), menor de edad, para participar en el proyecto del docente Wilson David Peñaloza Castro, en el área de matemáticas, durante el presente semestre académico.

De igual manera doy total y plena autorización al docente para grabar, fotografiar, filmar y/o interactuar con mi hij(a) y/o acudido(a), en cuanto a lo que esté relacionado con dicho proyecto.

ATENTAMENTE

Padre de familia y/o acudiente

c.c. 63.546.815

Bucaramanga, Santander. Octubre 18 del 2017

ASUNTO: Autorización

COLEGIO DEL SAGRADO CORAZÓN DE JESÚS.

Yo [redacted] padre de familia y/o acudiente del estudiante [redacted] de 10 años de edad y quien cursa actualmente el grado Quinto en esta institución, autorizo a mi hijo (a) y/o acudido(a), menor de edad, para participar en el proyecto del docente Wilson David Peñaloza Castro, en el área de matemáticas, durante el presente semestre académico.

De igual manera doy total y plena autorización al docente para grabar, fotografiar, filmar y/o interactuar con mi hij(a) y/o acudido(a), en cuanto a lo que esté relacionado con dicho proyecto.

ATENTAMENTE

Mónica García Lizcano

Padre de familia y/o acudiente

C.C. 63'533.992 Bga.

Bucaramanga, Santander. Octubre 18 del 2017

ASUNTO: Autorización

COLEGIO DEL SAGRADO CORAZÓN DE JESÚS.

Yo [redacted] padre de familia y/o acudiente del estudiante [redacted] de 10 años de edad y quien cursa actualmente el grado Quinto en esta institución, autorizo a mi hijo (a) y/o acudido(a), menor de edad, para participar en el proyecto del docente Wilson David Peñaloza Castro, en el área de matemáticas, durante el presente semestre académico.

De igual manera doy total y plena autorización al docente para grabar, fotografiar, filmar y/o interactuar con mi hij(a) y/o acudido(a), en cuanto a lo que esté relacionado con dicho proyecto.

ATENTAMENTE

Padre de familia y/o acudiente

C.C. 37558509

Bucaramanga, Santander. Octubre 19 del 2017

ASUNTO: Autorización

COLEGIO DEL SAGRADO CORAZÓN DE JESÚS.

Yo ÁNGELA VARGAS MENDOZA rectora y representante legal del Colegio Del Sagrado Corazón De Jesús, del municipio de Bucaramanga, en el departamento de Santander, autorizo al docente Wilson David Peñaloza Castro, para desarrollar el proyecto de la Maestría en Enseñanza de la Ciencias, de la Universidad Autónoma de Manizales, en el área de matemáticas, con los estudiantes del grado a su cargo, durante el presente semestre académico.

De igual manera doy autorización al docente para grabar voces sin identificar a los estudiantes, solo en el caso de que sea autorizado por los padres de familia y sólo con fines educativos.

ATENTAMENTE

Angela Vargas Mendoza

RECTOR

C.C. ____________