



TRANSFORMACIONES DE TRATAMIENTO Y CONVERSIÓN EN SITUACIONES  
DE LA FRACCION COMO OPERADOR

MARGY LISETH CAMPOS ARISMENDY

TERESA ROJAS CALDERÓN

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES  
FACULTAD DE ESTUDIOS SOCIALES Y EMPRESARIALES  
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

MANIZALES

2020

TRANSFORMACIONES DE TRATAMIENTO Y CONVERSIÓN EN SITUACIONES  
DE LA FRACCION COMO OPERADOR

Autores

MARGY LISETH CAMPOS ARISMENDY

TERESA ROJAS CALDERÓN

Proyecto de grado para optar al título de Magister en Enseñanza De Las Ciencias

Asesor

JUAN PABLO MARÍN GRISALES

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES

FACULTAD DE ESTUDIOS SOCIALES Y EMPRESARIALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

MANIZALES

2020

## RESUMEN

Este documento presenta los resultados de la investigación cuyo objetivo consistió en la caracterización de transformaciones de tratamiento y conversión en situaciones de la fracción como operador. El trabajo se llevó a cabo con estudiantes de grado séptimo, en la Escuela Normal Superior Francisco de Paula Santander de municipio de Málaga, Santander. La metodología utilizada es tipo descriptivo, enmarcado dentro del enfoque cualitativo.

Este trabajo presenta una investigación con el propósito de caracterizar las dificultades en las transformaciones de tratamiento y conversión al solucionar situaciones de suma y resta en el contexto de la fracción como operador.

Los principales resultados del estudio evidenciaron que los estudiantes presentan dificultades para reconocer transformaciones de tratamiento al interior de un mismo registro debido a que carecen de conceptos elementales y conexión con la realidad, el estudiante antes de enfrentarse a situaciones matemáticas debe reconocer el contexto y hacerse una idea gráfica de lo que quiere operar. Este requiere la articulación de varios conceptos matemáticos como también del dominio de habilidades en cuanto al uso de procesos.

Según la investigación al estudiante se le hace más complejo los tratamientos dentro de un mismo registro que el realizar conversiones, esto tiene que ver con el proceso de visualización, ya que para realizar tratamientos requiere de conceptos claros y la respectiva mecanización de procedimientos.

**Palabras Clave:** tratamiento, conversión, representaciones semióticas, indicadores de dificultad.

## ABSTRACT

The purpose of this study is to characterize transformations of treatment and conversion in situations of the fraction as an operator. The research was conducted with seventh-grade students at the Francisco de Paula Santander High School in the municipality of Malaga, Santander. A descriptive type methodology, framed within the qualitative approach was used for this paper.

The research aims at characterizing the difficulties in the transformations of treatment and conversion by solving situations of addition and subtraction in the context of the fraction as an operator.

Difficulties in recognizing transformations of treatment within the same register were found because of the lack of elementary concepts and connection with reality. Students before facing mathematical situations must recognize the context and get a graphic idea of what they want to operate. This process requires the articulation of several mathematical concepts as well as the mastery of skills in the use of processes.

According to the research students find it difficult complex treatments within the same register than performing conversions. This is related to the visualization process as it is necessary to have clear concepts and the respective mechanization of procedures to conduct treatments.

**Keywords:** treatment, conversion, semiotic representations, difficulty indicators.

## TABLA DE CONTENIDO

1	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	11
1.1	DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA .....	11
1.2	FORMULACIÓN DEL PROBLEMA .....	12
2	JUSTIFICACIÓN .....	13
3	OBJETIVOS .....	15
3.1	OBJETIVO GENERAL .....	15
3.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	15
4	MARCO TEÓRICO .....	16
4.1	ANTECEDENTES .....	16
4.2	REFERENTES TEÓRICOS .....	19
4.2.1	Fracción como operador .....	19
4.2.2	Resolución de problemas en el contexto de la fracción .....	20
4.2.3	Errores y dificultades en la resolución de problemas con números racionales.....	20
4.2.4	Representaciones semióticas.....	21
4.2.5	Actividades inherentes a toda representación .....	22
4.2.6	Tratamiento .....	23
4.2.7	La Conversión .....	23

5	METODOLOGÍA.....	25
5.1	ENFOQUE DE LA INVESTIGACIÓN.....	25
5.2	POBLACIÓN Y MUESTRA .....	25
5.3	TÉCNICAS E INSTRUMENTOS .....	27
5.3.1	Cuestionario escrito .....	27
5.3.2	Entrevista no estandarizada.....	28
5.4	FASES DEL PROYECTO .....	29
5.4.1	Exploración .....	29
5.4.2	Intervención .....	30
5.4.3	Evaluación .....	30
5.5	PLAN DE ANÁLISIS .....	30
6	ANÁLISIS DE DATOS .....	34
6.1	ANÁLISIS FASE DE EXPLORACIÓN.....	34
6.1.1	Análisis en cuanto al tratamiento.....	34
6.1.2	Análisis en cuanto a la conversión.....	42
6.2	ANÁLISIS FASE DE EVALUACIÓN.....	51
6.2.1	Análisis en cuanto al tratamiento.....	51
6.2.2	Análisis en cuanto a la conversión.....	57

6.3	ANÁLISIS GENERAL ENTRE LAS FASES DE EXPLORACIÓN Y EVALUACIÓN .....	60
7	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....	65
8	BIBLIOGRAFIA.....	69

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Estructura plan de análisis.....	33
Figura 2. Dificultades evidenciadas en las transformaciones de tratamiento, registros y porcentajes. Datos tomados del anexo 1.....	36
Figura 3. Dificultades en la suma de fracciones heterogéneas. ....	37
Figura 4. Confunde el algoritmo de la suma de fracciones con el de la multiplicación.....	37
Figura 5. Dificultad en la simplificación y amplificación de fracciones.....	38
Figura 6. Dificultad para descomponer la unidad en partes iguales.....	39
Figura 7. No comprende el concepto de fracción parte todo y le genera dificultad para realizar el procedimiento. ....	40
Figura 8 Dificultad en el desarrollo del mínimo común múltiplo.....	41
Figura 9 Dificultades en las transformaciones de conversión. Datos tomados del anexo 1.	44
Figura 10 Registro verbal – pictórico y gráfico.....	45
Figura 11 Pictórico _ aritmético.....	46
Figura 12 Aritmético- pictórico.....	47
Figura 13 Conceptual – significados (fracción propia e impropia).....	48
Figura 14 Paso de lo continuo a lo discreto.....	49
Figura 15 .Registro verbal al aritmético.....	50



Figura 16 Dificultades en el tratamiento de la fracción como operador suma y resta en la fase de evaluación. Datos tomados del anexo 1. ....	52
Figura 17 Dificultad en la simplificación y amplificación de fracciones.....	53
Figura 18 Dificultad para descomponer la unidad en partes iguales .....	53
Figura 19 Confunde el algoritmo de la amplificación de fracciones con el de la multiplicación .....	54
Figura 20. No comprende el concepto de fracción parte de un todo que le genera dificultad para realizar el procedimiento. ....	55
Figura 21 Dificultad en el desarrollo del mínimo común múltiplo.....	56
Figura 22 Dificultades en las representaciones semióticas evidenciadas en las unidades de registro que dan cuenta de la conversión en situaciones de la fracción como operador suma y resta. Datos tomados del anexo 1. ....	58
Figura 23 Dificultad para pasar del registro pictórico–aritmético.....	58
Figura 24 Dificultad para representar una fracción es decir pasar del registro aritmético – pictórico.....	59
Figura 25 Comparativo entre la fase de exploración y fase de evaluación en tratamientos. ....	62
Figura 26 Comparativo entre la fase de exploración y fase de evaluación en conversiones. ....	64

## LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Estudiantes que cumplen los criterios para participar en el estudio de caso dentro de la Escuela Normal Superior Francisco de Paula Santander.....	26
Tabla 2 Transcripción de registro escrito y verbal .....	31
Tabla 3 Caracterización de instrumentos según transcripciones .....	31
Tabla 4. Unidades de registro por categorías .....	32
Tabla 5. Frecuencias absolutas de las categorías.....	32
Tabla 6. Frecuencias Absolutas de las Categorías.....	33
Tabla 7. Dificultades en las transformaciones de tratamiento.....	35
Tabla 8. Dificultades de conversión. ....	43
Tabla 9. Dificultades en las transformaciones de tratamiento.....	51
Tabla 10. Dificultades en las conversiones .....	57
Tabla 11. Análisis general de las dificultades en las transformaciones de tratamiento.....	61
Tabla 12. Análisis general de las dificultades en las transformaciones de conversión. ....	63

# 1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

## 1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

En varias sesiones de clase realizadas en el grado séptimo de la Escuela Normal Superior Francisco de Paula Santander se han identificado dificultades en los estudiantes al resolver operaciones de suma y resta de fracciones heterogéneas. Los estudiantes no son capaces de identificar el común denominador, simplificar los resultados, hacer las sumas correspondientes y entender la intención de la operación en un problema determinado, es decir presentan dificultad en las operaciones. Los estudiantes se preocupan por memorizar el algoritmo dejando a un lado el significado y el sentido de dicho objeto matemático a tal punto que al presentar situaciones diferentes a las trabajadas en clase los estudiantes no saben qué hacer.

En palabras de Linares (1998):

*“La razón de que los algoritmos se puedan convertir en reglas sin sentido puede ser debido a una introducción demasiado temprana en la escuela (translación demasiado rápida hacia el manejo de símbolos sin la existencia de un esquema conceptual), pero también en algunos casos por una introducción desvinculada de un fundamento suficientemente concreto y natural a la operación (falta de la existencia de un modelo de comprensión)...los algoritmos deben ser el resultado final de la síntesis de evolución de las estrategias personales” (p. 133).*

Siendo esta una preocupación sentida por parte de los docentes de la institución se plantea la inquietud de identificar cuáles son las bases de dichos problemas, de qué manera los estudiantes se acercan al concepto de suma y resta en la fracción y sobre que transformaciones de tratamiento y conversión se apoyan al resolver las situaciones planteadas. Lo anterior para identificar desde donde se deben replantear los procesos de intervención pedagógica en el aula de clase, sobre qué bases epistemológicas hay que trabajar y en qué aspectos de la enseñanza-aprendizaje se debe mejorar.

Por lo tanto, se deben considerar como punto de partida el análisis de los procedimientos que siguen los estudiantes al solucionar situaciones que involucran la fracción como operador; caracterizar los tratamientos y conversión como también sus dificultades en las operaciones de suma y resta de la fracción para comprender de qué manera el estudiante está abordando este tipo de operaciones y qué registros utiliza.

Según Duval (1999) se hace necesario de manera especial, apropiarse de posibilidades para transformar una representación semiótica de un objeto matemático en otra. Tales transformaciones entre representaciones semióticas se dan tanto al interior de un mismo registro de representación semiótica como entre registros diferenciados, transformaciones que Duval denomina tratamientos y conversiones, respectivamente.

## **1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA**

¿De qué manera se pueden caracterizar las dificultades en las transformaciones de tratamiento y conversión al solucionar situaciones de suma y resta en el contexto de la fracción como operador en estudiantes de grado Séptimo de la Escuela Normal Superior?

## 2 JUSTIFICACIÓN

Las dificultades reportadas a nivel de la literatura en didáctica de las matemáticas, así como las manifestadas por docentes y estudiantes en relación con la suma y resta en el contexto de la fracción como operador están asociadas a diversos factores: procedimientos algorítmicos, uso de diversas representaciones y transformaciones de tratamiento y conversión.

Es por esto que la presente investigación busca identificar dichas dificultades en las transformaciones de tratamiento y conversión que afectan estos procedimientos (suma y resta de la fracción como operador) para analizar las destrezas y elementos que se deben mejorar en la adquisición de habilidades y competencias del objeto de estudio. De acuerdo a Ríos (2007), las dificultades en el aprendizaje del concepto fracción se debe, en parte, a las diversas representaciones que tiene este concepto (parte - todo, cociente, razón, operador, medida) y que a la hora de enseñarlo, no son considerados todos los contextos, e inclusive en algunos casos, si se trabajan algunas representaciones, no se establecen relaciones entre ellas; lo cual lleva a que el aprendizaje no se produzca de la mejor manera y se vea la necesidad de abordar uno de ellos teniendo en cuenta la incidencia que tienen los otros.

Es decir, que el análisis de las dificultades que puedan estar relacionadas con la fracción como operador, brinda a la investigación una base sólida para inferir posibles causas y analizar otras metodologías requeridas para ayudar al estudiante.

En consecuencia, caracterizar este tipo de dificultades puede ayudar a los docentes a re significar sus prácticas, para que la operacionalización de la fracción sea un proceso más ameno para el estudiante y más coherente a la hora de resolver situaciones problema. Lo que induce a querer buscar otras formas de acercamiento a estos conceptos y procedimientos matemáticos.

Así mismo, es deseable que los estudiantes operen y apliquen correctamente, el concepto de fracción. Además, es justo reconocer que este tema posee una notable importancia, por cuanto fundamenta otros conceptos y su empleo en contextos de las matemáticas, otras disciplinas y situaciones cotidianas, es fundamental. Lo que hace pensar que el desarrollo de competencias matemáticas relacionadas con las fracciones es indispensable para la comprensión de fenómenos de diferente naturaleza.

Por lo expuesto hasta ahora, el presente trabajo hace un gran aporte en este tema de fracciones, ya que trata dos aspectos relevantes para lograr un buen aprendizaje, como son: el tratamiento y la conversión, pues al caracterizar las dificultades que presentan los estudiantes se nutre la reflexión y el razonamiento acerca de lo que se debe hacer en el aula de clase, con el propósito de mejorar la comprensión de un concepto tan ampliamente aplicado en la vida cotidiana.

### **3 OBJETIVOS**

#### **3.1 OBJETIVO GENERAL**

Caracterizar las dificultades en las transformaciones de tratamiento y conversión al solucionar situaciones de suma y resta en el contexto de la fracción como operador en estudiantes de grado Séptimo de la Escuela Normal Superior.

#### **3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Describir las dificultades de los estudiantes en las transformaciones de tratamiento al solucionar situaciones de suma y resta en el contexto de la fracción como operador.
- Describir las dificultades de los estudiantes en las transformaciones de conversión al solucionar situaciones de suma y resta en el contexto de la fracción como operador.
- Comparar y describir las dificultades que presentan los estudiantes en las transformaciones de tratamiento y conversión al realizar un proceso de intervención.

## 4 MARCO TEÓRICO

### 4.1 ANTECEDENTES

Se han realizado diversas investigaciones respecto a las fracciones; algunas sobre sus tratamientos y otras sobre las dificultades que se presentan cuando se enseña y aprende fracciones. He aquí algunos trabajos referidos a la temática las cuales dan bases en la investigación.

Marín (2017) en su tesis de Maestría titulada: *Caracterización de tratamientos, sentidos y significados en situaciones de la fracción como medida en docentes de básica primaria*, describe los elementos centrales que caracterizaron los tratamientos, sentidos y significados que los estudiantes articulan e involucran en situaciones que requieren el uso de la fracción como medida. Esta investigación fue desarrollada mediante un enfoque cualitativo de tipo descriptivo – interpretativo a partir del estudio de caso en donde se describió e interpretó la información de los participantes. Como resultado del estudio se evidenció que los significados están íntimamente relacionados con los sentidos y con los tratamientos, ya que ellos vienen de relaciones ontológicas que tienen una relación directa con su conservación, modificación o asignación. Este proyecto de investigación permite evidenciar lo pertinente de profundizar en los docentes el estudio de los pensamientos matemáticos, además muestra el estudio de la fracción desde el contexto de la medida, los tratamientos y la articulación de los sentidos, generando interés en la temática de la fracción.

Ríos (2007) en su artículo: **Una ingeniería didáctica aplicada sobre fracciones**, afirma que las dificultades en el aprendizaje del concepto de fracción se deben, en parte a las diversas representaciones que tiene este concepto. El autor menciona que su investigación le permitió crear una propuesta para mejorar el proceso enseñanza – aprendizaje, basada en una metodología de ingeniería didáctica enfocada a la efectividad de la aplicación en una secuencia de actividades aplicadas a las fracciones. En este artículo se puede encontrar información significativa acerca de la teoría de situaciones didácticas, para



mostrar la eficiencia de la propuesta de Ingeniería Didáctica en el proceso de enseñanza de las fracciones.

Ruiz (2013) en su trabajo de profundización: **“La fracción como relación parte – todo y como cociente.”** Presenta una propuesta en Educación Básica, para la enseñanza de las fracciones, la cual aborda dos puntos de vista: la fracción como relación parte - todo y la fracción como cociente. En esta Propuesta Didáctica, el autor construyó una secuencia de enseñanza que facilita la comprensión de la fracción en las formas mencionadas, apuntando a mejorar los desempeños en las evaluaciones de la educación colombiana. Las actividades se organizan en cinco partes: preconceptos, objetivos, conceptos a trabajar, metodología y guía de clase. Esta propuesta consta de 12 actividades en total, 9 de estas se refieren a guías de clase y 3 a actividades lúdicas. Este trabajo de profundización permite conocer una estrategia relevante de aprendizaje llevada a cabo en educación primaria y dirigida al estudio de las fracciones, adicionalmente aporta información acerca de la caracterización de tratamientos en el manejo de la fracción como operador suma y resta.

Hurtado (2012), en su tesis de Maestría titulada: **Una propuesta para la enseñanza de fracciones en el grado sexto.** Presenta una propuesta diseñada con base a la resolución de problemas, enfocada a desarrollar las capacidades de los niños para comprender, proponer soluciones y resolver problemas de diversos textos, valorando e interpretando los resultados obtenidos por ellos. Como resultado de esta metodología se obtiene un incremento significativo del número de estudiantes que aciertan en la solución de los problemas propuestos. Este proyecto basado en el método de enseñanza aprendizaje a partir de la resolución de problemas, permite caracterizar esta metodología como una importante herramienta dirigida al estudio de las fracciones.

Murillo (2014), en su tesis de grado: Las Prácticas de enseñanza empleadas por los docentes de Matemáticas y sus relaciones en la solución de situaciones cotidianas con fracciones. Analiza las posibles conexiones entre las prácticas de enseñanza utilizadas por docentes de matemáticas y el conocimiento del concepto general en los estudiantes. Esta investigación se enmarca de manera cualitativa, bajo el enfoque de teoría fundamentada y

con una estrategia metodológica basada en el estudio de casos. Este proyecto de investigación permite analizar teorías y aportes significativos frente a la relación existente entre el método de enseñanza y el resultado en el aprendizaje, enfocado en la comprensión del concepto, de las operaciones, formas de expresión y habilidades desarrolladas frente al estudio de las fracciones en situaciones del diario vivir.

Castaño & García (2014), en su tesis de maestría **Dificultades en la enseñanza de las operaciones con números racionales en la educación secundaria**, Analiza la dificultad para el aprendizaje a partir del método de enseñanza implementado por los docentes, con el objetivo de indagar e identificar cuáles son las dificultades reales presentadas por los tutores en la enseñanza de los números racionales con sus operaciones básicas, para ello el autor implementa un estudio de tipo mixto, con tendencia a lo cualitativo mediante el uso de dos instrumentos (cuestionario y taller) para recolectar la información necesaria. Esta investigación brinda herramientas esenciales, que permiten tener una visión clara acerca de la manera en que se transmite el conocimiento, transformando las actividades de enseñanza - aprendizaje, pues todo aquello que es bien enseñado ha de ser automáticamente bien aprendido por los estudiantes.

Gutiérrez & Parada (2007) en su tesis de maestría “**caracterización de tratamientos y conversiones: El caso de la función afín en el marco de las aplicaciones.**” En este trabajo de investigación se caracterizó las transformaciones de tres situaciones modeladas mediante una función afín, mediante el estudio de producciones escritas de un grupo de cálculo diferencial. Obteniendo como resultado un bajo nivel de articulación entre registros de representación, así mismo el uso de la función lineal como una herramienta en la solución de problemas asociados a la variación. Este proyecto amplía el conocimiento relacionado con la caracterización de tratamientos, brindando evidencias de los diversos registros que en la misma se plantean, permitiendo identificar las representaciones que emplean los estudiantes al momento de enfrentarse a la fracción como operador.

Morales, (2014) en su tesis de maestría “**Dificultades y errores en la solución de problemas con números racionales**”, responde a la pregunta: ¿Cuáles y de qué manera se

presentan los errores que evidencian las dificultades que poseen los estudiantes al enfrentarse a la resolución de problemas con números racionales? Mostrando que algunos errores de los estudiantes pueden ser ocasionados por las dificultades en el manejo del lenguaje matemático, lo que se refleja en los problemas para interpretar los problemas, la falta de comprensión semántica por lo general conlleva a errores, también a un aprendizaje deficiente de conceptos previos, debido a la complejidad que genera en los estudiantes los números racionales. Esta investigación arroja información acerca del manejo de herramientas adecuadas para indagar asertivamente cuáles son las dificultades que presentan los estudiantes en el proceso de aprendizaje de los números fraccionarios. También aporta un conocimiento previo de los hechos, destrezas y dificultades más comunes al enfrentarse a problemas con números racionales.

## **4.2 REFERENTES TEÓRICOS**

### **4.2.1 Fracción como operador**

La fracción como operador acoge las diversas operaciones (adición, sustracción, multiplicación, cociente), sin embargo, el papel de la fracción como operador comúnmente conocido, es la de un transformador de una cantidad de magnitud el cual tiende a ser considerado como el producto de  $m$  por  $\frac{1}{n}$ , siendo esta última una subunidad de medida, esto lo afirma Vasco (1994). Este transformador se puede entender como una sucesión de multiplicaciones y divisiones.

Al respecto Lamon (1999) citada en Charalambous y Pitta – Pantazi (2007) define operador como transformador que alarga o acorta segmentos de una línea, aumento o disminución de un juego de objetos discretos. Chamorro (2003) menciona que la interpretación de la fracción como operador se apoya en el significado de función. Un número racional actuando sobre una parte, un grupo o un número modificándolo.

#### **4.2.2 Resolución de problemas en el contexto de la fracción**

Las dificultades más comunes en el proceso de aprendizaje se derivan de la multiplicidad de contextos y el significado de fracción. Una estrategia didáctica que hace viable el aprendizaje de las fracciones para estos propósitos es la resolución de problemas con diferentes niveles de dificultad. Los problemas deben ser diseñados y redactados de manera eficiente y teniendo en cuenta que el nivel de dificultad debe estar sujeto al rendimiento de los estudiantes. El docente debe estar pendiente de las dudas que puedan surgir y guiarlos en la formulación de sus soluciones.

#### **4.2.3 Errores y dificultades en la resolución de problemas con números racionales**

Dentro de los temas que más generan dificultades, en los estudiantes es el generalizar las formas en que se tratan los números naturales y aplicárselos a los números racionales, por ejemplo en la adición el estudiante maneja la linealidad de los números naturales buscando aplicarla en los números racionales, el análisis de estas situaciones son una de las preocupaciones más constantes entre los profesores (Abrate,Pochulu,&Vargas 2006).

Palarea, Ruano & Socas, (2008) plantean que los errores aparecen en los estudiantes cuando es obligado a enfrentar conocimientos nuevos, que los obliguen a hacer una revisión o a reestructurar lo que ya conocen. Es decir, la asimilación del nuevo conocimiento se logra cuando para el estudiante tiene sentido, de lo contrario el estudiante se crea un conflicto, posteriormente el estudiante produce una acomodación de su conocimiento anterior y recobra el equilibrio, es decir que dicho conocimiento no reemplaza al anterior, así resuelve situaciones diferentes y desconocidas.

Según la teoría piagetiana, los procesos psicológicos están muy bien organizados en sistemas coherentes y estos sistemas están preparados para adaptarse a los estímulos cambiantes del entorno, donde la persona construye esquemas (teorías) que pueden ser transferidas y generalizadas.

Muchas teorías pedagógicas de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas coinciden en que es necesario identificar los errores en el proceso de aprendizaje, del mismo modo determinar las causas y modificar el modelo de enseñanza teniendo en cuenta esta información. El docente debe preparar a los estudiantes a través del reconocimiento de los saberes previos que podrían obstaculizar el aprendizaje, después activar conocimientos previos y finalmente, estimular la integración y la transferencia en virtud de la nueva información adquirida. Castellanos & Obando (2009) consideran que los estudiantes que no presentan errores visibles, ocultan posiblemente serios errores operacionales, estructurales y procesuales en las matemáticas, que dificultaran los aprendizajes posteriores, el error puede tener procedencias diferentes, considerado como la presencia de un esquema cognitivo inadecuado en el alumno y no solamente como consecuencia de una falta de conocimiento.

#### **4.2.4 Representaciones semióticas**

Las representaciones semióticas juegan un papel primordial en la enseñanza de las matemáticas, ya que son las representaciones las que permiten el acceso a los objetos matemáticos, considerando que las matemáticas a diferencia de otras ciencias, está contenida de objetos no tangibles. Duval (2004) afirma: “la actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación” (Duval, 2004, p. 144).

El campo del aprendizaje de las matemáticas involucra un análisis de procesos cognitivos como es la conceptualización. Estos procesos requieren de la utilización de sistemas de representación diferentes a los del lenguaje natural, ya sea algebraica, geométrica, gráfica, simbólica, esquemas, imágenes entre otros. Duval (2004) “que toman el estatus de lenguajes paralelos al lenguaje natural para expresar las relaciones y las operaciones” (p. 13). Ya que un objeto puede darse a través de diferentes representaciones, estas representaciones deben distinguirse del objeto matemático, sino no podría haber comprensión, pues ésta se perdería cuando se confunde el objeto matemático de su representación.

Respecto a las representaciones, es importante hacer la diferencia entre representaciones mentales y representaciones semióticas. Duval (2004) menciona que las representaciones mentales están conformadas por todo el conjunto de concepciones o imágenes que un individuo tiene acerca de un objeto, son la interiorización de las representaciones semióticas; y las representaciones semióticas son las producciones constituidas por el empleo de signos; no son más que el medio por el cual disponen los individuos para exteriorizar sus representaciones mentales, para hacerlas visibles y accesibles a otros. Según Duval (1998), un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis: 1) La presencia de una representación identificable. 2) El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formulada 3) La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.

Es decir, con dos tipos de registros disímiles, con diferentes representaciones. El dominio de las operaciones necesarias para cambiar la forma mediante la cual se representa un conocimiento es primordial, ya que se constituye en una operación cognitiva básica que está muy relacionada con los tratamientos de comprensión y con las dificultades del aprendizaje conceptual. Esto puede ser la causa de obstáculos que sólo la coordinación de varios registros semióticos ayuda a remontarlos, y en consecuencia el dominio de la habilidad para cambiar de registro de cualquier representación semiótica en el aprendizaje de la matemática se torna fundamental.

#### **4.2.5 Actividades inherentes a toda representación**

Los sistemas semióticos considerados desde un punto de vista de su diversidad y su papel con el funcionamiento del pensamiento, Duval (2004) plantea tres actividades cognitivas inherentes a toda representación: La primera, la “formación” las cuales son las representaciones de un registro semiótico particular, la cual constituye un conjunto de

marcas perceptibles e identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado.

La segunda, “tratamiento”, las cuales son las transformaciones propias de cada registro, de acuerdo con unas únicas reglas que le son propias al sistema, de modo que a partir de éstas se obtengan otras representaciones que puedan constituirse como una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales. La tercera, “conversión”, como aquella habilidad para el cambio de registro de representación semiótica, el poder convertir las representaciones producidas de un sistema de representación a otro sistema, de manera que este otro sistema permita explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado. Escobar, G (2017).

#### **4.2.6 Tratamiento**

Es la transformación de una representación inicial en otra representación terminal, respecto a una cuestión, un problema. Un tratamiento es una transformación de la representación interna a un registro de representación o a un sistema. Ejemplo: El cálculo es un tratamiento interno al registro de una escritura simbólica de cifras o de letras: sustituye, en el mismo registro de una escritura de números expresiones nuevas por expresiones dadas; sin embargo, el término cálculo tiene en matemáticas un significado más amplio: se llama cálculo a todo proceso de transformación de escritura de los números combinando actividad de tratamiento y actividad de conversión (Escobar 2016).

#### **4.2.7 La Conversión**

Es la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada en un registro, en una representación de ese mismo objeto, o de la misma información en otro registro. Un tratamiento no moviliza más que un solo registro de representación. La conversión es, al contrario, una transformación que hace pasar de un registro a otro; requiere de la coordinación por parte del sujeto que la efectúa. Este proceso permite comprender el estrecho lazo entre semiosis y noesis. Entre la conversión y el

tratamiento es necesario precisar que cognitivamente, son bastante independientes la una de la otra, aunque matemáticamente la primera depende de la segunda; es la razón por la cual la conversión de representación es el primer umbral de la comprensión en el aprendizaje de las matemáticas.

La conversión y el tratamiento deben ser separados para analizar lo que hacen los estudiantes cuando se enfrentan al problema. La comprensión conceptual surge de la coordinación de los diversos sistemas semióticos usados y darse cuenta de la forma específica de representar para cada sistema semiótico es condición cognitiva para la comprensión (Duval 1999).



## **5 METODOLOGÍA**

### **5.1 ENFOQUE DE LA INVESTIGACIÓN**

La siguiente investigación se encuentra definida dentro del enfoque de Investigación cualitativa. Entendido el término “investigación cualitativa” como cualquier tipo de investigación que produce hallazgos a los que no se llega por medio de procedimientos estadísticos u otros medios de cuantificación; es decir, a los datos se les hace primordialmente un análisis interpretativo. El análisis cualitativo, se refiere no a la cuantificación de los datos cualitativos, sino al proceso no matemático de interpretación, realizado con el propósito de descubrir conceptos y relaciones en los datos brutos y luego organizarlos en un esquema explicativo teórico (Tamayo 2001).

Los métodos cualitativos pueden usarse para explorar áreas sustanciales en las cuales se conoce poco o mucho, pero se busca obtener un conocimiento nuevo. Además, los métodos cualitativos se pueden usar para obtener detalles complejos de algunos fenómenos, tales como sentimientos, procesos de pensamiento y emociones, difíciles de extraer o de aprehender por métodos de investigación más convencionales.

Teniendo en cuenta que el estudio se orientará en caracterizar los tratamientos en situaciones de suma y resta en el contexto de la fracción como operador, se considera pertinente enmarcar el proyecto en el enfoque cualitativo descriptivo- Interpretativo. De acuerdo a Tamayo (2001) este enfoque cualitativo y a la vez interpretativo permite que sea usado en pequeños grupos o comunidades ya que los datos obtenidos de la realidad y las poblaciones de estudio pueden ser trabajados bajo un diseño flexible.

### **5.2 POBLACIÓN Y MUESTRA**

La institución en donde se pretende realizar la investigación corresponde a la Escuela Normal Superior Francisco de Paula Santander ubicada en la ciudad de Málaga Departamento de Santander. La Institución cuenta con 1206 estudiantes, entre los cuales hay tres séptimos distribuidos así: 7-1,7-2 y 7-3 con aproximadamente 30 estudiantes por

salón. Para efectos de esta investigación se tomarán como muestra 5 estudiantes del grado séptimo elegidos aleatoriamente para efecto de un estudio de caso.

Los estudiantes seleccionados se codificarán de acuerdo a su género (M y F) y orden asignado para diferenciarlos en la recolección y análisis de la información. Esto quiere decir que el código EF1 significa: Estudiante femenino número uno y EM1 significa Estudiante masculino número 1, ver la siguiente tabla:

*Tabla 1. Estudiantes que cumplen los criterios para participar en el estudio de caso dentro de la Escuela Normal Superior Francisco de Paula Santander.*

<b>CÓDIGO</b>	<b>GÉNERO</b>	<b>EDAD</b>	<b>GRADO</b>
<b>EF1</b>	Femenino	11	Séptimo
<b>EF2</b>	Femenino	12	Séptimo
<b>EF3</b>	Femenino	13	Séptimo
<b>EM1</b>	Masculino	12	Séptimo
<b>EM2</b>	Masculino	12	Séptimo

Teniendo en cuenta que es un grupo pequeño de estudiantes, cabe resaltar que esta investigación se desarrolló teniendo en cuenta elementos del estudio de caso, propio de una investigación cualitativa. De acuerdo con Tamayo (1999) este tipo de estudios es apropiado cuando se desean estudiar de manera intensiva algunas características, situaciones o interacciones con pequeños grupos de individuos.

*Este tipo de investigaciones tienen como características el estudio en profundidad de una unidad de observación, teniendo en cuenta características y procesos específicos o el comportamiento total de esa unidad en su ciclo de vida total o un segmento de ella. (Tamayo, 1999, p.49)*

Por lo tanto, el estudio de caso, se utiliza para comprender en profundidad la realidad social y educativa de la temática propuesta en la investigación.

### **5.3 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS**

Como técnicas e instrumentos de recolección de información se utilizará el cuestionario escrito (abierto) y la entrevista no estandarizada, con los cuales se indagarán procedimientos y técnicas empleadas por los estudiantes en la solución de situaciones relacionadas con la fracción como operador. A continuación, se amplía la información concerniente al diseño de cada instrumento:

#### **5.3.1 Cuestionario escrito**

Se ha seleccionado como instrumento de recolección de datos el cuestionario abierto, el cual es un instrumento que permitirá determinar “la medida en que los participantes sostienen creencias similares, comparten ciertos constructos y ejecutan conductas comparables (Goetz & Lecompte, 1988, p. 136). En el cuestionario se formuló una serie de preguntas que permitieron describir las dificultades de los estudiantes en el tratamiento y la conversión.

El cuestionario escrito se diseñó con preguntas de tipo meta-cognitivas que permiten al estudiante planificar los procesos que debe llevar a cabo en una situación, utilizar conocimientos previos, observar su proceso y administrar su propio pensamiento (Zambrano, 2008). La aplicación del cuestionario abierto será de manera individual con el objetivo de encontrar respuestas sobre los procesos de aprendizaje. Esta estrategia de investigación se diseña a través de cuestionarios de tipo abierto o no estructurado “se plantean preguntas y se deja al sujeto la posibilidad de emitir la respuesta en sus propios términos, aunque recomendándole que ésta sea de la mayor claridad y precisión posible” (Moreno, 2000, p.39).

Las preguntas abiertas no limitan las alternativas de respuesta, debido a que brindan un espacio libre para que el encuestado escriba la respuesta que mejor considere. Esto permite obtener respuestas más amplias y redactadas con las propias palabras del encuestado, sin embargo, el número de categorías de respuesta tiende a ser muy elevado.

Este tipo de preguntas suele ser más fácil de construir, pero su análisis requiere de mayor tiempo y dedicación.

A continuación, se presenta un fragmento del cuestionario escrito:

Si un caracol intenta subir una pared, asciende  $\frac{1}{4}$  de la pared, se desliza y desciende  $\frac{1}{5}$  y finalmente asciende  $\frac{2}{3}$ . En qué posición quedo finalmente.

- a. Elabore una gráfica con los movimientos del caracol y la posición final.
- b. Escriba la expresión matemática que represente dicha situación.
- c. Muéstranos el procedimiento que utilizarías para ubicar la posición final del caracol.

### 5.3.2 Entrevista no estandarizada

La entrevista es realizada con el objetivo de abordar el estudio de caso y obtener una visión más amplia sobre las soluciones y procedimientos llevados a cabo por los estudiantes durante el desarrollo de cada situación que ha sido planteada en el cuestionario abierto. Cada una de las preguntas generadas para la entrevista estará enfocada en ampliar y obtener información específica que dé cuenta las dificultades en las transformaciones de tratamiento y conversión aplicadas a la solución de problemas de estructuras aditivas con la fracción como operador.

De acuerdo a Goetz y Lecompte (1988) la entrevista se refiere a “una guía en la que se anticipan las cuestiones generales y la información específica que el investigador quiere reunir” (p.134). Por lo tanto, se pretende analizar los errores en las tareas, medir opiniones, actitudes, percepciones y permitir que los estudiantes puedan matizar las ideas más recurrentes registradas en la aplicación de la prueba escrita. La entrevista no estructurada se realizará en la parte de indagación y en la parte de evaluación, las sesiones de aplicación serán grabadas en audios y transcritas, con el fin de registrar la mayor información posible para poder volver a las intervenciones de los estudiantes o reconstruir las situaciones cuantas veces fuese necesaria.

En este tipo de entrevista no existe una formulación estándar de las preguntas y tampoco un orden de las mismas. Se sigue un poco la conversación con el entrevistado no olvidando nunca el objetivo del investigador.

El cuestionario y la entrevista no estandarizada permiten contar con diversas fuentes de recolección de información para una triangulación adecuada. Campbell y Fiske (1959) citado en Stake (1995) afirman:

*Para conseguir constructos útiles e hipotéticamente realistas en una ciencia se requieren métodos múltiples que se centren en el diagnóstico del mismo constructo desde puntos de observación independientes, mediante una especie de triangulación. (p. 114)*

## **5.4 FASES DEL PROYECTO**

### **5.4.1 Exploración**

En esta primera fase se buscó identificar las dificultades de tratamiento y de conversión en los estudiantes del grado séptimo de la Escuela Normal Superior Francisco de Paula Santander en situaciones relacionadas con las fracciones como operador en la suma y resta. De esta manera se procedió a la aplicación de situaciones problema planteadas para que el estudiante plasmará los tratamientos y las conversiones que creía necesarias para el desarrollo de las mismas, paralelamente se hizo una entrevista no estandarizada la cual permitió obtener una información más completa.

Estos instrumentos aplicados, se llevaron a tablas de registros, se transcribió la información y se organizó por categorías para un análisis previo, seguidamente con la compilación en frecuencias absolutas se logró una caracterización previa.

### **5.4.2 Intervención**

A partir del análisis inicial se procedió a identificar las dificultades más relevantes en la fracción como operador desde los diferentes registros de representación partiendo de los procesos de tratamientos y conversión. Se diseñó una unidad didáctica que permitió abordar de forma significativa los conceptos relacionados con la fracción como operador, se involucraron diferentes estrategias, que les permitió a los estudiantes comprender el contexto de la fracción como operador y por ende encontrar una solución.

### **5.4.3 Evaluación**

Una vez aplicada la unidad didáctica, se realizó un comparativo entre las dificultades evidenciadas en la fase de exploración y las descritas después del momento de la intervención para así ajustar el instrumento de evaluación monitoreando las dificultades de los estudiantes en el tratamiento y la conversión. Se ajustaron los instrumentos, se intervino en aspectos débiles de los estudiantes y se aplicó nuevamente el instrumento de evaluación seguidamente de la entrevista no estandarizada, se llevó a cabo el plan de análisis y se tomaron los resultados para hacer un comparativo y un contraste de la información entre la fase de exploración y la fase de evaluación para analizar el alcance de la intervención.

## **5.5 PLAN DE ANÁLISIS**

A partir de la recolección de información realizada, se plantea el plan de análisis de la siguiente manera:

Aplicar el cuestionario escrito a cada uno de los estudiantes de manera individual y realizar una grabación de las intervenciones orales en la entrevista no estandarizada con el objetivo de ampliar la información recolectada. Transcribir el registro verbal y escrito, de tal manera que se pueda organizar la información por estudiante. Ver tabla 2.

Tabla 2 Transcripción de registro escrito y verbal

<b>CÓDIGO</b>	<b>PREGUNTA</b>	<b>TRANSCRIPCIÓN REGISTRO ESCRITO</b>	<b>TRANSCRIPCIÓN REGISTRO VERBAL</b>
Código de cada uno de los estudiantes (Asignado anteriormente)	Pregunta realizada al estudiante	Transcripción de la respuesta escrita	Transcripción de la entrevista oral, preguntas y respuestas (entrevistador y estudiante)

Al transcribir la información se realiza un primer análisis de las respuestas con el objetivo de identificar aquellas que hagan referencia al uso de las dificultades en las transformaciones de tratamientos en la fracción como operador. Estas respuestas serán organizadas en un nuevo instrumento y se clasificarán por estudiante y categorías, de tal manera que se pueda evidenciar posteriormente los procesos matemáticos, registros o particularidades. (Ver tabla 3)

Tabla 3 Caracterización de instrumentos según transcripciones

Categoría: _____		Estudiante: _____	
<b>Unidad De Contexto</b>	<b>Unidad de Registro Inicial</b>	<b>Unidad de Registro Compilada</b>	
Pregunta realizada al encuestado	Respuestas transcritas en la fase inicial	Frases o respuestas que permitan alcanzar el objeto de la investigación y entender la posición del estudiante frente a la categoría.	

Teniendo en cuenta que este último análisis encierra las respuestas de cada estudiante, se diligenciará una nueva tabla que organizará las unidades de registro compiladas por categoría, lo que permitirá hacer un análisis para saturar las categorías de acuerdo a sus procesos matemáticos, registros o particularidades.

Tabla 4. Unidades de registro por categorías

---

**Categoría:** \_\_\_\_\_

Unidad de registro compilada	Procesos	Regularidades asociada al proceso	Reflexión del investigador
Frasas o respuestas que permitan alcanzar el objeto de la investigación y entender la posición del estudiante.	Clasificar cada respuesta de la unidad de registro compilada en un proceso	Característica asociada	

---

Partiendo de lo anterior se diseñará una nueva tabla que reúna en frecuencias absolutas las categorías ya analizadas y sus regularidades, con el objeto de identificar los puntos que deben ser profundizados en el análisis.

Tabla 5. Frecuencias absolutas de las categorías

---

**CATEGORÍA:** \_\_\_\_\_

Procesos	Frecuencia absoluta por proceso	Regularidades	Frecuencia absoluta por regularidad

---

Se reunirá la información alrededor de las categorías se determinará cuáles procesos y regularidades son los de mayor o menor notabilidad y así caracterizar las dificultades y los tratamientos generados alrededor de la fracción como operador. (Ver tabla 6)

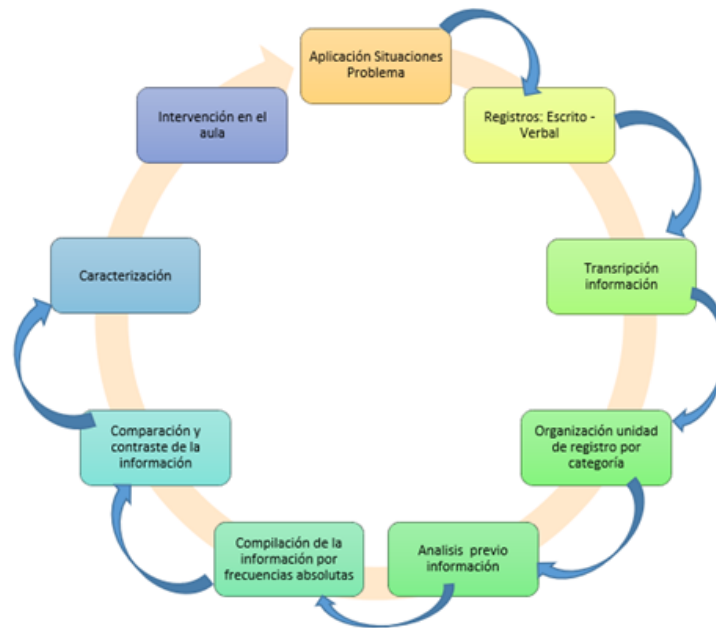


Tabla 6. Frecuencias Absolutas de las Categorías

Resumen						
Categoría o subcategoría 1	Procesos, regularidades y frecuencias					
Nombre de la categoría	Proceso o regularidad y su frecuencia	Proceso o regularidad y su frecuencia	Proceso o regularidad y su frecuencia	Proceso o regularidad y su frecuencia	Proceso o regularidad y su frecuencia	Proceso o regularidad y su frecuencia

A partir de lo anterior se realizará un proceso de intervención alrededor de las dificultades evidenciada y se hará un nuevo análisis para evidenciar si hay o no cambios en las dificultades de los estudiantes al realizar transformaciones de tratamiento y conversión en situaciones de la fracción como operador. A continuación, se presenta un diagrama que resume el plan de análisis:

Figura 1. Estructura plan de análisis



## 6 ANÁLISIS DE DATOS

### 6.1 ANÁLISIS FASE DE EXPLORACIÓN

#### 6.1.1 Análisis en cuanto al tratamiento

El objetivo de la primera presentación del análisis está direccionado en describir las dificultades en las transformaciones de tratamiento que emplean los estudiantes en situaciones de la fracción como operador suma y resta; a la vez contrastar de manera teórica situaciones particulares que indiquen las posibles dificultades presentadas por los estudiantes en la solución de dichas tareas. El estudio fue realizado con 5 estudiantes de grado séptimo de la Escuela Normal Superior Francisco de Paula Santander.

En el análisis se examinaron detalladamente cada una de las intervenciones registradas en el cuestionario escrito y la entrevista no estandarizada y se seleccionaron oraciones con sentido que aludieran al uso de diferentes registros de representación semióticas en la solución de cada tarea. Al analizar las oraciones con sentido se puede observar que se presentan algunas dificultades en el uso de estas representaciones semióticas.

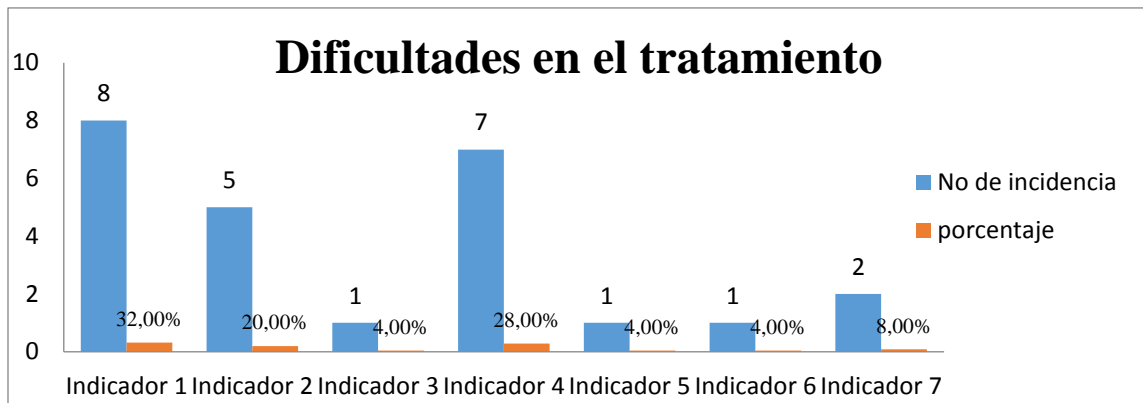
En la siguiente tabla se presentan las dificultades evidenciadas en esta primera parte del análisis las cuales están organizadas por indicadores.

Tabla 7. Dificultades en las transformaciones de tratamiento

No	Indicadores	Número de Registros	Porcentaje	Tipo de dificultad
1	El estudiante suma los numeradores y los denominadores en la suma de fracciones heterogéneas	8	32 %	Procedimental
2	Dificultad en la simplificación y ampliación de fracciones.	5	20 %	Procedimental
3	Dificultad para descomponer la unidad en partes iguales	1	4 %	Procedimental
4	Confunde el algoritmo de la suma de fracciones con el de la multiplicación.	7	28%	Conceptual y procedimental
5	No comprende el concepto de fracción parte todo y le genera dificultad para realizar el procedimiento	1	4 %	Conceptual y de Significados
6	Dificultad en el desarrollo del mínimo común múltiplo.	1	4 %	Conceptual
7	Dificultades para hacer suma de fracciones a través del registro pictórico.  Operacionalización de la fracción a través en el registro pictórico.	2	8 %	Conceptual y procedimental
TOTAL:		26	100%	

Es de anotar que las dificultades procedimentales involucran tanto las simples técnicas y destrezas como las estrategias de aprendizaje y razonamiento (Pozo y Postigo, 2000). Por otro lado, las dificultades conceptuales son por lo tanto desconocimiento de contenidos escolares objeto de intervención educativa que se vinculan con la producción de conocimientos. A continuación, se presenta una gráfica que describe las frecuencias por indicador:

Figura 2. Dificultades evidenciadas en las transformaciones de tratamiento, registros y porcentajes. Datos tomados del anexo 1.



La figura 2 muestra que en situaciones de la fracción como operador las dificultades con mayor frecuencia son de tipo procedimental. El 32 % de las evidencias muestran que los estudiantes suman los numeradores y denominadores entre sí y el 28 % que los estudiantes presentan confusión entre el algoritmo de la suma y el de la multiplicación. Este tipo de dificultades está asociado con las transformaciones de tratamiento ya que los estudiantes confunden conceptos, algoritmos y significados durante la manipulación de un mismo registro. De hecho, el 20 % de las evidencias muestran la dificultad en la simplificación y amplificación de fracciones.

A partir de lo anterior, se presentan algunos casos que evidencian dificultades por indicador:

### Indicador 1. Dificultades en la suma de fracciones heterogéneas

Figura 3. Dificultades en la suma de fracciones heterogéneas.

EMI
<p>Pues sumar las dos fracciones</p> $\frac{1}{10} + \frac{5}{6} = \frac{6}{16}$

Fuente: elaboración propia

El estudiante EM1 al momento de realizar la adición entre números fraccionarios, opera de forma lineal los numeradores y denominadores entre sí, esto evidencia el desconocimiento o debilidad en nociones conceptuales. Fandiño (2009) hace referencia a la presencia de este tipo de conflictos especialmente en las operaciones básicas entre fracciones debido a la mínima importancia que se le da a la aplicación de reglas formales.

### Indicador 2. Confunde el algoritmo de la suma de fracciones con el de la multiplicación.

Figura 4. Confunde el algoritmo de la suma de fracciones con el de la multiplicación.

EF4
<p>Muéstranos paso a paso el procedimiento que vas a utilizar para resolver danos la respuesta.</p> <p>Se multiplica: <math>\frac{1}{8} \times \frac{2}{8} = \frac{8}{16} + \frac{1}{5} = \frac{9}{21}</math>.</p> <p>y 40.</p>

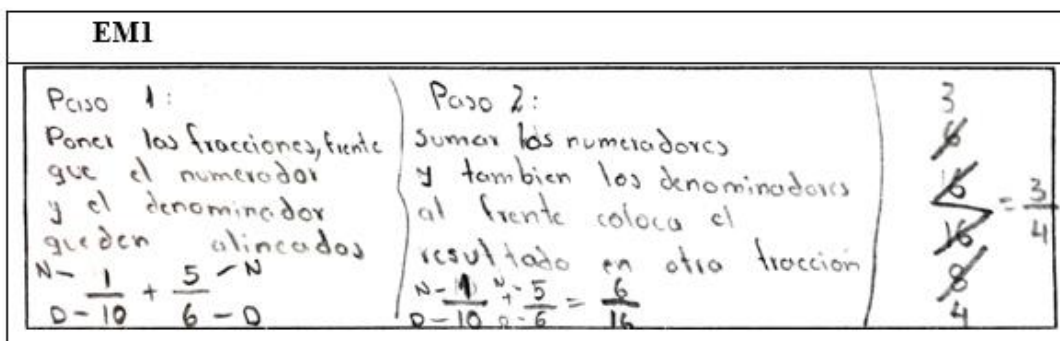
Fuente: elaboración propia

Esta es una de las dificultades con mayor presencia en las unidades de registro ya que confunden el algoritmo de la suma con el de la multiplicación a causa de estrategias adquiridas en su primaria como la “mariposa o carita feliz” las cuales carece de formalidad matemática.

La dificultad evidenciada por el estudiante EF4 al realizar el algoritmo de la suma se presenta por la comprensión errónea del concepto y una operación mecánica. Godino (2004) y Abrete (2006) postulan que los errores presentes en el algoritmo de la suma de fracciones radican en mezclar este algoritmo con la multiplicación.

**Indicador 3. Dificultad en la simplificación y amplificación de fracciones.**

*Figura 5. Dificultad en la simplificación y amplificación de fracciones*

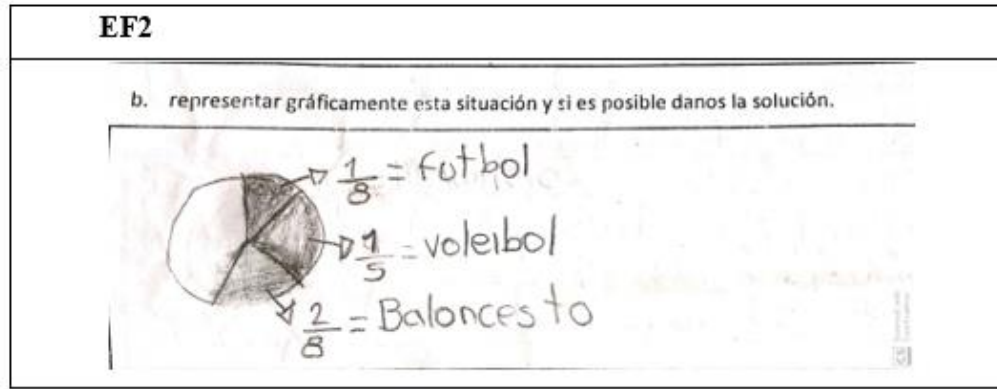


Fuente: elaboración propia

Se evidencia que el 20 % de las 26 unidades de registro muestran una clara dificultad en la conceptualización de la simplificación, según Godino (2006) este error se presenta por vacíos u olvidos de conocimientos previos y están relacionados con las equivalencias entre fraccionarios, una prueba clara de lo anterior se plasma en la operación realizada por el estudiante EM1, donde realiza el procedimiento de simplificación por separado para cada uno de los términos de la fracción, es decir, obtiene la simplificación para el denominador como primer lugar y dejando intacto el numerador, posteriormente efectúa el proceso de simplificación de forma simultánea para los términos de la fracción.

#### Indicador 4. Dificultad para descomponer la unidad en partes iguales

Figura 6. Dificultad para descomponer la unidad en partes iguales



Fuente: elaboración propia

Se puede evidenciar que al 4 % de los estudiantes se les dificulta la descomposición de la fracción como parte de un todo y que estos no reconocen el valor de la fracción en la unidad. En este registro, se observa que el estudiante F2 hace uso de la unidad representada por un círculo dividido aleatoriamente sin tener como base conceptual la razón entre medidas. Por lo tanto, se infiere que el estudiante busca relacionar los fraccionarios mediante subdivisiones de un todo. Según (Llinares y Sánchez, 1997.) “los estudiantes poseen “agujeros conceptuales” en cuanto partición, cociente, razón, y operador haciendo esto más difícil la construcción de un mega concepto de relación entre las partes de las divisiones de la unidad”. (p. 99)

**Indicador 5. No comprende el concepto de fracción parte todo y le genera dificultad para realizar el procedimiento**

Figura 7. No comprende el concepto de fracción parte todo y le genera dificultad para realizar el procedimiento.

EF2
<p>Un padre al morir heredo a sus 3 hijos un terreno de forma rectangular, al primero le correspondieron <math>\frac{3}{20}</math> del terreno, al segundo hijo <math>\frac{8}{40}</math> del terreno. ¿Qué parte del terreno le correspondió al tercer hijo?</p> <p>a. representa la situación haciendo uso de las fracciones.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; width: fit-content; margin: 10px auto;"><math display="block">\frac{3}{20} \times \frac{8}{40} = \frac{12}{37}</math></div>

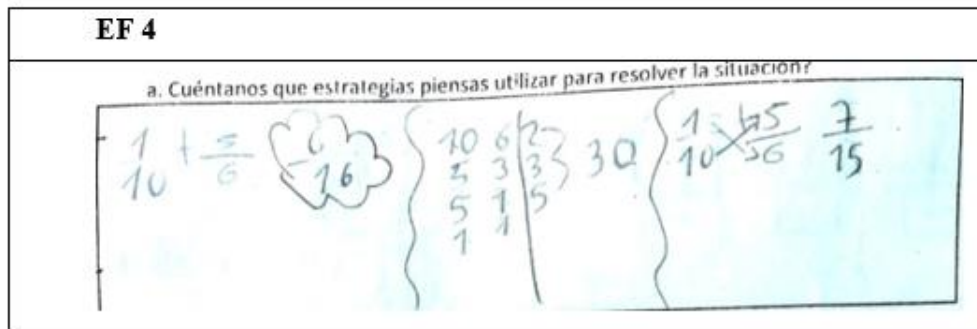
Fuente: elaboración propia

Para el 4 % de los registros tomados se puede identificar que existe dificultad en los estudiantes para reconocer una fracción como parte de un todo, donde no se guarda una relación entre lo discreto con lo continuo y dificultades para lo discreto con lo continuo Según Fandiño (2009) la noción de fracción como parte de un todo es el primer contacto que el estudiante adquiere con las fracciones, haciendo uso del lenguaje común, donde se utiliza palabras tales como: “la mitad”, “medio”, “tercera parte”, entre otras. En algunos casos los niños fraccionan objetos antes de las edades esperadas o son capaces de comprender la idea de mitad y tercio, aunque físicamente tengan dificultad en realizar la división de la figura en partes iguales, entendiendo esto como partes iguales de un todo.

#### **Indicador 6. Dificultad en el desarrollo del mínimo común múltiplo.**



Figura 8 Dificultad en el desarrollo del mínimo común múltiplo

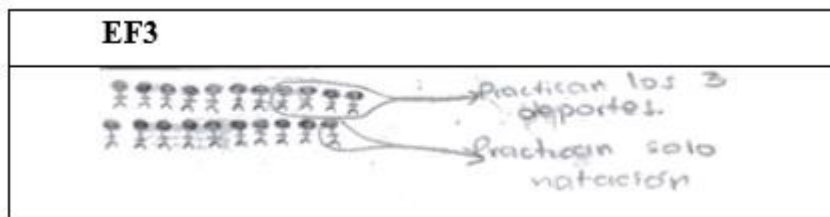


Fuente: elaboración propia

El estudiante EF4 emplea el concepto de mínimo común múltiplo, sin embargo, en el desarrollo de la operación aritmética de las fracciones no aplica dicho concepto. De acuerdo a Godino (2006) estos se deben a lagunas en los conocimientos de los estudiantes que conllevan a tratamientos mecánicos que se alejen de un proceso en la operación.

**Indicador 7. Dificultades para hacer suma de fracciones a través del registro pictórico.**

*Dificultades para hacer suma de fracciones a través del registro pictórico.*



Fuente: elaboración propia

La dificultad evidenciada en 2 de los 26 registros tomados, representando un 8% del total, se logra identificar las diferentes y posibles representaciones en operaciones entre fracciones que debe realizar el estudiante.

Partiendo de que existen diferentes formas de abordar el manejo de las fracciones con sus múltiples representaciones, se evidencia que los estudiantes pueden presentar dificultades en hacer uso de gráficos que puedan representar la fracción, Chamorro (2003)

enfatisa en las dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las fracciones las cuales son: dificultades generadas por diferentes tipos de situaciones problema y las dificultades generadas por diferentes tipos de representación.

### **6.1.2 Análisis en cuanto a la conversión**

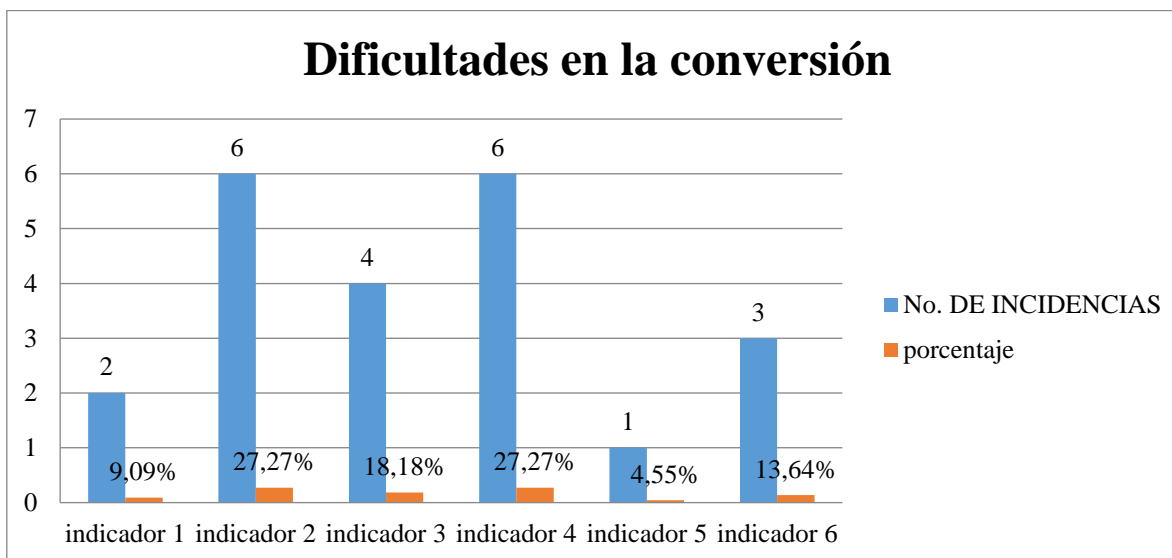
El análisis esta direccionado en describir las dificultades en las transformaciones de conversión que emplean los estudiantes en situaciones de la fracción como operador suma y resta, con el fin de contrastar dificultades frecuentes cuando los estudiantes se encuentran con situaciones en las cuales la conversión hace parte.

A continuación, se presentan las dificultades evidenciadas en las transformaciones de conversión *ver tabla 9* y de las cuales seguirá el análisis respectivo.

Tabla 8. Dificultades de conversión.

No	INDICADORES	No. DE INCIDENCIAS	PORCENTAJE
1	Dificultad para pasar el registro verbal al pictórico y gráfico.  Registro verbal – pictórico y gráfico	2	9,09 %
2	Dificultad para pasar del registro pictórico– aritmético.	6	27,27 %
3	Dificultad para representar una fracción es decir pasar del registro aritmético – pictórico.	4	18,18 %
4	Representa erróneamente la fracción por desconocimiento del concepto de fracción propia e impropia (conceptual – significados)  Significados.	6	27,27 %
5	Naturalización de la fracción (el estudiante trata de convertir un número racional en un entero)  Paso de lo continuo a lo discreto.	1	4,55 %
6	Paso del registro verbal al aritmético.	3	13,64 %
<b>TOTAL</b>		<b>22</b>	<b>100%</b>

Figura 9 Dificultades en las transformaciones de conversión. Datos tomados del anexo 1



En la figura 9 se pueden evidenciar diversas dificultades en la conversión frente a situaciones que se presentan, se ha encontrado que los estudiantes presentan dificultades a la hora de realizar conversiones entre los registros de representación de las fracciones, es decir, trabajan con los registros de manera aislada y sin reconocer las relaciones existentes entre éstos. El hecho de desconocer o no recordar conceptos sobre fracciones hace que la incidencia sea mayor en cuanto a la representación gráfica y el análisis de las mismas. Evidenciando así unos indicadores de dificultad del cambio de un registro a otro.

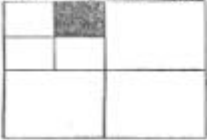
Los siguientes indicadores reflejan las dificultades presentadas al desarrollar situaciones relacionadas con la fracción como operador suma y resta.

### **Indicador 1. Registro verbal – pictórico y gráfico**

Figura 10 Registro verbal – pictórico y gráfico

**EF1**

3. Observa la siguiente imagen:

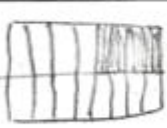


REA/:

a. Que fracción representa el área sombreado. Justifica tu respuesta.

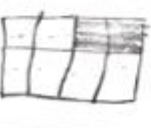
$\frac{1}{4}$  Rta= Porque se repartió en 4 y se tomó 1.

b. Si tomamos toda la unidad y la dividimos en partes iguales que fracción podemos obtener si le restamos el valor de la región sombreada a la mitad? Puedes apoyarte en una representación si así lo prefieres.



Rta=  $\frac{4}{12}$  y le restamos entonces quedan  $\frac{12}{12}$  repartidos pero no se toman ninguno.

c. Plasma el procedimiento y la solución de otra manera



Rta=  $\frac{2}{6}$  pero amplificando quedan  $\frac{4}{12}$  y quedan  $\frac{6}{6}$  y eso equivale a  $\frac{12}{12}$ .

Fuente elaboración propia

Del total de los 18 registros se logra evidenciar que el 9,09% de los estudiantes presentan dificultades en realizar conversiones desde el registro verbal al pictórico, esto debido a los siguientes factores: la falta de orden y organización de las ideas y registros escritos y bajo nivel de comprensión lectora, según Stone (1999) considera la comprensión como el adecuado apropiamiento del conocimiento adquirido con el fin de darle uso novedoso, donde el estudiante es capaz de utilizarlo en diferentes contextos de la vida cotidiana.


## Indicador 2. Pictórico \_ aritmético

Figura 11 Pictórico \_ aritmético

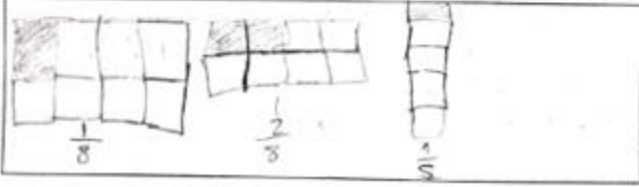
**EF 4**

2. De los estudiantes de un colegio  $\frac{1}{8}$  solo practican fútbol,  $\frac{2}{8}$  practican baloncesto y  $\frac{4}{5}$  practica voleibol. El resto practica natación. ¿Cuántos estudiantes practican los tres deportes y a qué fracción corresponde los practican natación?

a. Cuéntanos de que manera resolverás el problema y de qué manera hallaras la fracción correspondiente a los estudiantes que practican natación



b. representar gráficamente esta situación y si es posible danos la solución.



Fuente elaboración propia

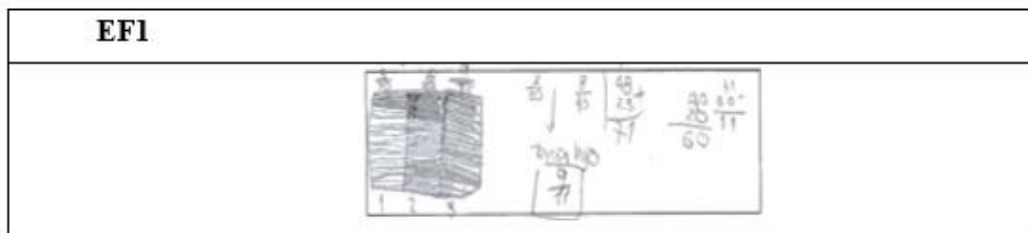
En este caso se evidencia que en la conversión del registro pictórico al aritmético la dificultad se evidencia en la interpretación de las representaciones gráficas. La dificultad radica en no interpretar adecuadamente una gráfica. Pues se hace evidente que el estudiante no tiene claro el concepto de fracción y lo relaciona como si fuera números enteros. En este registro podemos observar que:

El estudiante no dimensiona la unidad y se centra en la parte sombreada aislando las demás partes que la conforman. Uno de los inconvenientes que comúnmente se presentan al momento de tener una adecuada comprensión y enseñanza de las fracciones según Pruzzo (2012), radica en que el estudiante no comprende que la unidad se mantiene estable a pesar de que se opere con sus partes. La doble o triple representación de la unidad por cada operación que se realiza con sus partes, se constituye en un obstáculo para que el alumno

construya el concepto de fracción en su nivel básico, como relación parte-todo que sería el sub constructo del concepto global de fracción.

### Indicador 3. Aritmético- pictórico

Figura 12 Aritmético- pictórico



Fuente elaboración propia

En este registro se evidencia que el estudiante EF1 presenta una dificultad para representar una fracción, es decir, pasar del registro aritmético al pictórico con una incidencia de 4 registros correspondientes al 18,18 %. Registro verbal: “Yo hice un dibujo para guiarme de lo que el padre dejó a sus tres hijos y tome lo que le dejó al primer hijo entonces 3 y lo repartí en 20 el pedacito luego tome 3 después al segundo hijo le dejó  $\frac{8}{40}$  entonces lo dividí en 40 y tome 8 y el otro dice que  $\frac{9}{11}$  y lo repartí en 11 y se me olvidó tomar los 9”

Esta es una de las dificultades más frecuentes, este concepto lo propone (Llinares & Sánchez, 1997) donde los estudiantes poseen “agujeros conceptuales en cuanto partición, cociente, razón, y operador haciendo esto más difícil la construcción del concepto de la unidad compuesta por fracciones, ya que el estudiante no dimensiona la fracción como parte de un todo tal en el momento de representarla gráficamente e infiere que puede tomarlos como números enteros”. (p.99).

El tener que plasmar en forma gráfica la parte aritmética requiere de conocimientos básicos, el tener vacíos conceptuales hace que el estudiante los refleje y no logre comprender el significado de la unidad como un todo.

#### Indicador 4. Conceptual – significados (fracción propia e impropia)

Figura 13 Conceptual – significados (fracción propia e impropia)

**EF 2**

de las animales en vía de extinción se sabe que  $\frac{1}{10}$  son tortugas y  $\frac{5}{6}$  son azarillos. ¿Qué fracción total representa el número de tortugas y azarillos en vía de extinción?

a. ¿Crees que en tu viaje puedes utilizar para resolver la situación?

Debemos sumar las dos fracciones y así nos da el resultado total.

$$\frac{1}{10} + \frac{5}{6} = \frac{6}{16}$$

b. ¿Es posible expresar la cantidad de tortugas y azarillos de otra manera? Muéstranos

No porque si cambiamos el numerador por el denominador se quedaría mal. No se puede representar de otra manera.

c. Muéstranos paso a paso el procedimiento que utilizarás para resolver la situación y finalmente danes la solución. En lo posible simplifica la respuesta

Simplificamos los 2 números y luego sumamos los resultados

$$\frac{1}{10} + \frac{5}{6} = \frac{5}{5}$$

Fuente elaboración propia

Se puede evidenciar que del 27,27 % correspondiente a 6 unidades de registro en las cuales los estudiantes presentan dificultad en el uso verbal. En el desconocimiento de conceptos básicos tales como, “los de arriba, los de abajo, fracción propia, fracción impropia, la representación gráfica de una fracción y entre otros”, impidiendo el desarrollo correcto de la conversión, según el ejemplo plasmado en la imagen anterior en punto C, se logra evidenciar que el estudiante no guarda una relación entre las operaciones de las fracciones propias y la medida de la unidad como posible resultado de una operación entre racionales.

Desde el punto de vista de Llinares & Sánchez (1988) citado por Gonzales (2015), unas de las causas que generan errores en las conversiones o tratamientos realizados por el estudiante se logra identificar las siguientes: “aquellas que aparecen de forma aleatoria, por descuido, distracción, etc.; debido a que el alumno ignora la respuesta y presenta un resultado al azar; los causados por defectos en la comprensión de un concepto; y los debidos a la aplicación sistemática de procedimientos erróneos. En este último caso, se evidencia que los procedimientos utilizados por los alumnos proceden bien de métodos



personales alternativos a los enseñados por el profesor, o bien son debidos al olvido o modificación de algún paso de un algoritmo enseñado”. (p. 14)

**Indicador 5. Paso de lo continuo a lo discreto.**

*Figura 14 Paso de lo continuo a lo discreto.*

**EF 4**

4. Un padre al morir heredo a sus 3 hijos un terreno de forma rectangular, al primero le correspondieron  $\frac{3}{2}$  del terreno, al segundo hijo  $\frac{8}{4}$  del terreno. ¿Qué parte del terreno le correspondió al tercer hijo?

a. representa la situación haciendo uso de las fracciones.

Fuente elaboración propia

En la dificultad de la naturalización de la fracción se encontró un hallazgo de 22 unidades de registros que equivalen a un 4,55%, evidenciando que los estudiantes tratan de convertir un número racional en un entero, olvidando el sentido propio de la fracción y confundiendo el fraccionamiento de la unidad por partes, no de un todo sino independientes. La conversión del número natural al número racional conlleva a situaciones en donde la unidad de medida no se encuentra un número exacto de veces dentro del operador a medir. Dependiendo del contexto de las situaciones llevan al número racional a actuar como operador ampliador o reductor (algunos de estos últimos considerados a veces también como “partidores” o “fraccionadores” de la unidad en partes iguales), representado usualmente por una fracción. (Tomado de estándares básicos de competencia) (MEN, 2006).

## Indicador 6. Registro verbal al aritmético

Figura 15 .Registro verbal al aritmético

EF 2
<p>4. Un padre al morir heredo a sus 3 hijos un terreno de forma rectangular, al primero le correspondieron <math>\frac{3}{20}</math> del terreno, al segundo hijo <math>\frac{5}{40}</math> del terreno. ¿Qué parte del terreno le correspondió al tercer hijo?</p> <p>a. representa la situación haciendo uso de las fracciones.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"><math display="block">\frac{3}{20} \times \frac{5}{40} = \frac{12}{37}</math></div>

Fuente elaboración propia

El 3,64% de las dificultades evidenciadas, correspondiente a 3 unidades de registro de las 22 encontradas, donde muestra que los estudiantes no logran pasar del registro verbal al aritmético y tampoco expresar de manera escrita la situación.

Respecto al proceso de comprensión, sólo es posible, de acuerdo a Duval, este paso es muy importante debido que en las representaciones semióticas se desarrollan tres funciones elementales: La primera tiene que ver con la relación de la comunicación con los objetos matemáticos, la segunda con el tratamiento y la última con la objetivación donde el sujeto pensante toma conciencia sobre el objeto matemático pensado (Duval, 1999).

En resumen se puede evidenciar que en la fase de exploración se evidenciaron las dificultades en la transformación de tratamiento y conversión que los estudiantes presentan en el momento de utilizar la fracción como operador suma y resta, algunas de estas dificultades son reiterativas y conllevan a un procedimiento equivocado de la solución de situaciones, dentro de las dificultades más marcadas se encuentra la suma de numeradores con numeradores y denominadores con denominadores, la confusión de algoritmos, el paso de un registro pictórico al aritmético y el desconocimiento de fracciones. Este análisis nos lleva a reconocer los diferentes tratamientos y conversiones que ellos emplean cuando se enfrentan a situaciones significativas las cuales plasma matemáticamente.

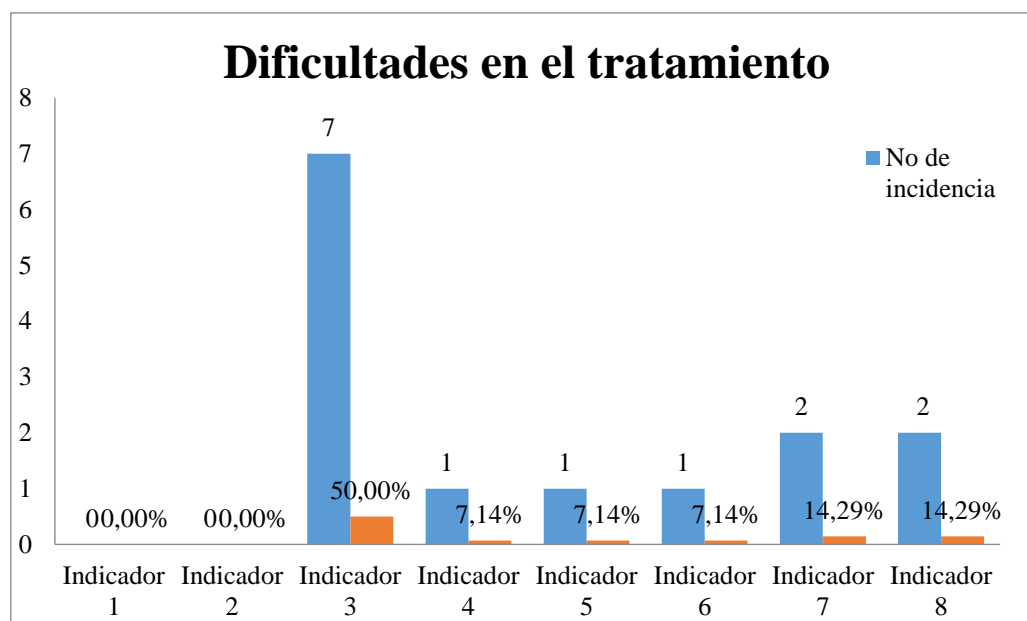
## 6.2 ANÁLISIS FASE DE EVALUACIÓN

### 6.2.1 Análisis en cuanto al tratamiento

Tabla 9. Dificultades en las transformaciones de tratamiento

No	INDICADORES	Número de Registros	Porcentaje	Tipo de dificultad
1	El estudiante suma los numeradores y los denominadores en la suma de fracciones heterogéneas	0	0,00%	Procedimental
2	Dificultad en la simplificación y amplificación de fracciones.	7	50,00%	Procedimental
3	Dificultad para descomponer la unidad en partes iguales	1	7,14%	Procedimental
4	Confunde el algoritmo de la suma de fracciones con el de la multiplicación.	1	7,14%	Conceptual y procedimental
5	No comprende el concepto de fracción parte todo y le genera dificultad para realizar el procedimiento	1	7,14%	Conceptual y de Significados
6	Dificultad en el desarrollo del mínimo común múltiplo.	2	14,29%	Procedimental
7	Dificultades para hacer suma de fracciones a través del registro pictórico. Operacionalización de la fracción a través en el registro pictórico.	2	14,29%	Procedimental
<b>TOTAL:</b>		<b>14</b>	<b>100%</b>	

Figura 16 Dificultades en el tratamiento de la fracción como operador suma y resta en la fase de evaluación. Datos tomados del anexo 1.



En la figura 16 muestra que en situaciones de la fracción como operador las dificultades con mayor frecuencia son de tipo procedimental. La simplificación y amplificación de fracciones sigue siendo uno de los procesos inmersos en el tratamiento con más dificultad en los estudiantes (50 % de las unidades de registro); seguido por el procedimiento para calcular el mínimo común múltiplo y la suma de fracciones a través del registro pictórico, cada una con un porcentaje de 14,29 %. Duval (1995) establece que

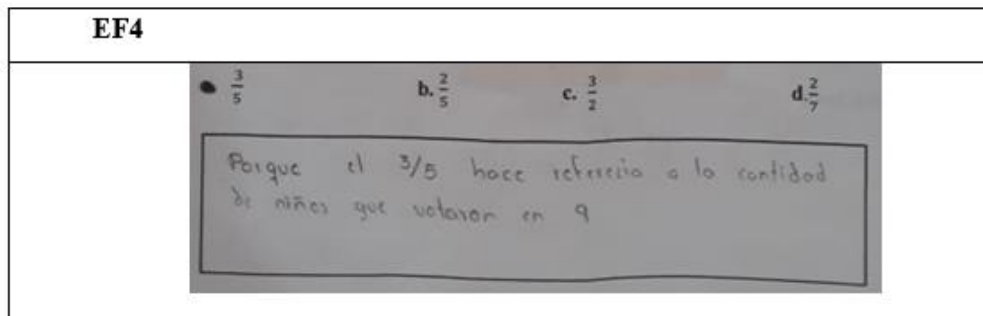
“toda representación es parcialmente cognitiva con respecto a lo que representa y por tanto la comprensión de un contenido conceptual está basada en la coordinación de, al menos, dos registros de representación, y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva” (p. 40).

Los estudiantes confunden conceptos, algoritmos y significados durante la manipulación de un mismo registro, lo que soporta la teoría expuesta.

Teniendo en cuenta lo anterior se presentan los siguientes casos:

### Indicador 3. Dificultad en la simplificación y amplificación de fracciones.

Figura 17 Dificultad en la simplificación y amplificación de fracciones.

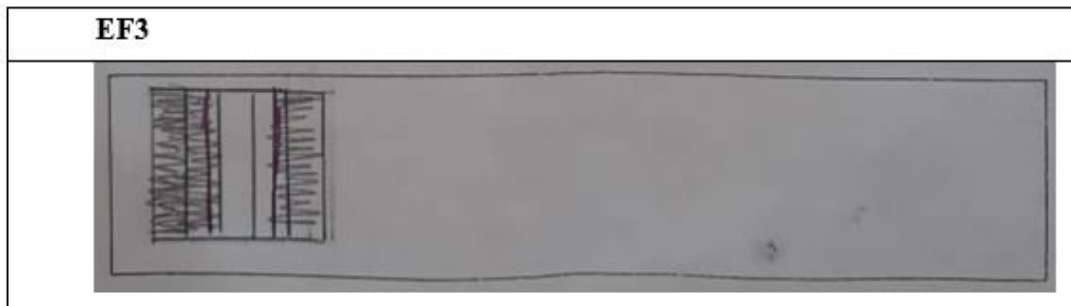


Fuente elaboración propia

Se puede evidenciar que el estudiante EF4 presenta dificultades en realizar operaciones básicas de simplificación o amplificación de fraccionarios, este tipo de dificultades que además se observa en otros estudiantes radican en el olvido o vacíos presentes en conceptos de divisibilidad o multiplicidad entre los números a operar, tal cual como ratifica Godino (2006). El estudiante toma la cantidad de personas que votaron como numerador y en el denominador el total de personas aptas para votar. Sin embargo, al realizar la simplificación comete un error en el numerador, lo cual ocasiona una respuesta incorrecta.

### Indicador 4. Dificultad para descomponer la unidad en partes iguales

Figura 18 Dificultad para descomponer la unidad en partes iguales

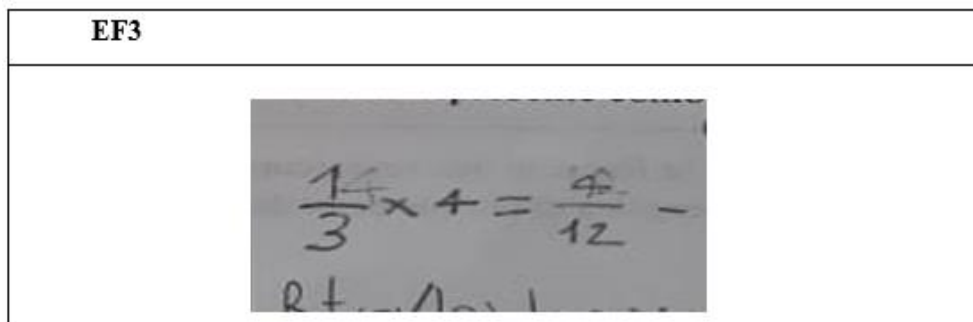


Fuente elaboración propia

Se puede evidenciar que el 7,14 % se le dificulta la descomposición de la fracción como parte de un todo y no reconoce el valor de la fracción en la unidad. En el registro anterior, se observa que el estudiante no tiene claro el concepto de división de la unidad de partes iguales, las cuales cada una de ellas forman la unidad como parte equitativa de la misma. Por lo tanto, se infiere que el estudiante busca relacionar los fraccionarios mediante subdivisiones de un todo. Los estudiantes poseen falencias en los conceptos en cuanto a composición de la unidad por medio de unidades que pertenecen a un universo unitario, cociente, razón, y operador haciendo más difícil la construcción de un megaconcepto de relación entre las partes de las divisiones de la unidad (Llinares & Sánchez, 1997).

**Indicador 5. Confunde el algoritmo de la amplificación de fracciones con el de la multiplicación.**

*Figura 19 Confunde el algoritmo de la amplificación de fracciones con el de la multiplicación*



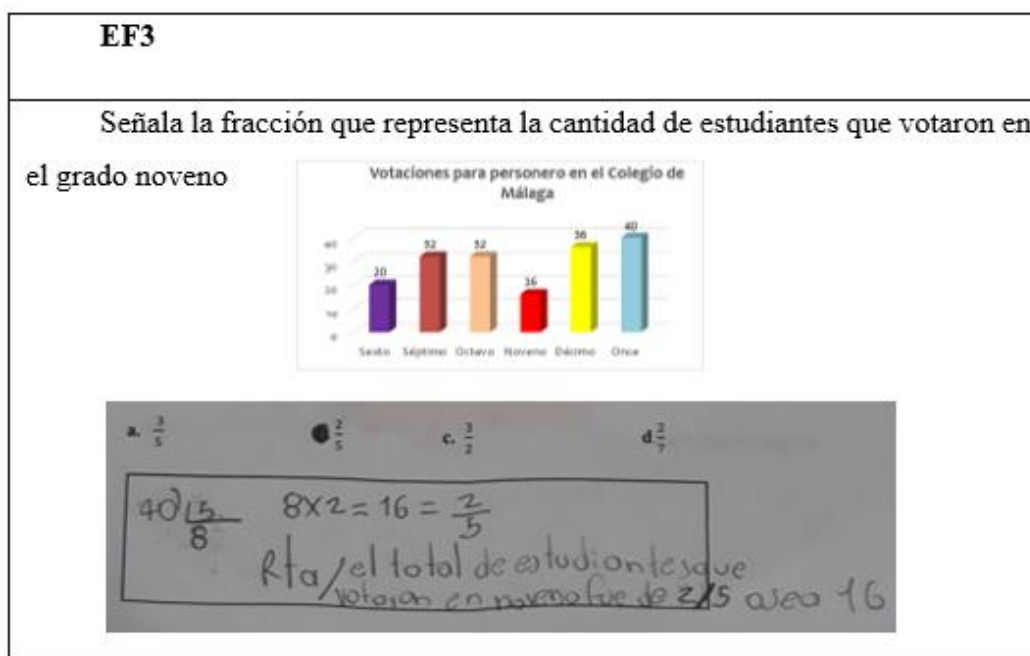
Fuente elaboración propia

Esta dificultad es evidente en un 7,14% con relación a las 14 unidades de registro. Cuando los estudiantes deben decidir el algoritmo para dar solución a la situación ellos plantean una multiplicación confundiendo la amplificación con el de la multiplicación olvidando que para amplificar fracciones deben asegurarse que debe multiplicarse tanto el numerador como el denominador, aunque lo opera no lo evidencia en el tratamiento dejándolo indicado como una multiplicación de una fracción por un entero, esto puede ser una de las causas de la confusión de los algoritmos. Esta práctica usual en la aplicación de

las matemáticas es prioridad la mecanización por parte del estudiante de los algoritmos con los cuales pueda resolver una serie de ejercicios de la enseñanza de las matemáticas Cantoral, Montiel & Reyes (2015), esta práctica acentúa la memorización de las operaciones aritméticas que fácilmente con el tiempo el estudiante olvida y, lo que es aún más grave, es que el estudiante, aunque todavía recuerde el algoritmo no sabe en qué situación de la vida cotidiana aplicarlo.

**Indicador 6. No comprende el concepto de fracción parte de un todo que le genera dificultad para realizar el procedimiento**

Figura 20. No comprende el concepto de fracción parte de un todo que le genera dificultad para realizar el procedimiento.



Fuente elaboración propia

Para el 7.14 % de las unidades de registro se puede evidenciar la incidencia en la dificultad para comprender la fracción como parte todo y esto hace que se le dificulte el procedimiento a seguir. Así mismo, de acuerdo con la aproximación al concepto de fracción en su relación parte-todo, desde las investigaciones a nivel internacional, Zarzar (2013), realizó un estudio concluyendo que estas relaciones y el paso de la una a la otra

(diversificación de los soportes de representación) no se trabajaba en la escuela, quedándose solamente con el concepto inicial de parte-todo sin propiciar un mejor alcance a este campo conceptual. Atendiendo a lo expuesto por Behr (1983), cuando afirma que esta relación es la piedra angular de construcciones matemáticas posteriores.

**Indicador 7. Dificultad en el desarrollo del mínimo común múltiplo.**

*Figura 21 Dificultad en el desarrollo del mínimo común múltiplo.*

**EF3**

$$B. \frac{12}{12} + \frac{7}{4} = \frac{84}{48} + \frac{48}{48} = \frac{36 \quad 18 \quad 9 \quad 3}{48} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{12 \cdot 4}{12 \cdot 4} = \frac{48}{48} \quad \frac{7 \cdot 12}{4 \cdot 12} = \frac{84}{48}$$

Fuente elaboración propia

En este caso el estudiante EF3 en su afán por buscar el denominador común, omite el concepto de mínimo común múltiplo y esto hace que el tratamiento que el desarrolla se haga más extenso llevándolo en su respuesta a volver a simplificar. En este sentido, dentro de la resolución de problemas, muchas investigaciones apuntan a la tendencia de los alumnos a la ejecución inmediata sin realizar una reflexión previa del problema. Evidenciando que el concepto que tienen de ello es muy poco y que toman el camino más fácil o el que consideran correcto efectuando así una serie de ejercicios repetitivos y que hacen el tratamiento un poco más largo. El concepto de múltiplo se puede evidenciar, pero no utiliza la descomposición de un número en factores primos ni elige los factores comunes, esto lo lleva a amplificar una de las fracciones encontrando el denominador igual para poder proceder a desarrollar el ejercicio el cual tiene claro que debe convertir a homogéneo para solucionarlo.

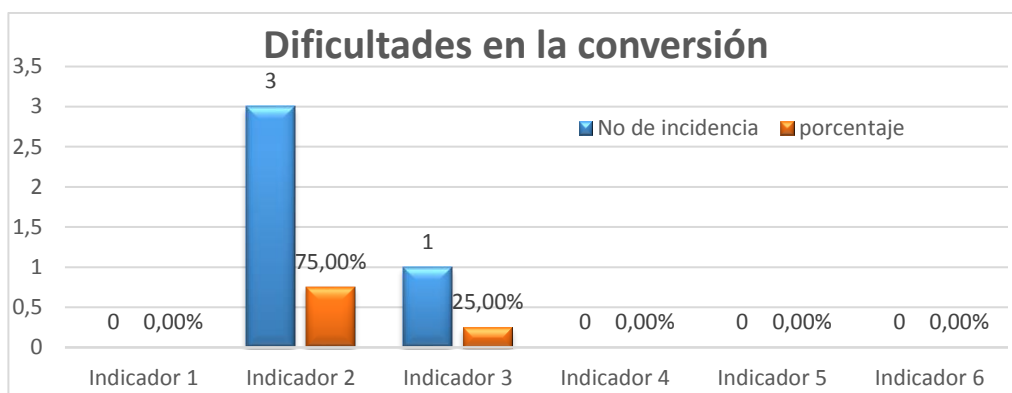


## 6.2.2 Análisis en cuanto a la conversión

Tabla 10. Dificultades en las conversiones

No	Indicadores	Número de Registros	Porcentaje
1	Dificultad para pasar el registro verbal al pictórico y gráfico. Registro verbal – pictórico y gráfico	0	0,00%
2	Dificultad para pasar del registro pictórico–aritmético.	3	75,00%
3	Dificultad para representar una fracción es decir pasar del registro aritmético – pictórico.	1	25,00%
4	Representa erróneamente la fracción por desconocimiento del concepto de fracción propia e impropia (conceptual – significados) Significados.	0	0,00%
5	Naturalización de la fracción (el estudiante trata de convertir un número racional en un entero) Paso de lo continuo a lo discreto.	0	0,00%
6	Paso del registro verbal al aritmético	0	0,00%
<b>TOTAL:</b>		<b>4</b>	<b>100%</b>

Figura 22 Dificultades en las representaciones semióticas evidenciadas en las unidades de registro que dan cuenta de la conversión en situaciones de la fracción como operador suma y resta. Datos tomados del anexo 1.

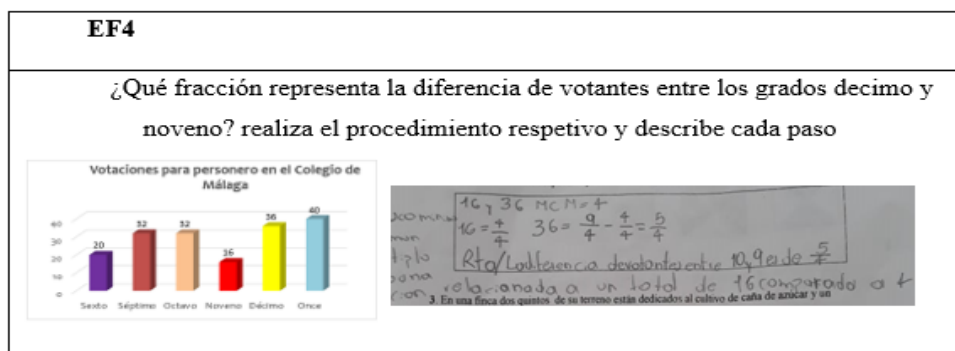


En la anterior figura se puede evidenciar que la dificultades que más marcan a los estudiantes en cuanto a las conversiones tienen que ver con el paso del registro pictórico al aritmético y representar una fracción desde el registro aritmético al pictórico, donde la primera dificultad le corresponde a un 75 % de las unidades de registro y el 25 % a la segunda. En términos de Duval (1999) un concepto está entendido si el alumno es capaz de transitar entre sus distintos registros de representación.

Dentro de estas dificultades se puede evidenciar las siguientes:

### Indicador 2. Dificultad para pasar del registro pictórico–aritmético.

Figura 23 Dificultad para pasar del registro pictórico–aritmético

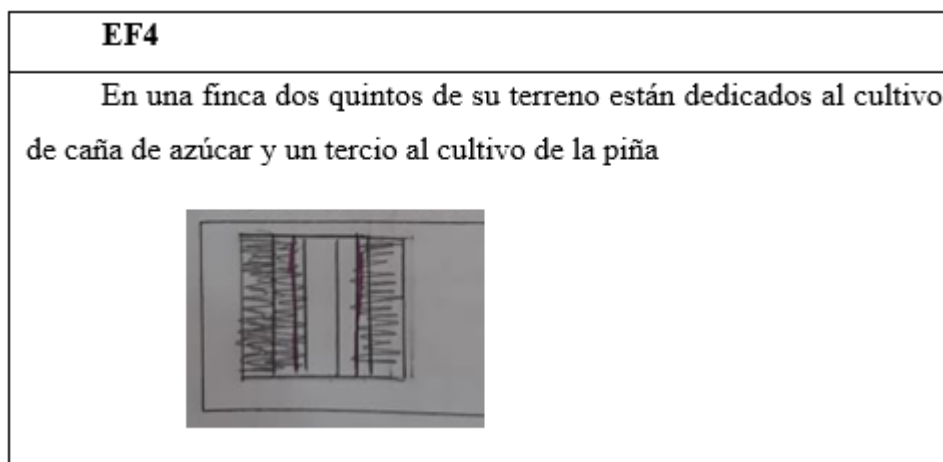


Fuente elaboración propia

Se puede evidenciar al momento de realizar la conversión del registro pictórico al aritmético que existen 3 unidades de registro, en el cual los estudiantes no logran interpretar adecuadamente una gráfica y proponer una operación que la represente. Pruzzo (2012), argumenta que el estudiante no comprende que la unidad como la totalidad del fraccionario debe permanecer fija sin importar las operaciones que se le apliquen a la misma y esto impide que el estudiante imponga obstáculos al momento de crear el concepto de fraccionario y su adecuada interpretación.

**Indicador 3. Dificultad para representar una fracción es decir pasar del registro aritmético – pictórico.**

*Figura 24 Dificultad para representar una fracción es decir pasar del registro aritmético – pictórico.*



Fuente elaboración propia

En este caso se puede evidenciar que se presenta la dificultad para representar una fracción en un equivalente gráfico, es decir, pasar del registro aritmético al pictórico. Según Linares y Sánchez (1997) convertir de un registro aritmético al pictórico es una de las dificultades más frecuentes que poseen los estudiantes, “debido a que presentan agujeros conceptuales en división de la unidad conformada por fracciones, esto se debe a que el estudiante no dimensiona la fracción como parte de un todo” (p. 99). Respecto a las representaciones gráficas se infiere que estas se pueden convertir en una herramienta eficaz

para la solución de problemas que aluden a significados de la fracción, pero es necesario que el estudiante realice un cambio adecuado de representación, ya que esto puede contribuir a una mejor comprensión de los mismos, para él no es importante la manera como reparta la imagen sino las partes en que lo haga y eso hace que se distorsione un poco la realidad de lo que quiere representar.

Del análisis anterior se puede concluir que es necesario el conocimiento conceptual de un amplio número de objetos matemáticos para solucionar situaciones de la fracción como operador. Dentro de la intervención a la fase de exploración se pudieron reforzar algunos de estos conceptos, en los cuales existía un alto índice de dificultad. En estos indicadores dichas dificultades no fueron superadas en un 100%; ya que se requiere mejorar la aplicación del mínimo común múltiplo y la conceptualización de fracciones entre otros. Es preciso entonces, implementar diferentes estrategias didácticas, que ayuden a superar estos vacíos, pues de no ser así el estudiante no podrá avanzar en sus procesos. En cuanto a la conversión si se evidencian avances en los indicadores, ya que los estudiantes logran entender los diferentes registros y la conversión entre ellos.

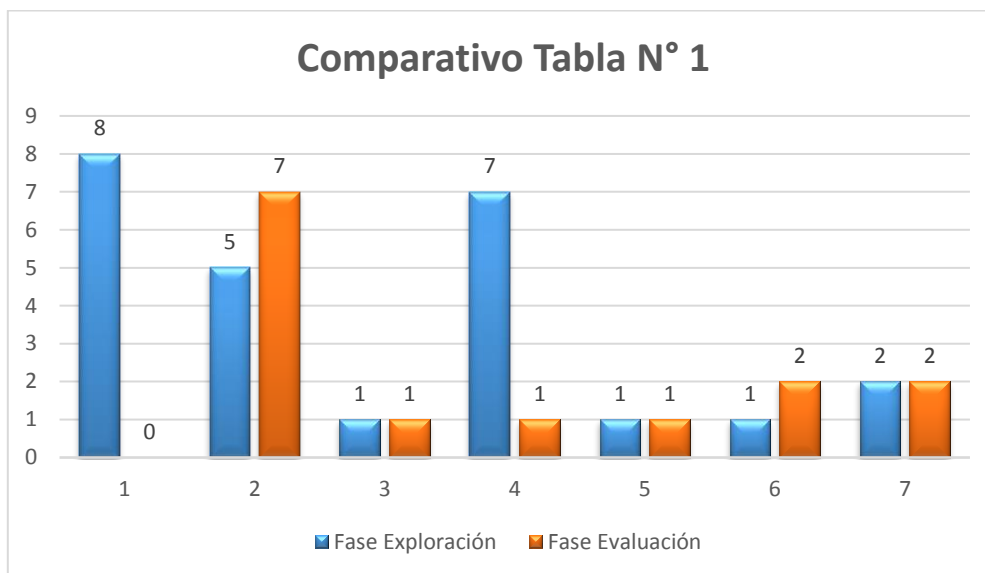
### **6.3 ANÁLISIS GENERAL ENTRE LAS FASES DE EXPLORACIÓN Y EVALUACIÓN**

A continuación, se presenta el análisis general de las dificultades en las transformaciones de tratamiento y conversión entre las fases de exploración y la evaluación de acuerdo al proceso de intervención, el porcentaje empleado está relacionado con las unidades de registro en cada una de las fases anteriores, teniendo en cuenta que se debe llevar a cabo un análisis proporcional y homogéneo.

Tabla 11. Análisis general de las dificultades en las transformaciones de tratamiento.

Tratamiento		Fase exploratoria		Fase evaluación		
Nº	Indicadores	# de Registros	%	Tipo de dificultad	# de registros	%
1	El estudiante suma los numeradores y los denominadores en la suma de fracciones heterogéneas	8	32 %	Procedimental	0	0 %
2	Dificultad en la simplificación y amplificación de fracciones.	5	20 %	Procedimental	7	5 0%
3	Dificultad para descomponer la unidad en partes iguales	1	4 %	Procedimental	1	7 %
4	Confunde el algoritmo de la suma de fracciones con el de la multiplicación.	7	28%	Conceptual y procedimental	1	7 %
5	No comprende el concepto de fracción parte todo y le genera dificultad para realizar el procedimiento	1	4 %	Conceptual y de Significados	1	7 %
6	Dificultad en el desarrollo del mínimo común múltiplo.	1	4 %	Conceptual	2	1 4%
7	Dificultades para hacer suma de fracciones a través del registro pictórico. Operacionalización de la fracción a través en el registro pictórico.	2	8 %	Conceptual y procedimental	2	1 4%
<b>TOTAL:</b>		<b>26</b>	<b>100%</b>		<b>14</b>	<b>100%</b>

Figura 25 Comparativo entre la fase de exploración y fase de evaluación en tratamientos

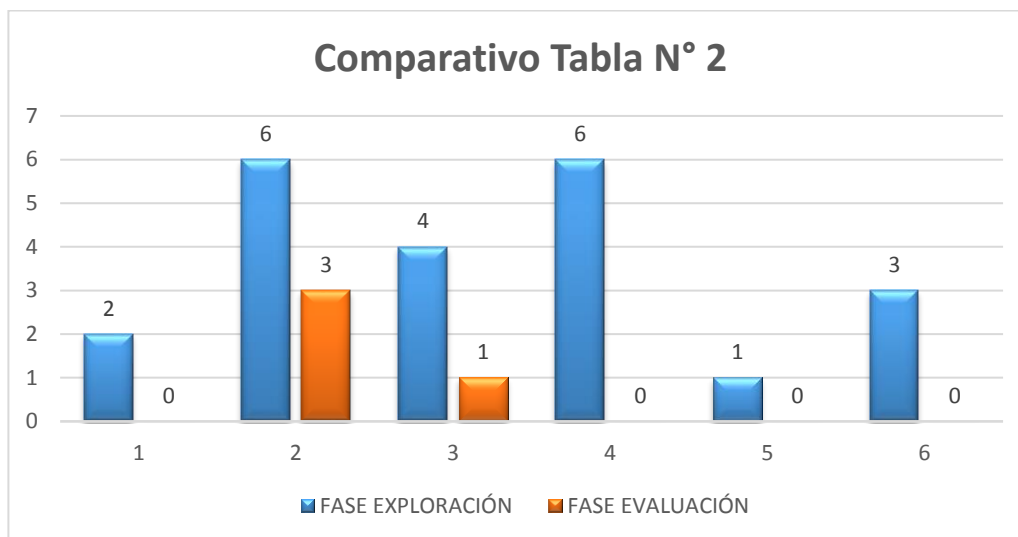


Se puede evidenciar por medio de esta comparación que el avance alcanzado en la fase de evaluación frente a la fase de exploración es notoria en algunos indicadores, lo que demuestra que las herramientas aplicadas para la mejora en los procesos de aprendizaje de los estudiantes dieron resultados positivos en algunos indicadores como la de evitar sumar numeradores con numeradores y denominadores con denominadores, y el de confundir el algoritmo de la suma con el de la multiplicación de fracciones, aclarando así que los indicadores disminuyeron de 26 a 14 registros casi en un 50%, obteniendo de esta manera una disminución significativa en varios de los puntos planteados inicialmente dentro de los instrumentos seleccionados. También se debe resaltar que las dificultades como implicación y simplificación y el hallazgo del mínimo común múltiplo son reiterativos y si bien aumentaron el número de incidencia, lo que muestra la necesidad de evaluar nuevamente la metodología implementada para enseñar a los estudiantes a resolver este tipo de problemas con la fracción como operador.

Tabla 12. Análisis general de las dificultades en las transformaciones de conversión.

No	Conversión	Fase Exploración		Fase evaluación	
	Indicadores	No. De incidencias	Porcentaje	Incidencias	%
	Dificultad para pasar el registro verbal al pictórico y gráfico.	2	9,09 %	0	0 %
	Registro verbal – pictórico y gráfico				
	Dificultad para pasar del registro pictórico–aritmético.	6	27,27 %	3	75 %
	Dificultad para representar una fracción es decir pasar del registro aritmético – pictórico.	4	18,18 %	1	25 %
	Representa erróneamente la fracción por desconocimiento del concepto de fracción propia e impropia (conceptual – significados)	6	27,27 %	0	0
	Significados.				
	Naturalización de la fracción (el estudiante trata de convertir un numero racional en un entero)	1	4,55 %	0	0
	Paso de lo continuo a lo discreto.				
	Paso del registro verbal al aritmético.	3	13,64 %	0	0
	<b>TOTAL:</b>	<b>22</b>	<b>100%</b>	<b>4</b>	<b>100%</b>

Figura 26 Comparativo entre la fase de exploración y fase de evaluación en conversiones.



Es notable la disminución de falencias como el paso de un registro a otro, el reconocimiento de una fracción propia e impropia y paso de lo continuo a lo discreto entre otros, los indicadores encontrados en este trabajo se vieron evidenciados en las respuestas proporcionadas por los alumnos en cada uno de los ítems, luego de la fase de evaluación realizada con los mismos. Cabe resaltar que la metodología usada y la forma de enseñanza de la fracción como un todo, aporta a los estudiantes las bases necesarias para enfrentarse a problemas cotidianos relacionados con las fracciones.

En los indicadores de conversión se obtiene una disminución significativa, mientras que los indicadores de tratamiento no obtuvieron mejoras significativas debido a los vacíos conceptuales evidenciados en los estudiantes.



## 7 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El trabajo realizado con los estudiantes del grado séptimo de la Escuela Normal superior de Málaga Santander permitió caracterizar las dificultades en los tratamientos y las conversiones en la solución de situaciones relacionadas con la fracción como operador suma y resta. A continuación, se presentan las conclusiones y/o recomendaciones de la investigación.

A nivel general los estudiantes presentan dificultades para reconocer transformaciones de tratamiento al interior de un mismo registro debido a que carecen de conceptos elementales y conexión con la realidad, el estudiante antes de enfrentarse a situaciones matemáticas debe reconocer el contexto y hacerse una idea gráfica de lo que quiere operar. Este requiere la articulación de varios conceptos matemáticos como también del dominio de habilidades en cuanto a al uso de procesos.

- Según la investigación al estudiante se le hace más complejo los tratamientos dentro de un mismo registro que el realizar conversiones, esto tiene que ver con el proceso de visualización, ya que para realizar tratamientos requiere de conceptos claros y la respectiva mecanización de procedimientos. Se requiere no introducir tempranamente a los estudiantes en la parte mecánica de la fracción como operador sin reconocerla como parte de un todo si no que lo llevemos a reconocerla antes de operarla.
- Un considerable número de los estudiantes presentan dificultades en las transformaciones de tratamiento, siendo muy frecuente que sumen numeradores y denominadores entre sí, confundiendo los algoritmos de la suma y multiplicación de fracciones. De acuerdo a Ríos (2007), las dificultades en el aprendizaje del concepto fracción se debe, en parte, a las diversas representaciones que tiene este concepto. Esto debido a que los estudiantes tienden a mecanizar conceptos que no han sido adquiridos en forma adecuada.
- En los indicadores de dificultades en la fracción como operador se evidencia una disminución significativa, mientras que en los indicadores de tratamiento no se observaron mejoras significativas debido a los vacíos conceptuales evidenciados en

los estudiantes. Esta es una de las dificultades más frecuentes, este concepto lo propone (Linares & Sánchez, 1997) donde los estudiantes poseen “agujeros conceptuales en cuanto partición, cociente, razón, y operador.

- Las actividades realizadas resultaron de gran utilidad porque permiten identificar las dificultades y los aciertos que presentan los estudiantes en relación con el aprendizaje del concepto de fracción en cuanto al tratamiento y la conversión. De esta manera es posible iniciar la búsqueda de nuevas estrategias para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje.
- El avance alcanzado en la fase de evaluación frente a la fase de exploración es notorio en algunos indicadores , lo que demuestra que las herramientas aplicadas para la mejora en los procesos de aprendizaje de los estudiantes dieron resultados positivos en algunos indicadores como la de evitar sumar numeradores con numeradores y denominares con denominadores, y el de confundir el algoritmo de la suma con el de la multiplicación de fracciones, aclarando así que los indicadores disminuyeron de 26 a 14 registros casi en un 50%, obteniendo de esta manera una disminución significativa en varios de los puntos planteados inicialmente dentro de los instrumentos seleccionados.
- En los estudiantes se evidencian dificultades en el tratamiento al aplicar el algoritmo de la suma de fracciones; esto debido a su tendencia hacia la ejecución mecánica de reglas sobre las cuales no se ha hecho una adecuada reflexión según Palarea, Ruano & Socas, (2008) los errores aparecen en los estudiantes cuando es obligado a enfrentar conocimientos nuevos, que los obliguen a hacer una revisión o a reestructurar lo que ya conocen.
- Adoptar la investigación como una estrategia en el proceso de enseñanza de los conceptos matemáticos, es fundamental para evitar que el estudiante acumule cierta cantidad de datos en forma memorística, y en cambio pueda construir en forma activa su propio conocimiento a partir de la interacción con sus conocimientos previos y las nuevas informaciones que va adquiriendo durante el proceso.

- Al identificar las dificultades se hace más fácil intervenir en ella y esto permite proponer cambios significativos en los procesos de enseñanza aprendizaje por los docentes del área.
- En este tipo de investigaciones no solo se mejora el aprendizaje de los estudiantes en un objeto matemático en particular, sino que además facilita mejores procesos en la enseñanza. Es decir, atiende a procesos didácticos en las matemáticas y conlleva a cambios significativos en el aula.

Teniendo en lo anterior se presentan las siguientes recomendaciones:

- Es necesario aprovechar los recursos que brinda el contexto, en el proceso de enseñanza, así como la intervención continúa del maestro para motivar la participación de los estudiantes. Estas interacciones generan preguntas y situaciones que suscitan la curiosidad y por estar relacionadas con el entorno son relevantes y les dan sentido a los conceptos de las matemáticas. Es así como se van presentando las oportunidades para diseñar nuevas actividades de aprendizaje, por ejemplo, plantear situaciones problema, que promuevan el ingenio del estudiante en el tratamiento y la conversión de las fracciones como operador.
- La parte conceptual es fundamental al momento de abordar un tema. En la enseñanza de las fracciones, se debe trabajar para desarrollar la capacidad de realizar conjeturas, aplicar información, descubrir, y comunicar ideas. Es esencial desarrollar la capacidad de argumentar, de explicar los procesos y demostrar un pensamiento lógico matemático al enfrentar una situación cotidiana que requiera el empleo de fracciones.
- Se debe intervenir las dificultades a través de la integración de una variedad de estrategias, actividades y recursos; no solo como un ejercicio procedimental, sino apuntando a un verdadero aprendizaje. Por esta razón es recomendable trabajar en tres momentos, el primero tiene que ver con la formación clara del concepto de fracción con sus códigos, con sus propiedades y sus reglas de utilización. El segundo con el desarrollo de procesos y la utilización de estos conceptos y códigos comprensivamente, es decir, dar el tratamiento adecuado y efectuar la conversión en

situaciones reales o ficticias. Y por último aplicar todo esto en la resolución de problemas.

- La comprensión del concepto de fracción como operador, requiere que el docente aplique estrategias y planee actividades muy bien estructuradas con el fin de lograr la mayor eficacia en la interpretación de las situaciones planteadas. Se debe avanzar en el diseño y utilización de material didáctico apropiado para la enseñanza de las fracciones, de tal manera que estos recursos ayuden a ejemplificarlas y representarlas adecuadamente, haciendo el proceso más atractivo para los estudiantes.

## 8 BIBLIOGRAFIA

- Abrate, R.; Pochulu, M. & Vargas, J. (2006). Errores y dificultades en Matemática: Análisis de causas y sugerencias de trabajo. Villa María. Universidad nacional de villa maría.
- Beato, Jesús (2010). Errores correctos en la simplificación de fracciones: reflexión sobre algunas prácticas docentes en matemáticas. *SUMA*, 63, pp. 35-41.
- Behr, M. J., Lesh, R. Post, T. R. and Silver, E. A. (1983). Rational number concept. In R. Lesh and M. Landau (Eds.), *Acquisitions of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91- 126). New York: Academy Press.
- Brown, G, Quinn, R (2006). Algebra students' difficulty with fractions. *Australian Mathematics Teacher*, pp 28 - 40
- Campbell, D. T. & Fiske, D. W. (1959): "Convergent and discriminant validation by multitrait-multimethod matrix" *Psychological Bulletin*. N. 56. Pp. 81-105.  
Recuperadode:[http://marces.org/EDMS623/Campbell%20DT%20&%20Fiske%20D%20W%20\(1959\)%20Convergent%20and%20discriminant%20validation%20by%20the%20multitrait-multimethod%20matrix.pdf](http://marces.org/EDMS623/Campbell%20DT%20&%20Fiske%20D%20W%20(1959)%20Convergent%20and%20discriminant%20validation%20by%20the%20multitrait-multimethod%20matrix.pdf)
- Cantoral, R., Montiel, G., & Reyes-Gasperini, D. (2015). *Base de datos Universidad*
- Cantoral, R., Montiel, G., & Reyes, D. (2015). Análisis del discurso matemático escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *AIEM - Avances en investigación en Educación Matemática*, 9 - 28.
- Campistrous, L. y Rizo, C. (1999). Estrategias de resolución de problemas en la escuela. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*
- Castaño, N.(2014).Dificultades en la enseñanza de las operaciones con números racionales en la educación secundaria (tesis de grado) Universidad Autónoma de Manizales.

- Castellanos, M. & Obando, Jorge. A. (2009). Errores y dificultades en procesos de representación: El caos de la generalización y el razonamiento algebraico. 10 encuentro colombiano de matemática educativa 2009. Asociación colombiana de matemática educativa
- Chamorro, Ma del Carmen. Didáctica de las matemáticas para primaria. Madrid: Pearson. 2003a. p. 187-221.
- Chamorro, Comportamiento de los Racionales en la Educación Básica. Madrid: Pearson 2003b.
- Charalambous, C., Pitta – Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. Educational studies in Mathematics, pa 293 – 316
- Clarke, D., Roche, A., Mitchell, A (2007). Year six fraction understanding: A part of the whole story. In proceeding of the 30<sup>th</sup> Annual Conference of the Mathematics Education Group of Australasia. J Watson y K. Beswick.
- Duval, R. (1998): Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En: F. Hitt (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa II, 173–201. Grupo Editorial Iberoamérica, México, D. F.
- Duval, R (1999) “Semiosis y pensamiento humano. Universidad del Valle, Grupo de Educación Matemática, 1999.
- DUVAL, Raymond. Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía. Cali: Grupo de Educación Matemática, 1999.
- Duval, R. (2004). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas. Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

- Escobar, G. (2016). Las Actividades Cognitivas de Tratamiento y Conversión de las Representaciones Semióticas en la Resolución de Problemas Contextuales Relacionados con el concepto de función cuadrática. Universidad Autónoma de Manizales Departamento de Educación Maestría en Enseñanza de las Ciencias (Tesis de maestría) Manizales Facultad de educación.
- Fandiño Pinilla, Martha. Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos. Bogotá: Editorial Magisterio, 2009. p. 37-120.
- Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel. Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001
- Gonzalez, G.(2011) Tratamiento de las representaciones semióticas de la función cuadrática. Tesis de maestria Universidad Autonoma de Manizales.
- Gonzalez del Olmo, D. (16 de Junio de 2015). Errores comunes en el aprendizaje de las fracciones: Un estudio con alumnos de 12/13 años en Cantabria. España.
- Goetz, J. y Lecompte M. (1988). Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa. Ediciones Morata. Madrid.
- Gutiérrez, S., & Parada, D. (2007). Caracterización de tratamientos y conversiones: El caso de la función afín en el marco de las aplicaciones (Tesis de Maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- Hurtado M. (2012). Una propuesta para la enseñanza de fracciones en el grado sexto. (Tesis para obtener el grado de magister en enseñanza de las ciencias exactas). Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia. Recuperado de <http://www.bdigital.unal.edu.co/8573/1/01186688.2012.pdf>

Kieren, T. (1998). Rational and fractional numbers: from quotient fields to recursive understanding. Recuperado de [Http://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=cvJ0l6VpEwUC&oi=fnd&pg=PA49&dq=+Kieren+\(1988\)+&ots=ORz8U42uVX&sig=tbZtdsSTmMGzZW38u55JwbqQSU#v=onepage&q=Kieren%20\(1988\)&f=false](http://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=cvJ0l6VpEwUC&oi=fnd&pg=PA49&dq=+Kieren+(1988)+&ots=ORz8U42uVX&sig=tbZtdsSTmMGzZW38u55JwbqQSU#v=onepage&q=Kieren%20(1988)&f=false)

Kieren, T., 1980. Recent Research on Number Learning. Eric Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education, Columbus, Ohio.

Llinares Ciscar, Salvador y Sánchez García, María Victoria. Matemáticas: cultura y aprendizaje. Fracciones, N°4. Madrid: Editorial Síntesis. 1992.

Llinares, S., & Sánchez, V. (1997). Aprender a enseñar, modos de representación y número racional.

Llinares, S., & Sánchez. M. V. (1988). Fracciones: la relación parte-todo. Sevilla: Síntesis.

Marín, J. (2017) caracterización de tratamientos, sentidos y significados en situaciones de la fracción como medida en docentes de básica primaria (tesis de maestría) Universidad de Caldas.[http://ciaemedumate.org/cemacyc/index.php/ii\\_cemacyc/iicemacyc/paper/viewFile/91/116](http://ciaemedumate.org/cemacyc/index.php/ii_cemacyc/iicemacyc/paper/viewFile/91/116)

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas, 2006. Bogotá: Colombia



- Morales, R. (2014) Dificultades y errores en la solución de problemas con números racionales. Universidad Autónoma de Manizales. Naturales. En: Evolución conceptual multidimensional. Aplicación al concepto de respiración. Universidad Autónoma de Barcelona.
- Moreno, M. (2000). Introducción a la metodología de la investigación educativa II. México D.F: Editorial Progreso, S.A
- Murillo, Alexander; Ceballos, Leonardo (2014). Las prácticas de enseñanza empleadas por docentes de matemáticas y su relación con la resolución de problemas mediados por fracciones. En Gallego, Adriana P.(Ed.), Revista Científica (pp. 253-257). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas
- NCTM (2000). Principios y estándares para la Educación matemática. Primera edición en castellano. Sociedad Andaluza de Educación Matemáticas, Thales. Sevilla
- Obregón, I. (2007). Magia y belleza de las matemáticas y algo de su historia. Bogotá: Intermedio Editores.
- Palarea, M. M., Ruano, R. M. & Socas, M. M. &. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. PNA 2 (2),61-74.
- POLYA George (1965). Como Plantear y Resolver Problemas. Serie de Matemáticas.
- Pruzzo de Di pego, V. (2012). Las Fracciones: ¿problemas de aprendizaje o problemas de la enseñanza? Pilquen sección psicopedagógica (8).
- Ríos, Y. (2007). Ingeniería Didáctica sobre fracciones. Universidad de Zulia, Maracaibo. Venezuela. Revista Redalyc, 13(2), pp.120-157. Recuperado de <http://www.redalyc.org>

- Ruiz, C. (2013). La fracción como relación parte - todo y como cociente: Propuesta didáctica para el colegio Los Alpes IED. (Tesis para obtener el grado de magister en enseñanza de las ciencias exactas). Universidad Nacional de Colombia. Bogota, Colombia.  
Recuperado de <http://www.bdigital.unal.edu.co/40057/1/01186860.2013.pdf>
- Stone, M. 1999. La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica. Paidós: Barcelona.
- Tamayo, A. O. E. (2001). Metacognición y motivación en el aprendizaje de las ciencias
- Tamayo, A.O.E (1999) El proyecto de investigación - Universidad de San Buenaventura Cali.
- Tamayo, O. et al. (2011). La clase multimodal y la formación y evolución de conceptos científicos a través del uso de tecnologías de la información y la comunicación. Manizales: Artes Gráficas Tizan Ltda
- Vasco, C. E. (1994) Archipiélago Fraccionario. Lineamientos curriculares
- Vasco, C. E. (2010). Problemas y retos de la educación por competencias en las matemáticas de 5° grado. Conferencia en el acto de lanzamiento de la fase piloto del Programa de Mejoramiento de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en Barranquilla. Universidad del Norte, Barranquilla, junio 22 de 2010.
- Zambrano, G. (2008). Preguntas cognitivas y metacognitivas en el aprendizaje y la generación de estrategias de resolución de problemas matemáticos. Revista Inventum N° 4 Facultad de Ingeniería Uniminuto. Núm 4, pp. 25 – 50. Recuperado de: <http://biblioteca.uniminuto.edu/ojs/index.php/Inventum/article/viewFile/74/73>
- Zarzar, C. B. (2013). El aprendizaje de fracciones en educación primaria: Una propuesta de enseñanza en dos ambientes. Revista Horizontes Pedagógicos, 15(1)