



LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN EL APRENDIZAJE DE LOS
NÚMEROS ENTEROS

EVERARDO VELOSA SÁNCHEZ

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES
FACULTAD DE ESTUDIOS SOCIALES Y EMPRESARIALES
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
MANIZALES

2020

LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN EL APRENDIZAJE DE LOS
NÚMEROS ENTEROS

EVERARDO VELOSA SÁNCHEZ

Proyecto de grado para optar al título de Magister en Enseñanza de la Ciencias

Tutora

Dra. ANA MILENA LÓPEZ RÚA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES
FACULTAD DE ESTUDIOS SOCIALES Y EMPRESARIALES
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
MANIZALES

2020

Dedicatoria

A Dios por ayudarme y no dejarme desfallecer en este largo camino que he recorrido para poder hacer mi sueño realidad y que gracias a él lo he podido hacer realidad.

A mis padres Everardo Velosa y Blanca Nubia Sánchez y a mi hermano Oscar, por apoyarme incondicionalmente y brindarme todo su amor y comprensión que no me dejó desfallecer en el cumplimiento de mi sueño que hoy por fin se ha hecho realidad.

A mi novia Yesica por su comprensión, apoyo y amor, quien creyó en mí desde el principio, me animó y me ayudó a levantarme en los momentos que creí desfallecer en este proceso.

Everardo Velosa Sánchez

Agradecimientos

Quiero expresar mi fe y agradecimiento a Dios por darme la vida, por las puertas que abrió para que yo pudiera estudiar, por darme la posibilidad de culminar la maestría y por la fortaleza que me dio cada día para lograr esta meta.

A mis padres por su apoyo incondicional en los momentos más difíciles que se presentaron a lo largo de este sueño y que gracias a Dios y a ellos los pude afrontar y superar.

A la Doctora Ana Milena López por su entrega, dedicación y comprensión, quien con sus conocimientos y experiencia me brindó el apoyo y las orientaciones necesarias que me permitieron enriquecer y llevar a cabo este trabajo de investigación. ¡mil gracias profe Ana!

A la Universidad Autónoma de Manizales, por facilitarnos el acceso a nuestra formación como Magister.

A los diferentes profesores que nos acompañaron durante el transcurso de la maestría, quienes con sus conocimientos y orientaciones lograron cambiar y enriquecer nuestra perspectiva sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Al colegio Nuevo Horizonte junto con los protagonistas de esta investigación el grado sexto por su ayuda, disposición y participación activa a lo largo de esta investigación.

A todas las personas que de una u otra forma colaboraron para que esta investigación fuera posible. ¡Mil Gracias Dios los Bendiga!

RESUMEN

El proyecto de investigación que se describe a continuación, se ubica en el marco de investigaciones didácticas que estudian los procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos, este trabajo es producto de una investigación propuesta durante el curso de la maestría en enseñanza de las ciencias de la universidad autónoma de Manizales, en él se presentan los resultados obtenidos de la aplicación de una unidad didáctica enfocada en la presentación de actividades orientadas a la conceptualización del concepto número entero, para esto se plantea un proceso de aprendizaje basado en la utilización de los registros semióticos y las actividades cognitivas de tratamiento y conversión. Su descripción es de tipo cualitativo y su análisis se fundamenta en la teoría de representaciones semióticas propuesta por Raymond Duval (1999), cuyo objetivo fue determinar cómo influyen las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas en el aprendizaje de los números enteros.

Palabras clave: Representaciones semióticas, tratamiento, conversión, número entero, aprendizaje de las matemáticas.

ABSTRACT

The research project described below, is located within the framework of didactic investigations that study the teaching and learning processes of mathematical content, this work is the product of research proposed during the course of the master's degree in science education of the autonomous university of Manizales, it presents the results obtained from the application of a didactic unit focused on the presentation of activities aimed at the conceptualization of the whole number concept, for this a learning process based on the use of the semiotic records and cognitive activities of treatment and conversion. Its description is of a qualitative type and its analysis is based on the theory of semiotic representations proposed by Raymond Duval (1999), whose objective was to determine how the cognitive activities of treatment and conversion of semiotic representations influence the learning of whole numbers.

KEY WORDS: Semiotic representations, treatment, conversion, whole number, learning of mathematics.

CONTENIDO

1	INTRODUCCIÓN	13
2	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	16
3	OBJETIVOS.....	27
3.1	OBJETIVO GENERAL.....	27
3.2	OBJETIVOS ESPECIFICOS	27
4	JUSTIFICACIÓN.....	28
5	REFERENTES TEÓRICOS	31
5.1	PERSPECTIVA COGNITIVA.....	31
5.1.1	Las Representaciones Semióticas.....	32
5.1.2	Registros De Representación Movilizados En Matemáticas	34
5.1.3	Transformaciones Cognitivas Utilizadas En Matemáticas	37
5.1.4	Tratamiento.....	38
5.1.5	Conversión.....	39
5.1.6	Visualización Matemática	40
5.1.7	Características De La Conversión Entre Registros Semióticos.....	41
5.1.8	Sistemas De Representación De Los Números Enteros	44
5.1.9	Relaciones Entre Los Sistemas De Representación Considerados.....	48
5.2	PERSPECTIVA MATEMÁTICA.....	49
5.2.1	Recorrido Histórico De Los Números Enteros.....	50
5.2.2	Obstáculos En El Aprendizaje De Los Números Enteros	54
6	METODOLOGÍA	60
6.1	TIPO DE INVESTIGACIÓN	60
6.2	POBLACIÓN.....	61

6.3	UNIDAD DE TRABAJO	61
6.4	UNIDAD DE ANÁLISIS	62
6.4.1	Categorías De Análisis	62
6.5	INSTRUMENTOS Y TÉCNICAS PARA LA RECOLECCIÓN DE LA INFROMACIÓN	63
6.5.1	Prueba Diagnóstica.....	64
6.5.2	Actividad De Conceptualización Y Aplicación.....	64
6.5.3	Prueba Final.....	64
6.6	CONSIDERACIONES ÉTICAS	65
6.7	MOMENTOS DE LA INVESTIGACIÓN	65
6.8	PLAN DE ANÁLISIS	67
7	ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS	69
8	CONCLUSIONES	110
9	RECOMENDACIONES Y PERSPECTIVAS A FUTURO.....	112
10	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	114
11	UNIDAD DIDÁCTICA	118

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Clasificación de los diferentes tipos de registros movilizados en matemáticas. Se indica en <i>itálicas</i> el o los tratamientos característicos del tipo de registro.	36
Tabla 2 Sistema de representación verbal de números enteros	46
Tabla 3 Categorías y subcategorías de análisis del proyecto de investigación	63

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1 Tratamiento y conversión de representaciones semióticas.....	38
Ilustración 2 Sistema de representación de la adición y sustracción de números enteros	45
Ilustración 3 Recta numérica	48
Ilustración 4 Palillos chinos.....	48
Ilustración 5 Momentos del proyecto de investigación	67

ÍNDICE DE FIGURAS

figura 1 Registro de llegada de Jorge a la pregunta 1.....	70
figura 2 Registro de llegada de Jorge a la pregunta 2.....	71
figura 3 Registro de llegada de Jorge a la pregunta 3.....	72
figura 4 Registro de llegada de Jorge a la pregunta 4.....	74
figura 5 Registro de llegada de Jorge a la pregunta 1.....	76
figura 6 Registro de llegada de Jorge a la pregunta 2.....	77
figura 7 Registro de llegada de Jorge a la pregunta 1.....	78
figura 8 Registro de llegada de Jorge a la pregunta 2.....	79
figura 9 Registro de llegada de Jorge a la pregunta 3.....	79
figura 10 Tratamiento realizado por el estudiante Jorge a la pregunta 4.....	81
figura 11 Registro de llegada de Diana a la pregunta 5.....	82
figura 12 Registro de llegada de Diana a la pregunta 6.....	84
figura 13 Registro de llegada de Diana a la pregunta 8.....	85
figura 14 Registro de llegada de Diana a la pregunta 1.....	87
figura 15 Registro de llegada de Diana a la pregunta 2.....	88
figura 16 Registro de llegada de Diana a la pregunta 1.....	90
figura 17 Registro de llegada de Diana a la pregunta 2.....	91
figura 18 Registro de llegada de Diana a la pregunta 3.....	93
figura 19 Tratamiento de Diana a la pregunta 4.....	94
figura 20 Registro de llegada de Carlos a la pregunta 3.....	96
figura 21 Registro de llegada de Carlos a la pregunta 5.....	97
figura 22 Registro de llegada de Carlos a la pregunta 8.....	98
figura 23 Registro de llegada de Carlos a la pregunta 9.....	99
figura 24 Registro de llegada de Carlos a la pregunta 1.....	101
figura 25 Registro de Carlos a la pregunta 2.....	103
figura 26 Registro de llegada de Carlos a la pregunta 1.....	104
figura 27 Registro de llegada de Carlos a la pregunta 2.....	105
figura 28 Registro de llegada de Carlos a la pregunta 3.....	107
figura 29 Tratamiento de Carlos a la pregunta 4.....	108

TABLA DE ANEXOS

Anexo A. Prueba diagnostica	127
Anexo B. Actividad 2: (historia y definición del concepto número entero).....	132
Anexo C. Momento de Desarrollo.....	133
Anexo D. Segunda sección (actividades de conceptualización y aplicación del concepto)	136
Anexo E. Momento de Cierre.....	141
Anexo F. Sección 1 Actividad 1 “Domino matemático”	142
Anexo G. Segunda sección Actividad 2 “Entrevista semiestructurada”	144
Anexo H. Actividad 3 (valoración conceptos y procedimientos adquiridos) (Individual). 146	
Anexo I. Instrumento para recolectar y analizar la información obtenida en la actividad de evaluación.....	150

1 INTRODUCCIÓN

Este trabajo de investigación presenta un estudio realizado en el Colegio Nuevo Horizonte del municipio de Andalucía Valle del Cauca en el nivel de educación básica, donde participaron 18 estudiantes del grado sexto, entre las edades de 11 a 14 años, en búsqueda de caracterizar la influencia de las actividades cognitivas de tratamiento y conversión en el aprendizaje de los números enteros

En los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas llevados a cabo en las aulas de clase, puede percibirse que diariamente los docentes están sujetos a nuevos retos en su quehacer docente, estos retos se fundamentan especialmente en comprender que no todos los estudiantes cuentan con el mismo conocimiento previo y de experiencias para desarrollar un concepto matemático como es el caso del número entero, esto no significa que todos los estudiantes no lo puedan abordar pero si se debe brindar una especial atención a estos tipos de casos y generar las estrategias didácticas pertinentes que permitan afrontar estos casos. En el ámbito de las matemáticas se accede a los objetos matemáticos por sus representaciones; con el tratamiento adecuado dentro de varios sistemas de representación, se puede dar mayor o menor relevancia a algún aspecto del objeto sobre otro u otros; un registro puede permitir efectuar un tratamiento de manera más económica y más potente que otro (Duval R, 1999, p.59).

El concepto de número entero relaciona una gran variedad de representaciones semióticas (como son la representación gráfica, la expresión algebraica, numérica, la tabular, cartesiana, la lengua natural y la recta numérica), éstas son muy mencionadas tanto en los materiales de apoyo para el profesor y en los textos utilizados por el estudiante al abordar el tema. La comprensión de este concepto involucra la articulación coherente de estos registros de representación que juegan un papel fundamental en la resolución de un problema, como lo menciona Duval, (1999) sobre registros de representación semiótica, ***la conversión o transformación de una representación en otra perteneciente a otro registro, juega un papel fundamental en la actividad matemática.***

Este trabajo de investigación está estructurado de la siguiente forma:

En primera instancia se presenta el planteamiento del problema en cuyo caso se describen las principales dificultades que presentan los estudiantes a la hora de abordar el concepto de número entero y sus diferentes representaciones, así como la pregunta problema, los objetivos y la justificación del presente trabajo de investigación.

En el segundo apartado presentamos el marco teórico en el cual está enmarcado las principales categorías de investigación del presente trabajo, las cuales son el tratamiento y la conversión de las diferentes representaciones de los números enteros, en este marco teórico destacamos los trabajos de Raymond Duval y Bruno D'Amore los cuales son fundamentales como sustento teórico para esta investigación puesto que la definición de registro de representación nos proporcionan el marco teórico adecuado para el análisis y conclusiones de las producciones de los estudiantes, así mismo se establecen las características particulares de los registros de representación semiótica del concepto número entero y los principales obstáculos que han existido en el aprendizaje de este objeto matemático.

En el tercer apartado se presenta la metodología de esta investigación, en ella se describe como se desarrolló el trabajo, el estudio es cualitativo descriptivo donde se seleccionaron 3 estudiantes para el análisis de contenido, las categorías de estudio son el tratamiento y la conversión de las representaciones de los números enteros. El proceso de investigación se desarrolló en cuatro momentos el primero hace referencia a la aplicación de una prueba diagnóstica, el segundo momento corresponde a la aplicación de una unidad didáctica que tiene como objetivo la conceptualización de los números enteros a partir de actividades que contemplan las diferentes representaciones de este objeto matemático junto con las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de dichas representaciones, el tercer momento corresponde a la aplicación de un instrumento pos test que tiene como objetivo valorar los conocimientos adquiridos después de aplicada las actividades de la unidad didáctica y en el cuarto momento se presenta una análisis y un contraste entre los instrumentos aplicados para determinar la incidencia de las actividades desarrolladas con la conceptualización del objeto matemático número entero. Así mismo, se describen los

instrumentos que se utilizaron para recolectar los datos, planteados desde las diferentes representaciones semióticas de los números enteros.

En el cuarto apartado se presentan los resultados y el análisis de la información obtenidas en el grupo de estudiantes participantes de esta investigación. Una vez realizada la sistematización de los datos obtenidos en cada actividad, se procederá a realizar el respectivo análisis teniendo como referente las categorías y subcategorías de análisis planteadas para este trabajo. En este caso los análisis se realizaron entorno a los procesos de tratamiento y conversión de las representaciones del objeto matemático número entero, posterior a esto se analizara los procesos de tratamiento los cuales giran en torno a las reglas y propiedades del sistema semiótico en el cual se expresa la representación y por último se realizó un análisis a profundidad sobre los procesos de conversión entre un registro de partida y uno de llegada, teniendo como referente los tres criterios de congruencia entre representaciones planteados por Duval (1999), correspondencia semántica, univocidad semántica y conservación del orden.

En el último apartado se presentan las conclusiones generales de este trabajo y algunas recomendaciones a futuro, que dan cuenta de los objetivos propuestos y los aportes que se consideran relevantes que dejó este trabajo investigativo.

Finalmente, se presentan las referencias bibliográficas utilizadas y los anexos correspondientes a la unidad didáctica implementada para esta investigación.

2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El presente trabajo tiene como propósito central caracterizar la influencia de las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas en el aprendizaje de los números enteros, en estudiantes de grado sexto del Colegio Nuevo Horizonte. Para ello, presentamos el problema desde dos aspectos: el primero referido a la experiencia docente, que da cuenta de dificultades latentes en el proceso de aprendizaje de los números enteros y, el segundo ateniendo a los antecedentes de investigación sobre el uso de representaciones semióticas y los números enteros.

A partir de la experiencia profesional se ha tenido la oportunidad de enseñar matemáticas desde el grado sexto hasta el grado noveno de secundaria, con lo cual se puede tener una visión global de los contenidos enseñados en la educación básica y además tener un referente sobre las dificultades que encuentran los estudiantes cuando realizan procesos de aprendizaje; y es desde esta perspectiva que los docentes del área de matemáticas del Colegio Nuevo Horizonte hemos identificado que uno de los campos numéricos que presenta una mayor dificultad para su comprensión es el de los números enteros y las operaciones entre ellos. Se ha evidenciado problemas relacionados con la utilización de las diferentes representaciones que puede tener un número entero (algebraica, gráfica, lengua natural y manipulativa) y además dificultades para pasar de una representación en un registro a otro (conversión).

En los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas llevados a cabo en las aulas de clase, puede percibirse que diariamente los docentes están sujetos a nuevos retos en su quehacer docente, estos retos se fundamentan especialmente en comprender que no todos los estudiantes cuentan con el mismo conocimiento previo y la experiencia necesaria para desarrollar un concepto matemático como es el caso del número entero, esto no significa que todos los estudiantes no lo puedan abordar pero si se debe brindar una especial atención a estos tipos de casos y generar las estrategias didácticas pertinentes que permitan afrontar estos casos. “En el ámbito de las matemáticas se accede a los objetos por sus representaciones; con el tratamiento adecuado dentro de varios sistemas de

representación, se puede dar mayor o menor relevancia a algún aspecto del objeto sobre otro u otros; un registro puede permitir efectuar un tratamiento de manera más económica y más potente que otro” (Duval R, 1999, p.59).

Sin embargo, la adquisición de los conocimientos matemáticos por parte de los estudiantes requiere el uso de representaciones semióticas las cuales hacen los objetos matemáticos más explícitos y a los cuales se les puede efectuar tratamientos y conversiones. Como lo plantea (Duval, 2008), los objetos matemáticos no son accesibles por fuera de las representaciones semióticas, de donde el recurso en paralelo a diferentes tipos de representaciones se usa para intentar volver más accesibles los objetos que no son accesibles por fuera de los sistemas de representación; en consecuencia, al momento de desarrollar un concepto matemático las representaciones favorecen la comprensión de éste, un sistema de representación es más potente que otro para tratar un concepto, porque permite la construcción con mayor facilidad del objeto matemático que se esté trabajando, en nuestro caso particular el número entero, esto no significa que sólo se deba emplear éste porque se estaría favoreciendo el tratamiento de esta representación y no se está dando la relevancia que se merece la conversión, dado que cuando se usan diferentes sistemas de representación para un objeto es más posible que se conceptualice.

Investigadores como Cid, (2003) en su reporte de investigación llamado “la investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión” menciona algunos estudios como los de Küchemann (1980,1981), Bell (1982) y Murray (1985) en los cuales se presentan los resultados de una serie de pruebas y entrevistas realizadas a estudiantes que han recibido enseñanza sobre los números enteros, donde se confirma que efectivamente se está frente a un fenómeno didáctico y se tiene evidencias de las dificultades y errores de los estudiantes al ser enfrentados a situaciones de adición y sustracción de números enteros. Es posible que esta dificultad surja porque los conocimientos adquiridos en matemáticas en los primeros años escolares son referidos a los números naturales y en este conjunto, las palabras agregar y aumentar están relacionadas con la adición, quitar y disminuir con la sustracción. Sin embargo, en el conjunto de los números enteros, se observa que estas palabras, aumentar y quitar, no se relacionan en

forma natural con la adición y sustracción respectivamente. En ocasiones, el cálculo de una adición con números de distinto signo puede dar como resultado un número negativo, del mismo modo ocurre en la sustracción, en donde al restar dos números positivos el resultado puede ser un número negativo. Pero también, se ha encontrado que las causas de las dificultades de los estudiantes para realizar operaciones entre enteros, están relacionadas con la falta de mediadores didácticos y metodologías que permitan al estudiante reconocer y utilizar los diferentes registros de representación y los procesos de tratamiento y conversión para la resolución de situación planteada.

Es importante resaltar que el concepto de número entero sólo existe en un contexto relativo, tomando valor únicamente en contextos matemáticos, no representa algo que sea tangible cuando hablamos de cantidades menores que cero. Su uso surge por necesidad matemática. Los objetos matemáticos son inventados o creados por los seres humanos (a diferencia de los objetos materiales encontrados en el mundo físico a partir de los cuales se pueden observar algunas cualidades) y, por tanto, su existencia es ficticia o convencional. Por lo anterior, se deduce que para trabajar con los números enteros se hace necesario realizar una representación del objeto en cuestión, esta representación construida pretende reunir las características y atributos de los objetos representados, en este sentido la representación es utilizada por el estudiante para reemplazar los objetos matemáticos que no son accesibles perceptivamente o instrumentalmente, con esta representación se busca interactuar con los objetos y efectuar operaciones con ellos sin necesidad de su presencia física.

Toda actividad matemática implica el uso de representaciones semióticas, debido a que los objetos estudiados no son accesibles perceptiblemente o instrumentalmente, como en otros dominios del conocimiento científico; las representaciones semióticas no se utilizan para evocar objetos o para comunicar simplemente, sino para modelar objetos del mundo abstracto y poder efectuar transformaciones y operaciones con esos objetos de conocimiento, es decir, razonamientos, cálculos, etc. "... el punto fundamental en la actividad matemática no es la utilización necesaria de representaciones semióticas, sino la capacidad de pasar de un registro de representación semiótico a otro registro" (Duval, 2008,

pág.64), ya que esto permite tener una representación de un objeto matemático en dos registros diferentes pero que en últimas están representando la misma situación. en consecuencia, es relevante tener en cuenta la articulación de los diversos registros de representación con los que el docente está presentando el conocimiento matemático; en efecto, no tener en cuenta estas reglas provoca que los estudiantes no alcancen una mayor aprehensión de los números enteros y sus representaciones. En consecuencia, se deduce que el aprendizaje de los objetos matemáticos se hace por medio de sus representaciones semióticas, y sólo a través de ellas, es posible una actividad sobre los objetos matemáticos, por lo tanto, la disponibilidad y el uso de diversos sistemas de representación semiótica, su tratamiento y conversión que hace el sujeto, son imprescindibles para reconocer el aprendizaje del objeto matemático número entero.

Los estudios acerca de la enseñanza y aprendizaje de los números enteros han sido poco frecuentes, sin embargo, tal y como lo reseñan las investigaciones y nuestra propia experiencia como docentes, los números enteros representan una gran dificultad en la mayoría de los estudiantes, más precisamente con la inserción de los números negativos y sus diversas representaciones. El interés por investigar los problemas referentes a la enseñanza y aprendizaje de los números enteros, según Gallardo (1996), se centró hasta la década pasada, fundamentalmente en tres direcciones; una de ellas, como investigaciones desde la perspectiva teórica, entre las cuales destacaron los estudios de Piaget (1960). Otro tipo de investigaciones se enfatizó en presentar estudios de carácter experimental, entre los cuales se puede mencionar los trabajos de Vernaud (1989). Y un tercer tipo de investigaciones referidos a la enseñanza, como por ejemplo los trabajos de Bruno & Martín (1996) y Ribeiro (1996).

En la época actual se ha visto gran interés por estudiar las concepciones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de los números enteros, también se han presentado investigaciones que muestran la importancia y el potencial que tienen las representaciones semióticas y las actividades cognitivas de tratamiento y conversión en el aprendizaje de un concepto matemático. Por lo anterior en el siguiente apartado se presentan algunos trabajos que están enfocados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de

los números enteros, las representaciones semióticas y las actividades cognitivas de tratamiento y conversión.

El trabajo de Ojeda & Bolaños, (2015) presenta un estudio sobre el uso de representaciones semióticas por estudiantes ciegos en procesos de desarrollo de algoritmos y/o estrategias operativas en situaciones relacionadas con la suma y resta de números enteros. Se toma como punto de partida que el número entero sólo existe en un contexto relativo, tomando valor únicamente en contextos matemáticos, no representa algo que sea tangible cuando hablamos de cantidades menores que cero. Su uso surge por necesidad matemática. Para ello los autores proponen una serie de situaciones con las que se pretende reconocer los sistemas de representación semiótica privilegiados y utilizados por estudiantes con la ceguera como condición de diversidad al tratar de comunicar o establecer la solución a una situación problema que vincula operaciones aditivas con enteros.

Es importante reconocer que al momento de desarrollar un concepto matemático las representaciones favorecen la comprensión de éste, un sistema de representación es más potente que otro para tratar un concepto, porque permite la construcción con mayor facilidad del objeto matemático que se esté trabajando, en nuestro caso particular el número entero.

Este trabajo es importante puesto que permite reconocer qué tipos de representación son privilegiadas (semiosis) al momento de enfrentar y de resolver una situación problema encaminada a la construcción del concepto de número entero con estudiantes con la ceguera como condición de diversidad y con poblaciones mayoritarias, de tal manera que las actividades puedan ser desarrolladas por todos sin exclusión. Entre los resultados de esta investigación, destacamos los siguientes:

- Los estudiantes logran hacer uso de diferentes sistemas de representación, pero su mayor fortaleza radica en los materiales que pueden manipular (tablero y fichas del modelo MOFIP, geoplano, circuito cerrado), el software no llama su atención porque no están familiarizados con este material en procesos anteriores de enseñanza – aprendizaje y por consiguiente no pueden hacer visible su respuesta.

- Se reconocen el lenguaje natural y los recursos manipulables como los sistemas de representación semiótica privilegiados y utilizados por estudiantes con la ceguera como condición de diversidad al tratar de comunicar o establecer la solución a una situación problema que vincula operaciones aditivas con enteros.
- La construcción del concepto de número entero en personas ciegas se ve reflejada en la actividad de representación, en la medida que puede transformar una información haciendo empleo de más de un registro semiótico y en la misma actividad de comunicación de los procesos.
- Para la construcción del concepto de número entero con las operaciones de suma y resta, es necesario y potente partir de las representaciones a partir de cantidades (números naturales), con las cuales se pueden establecer relaciones que permiten la aparición de números enteros, haciendo empleo de las reglas operatorias heredadas de los números naturales.
- El empleo de varias vías de acceso al concepto de número entero potencia los procesos de tratamiento y conversión de representaciones semióticas, puesto que el estudiante puede reconocer varias formas de representar el objeto matemático número entero, además esto hace que no se confunda el número entero con una de sus representaciones.

Así mismo, el trabajo de maestría de Borjas (2009) tuvo como propósito explorar, describir, y plantear acciones que permitan la comprensión de los conceptos teóricos, procedimientos, relaciones y operaciones con números enteros. Para ello la autora propone la utilización de un modelo de enseñanza denominado Modelo operativo de fichas, con el cual se pretende hacer que el aprendizaje del concepto número entero sea más significativo y ante todo más fácil para los estudiantes mediante la mediación de material concreto.

Es importante resaltar que esta investigación se basó en los aportes teóricos de Hitt (2003, 2006 y 2008), en los cuales se hace énfasis en las funciones de las representaciones

mentales, articuladas con las representaciones semióticas que puede producir un individuo en la construcción de un concepto matemático o en la resolución de un problema contextual.

Entre los resultados de esta investigación, destacamos los siguientes:

- Se utilizó por parte de los estudiantes distintos tipos de representación, se detectó entre sus producciones el carácter funcional de esas representaciones.
- Además del modelo de fichas los estudiantes utilizaron otros tipos de representaciones como estrategia para la resolución de un problema.
- El modelo utilizado es un método de enseñanza de tipo constructivista, ya que el estudiante va construyendo el conocimiento matemático; a partir de este modelo le permite descubrir las reglas de operación que rigen a los números enteros, trasladando sus experiencias del modelo “real” al mundo de los símbolos escritos de las matemáticas.
- Los estudiantes lograron apoyarse sin mayor dificultad de las operaciones de adición de números enteros con igual y distintos signos, presentando un poco de dificultad en la sustracción, sobre todo cuando había que operar números enteros con igual signo, ya que tendían a confundir la operación con la adición de números enteros con signos iguales.

Con respecto al uso de las representaciones semióticas en el aprendizaje Ospina (2012), en su trabajo de investigación hace énfasis en el reconocimiento de las representaciones semióticas del concepto de función, las actividades cognitivas de tratamiento y conversión y su importancia en el aprendizaje de las matemáticas en contextos de educación básica y media. Con esta investigación se buscaba identificar los aportes didácticos que favorecen el tratamiento y la conversión de representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto matemático que sirvió de base para nuevas investigaciones y para los docentes de matemáticas con el fin de complementar su quehacer en el aula ya que las representaciones semióticas y las actividades cognitivas de tratamiento y en especial la conversión de registro favorecen la conceptualización del concepto función lineal.

La investigación se encontraba enmarcada en la teoría de registros de representación semiótica de Raymond Duval (1999) Y Bruno D' Amore (2004). Desde este enfoque se tomó como referente los registros de representación semiótica y su relevancia en el aprendizaje de los conceptos matemáticos y específicamente en el aprendizaje del concepto de función lineal. Este enfoque ha sido desarrollado por Duval (1999) el cual plantea la conversión de registros de representación como actividad fundamental para la aprehensión de los objetos matemáticos, también planteado por Bruno D' Amore (2004), enfoque que se fundamenta en la noción semiótica de registro de representación.

Entre los resultados de esta investigación, destacamos los siguientes:

- La identificación de pre saberes de los estudiantes en el instrumento uno previo al abordaje el concepto matemático, permitió el reconocimiento de las representaciones semióticas reconocidas por los estudiantes, asimismo favorecieron los procesos de articulación del lenguaje natural hacia el lenguaje matemático. Es importante que desde el aula se propicie este acercamiento, ya que muchas dificultades en la comprensión del concepto es que en su enseñanza se excluye el lenguaje natural como registro de representación del concepto.
- Se confirma la teoría de Duval (2004), donde se plantea que entre más representaciones semióticas se involucren en el aprendizaje de un concepto matemático (en este caso el concepto de función lineal) y al interior de estas representaciones, se faciliten condiciones de congruencia, se alcanza una mejor comprensión, logrando que el estudiante establezca la diferencia entre la representación semiótica del concepto matemático y el objeto matemático representado, discriminar sus unidades significantes y ponerlas en correspondencia en otros registros, ya que el reconocimiento de la invariancia entre estas unidades significantes es la que permite la aprehensión del concepto matemático.
- El contexto de la situación influye en los registros de representación y en las transformaciones que utilizan los estudiantes para resolverlas, asimismo el estudiante identifica en la situación las unidades significantes y las pone en correspondencia en los otros registros, sin embargo el registro privilegiado para esta

conversión es el registro gráfico, por las numerosas unidades significantes que posee la correspondencia de estas con el registro verbal, entre ellas las magnitudes, los valores que toma cada una de las variables, las escalas, la pendiente de covariación, la continuidad de la función, además es una representación claramente reconocida para este objeto matemático.

- La comprensión de la actividad cognitiva de conversión que efectúan los estudiantes en el aprendizaje del concepto de función permitió observar la comprensión del concepto de función que exhiben los estudiantes y el tipo de dificultades que se pueden presentar con el uso de diferentes registros de representación semióticos.
- El análisis de las conversiones realizadas por los estudiantes a partir de los criterios de conversión (CS , US, CO) permitieron confirmar que a pesar que existen múltiples representaciones semióticas propias del concepto matemático función lineal, no todas permiten generar procesos de congruencia con otros tipos de representación semiótica, debido a que la simple conversión de registros de representación sin que existan condiciones de congruencia entre ellos, no garantiza la comprensión del concepto matemático.

Por otro lado, Castillo (2014), presenta un trabajo de investigación donde hace énfasis en la necesidad de implementar clases alternativas de matemática en la educación básica, dado que el autor durante la experiencia observó las dificultades en las operaciones elementales que presentan los estudiantes en el trabajo con los números enteros. Por esta razón el autor propone la enseñanza de la adición y sustracción (estructuras aditivas), de números enteros a través de la utilización de objetos físicos en estudiantes del grado séptimo.

Para ello se propone la implementación de una secuencia didáctica que estaba compuesta por dos objetos físicos uno denominado “el tren de los enteros” el cual simulaba el recorrido de un pasajero a través de diversas estaciones, para lo cual se hacían diversas operaciones y el segundo denominado “bicolores de conteo” fue construido por los estudiantes participantes en la investigación se utilizó el principio de instrumentos de cálculo, implementado desde la antigüedad. La estructura didáctica en éste se cuenta con

objetos de color rojo que representan (enteros negativos) y objetos de color negro (enteros positivos), para el caso de la estructura aditiva con enteros de igual signo se suman los objetos de un mismo color y con enteros de diferente signo se procede a eliminar uno a uno los elementos de diferente color siendo la respuesta la cantidad sin eliminar si es el caso con su respectivo signo. Con la implementación de estos objetos físicos se quiere constatar como el uso de objetos físicos privilegia la enseñanza de la adición y sustracción de números enteros, cual es la reacción de los estudiantes al cambio en el ambiente de aprendizaje, la posibilidad de un trabajo colaborativo, la mediación de los objetos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, los cambios en diversos registros de representación y el avance en el trabajo con los números enteros.

Entre los resultados de esta investigación, destacamos los siguientes:

- La enseñanza de las estructuras aditivas de los números enteros a través de objetos físicos, lograron mediar en la aprehensión de conocimientos en la relación enseñanza y aprendizaje, además el privilegio de aprendizajes significativos.
- El diseño y utilización de artefactos, les permitió a los estudiantes interactuar con los conceptos y situaciones aditivas de números enteros, propiciando el dialogo, análisis y discusión entre los estudiantes y entre estudiantes y docentes.
- Los cambios en el ambiente de aprendizaje lograron en el educando una mejor disposición durante el proceso de investigación. Los componentes didácticos que se destacan la mediación en el proceso enseñanza-aprendizaje a través de los objetos físicos, lo cual poco se presenta en el modelo tradicional, así como interrelación de varios registros de representación.
- El proyecto impactó a los estudiantes teniendo la posibilidad con los objetos físicos de pasar de un registro de representación a otro, además la opción de un trabajo colaborativo.
- Los obstáculos epistemológicos de los números enteros, así como el hecho de no poder contar con varios “trenes de los enteros”, para que los educandos pudiesen practicar por más tiempo, no permitió obtener mejores resultados en el aula de clase.

El trabajo de Cid (2002), presenta un estudio sobre los modelos de enseñanza de los números enteros, centrándose básicamente en estudiar los modelos concretos de desplazamiento y el de neutralización. En el primer modelo se enfatiza la enseñanza de los números negativos con la mediación de la recta numérica y en donde se utilizan términos como: avanzar, retroceder, bajar y subir; en el segundo modelo el estudio se apoya en situaciones tales como: deudas y bienes, ganancias y pérdidas, entre otros. En este estudio se analizan ventajas e inconvenientes que subyacen con la aplicación de cada modelo en el aula de clase y los resultados de dichas aplicaciones. Por consiguiente, esta investigación amplia y profundiza el conocimiento sobre los modelos que se pueden utilizar en el aula de clases para presentar el concepto de número entero, es decir, aporta bases para indagar que tan productivo o perjudicial es utilizar cada uno de estos modelos en la enseñanza de los números enteros.

Por otro lado, Berrios & Valdivia (2012), afirman que la “utilización de material manipulable en la escuela secundaria, específicamente en séptimo grado a través del uso de estrategias como la del modelo de temperaturas en particular, es una manera de hacer clases de una manera más atractiva para los estudiantes, ya que al impartir la asignatura de matemática de esta manera ayuda a que sean los mismos estudiantes los que se interesen por descubrir las particularidades o generalidades que cada contexto presenta”. Con lo anterior podemos decir que el uso de actividades y material manipulable en el aula de clase permite que los estudiantes tengan mayor disponibilidad por aprender siendo las clases más atractivas y con mayor significado para ellos, lo que contribuye a que los estudiantes comprendan los conceptos y operaciones en el conjunto de los números enteros.

Lo anteriormente expuesto, nos lleva a proponer la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuál es la influencia del tratamiento y la conversión de representaciones semióticas, como actividades cognitivas en el aprendizaje de los números enteros, en estudiantes de grado sexto del colegio Nuevo Horizonte?

3 OBJETIVOS

3.1 OBJETIVO GENERAL

- Caracterizar la influencia de las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas en el aprendizaje de los números enteros, en estudiantes de grado sexto del Colegio Nuevo Horizonte.

3.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Identificar los conocimientos previos que tienen los estudiantes, en relación con las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las diferentes representaciones de los números enteros.
- Describir los cambios que presentan los estudiantes con relación a las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las diferentes representaciones de los números enteros, una vez implementada la intervención didáctica.

4 JUSTIFICACIÓN

Los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se constituyen en actividades que están orientadas al reconocimiento y a la construcción de conocimiento matemático en el aula de clase, por lo tanto, el docente como ente encargado de este proceso, debe velar por que estos se lleven a cabo de la mejor manera, garantizando el aprendizaje por parte de los estudiantes de los conceptos y procedimientos matemáticos. Para ello debe indagar desde su experiencia como aprenden los estudiantes, que actividades y situaciones favorecen la enseñanza de los objetos matemáticos, para luego reflexionar sobre el potencial, alcance y efectividad que tienen estas actividades en el aprendizaje.

En este caso para la enseñanza de los números enteros se hace necesario el uso de representaciones semióticas las cuales hacen más accesibles los objetos matemáticos, debido a la naturaleza intangible del objeto, ya que dichos conceptos matemáticos no son accesibles para el estudiante sino a través del uso de sus representaciones a las cuales se les puede efectuar los procesos de tratamiento y conversión. En este sentido, las representaciones semióticas son de gran importancia en la enseñanza de las matemáticas, por lo que es importante la realización de este trabajo en razón de que permite ver que: debido a la diversidad de los sistemas semióticos, existe una variedad de representaciones para un mismo objeto; esta variedad se revela como decisiva a la vez desde el punto de vista de la función de tratamiento y desde el punto de vista de la conceptualización.

Ahora bien, la importancia en la variedad de los registros de representación radica en que no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación pues un mismo objeto matemático puede representarse de diferentes maneras. y esto solo puede llegar a ser posible si se tiene un acercamiento al objeto matemático en estudio desde diferentes contenidos del mismo presentados en cada representación, ya que cada una de dichas representaciones deja ver características y propiedades particulares del objeto representado, las cuales dependen de la forma de representación. Para el concepto de número entero, esta apreciación es de gran utilidad la multiplicidad de registros representacionales existentes y por la posibilidad que ofrecen de

expresar los actos de pensamiento y a la vez enriquecer los procesos de construcción del conocimiento matemático en los estudiantes.

Es importante reconocer que los procesos de conversión en el aula de clase no son efectuados a conciencia por los estudiantes y se trabajan de forma espontánea sin identificar las unidades significantes de cada registro que es la clave para realizar la conversión. En este sentido, la dificultad para los estudiantes radica en que el paso de registro no se hace de forma espontánea y requiere la discriminación de las unidades significantes pertenecientes a cada uno de los sistemas semióticos en los cuales se expresan las representaciones, para luego proceder a articularlos. Por lo anterior, se requiere que el docente de manera intencional proponga actividades que inciten a la realización de estas actividades cognitivas, donde el estudiante aprenda que antes de convertir una representación requiere aprender a discriminar de manera específica cada una de las unidades que conforman el registro semiótico en el cual se expresan las representaciones que quiere convertir.

Este proyecto pretende aportar elementos a la construcción de un modelo de enseñanza de las matemáticas basado en el uso de representaciones semióticas y donde se promueva las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de representaciones semióticas del concepto matemático número entero.

Con este proyecto se pretende identificar el potencial didáctico que tiene en el aprendizaje del concepto de número entero las actividades cognitivas de tratamiento y conversión, las cuales servirán como un insumo para nuevas investigaciones que pretendan describir los procesos de construcción y aprendizaje de los objetos matemáticos para el diseño de estrategias de enseñanza en básica secundaria.

Para finalizar, la importancia de este trabajo radica en el reconocer qué tipos de representación son utilizadas por los estudiantes al momento de enfrentar y de resolver una situación problema encaminada a la construcción del concepto de número entero, además se busca aportar elementos importantes desde lo cognitivo que ayuden a la conceptualización y al aprendizaje profundo de los números enteros, enfatizando en

presentar algunas indagaciones, sobre los procesos que realizan los estudiantes al efectuar la conversión y tratamiento de las diferentes representaciones de un número entero.

5 REFERENTES TEÓRICOS

Es indispensable dar un reconocimiento especial a las matemáticas por ser un campo de conocimiento que permite generar habilidades de pensamiento, susceptibles de transferencia, no sólo a la vida práctica del estudiante por los diversos espacios articuladores, sino a diversos campos del conocimiento en la medida en que articula las dimensiones: razonamiento, modelación, comunicación y representación, que atraviesan todo el engranaje curricular. En este sentido para este trabajo de investigación es importante conocer algunos conceptos teóricos que soportan conceptualmente la estrategia de enseñanza que se está diseñando en este trabajo.

5.1 PERSPECTIVA COGNITIVA

Las investigaciones que se proponen y se realizan entorno a la enseñanza de las matemáticas y el modo como se da su aprendizaje en la escuela, no solo deben limitarse a los contenidos enseñados o la forma como estos contenidos deben ser introducidos; además de esto es primordial que se enfatice en analizar las circunstancias estructurales que generan los problemas de comprensión con los cuales se enfrenta la mayoría de estudiantes de matemática en la educación básica, como son la construcción de lenguajes paralelos al natural, la utilización de diversas representaciones que permitan acceder al objeto matemático y la utilización de las operaciones de tratamiento y conversión que permiten la aprehensión conceptual de los objetos matemáticos que conlleve al aprendizaje de contenidos cada vez más abstractos.

Teniendo en cuenta lo anterior, y basados en el análisis del funcionamiento cognitivo propuesto por Raymond Duval en su obra *Semiósis y Pensamiento Humano* (1995), es importante tener en cuenta una perspectiva cognitiva en el estudio de los números enteros en la escuela.

5.1.1 Las Representaciones Semióticas

Toda actividad matemática implica el uso de representaciones semióticas, debido a que los objetos estudiados no son accesibles perceptiblemente o instrumentalmente, como en otros dominios del conocimiento científico; las representaciones semióticas no se utilizan para evocar objetos o para comunicar simplemente, sino para modelar objetos del mundo abstracto y poder efectuar transformaciones y operaciones con esos objetos de conocimiento, es decir, razonamientos, cálculos, etc. “... el punto fundamental en la actividad matemática no es la utilización necesaria de representaciones semióticas, sino la capacidad de pasar de un registro de representación semiótico a otro registro” (Duval, 2008, pág.64), ya que esto permite tener una representación de un objeto matemático en dos registros diferentes pero que en últimas están representando la misma situación.

Las representaciones semióticas entendidas como aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica, etc.) no cumplen solamente una función de comunicación, sino que se constituyen necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma, ya que los tratamientos que se pueden efectuar sobre un objeto matemático depende directamente del sistema semiótico utilizado.¹

Ahora bien, la importancia en la variedad de los registros de representación radica en que no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación y esto solo puede llegar a ser posible si se tiene un acercamiento al objeto matemático en estudio desde diferentes contenidos del mismo presentados en cada representación, ya que cada una de dichas representaciones deja ver características y propiedades particulares del objeto representado, las cuales dependen de la forma de representación. De esta manera, los objetos matemáticos como los números, las ecuaciones, las rectas, etc., no serán confundidos con sus representaciones, es decir, las escrituras

¹ Duval, R. (1995). *Semiósis y Pensamiento Humano*. Peter Lang S.A. Editions Scientifiques Européennes. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática, GEM. Traducción: Myriam Vega Restrepo, 1999. Primera Edición 1999.

algebraicas o fraccionarias, los símbolos, los gráficos, los trazados de las figuras, etc. (Duval, 2008, pág. 64).

Sin embargo, no es suficiente la utilización de diferentes registros de representación cuando se busca estudiar un objeto matemático particular, es necesario que dichos registros estén coordinados por el sujeto para que pueda existir una verdadera diferenciación del objeto representado y su representación y así poder llegar a la comprensión de este.

En relación con las representaciones, es relevante considerar que existe diferencias entre representaciones mentales y representaciones semióticas. Siguiendo a Duval (2006), se considera que las representaciones mentales están conformadas por todo el conjunto de concepciones o imágenes que un individuo tiene acerca de un objeto, por este motivo se consideran como la interiorización de las representaciones semióticas; y las representaciones semióticas son las producciones constituidas por el empleo de signos; no son más que el medio por el cual disponen los individuos para exteriorizar sus representaciones mentales, para hacerlas visibles y accesibles a otros. Estas además de cumplir una función de comunicación, tienen una función de objetivación, son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma, del funcionamiento cognitivo del pensamiento, del tratamiento de la información, de la toma de conciencia y de la comprensión.

Tamayo (2006), plantea que el conjunto de signos o de símbolos que representan algún objeto pueden ser de carácter externo o interno. Por ejemplo, los mapas, los diagramas y los dibujos son tipos de representaciones externas, elaboradas con propósitos comunicativos y producidos por acciones intencionadas o no intencionadas de las personas, que usamos permanentemente en nuestras vidas. Tenemos también que las palabras y otras notaciones simbólicas y algebraicas de uso común que se emplean en los campos de la física, la química y las matemáticas son caracterizadas como representaciones externas, conocidas también como representaciones semióticas. Las representaciones internas, mentales, son aquellas que "ocupan un lugar" en la mente de los sujetos. Ellas nos permiten mirar el objeto en ausencia total del significante perceptible; pueden ser conceptos, nociones, creencias, fantasías, guiones, modelos mentales, imágenes, entre otras.

Dado lo anterior, se resalta la importancia de las representaciones semióticas como el único medio de acceso a los objetos matemáticos, ya que éstas determinan las transformaciones que pueden ser realizadas sobre los objetos representados de acuerdo con las restricciones propias del sistema semiótico del cual se vale el pensamiento para lograr los procesos de abstracción o generalización de los objetos matemáticos y a través de los cuales los estudiantes caracterizan e identifican las propiedades de los objetos.

5.1.2 Registros De Representación Movilizados En Matemáticas

Ahora bien, en matemáticas se movilizan cuatro diferentes tipos de representación, los cuales se clasifican de acuerdo con su tipo de aprehensión, en discursivos o no discursivos y según su campo de acción, en monofuncionales o plurifuncionales.

- **Los registros discursivos:** son los que utilizan una lengua, de ellos solo se puede tener una aprehensión secuencial, y admiten la formulación de proposiciones, las cuales pueden ser calificadas como verdaderas o falsas. A esta clase pertenecen el lenguaje natural, el registro de escritura algebraica, los registros de escritura simbólica utilizados en lógica, entre otros.
- **Los registros no discursivos:** de ellos solo se puede tener una aprehensión sinóptica, y muestran formas o configuraciones de formas, así como organizaciones. A esta clase de registros pertenecen las figuras geométricas planas o en perspectiva (es decir, configuraciones de formas en 0, 1, 2 o 3 dimensiones como puntos, líneas, curvas cerradas, entre otras), gráficos cartesianos de funciones, relaciones, el cambio de sistemas de coordenadas, etc.
- **Los registros plurifuncionales:** son utilizados en todos los dominios de la vida cultural y social. Estos registros no son algoritmizables, y su empleo dentro de las matemáticas es completamente diferente al uso que los estudiantes están habituados. Este es el caso del empleo de figuras geométricas para modelizar, o el lenguaje natural para dar explicaciones,

definiciones, descripciones, argumentar a partir de observaciones, entre otros.

- **Los registros monofuncionales:** son registros de carácter técnico o especializado que se apoyan en las reglas de formación de representaciones, las cuales determinan el empleo de los signos y los símbolos en función de su forma. Esto, los hace más potentes y más seguros que los que son efectuados en un registro plurifuncional. Sus tratamientos asumen principalmente la forma de algoritmos, teniendo como principales referentes de este tipo de registros los grafos cartesianos, los sistemas de escritura numérica, el lenguaje simbólico utilizado en lógica, etc.

Tabla 1 Clasificación de los diferentes tipos de registros movilizados en matemáticas. Se indica en itálicas el o los tratamientos característicos del tipo de registro.

	REPRESENTACIÓN DISCURSIVA	REPRESENTACIÓN NO DISCURSIVA
<p>REGISTROS PLURIFUNCIONALES: los tratamientos no son algoritmizables</p>	<p>Lengua natural</p> <p><i>asociaciones verbales (conceptuales)</i></p> <p><i>descripción, definición, explicación</i></p> <p><i>razonamiento:</i></p> <p>— <i>argumentación a partir de observaciones, de creencias.</i></p> <p>— <i>deducción válida a partir de definición o de teoremas</i></p>	<p>Figuras geométricas planas o en perspectiva (configuraciones de formas en 0, 1, 2, 3 D)</p> <p><i>aprehensión operatoria y no solamente perceptiva</i></p> <p><i>construcción con instrumentos,</i></p> <p><i>modelización de estructuras físicas</i></p> <p><i>(ej: cristales, moléculas...)</i></p>
<p>REGISTROS MONOFUNCIONALES: los tratamientos son principalmente algoritmos</p>	<p>Sistemas de escritura:</p> <p>- numéricas (binaria, decimal, fraccionaria...)</p> <p>- algebraicas</p> <p>- simbólicas (lenguas formales)</p> <p><i>Calculo literal, algebraico, formal...</i></p>	<p>Grafos cartesianos (visualización de variaciones)</p> <p><i>cambio de sistema de coordenadas,</i></p> <p><i>interpolación,</i></p> <p><i>extrapolación</i></p>

Fuente: Duval, (1999).

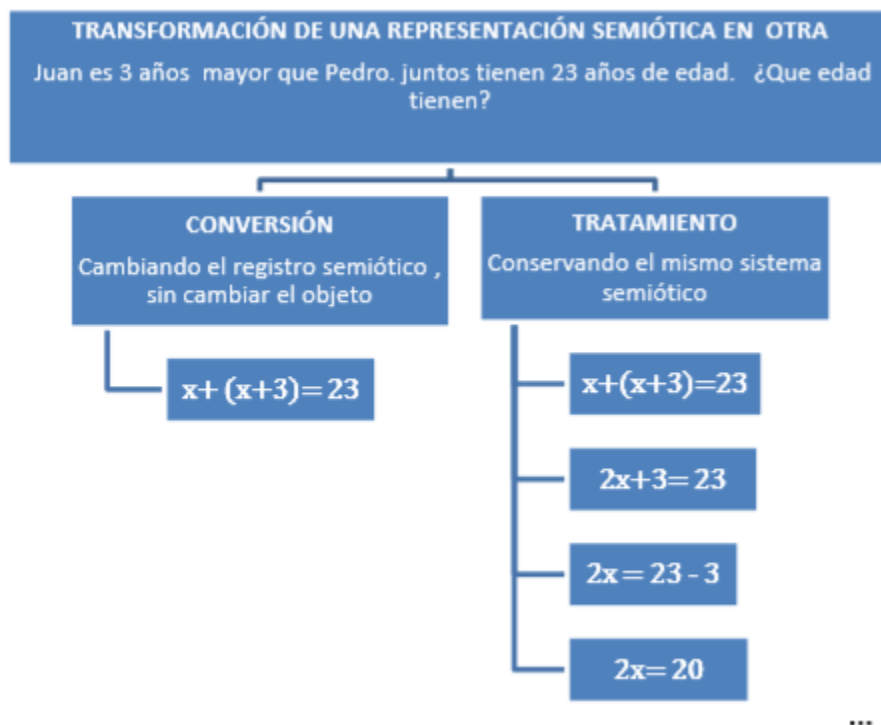
5.1.3 Transformaciones Cognitivas Utilizadas En Matemáticas

Según Duval (1999) formar una representación semiótica es seleccionar un conjunto de caracteres o de signos dentro de un sistema semiótico, de acuerdo con las posibilidades de representación propias de este registro, para que representen las características principales de un objeto; de esta manera la representación construida reemplaza la imagen percibida del objeto al hacerla presente cada vez que se necesite. Se forma una representación semiótica cuando se le asignan nombres a los objetos, se generan imágenes esquemáticas sobre ellos o se codifican relaciones o propiedades pertinentes a una transformación en los mismos.

Se ha mostrado que en la actividad matemática se movilizan cognitivamente dos tipos de transformaciones de representación semiótica. Existen las efectuadas en el interior de un mismo registro y otras transformaciones que consisten en cambiar de registro de representación. Para designar estos dos tipos de transformaciones se ha empleado los términos **tratamiento** y **conversión** (Duval, 2004, p.28).

Un ejemplo de tratamiento y conversión, se presenta en el siguiente ejemplo citado por (Duval, 2006).

Ilustración 1 Tratamiento y conversión de representaciones semióticas



Tomado de Duval, R. (2006), pag.146

5.1.4 Tratamiento

Un tratamiento es la transformación de una representación en otra representación de un mismo registro. El tratamiento es una transformación estrictamente interna a un registro. La transformación de una representación en otra representación del mismo registro (un tratamiento), se hace según las reglas que corresponden a las posibilidades de funcionamiento del sistema y a las propiedades matemáticas representadas.

Ahora bien, cuando se efectúa la operación de tratamiento sobre una representación, esta se transforma en otra representación, que está construida utilizando el mismo sistema semiótico. Es decir, no se cambia el sistema de signos en el cual está expresada la representación inicial. Este tipo de transformación también es reconocida como una transformación interna a un registro semiótico. Esta operación de tratamiento por lo general se realiza cuando se debe responder a una pregunta, solucionar un problema o satisfacer

una necesidad. Por ejemplo, al realizar un cálculo tratamos de manera interna representaciones semióticas formadas en el registro de la escritura algebraica o numérica. Otro caso de tratamiento es la paráfrasis a través de la cual se transforma una expresión lingüística en otra.

Al realizar un tratamiento sobre una representación semiótica se aplican sobre ella determinadas reglas de expansión. La aplicación de dichas reglas hace que la nueva representación sea una representación expandida informacionalmente. Es decir, la nueva representación, aunque construida en el mismo registro que la representación de partida, provee nuevas posibilidades creativas. Por ejemplo, en el español (un idioma) hay reglas de coherencia temática y asociativas de contigüidad y similitud (Saussure, 1973). En este último caso, cuando se construyen metáforas, paráfrasis y analogías a partir de un enunciado, aumenta la potencia creativa de la lengua natural.

5.1.5 Conversión

Una conversión es una transformación de la representación de un objeto en un registro A en otra representación del mismo objeto en un registro B. La característica de la conversión es conservar la referencia al mismo objeto (objeto en el sentido estricto, situación...), pero sin conservar la explicitación de las mismas propiedades de ese objeto. La conversión no posee reglas para pasar de un sistema a otro. Suponerlo haría negar la heterogeneidad de los sistemas de representación y postular la existencia de un hipersistema, único y homogéneo, de representación en el cual la variedad de registros de representación realmente movilizados podría ser reducida fácilmente (Duval, 2008, p.79).

Duval (1999, p.46) afirma que la conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los estudiantes. Entre los aspectos que dificultan esta transformación menciona la comprensión de un contenido limitado algunas veces a la representación en que se aprendió, la falta de coordinación entre los registros, o el desconocimiento de alguno de los dos registros de representación.

Desde un punto de vista matemático, la conversión y el tratamiento son un todo en la resolución de problemas, pero desde un punto de vista cognitivo, las cosas son de otra manera. La conversión y el tratamiento son fuentes totalmente independientes de problemas en el aprendizaje de las matemáticas, y parece ser que la conversión es un proceso cognitivo más complejo que el tratamiento (Duval, 1999, p.48).

Es importante reconocer que la conversión entre registros semióticos, presenta más dificultades para los estudiantes porque la conversión requiere el uso de una nueva representación diferente a la inicial, un ejemplo es el paso de la gráfica cartesiana a la expresión algebraica que la representa, en este sentido la dificultad radica en que el paso de registro no se hace de forma espontánea, como sí lo son las operaciones de formación y de tratamiento de las representaciones.

Otro aspecto a tener en cuenta es que la dificultad para la conversión que presentan los estudiantes, radica en la necesidad de discriminar las unidades significantes pertenecientes a cada uno de los sistemas semióticos en los cuales se expresan las representaciones, para proceder después a articularlas después. Estas unidades pueden ser de carácter discreto, como en el caso del lenguaje formal, o presentarse de forma integrada como en los gráficos cartesianos. La dificultad también es generada porque estas unidades no siempre presentan la misma función. Por ello los estudiantes antes de proceder a convertir una representación deben aprender a discriminar de manera específica cada una de las unidades que conforman el registro semiótico en el cual se expresan las representaciones que quieren convertir.

5.1.6 Visualización Matemática

Una manera de medir la capacidad del alumno para realizar la conversión entre los diferentes registros de representación de los números enteros, es su habilidad para desarrollar la visualización matemática de estos objetos. Por principio la idea de visualización suele confundirse con la visión, Duval (1999, pag.12) expone que “la visualización se refiere a una actividad cognitiva que es intrínsecamente semiótica, es decir

ni mental ni física” “... la visualización está basada en la producción de una representación semiótica.”

La visualización y el uso de las diferentes representaciones de un objeto matemático son considerados como un fuerte soporte para la formación de conceptos. Tenemos entonces que la visualización matemática es el proceso de formar imágenes y usarlas efectivamente para el descubrimiento y el entendimiento matemático, considerando lo visual como un prelude hacia la abstracción de conceptos y así permitir al estudiante formar varios modelos de una situación de aprendizaje. (Hitt, 1998).

El concepto de visualización es ampliamente utilizado en todos los temas relacionados con la matemática, siendo importante desarrollar en el estudiante la visualización matemática lo cual le ayudara a concebir los diferentes registros de representación semiótica en la construcción de conceptos matemáticos, como lo señala Hitt (1998), la visualización matemática requiere de la habilidad para convertir un problema de un sistema semiótico de representación a otro.

Siguiendo a Duval (1993, 1995), para diferenciar un objeto matemático de su representación es necesario que el estudiante represente ese objeto matemático, al menos en dos diferentes representaciones. Las consideraciones visuales son, bajo estos supuestos, importantes en la resolución de problemas. La visualización matemática en este contexto tiene que ver con una visión global, integradora, holística, que articule, libre de contradicciones, representaciones de varios sistemas.

5.1.7 Características De La Conversión Entre Registros Semióticos

Cambiar la representación de objetos o relaciones matemáticas de un sistema semiótico a otro es siempre un salto cognitivo. A diferencia del tratamiento, no hay reglas ni asociaciones básicas, como entre palabras e imágenes en el lenguaje cotidiano, para este tipo de transformación de representaciones. La conversión no se reduce pues a una codificación.

Para realizar la conversión de un registro a otro, se utilizan operaciones habitualmente designadas por términos de transposición, traducción, ilustración, interpretación, codificación. Tenemos que al realizar una conversión de un registro de representación de partida que a veces puesta en correspondencia con otro registro de representación, hace que se seleccione el contenido de la representación de partida y la reorganización de sus elementos. Proceso que siempre revela un salto cognitivo, pues no existen reglas ni asociaciones básicas para esta transformación.

Por lo tanto, la conversión es la que permite la articulación entre los registros de representación en la enseñanza, son el resultado de la comprensión conceptual y cualquier dificultad que se presente, indica conceptos erróneos. Según Duval (2006): “es el primer umbral de la comprensión en el aprendizaje de las matemáticas”. (p. 166)

Siguiendo con el análisis tenemos que la conversión tiene dos características propias, la primera se refiere a que es *orientada*, es decir, se conoce el registro de partida, así como el de llegada, y la segunda expresa que la conversión **puede ser o no congruente**. La conversión entre dos representaciones es congruente, si al segmentar cada una de las representaciones en sus **unidades significantes**² para ponerlas en correspondencia, se cumplen tres criterios:

- **Correspondencia semántica entre las unidades significantes propias de cada registro:** Este criterio hace referencia a que a cada unidad significativa del registro de salida se le puede asociar una unidad significativa elemental en el registro de llegada
- **Univocidad semántica terminal:** Este criterio establece que cada unidad significativa elemental de la representación de partida se relaciona con una única unidad significativa elemental en el registro de llegada. En otras palabras, existe una relación uno a uno entre los elementos que componen la representación inicial y aquellos que componen la representación final. Ejemplo de ello lo podemos evidenciar comparando las unidades

²Se entienden por unidades significantes los valores que pueden tomar las diferentes variables en un registro.

significantes del registro verbal de los números enteros y las unidades significantes del registro gráfico (recta numérica) de dicho objeto matemático.

Es así como la ubicación de cada objeto representado en el registro verbal de los números enteros, le corresponde un único significado en el registro gráfico (recta numérica).

- **Conservación del orden de organización de las unidades significantes en las representaciones:** Este criterio se refiere a que las unidades significantes correspondientes a cada una de las dos representaciones comparadas están organizadas de tal manera que las unidades en correspondencia semántica (con el mismo significado) son aprendidas según el mismo orden en las dos representaciones. Es decir, este criterio exige correspondencia en el orden de arreglo de las unidades que componen cada una de las representaciones. Es así como el estudiante al realizar la conversión del lenguaje natural al lenguaje gráfico, por ejemplo, primero construye la recta numérica; luego, realiza las divisiones correspondientes tomando como punto central el número 0 y ubicando los números negativos a la izquierda y los positivos a la derecha y, por último, ubica los números descritos en la situación (se puede realizar como desplazamientos o ubicar simplemente los números dependiendo de la situación descrita en el planteamiento del problema).

Por lo anterior, tenemos entonces que para analizar el fenómeno de no – congruencia es necesario comparar las unidades significantes de cada registro y compararlas de manera que se pueda determinar si existe una correspondencia entre ellas para lograr la conversión. Esta comparación puede hacerse directamente o por intermedio de una tercera representación que de alguna manera “codifique” las representaciones que se quieren comparar (Duval, 1995). En el caso del diseño de situaciones que involucren un acercamiento a objetos matemáticos, se debe tener en cuenta los fenómenos de congruencia y no –congruencia en la presentación de los enunciados y las operaciones que se le piden

hacer a los estudiantes, de manera que no se obstaculice su comprensión del objeto en estudio.

Se debe tener en cuenta que la significación es la condición necesaria de la objetivación para el sujeto, es decir, de la posibilidad de tomar consciencia del objeto en estudio. Además, es un proceso intersubjetivo que se hace posible a través de la enunciación, entendida como el proceso semiótico a través del cual emerge la significación. Las enunciaciones deben estar orientadas a lograr la determinación del objeto para que el estudiante puede acceder al contenido del objeto que cada registro de representación ofrece, que permita realizar los tratamientos pertinentes al interior de cada registro, que favorezca el proceso de conversión de un registro a otro y finalmente que propicie la objetivación del objeto estudiado.

La importancia del papel de la enunciación se refleja en el diseño de actividades significativas y en la intervención del profesor como mediador en dichas actividades dentro del aula de clase, de manera que se logren cambios importantes en el desarrollo del pensamiento del estudiante.

Para concluir, es importante resaltar que, para lograr la aprehensión significativa de un objeto matemático por parte de los estudiantes, solo puede lograrse mediante la interacción de diferentes registros de representación semiótica y sus transformaciones (tratamientos y conversiones) mediados principalmente por el lenguaje, con un significado que trascienda la simple función de comunicación a la de significación, la participación activa del estudiante y la del profesor, puesto que no es suficiente la exposición de contenidos de un objeto matemático para asegurar su objetivación como tradicionalmente es presentado los conceptos básicos del matemáticas en la escuela.

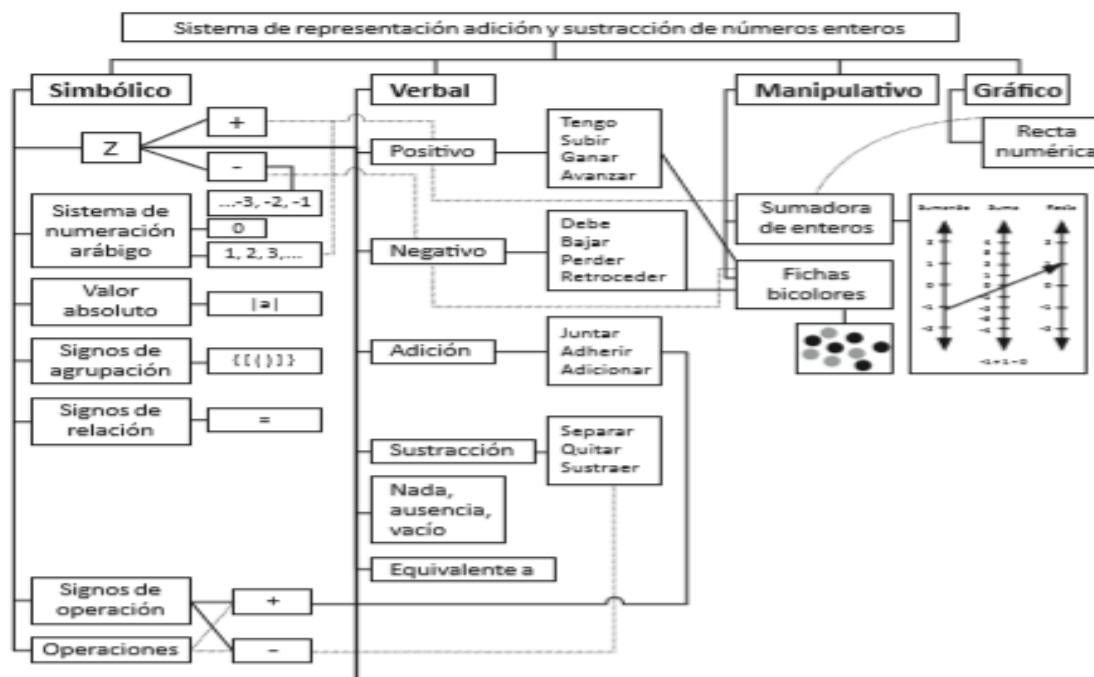
5.1.8 Sistemas De Representación De Los Números Enteros

Por representación entendemos cualquier modo de hacer presente un objeto, concepto o idea. Conceptos y procedimientos matemáticos se hacen presentes mediante

distintos tipos de símbolos, gráficos o signos y cada uno de ellos constituye una representación (Castro y Castro, 1997).

Por lo tanto, un sistema de representación responde a preguntas ¿qué representaciones hay asociadas con el tema? y ¿qué relaciones se pueden establecer entre esas representaciones? (Gómez y Cañadas, 2011). Teniendo en cuenta esas dos preguntas, identificamos que los sistemas de representación utilizados para hacer presente un número entero son: verbal, simbólico, gráfico y manipulativo. En la ilustración 2 (Becerra, et al.,2012) se presentan los diferentes sistemas de representación de los números enteros, junto con sus diferentes elementos que hacen posible estas representaciones.

Ilustración 2 Sistema de representación de la adición y sustracción de números enteros



Tomado de Becerra, et al., (2012)

5.1.8.1 Verbal

Los dos términos más reconocidos para hablar de números relativos y de números enteros son positivo y negativo. Dentro de las relaciones que se utilizan para referirse a estos conceptos se encuentran las siguientes expresiones:

Tabla 2 Sistema de representación verbal de números enteros

Números positivos	Números negativos
A la derecha de 0	A la izquierda de 0
Por encima de 0	Por debajo de 0
Desde 0 hacia arriba	Desde 0 hacia abajo
Después de 0	Antes de 0
Detrás de 0	Delante de 0

Fuente: elaboración propia

El sistema de representación verbal consiste en representar conceptos y procedimientos mediante palabras, expresiones y oraciones cortas, escritas u orales. Los nombres de las operaciones de los números enteros y sus signos correspondientes, junto con el nombre de los números mencionados anteriormente, hacen parte de este sistema de representación

Como podemos observar, todas las expresiones utilizadas para definir número positivo y número negativo poseen la misma estructura gramatical: una expresión compuesta por complementos circunstanciales, un sustantivo o expresión sustantivada y una preposición que las enlaza, denominada relación preposicional. Todas las expresiones denotan posición con respecto a cero. (Vílchez, 2014)

5.1.8.2 Simbólica

Algunas representaciones simbólicas utilizadas en el ámbito de números relativos y enteros, ya mencionadas, son:

- ❖ $+n$
- ❖ $-n$
- ❖ Pares ordenados: $+n = (n,0)$, $-n = (0, n)$
- ❖ $n - 1 < n < n + 1 \quad \forall n \in Z$
- ❖ $(-n) \forall n \in Nc$
- ❖ $|-n| \quad \forall n \in N$

Por lo anterior, se puede evidenciar que la representación simbólica se basa en el sistema de numeración arábigo para designar los elementos del conjunto Z . Como se aprecia en el ejemplo anterior, el símbolo $+$ forma parte de ese sistema (que denota un número positivo o una adición), el símbolo $-$ (que denota un número negativo o una sustracción), el símbolo $||$ (que denota el valor absoluto de un número entero), el símbolo $=$ (que denota “igual a”) y los signos de agrupación $()$, $[]$ y $\{ \}$.

Como se ha dicho antes, los conceptos de positivo y negativo son parte esencial en el tema que se está tratando. En el caso de los números positivos se registran dos representaciones simbólicas diferentes: números en cuya representación aparece un signo $+$; números en cuya representación no aparece signo. Es decir, se puede considerar 2 y $+2$ como dos representaciones de un mismo concepto.

5.1.8.3 *Gráfico*

El sistema de representación gráfico, como su nombre lo indica, consiste en las posibles representaciones que se pueden dibujar o graficar asociadas con el concepto de número entero.

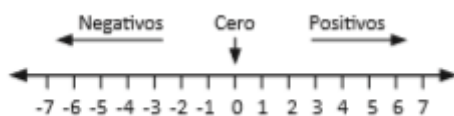
Entre estos tipos de representación de los números enteros sobresalen las siguientes:

- ❖ Recta entera numérica horizontal
- ❖ Recta numérica vertical
- ❖ Ejes cartesianos, plano de coordenadas enteras
- ❖ diagramas estadísticos
- ❖ diagramas de Venn
- ❖ diagrama de Euler
- ❖ diagrama sagital.

Vemos que la representación gráfica privilegiada para representar los números enteros es la recta numérica la cual se compone de una línea recta, horizontal o vertical, donde se ubican los números enteros que queramos representar. El 0 es el número que separa los números positivos de los negativos. La distancia entre cada uno de los números

es constante y están organizados teniendo en cuenta el orden de Z . Mostramos un ejemplo de recta numérica en la ilustración 3.

Ilustración 3 Recta numérica

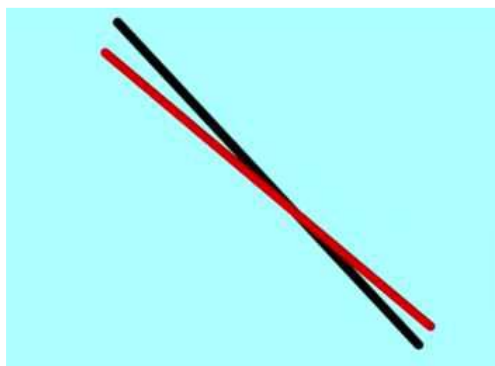


Tomado de Vílchez, M. (2015), pag.16

5.1.8.4 Manipulativa

Para la representación manipulativa de los números enteros se puede utilizar materiales didácticos tales como: tablero de palillos de 2 colores (palillos chinos), dados, balanzas (solución de ecuaciones) y todo tipo de objetos que permitan la representación de los números enteros.

Ilustración 4 Palillos chinos



Tomado de Vílchez, M. (2015), pag.17

5.1.9 Relaciones Entre Los Sistemas De Representación Considerados

Con relación a los sistemas de representación descritos anteriormente en la figura 1, y que son de suma importancia para este proyecto de investigación, puesto que permite tener una idea sobre los diferentes elementos que componen los sistemas de representación de los números enteros. es importante describir mediante el uso de ejemplos prácticos como

se relacionan los diferentes elementos que se deben tener en cuenta para realizar los respectivos tratamientos y conversiones entre los registros de representación de los números enteros.

Por ejemplo, los problemas de ganancias y pérdidas pueden ser descritos mediante el sistema de representación verbal “gané tres canicas” o “perdí cinco canicas”, los cuales a su vez pueden ser representados (conversión) mediante el uso de números junto con los símbolos de las operaciones adición y sustracción (sistema de representación simbólico). Es importante resaltar que esta situación puede ser representada también utilizando otros tipos de registro como son el manipulativo que hace uso de objetos como palillos de colores que representa los elementos de cada situación y por último se puede hacer uso de la recta numérica (registro gráfico) para representar como desplazamientos las situaciones descritas en el problema.

Exploremos otro ejemplo: la expresión $3 - 6$ corresponde a una situación representada de manera simbólica la cual puede ser expresada mediante el uso de otras representaciones como la verbal “tengo tres y debo seis” se observa que el paso de una representación a otra se da mediante el proceso de conversión entre las representaciones, lo mismo ocurre si utilizamos la representación en la recta numérica (representación gráfica) en la cual podemos obtener un resultado mediante la representación de estas situaciones como desplazamientos realizados en la recta numérica “avanzo tres unidades a la derecha y retrocedo seis lugares a la izquierda” el resultado obtenido se puede expresar como “perdí tres canicas” (representación verbal) y “-3” (representación simbólica).

5.2 PERSPECTIVA MATEMÁTICA

Desde el inicio del ciclo de Educación Básica, el estudiante es enfrentado a una teoría matemática transpuesta, presentada como definiciones y propiedades que orientan su actividad matemática; expuesta principalmente, a través de los textos escolares y el discurso del docente. Esta presentación que se hace a los estudiantes de los contenidos matemáticos es el resultado de una evolución a través del tiempo, cuyas evidencias pueden

encontrarse en gran cantidad de documentos dedicados a la historia de las matemáticas, y la influencia que han tenido diferentes personajes en los avances de esta ciencia.

En este apartado se hará énfasis en el desarrollo histórico del objeto número entero, enfatizando en su evolución y aceptación matemática, en este sentido, se pretende mostrar como apareció el concepto de número negativo, cual fue el proceso para su aceptación y posteriormente se hará referencia a la teoría matemática construida a través del tiempo que avala la enseñanza de este objeto matemático en la escuela.

El estudio de los objetos matemáticos en el aula de clases, están mediados por la conceptualización y formalización de los mismos, apoyados en la teoría matemática construida a través del tiempo. A continuación, se realiza una exposición de la forma como se da inicio al estudio del concepto número entero.

5.2.1 Recorrido Histórico De Los Números Enteros

Durante el transcurso de la historia se puede observar cómo los conceptos matemáticos han ido emergiendo como respuestas a las necesidades de la humanidad o simplemente como avances dentro de una disciplina científica cuyas implementaciones se ven reflejadas en otras ciencias como la física, la astronomía, la química, entre otras. Se han realizado investigaciones que dan cuenta de diferentes aspectos en la construcción y evolución de un concepto determinado, en este caso el concepto de número entero. Estos conceptos han sido abordados desde perspectivas científicas, históricas, epistemológicas, didácticas y pedagógicas.

En este sentido se tiene que el concepto de número negativo presentó muchos inconvenientes tanto para su construcción como para su aceptación puesto que esta clase de números no estaban asociados con situaciones que pudieran replicarse y representarse con objetos del mundo exterior, en cambio aparecen como resultado de la práctica matemática y en particular de la manipulación algebraica para resolver ecuaciones como: $x+1=0$. por el contrario, los números naturales surgieron, como lo expresa Macías (2010), de la necesidad

que han tenido las personas de contar cosas, personas, animales, todo con el fin de llevar un control de lo que poseía, del mismo modo, ha necesitado representar esas cantidades, y esto lo ha hecho de diferentes maneras. Cada civilización ha manejado su propio estilo de escritura o representación numérica, la cual se ha ido transmitiendo de generación en generación, mientras que otras puedan que hayan ido desapareciendo.

Como se narra en el libro las cifras “historia de una gran invención”, (1987) en el desarrollo de la historia de la humanidad, el hombre sintió la necesidad de representar los elementos que estaban a su alrededor mediante el uso de cantidades, hacer cálculos y resolver problemas en donde el uso de los números y las operaciones matemáticas han sido indispensables. Por otro lado, la invención de los números fue establecida sobre una práctica empírica debido a la necesidad del hombre de llevar las cuentas de sus bienes y elementos que hacían parte su práctica diaria. De esta necesidad surgió el primer procedimiento aritmético que se utilizó en la historia y que consistía en una correspondencia unidad por unidad entre dos colecciones de seres u objetos sin recurrir al cálculo abstracto. Es importante resaltar que cada civilización o cultura creó e implementó su propio sistema de numeración el cual tenía como objetivo, satisfacer las necesidades de la cultura en cuanto a los procesos de contar y de realizar cálculos.

Por consiguiente, el origen de los números y las operaciones parte de la utilización de diversos objetos como palos, piedras, muescas en los palos, huesos, dientes de animales, cuerdas, granos, ente otros. que eran elementos que podían utilizar como referencia para establecer la relación uno a uno entre cada elemento u objeto. Pero este sistema de contar fue cambiando y evolucionando con el paso del tiempo debido a las nuevas necesidades de contar y representar cantidades más grandes, para responder a estos requerimientos se empezó a utilizar un sistema de conteo que hacían uso de números con marcas en troncos, nudos, palillos, rocas así mismo utilizaron símbolos, jeroglíficos y letras después de la aparición de la escritura.

Con el paso del tiempo cada cultura y civilización fue desarrollando un nivel más avanzado de pensamiento, lo que produjo que la idea de número fuera evolucionando y cambiando para dar solución a nuevos problemas de su contexto. A partir de esto se da una

nueva visión al concepto de número donde se le da sus primeras características de orden y de utilidad de forma cardinal y ordinal dependiendo de la situación, asignando un rango para cada objeto, recordando la unidad anterior y jerarquizando las unidades numéricas consecutivas, para dar inicio a la aparición del concepto de número natural. Ifrah, (1987).

Con lo anterior se puede evidenciar que los primeros sistemas de numeración utilizados por las primeras civilizaciones y culturas, se basan en representar situaciones con el uso de los números enteros positivos en algunas culturas como en los incas, los mayas y los árabes, consideraban el cero como la ausencia de cantidad, es decir que no estaba conceptualizada como tal las ideas de número sin embargo tenían un sistema de numeración para éste. Por otra parte, “la aparición histórica de los números negativos fue tardía en comparación con los números naturales. El periodo que va desde su surgimiento, su aceptación y legitimación fue de aproximadamente 1000 años, periodo en el cual se evidencia desde un rotundo rechazo a su aceptación sólo como artificios de cálculo, pero nunca como número” Arias B & Arias C, (1999).

En culturas antiguas como la griega están ausentes los números enteros puesto que su matemática se fundamentaba principalmente en la geometría y en la consigna de que todo era conmensurable por lo cual cualquier situación podría representarse con un número o magnitud positiva, además la geometría se tomaba como un soporte del álgebra y de ahí la falta de necesidad de plantear un nuevo tipo de número. Otra cultura que realizó sus aportes a la consecución de los números enteros fue la hindú la cual, siguiendo a Stewart, 2007, creó un sistema posicional de base diez, lo cual les permitió tener mayor agilidad y destreza en el cálculo aritmético y algebraico, conjuntamente, crearon símbolos que les permitió representar la ausencia además la invención del número cero, símbolos que más adelante en la historia en occidente fueron reconocidos como números negativos. Vemos entonces que los matemáticos hindúes encontraron de gran utilidad los números negativos para representar situaciones financieras de deudas. Las reglas que rigen las operaciones matemáticas con los números negativos se presentan por primera vez por lo menos de forma explícita en la obra del matemático hindú (Brahmagupta, hacia el año 628 D.C). En él se explica cómo realizar sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y potenciaciones con

los “bienes” (los números positivos), las deudas (los números negativos) y la nada (el cero). Las reglas de cálculo están dadas, pero nadie se preocupa por justificarlas. Los números negativos van a aparecer en el cálculo, y los matemáticos se permitirán practicar las operaciones, aunque las reglas no estén establecidas (Anne, 2002).

Solo hasta finales del siglo XV vuelven a aparecer los números negativos, esta vez en occidente, los cuales aparecen como una génesis algebraica, relacionados con la resolución de ecuaciones, es Cardano (citado por Recalde, L., 2005) quien consideraba las raíces de las ecuaciones como ficticias, mientras que a las positivas las denominaba raíces reales. Por esta misma época, otros matemáticos, como Vieta no admitían a los negativos ni como coeficientes ni como raíces en las ecuaciones, ellos darán solo las soluciones positivas de éstas.

Por lo anterior se puede observar las diferentes posturas que tomaron los matemáticos de la época en cuanto a los números negativos en el campo algebraico, en particular en la resolución de ecuaciones, en este sentido González, et al. (1999) afirman que:

[...] Con el desarrollo del álgebra, los negativos aparecen de nuevo en escena, provocando entre los algebristas reacciones diversas que van del rechazo a la tolerancia, pasando por el espanto que hace que se les califique de falsos, ficticios o absurdos. Pero este rechazo es ya un síntoma de que los matemáticos se han detenido en ellos y una forma de reconocer su existencia, aunque sea a través de negársela. Quizás el término “negativo” provenga de esta época, ya que eran los valores negados cuando se obtenían como raíces de una ecuación.

Como se puede apreciar la aceptación de los números negativos sufrió muchos cambios e inconvenientes a través de la historia y solo fue gracias a Hankel, (1867) (citado en Anne, 2002), quien aborda el problema de manera formal. Las reglas de la adición y de la multiplicación deben ser las mismas para todos los números reales positivos o negativos. Los negativos tienen el estatus de número y realiza la distinción del signo (-) del opuesto y del signo (-) de la sustracción.

De acuerdo con González, et al., (1999), Hankel no buscó la justificación de los negativos en situaciones reales, es decir, no buscó considerar los números negativos asociados a la realidad física, sino que los justificó en las leyes formales, como entes matemáticos que cumplen ciertas relaciones entre ellos. En otras palabras, los números negativos fueron aceptados y legitimados cuando los matemáticos dejaron de buscarles una fundamentación empírica o concreta a los números negativos y se enfatizaron más en lo abstracto y en lo formal, entendiendo que esta clase de números era una creación intelectual del ser humano, y por lo tanto no se podría explicar y relacionar algunas de sus propiedades con situaciones de la vida real, no se encontraría ningún fenómeno de la naturaleza que pudiera explicar las propiedades de los números negativos.

5.2.2 Obstáculos En El Aprendizaje De Los Números Enteros

Como se ha podido evidenciar en los apartados anteriores de este proyecto, los números negativos atravesaron por grandes dificultades de aceptación en la comunidad de matemáticos, su carácter de ser consolidado como objeto matemático de manera netamente formal se estableció en el siglo XIX cuando Hankel (1867), se propuso ampliar la multiplicación de \mathbb{R}^+ a \mathbb{R} respetando las propiedades de la estructura algebraica de los reales positivos (Cid, 2000).

Estas dificultades de aceptación generaron obstáculos epistemológicos que giran en torno al concepto de número entero negativo, investigadores como Cid (2000) afirma que la definición de obstáculo epistemológico conlleva el establecimiento de un paralelismo entre las concepciones obstáculo que poseen los alumnos actuales y determinados conocimientos y saberes históricos que han obstaculizado la evolución de las matemáticas y cuyo rechazo ha sido incorporado al saber transmitido. Al respecto Glaeser (1981) expone que en la evolución histórica de la noción de número negativo se evidenciaron una serie de obstáculos epistemológicos, Glaeser utiliza el término “obstáculo” equiparándolo a “dificultad”. En este sentido, el autor considera los siguientes obstáculos históricos sobre el concepto de número negativo:

- Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas: Se refiere al hecho observable en la obra de Diofanto, sobre la necesidad de efectuar cálculos algebraicos, por ejemplo, multiplicar dos diferencias les lleva a enunciar la regla de signos, sin aceptar la existencia de los números negativos. (Glaeser, 1981)
- Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas: Glaeser (1981) manifiesta que en la obra de algunos matemáticos se constata que conciben la existencia de soluciones negativas de algunas ecuaciones, pero no las pueden aceptar como cantidades reales, sino que son cantidades ficticias que expresan un defecto en el enunciado del problema.
- Dificultad para unificar la recta real: Algunos matemáticos concebían que “lo negativo” neutralizaba o se oponía a “lo positivo”. Esto favorecía la idea del modelo de dos semirrectas opuestas que funcionaban separadamente.
- La ambigüedad de los dos ceros: Dificultad para pasar de un cero que significaba la ausencia de cantidad, a un cero elegido arbitrariamente. Ahora el cero es un punto de referencia en la recta numérica. No se podía admitir la existencia de cantidades que fueran “menos que la nada”.
- El estancamiento en el estadio de las operaciones concretas: La superación de los obstáculos anteriores permiten aceptar los números negativos como cantidades reales y justificar su estructura aditiva, pero no así la estructura multiplicativa.
- Deseo de un modelo unificador. Es el deseo por parte de la comunidad de matemáticos de poder establecer un modelo concreto que permita justificar la estructura aditiva y la multiplicativa de los números enteros para poder ser comprendida por las personas que están en vías de aprenderlos.

Glaeser (1981) concluye su estudio expresando que es necesario realizar experiencias con los estudiantes que permitan comprobar cuáles de los obstáculos antes descritos en el estudio histórico se evidencian en los procesos de enseñanza actuales. Añade también que los modelos concretos como el de ganancias y pérdidas, sólo explica sin problema alguno la estructura aditiva, pero a costa de convertirse en un obstáculo para la comprensión de la estructura multiplicativa.

Otro referente para el marco teórico son las investigaciones de Iriarte, Jimeno y Vargas-Machuca (1991). En su trabajo exponen las dificultades que se presentan al momento de enseñar y aprender el concepto de número entero negativo, al respecto los autores reportan por un lado, que uno de los obstáculos que se generan en la enseñanza de los números negativos, es que la enseñanza de éstos no admite ser enteramente tratada, de forma creíble, en el plano concreto, aunque algunos autores se esfuercen en buscar situaciones que se asemejen a situaciones concretas en las que se puedan justificar todas las propiedades de los enteros; pero por otro lado, situarlos de entrada en el plano formal trae consigo consecuencias como las de reducir a un formalismo vacío, presto a ser olvidado y causar dificultades.

Por lo tanto, ambas formas de enseñar los números enteros, implican el reconocimiento de que las matemáticas se obtienen por abstracción de las situaciones reales y en un segundo aspecto se supone que las matemáticas constituyen una actividad que permite crear teorías que después se aplican y explican la realidad (Iriarte, Jimeno y Vargas-Machuca, 1991).

Por consiguiente, Iriarte, Jimeno y Vargas-Machuca (1991), en su investigación han tratado de poner de manifiesto las ideas causantes de los errores y olvidos constatados que obstaculizan el aprendizaje de los números enteros. Estas ideas obstaculizadoras las han agrupado en dos apartados: Lo real como obstáculo, en donde la intuición primaria de número es como cantidad; y la imposición de lo formal como obstáculo, lo que requiere la ruptura de concepciones previas; si no es así, lo formal queda vacío de significado. En este sentido se presentan los siguientes obstáculos:

- Lo real como obstáculo, se expone que el gran obstáculo que impidió la aceptación y el reconocimiento del número negativo fue la creencia de que el número estaba relacionado completamente con la noción de cantidad, creencia que se vio favorecida por la concepción que predominó hasta el siglo XIX: las matemáticas describen y demuestran verdades acerca del mundo real. Es importante reconocer que el rompimiento de esta concepción se presentó mediante la aparición de las geometrías no euclídeas, el surgimiento del álgebra abstracta y el reconocimiento de

los números enteros como extensión de los números naturales (Iriarte, Jimeno y Vargas-Machuca, 1991).

- El número como expresión de cantidad: al respecto, Iriarte, Jimeno y Vargas-Machuca (1991) presentan el interrogante “¿Puedes encontrar una situación real en la que tenga sentido $-(-3)$?” del cual podemos inferir que no existe una situación en el mundo real que pueda expresar esa cantidad y, por lo tanto, mientras no se abandone el plano de lo real es difícil concebir los números negativos, porque simplemente, no son necesarios. La identificación de número con cantidad también va a obstaculizar la generalización de las operaciones aritméticas y de orden.
- La suma como aumento: Al estar el número relacionado con la noción de cantidad, la adición se identifica con la acción de añadir una cantidad a otra, por lo que conlleva siempre a un aumento, lo que hace que algunos estudiantes se queden perplejos sin contestar ante la pregunta: “¿Puedes encontrar un número que sumado a 5 dé 2?” (Iriarte, Jimeno y Vargas-Machuca, 1991).
- La multiplicación como multiplicación natural: La concepción de considerar la suma como aumento se traslada para la multiplicación. Siendo esta idea un obstáculo puesto que, cuando el estudiante trabajaba con números naturales, podía entender la multiplicación como la adición, un número de veces, una determinada cantidad. Es decir, entendía que 2×3 es sumar dos veces tres, o sumar tres veces dos. Pero cuando el alumno debe resolver una multiplicación como $(-2) \times (-3)$ la concepción anterior de multiplicación no tiene sentido (Iriarte, Jimeno y Vargas-Machuca, 1991).
- La sustracción como disminución: al respecto Iriarte, Jimeno y Vargas-Machuca (1991) Presentan el siguiente interrogante ¿Es posible encontrar un número que restado de 7 dé 10? Pregunta que deja sin palabras a algunos estudiantes y otros la entiende como “¿qué número al restarle 7 da 10?”, por lo anterior se evidencia que la sustracción también permanece ligada al plano de la acción y la identifican con quitar y, por tanto, con disminución.
- La división como división natural. La división con números naturales se hace por defecto y es interpretada como reparto o agrupamiento de objetos. esta concepción

genera un obstáculo epistemológico, por no permitir la generalización a la división de números enteros, donde el número negativo deja de ser un objeto concreto (Iriarte, Jimeno y Vargas-Machuca, 1991).

- El orden entre los negativos es el mismo que el orden natural. Siguiendo a Iriarte, Jimeno y Vargas-Machuca (1991) en los números naturales los números van aumentando a medida que se alejan del origen. Trasladar esta secuencia a los números negativos es un obstáculo que satisface la puesta en acción a la siguiente pregunta: “¿Cuál es el número mayor en una unidad a -3?” y los estudiantes responden “-4”.
- Ignorar el signo: Este error consiste en ignorar sistemáticamente el signo que precede a las temperaturas negativas, identificando así los números negativos con los naturales. “-7 grados en Moscú, -3 grados en Budapest. Si alguien hubiera viajado de Moscú a Budapest, ¿habría notado una subida o una bajada de temperatura?” Algunos estudiantes, olvidando por completo el signo “menos” y operando como si se tratara de números naturales contestan: “una bajada porque $7 - 3 = 4$ ”. En el otro extremo están aquellos que siendo sensibles al signo “menos” responden: “una bajada de -4 grados” (Iriarte, Jimeno y Vargas-Machuca, 1991).
- Identificación de los símbolos literales con números positivos. Los autores presentan una pregunta sobre qué clase de número puede representar la letra “a” donde los estudiantes asocian este símbolo con la representación de un número positivo al respecto aluden que “ α no puede ser un número negativo, sería $-\alpha$ ”. Esta idea es la que cuesta a los estudiantes de admitir que (α) puede representar a un número negativo y ($-\alpha$) puede representar a un número positivo. En este sentido, Bruno (2001), añade que los cambios que se producen en la simbología ($+\alpha = \alpha$) o las reglas de los paréntesis son la causa de las dificultades y obstáculos que surgen en el aprendizaje de los números negativos.
- La imposición de lo formal como obstáculo. Desde esta perspectiva de obstáculo Iriarte, Jimeno y Vargas-Machuca (1991) exponen que los números enteros aparecen en los libros de texto reducidos a un formalismo vacío, que se constituye en un obstáculo y origina errores, pues los estudiantes se ven inmersos en

situaciones en las que no pueden orientarse por carecer de conocimientos, o porque los tienen, pero se encuentran tan alejados de las teorías que no les sirven de ayuda.

Como se puede observar en el trabajo de Iriarte, Jimeno y Vargas Machuca (1991) son varios los obstáculos que surgen durante el aprendizaje de los números enteros. Estas dificultades y obstáculos deben ser tenidas en cuenta por los profesores a la hora de introducir el concepto de número negativo en las clases, puesto como se ha podido evidenciar en el proceso histórico es un concepto complejo que requiere de cierto cuidado en su enseñanza, es decir, si se presenta desde una visión puramente formalista, se puede generar obstáculos en el aprendizaje, al no encontrar una relación con situaciones concretas donde se vea aplicado el concepto (aritmética práctica), ahora bien, si es presentado el concepto de número entero asociado con solo modelos concretos los obstáculos y la falta de comprensión continua al no tener una base formal que sustente las situaciones que se están aplicando. Precisamente, lo que se promueve a través de los modelos concretos es esa concepción del número negativo como medida de magnitudes opuestas o relativas que históricamente parece haber supuesto un obstáculo para la justificación y aceptación de este concepto matemático.

6 METODOLOGÍA

En esta sección se presentan los principales aspectos que se tienen en cuenta para el desarrollo de la investigación, en este se describe el tipo de investigación, las categorías de análisis que se proyectaron para alcanzar el objetivo general, la unidad de trabajo y de análisis, y por último se describen los instrumentos y técnicas que se emplearon para recolectar y analizar la información.

6.1 TIPO DE INVESTIGACIÓN

Este proyecto utilizó una metodología de investigación cualitativa descriptiva, con la cual se indagó sobre los procesos de tratamiento y conversión de representaciones semióticas que realiza un grupo de estudiantes de grado sexto cuando se enfrenta a la solución de situaciones en el proceso de aprendizaje del concepto número entero.

Por tratarse de una investigación cualitativa con carácter descriptivo se decidió utilizar como técnica de investigación el estudio de casos, ya que ello hace más fácil el manejo, la sistematización de la información y la búsqueda de resultados en una investigación cualitativa.

Por otro lado, el objetivo de este proyecto de investigación implicó hacer una caracterización de los procesos de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas que realizan los estudiantes y los criterios de congruencia entre las diversas representaciones del concepto número entero, los cuales se pueden evidenciar en los registros utilizados por los estudiantes y las relaciones que se pueden establecer entre las diversas representaciones del concepto y las repuestas planteadas por los estudiantes.

Por lo anterior, un enfoque cualitativo permite indagar sobre la información obtenida mediante la aplicación de instrumentos, con el fin de buscar, interpretar y comprender la realidad en el contexto del aula, lo cual se concibe como insumo primordial para la construcción de teorías en torno a la Didáctica de las Matemáticas.

6.2 POBLACIÓN

El proyecto de investigación se llevó a cabo en el colegio Nuevo Horizonte ubicado en el municipio de Andalucía (Valle del Cauca), es una institución educativa de carácter privado que cuenta con una sede principal para bachillerato y para primaria.

La población objeto de estudio son los estudiantes de grado sexto del Colegio Nuevo Horizonte, es de aclarar que por ser una institución privada solo existe un solo grado por nivel por lo cual se decidió trabajar con el grupo completo de 18 estudiantes, conformados por 7 mujeres y 11 hombres, cuyas edades oscilan entre los 11 y 14 años, pertenecientes a la población urbana del municipio, se caracterizan por ser respetuosos, algo tímidos, colaborativos, participativos, disciplinados, que presentan ciertas dificultades entorno a los conocimientos matemáticos, pero se esfuerzan por realizar las cosas y aprender.

6.3 UNIDAD DE TRABAJO

La unidad de trabajo está conformada por los estudiantes de grado sexto del colegio Nuevo Horizonte, para efectos de la investigación, el análisis se realizará a 3 estudiantes los cuales fueron elegidos de acuerdo con los siguientes criterios:

- Haber participado en todas las actividades propuestas en la unidad didáctica
- No haber faltado a ninguna clase

Es importante indicar que la unidad didáctica fue desarrollada por el total de estudiantes (18) que conforman el grado sexto puesto como se expuso anteriormente solo existe un grado séptimo en la institución.

Hay que mencionar, además, que una investigación donde se trabaja con el total de estudiantes permite tener una idea más generalizada sobre los procedimientos y conceptos que tiene el estudiante frente a un objeto matemático, lo cual es importante para la realización de análisis y la obtención de conclusiones más generalizadas en el proceso investigativo.

Se decidió trabajar en el colegio Nuevo Horizonte, y en el grado sexto porque el investigador orienta clases allí, lo cual facilita los espacios requeridos para el desarrollo de las actividades propuestas en la investigación.

6.4 UNIDAD DE ANÁLISIS

La unidad de análisis de este trabajo es la influencia de las actividades de tratamiento y conversión en el aprendizaje de los números enteros en estudiantes de grado sexto del Colegio Nuevo Horizonte del municipio de Andalucía, Valle del Cauca.

6.4.1 Categorías De Análisis

Para responder al objetivo general de esta investigación, se proponen unas categorías de análisis basadas en la teoría de las representaciones semióticas propuestas por Raymond Duval, con las cuales se estudiaron los registros de representación semiótica de los números enteros, haciendo énfasis en los procesos de tratamiento y conversión de dichas representaciones.

Es relevante reconocer la importancia que el autor da a los procesos de conversión entre registros de representación para el aprendizaje de un concepto matemático, al respecto el autor expone que: “El cambio de registro constituye una variable fundamental en didáctica: facilita considerablemente el aprendizaje pues ofrece procedimientos de interpretación” (Duval, 2004.p.62). por lo anterior se propone un plan de análisis enfocado en el estudio de aspectos que tienen que ver con el tratamiento de cada representación y la conversión entre un registro y otro, que van a realizar los estudiantes en las situaciones planteadas para esta investigación alrededor del concepto número entero.

En el siguiente cuadro se exponen las principales categorías de análisis empleadas en el proyecto de investigación con sus respectivas subcategorías e indicadores.

Tabla 3 Categorías y subcategorías de análisis del proyecto de investigación

Categoría	Subcategoría	Indicadores
Tratamiento y conversión de las representaciones semióticas del concepto número entero.	Registros de representación semiótica que intervienen en la situación matemática.	Tipo de registros en la representación de números enteros.
	Reconocimiento de las reglas de expansión de una representación que permite efectuar el tratamiento.	Utilización de las reglas propias de cada registro y las propiedades matemáticas de los objetos matemáticos representados.
	Congruencia de las representaciones semióticas al realizar el proceso de conversión	Correspondencia semántica. Univocidad semántica. Conservación del orden de organización de las unidades significantes en las representaciones

Fuente: elaboración propia

6.5 INSTRUMENTOS Y TÉCNICAS PARA LA RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

Para realizar el análisis del proyecto de investigación se determinaron como necesarios e importantes los siguientes instrumentos de la unidad didáctica, los cuales hacen referencia a: la prueba diagnóstica, la actividad de conceptualización y aplicación y la prueba final (valoración de conceptos y procedimientos adquiridos).

6.5.1 Prueba Diagnóstica

Es una prueba escrita que consistía de 9 preguntas donde se desprenden varios incisos que las complementan y en donde se involucran la conceptualización acerca de los números enteros su representación y reconocimiento en situaciones contextuales.

En la prueba diagnóstica (ver anexo 1) se consideraron diversas situaciones cotidianas que buscaban la exploración de las diferentes representaciones de los números enteros presentes en los estudiantes. Asimismo, dichas preguntas permitieron indagar sobre las actividades de tratamiento y conversión de representaciones semióticas que realizan los estudiantes sobre el concepto de número entero antes de abordar el concepto matemático.

6.5.2 Actividad De Conceptualización Y Aplicación

Consistía en una prueba escrita donde se presentaban dos situaciones contextuales asociadas al entorno del estudiante, estas parten del registro gráfico con el cual se quería afianzar los procesos de tratamiento y conversión en los estudiantes.

Esta actividad de conceptualización y aplicación (ver anexo 2) buscaba presentar dos situaciones donde se ve inmerso la utilización del concepto de número entero, a partir de ellas se formulan una serie de preguntas que tenían como objetivo favorecer las actividades de tratamiento y conversión entre los registros, teniendo como referente la caracterización de los procesos realizados por los estudiantes. De aquí se obtuvo información importante que permitió caracterizar los procedimientos realizados por los estudiantes entorno al reconocimiento de unidades significantes de cada registro relacionadas con el concepto de número entero, así mismo, sobre las actividades cognitivas de tratamiento y conversión.

6.5.3 Prueba Final

Consistió en un cuestionario el cual se aplicó al finalizar todas las actividades planteadas para la unidad didáctica, este contenía 4 situaciones contextualizadas donde se ve inmerso el uso de los números enteros. Estas situaciones estaban expresadas en

diferentes registros (gráfico, tabular, plano cartesiano y recta numérica). Las preguntas realizadas en cada situación remitían al estudiante a realizar las diferentes actividades cognitivas entre los registros sin explicitar en ningún caso el registro de llegada.

La prueba final (ver anexo 3) permitió indagar y caracterizar las actividades de tratamiento y conversión realizadas por los estudiantes cuando se enfrentaban a la solución de situaciones donde se ven inmersas las diferentes representaciones de los números enteros, asimismo, se pretendía evidenciar los niveles de apropiación de las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de los diversos registros de representación de los números enteros.

6.6 CONSIDERACIONES ÉTICAS

Se realizó una reunión inicialmente con los directivos del colegio nuevo horizonte donde se expuso el trabajo a realizar con los estudiantes, posterior a esto se realizó una reunión con los padres de los estudiantes que van a participar en el estudio donde se les informo sobre el proyecto de investigación a realizarse en las institución, las actividades a desarrollar por sus hijos, y el uso para fines educativos de los diferentes datos y registros recolectaos durante la aplicación de las actividades, donde los padres de familia aceptaron de forma unánime la utilización de dichos datos recolectados para fines netamente académicos. se elabora el consentimiento informado para los estudiantes haciendo la claridad de protección de confidencialidad de los datos y protección de la identidad.

6.7 MOMENTOS DE LA INVESTIGACIÓN

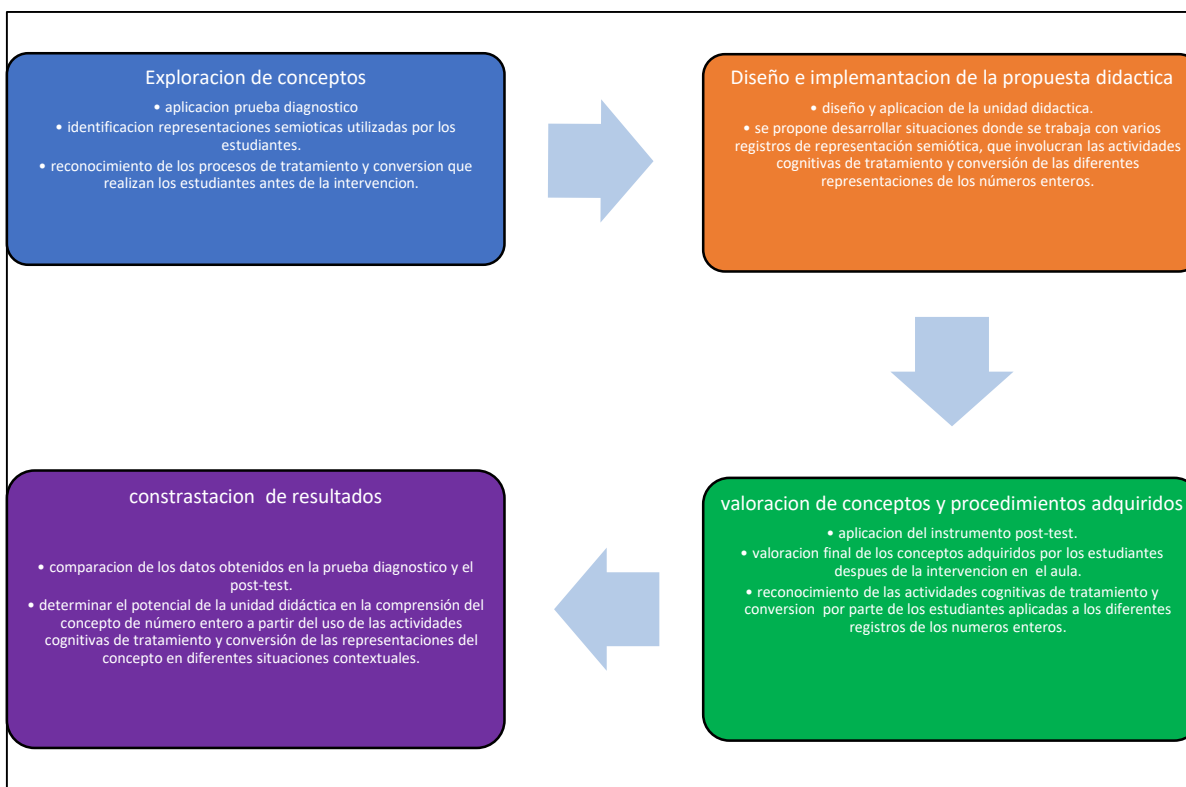
El proyecto de investigación se desarrolló en cuatro momentos: en el primer momento se propone la aplicación de un instrumento de ideas previas a través del cual se pretende explorar los conocimientos previos que traen los estudiantes sobre las representaciones de los números enteros y reconocer las actividades cognitivas de tratamiento y conversión que ellos realizan de manera previa al abordaje del concepto.

En el segundo momento, se propone la aplicación de un instrumento de intervención en el aula (Unidad Didáctica), con la cual se afianzó y mejoró la comprensión de los números enteros. Aquí se trabajó con varios registros de representación semiótica, que involucran las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las diferentes representaciones de los números enteros.

En el tercer momento se aplicó un instrumento de investigación post test, con el fin de valorar después de la implementación de la unidad didáctica la comprensión sobre los números enteros que lograron los estudiantes mediante los procesos de tratamiento y conversión de las diferentes representaciones de los números enteros.

Y el cuarto momento tuvo como objetivo contrastar los resultados iniciales y finales, con el fin de determinar el potencial de la unidad didáctica en la comprensión del concepto de número entero a partir del uso de las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las representaciones del concepto en diferentes situaciones contextuales.

Ilustración 5 Momentos del proyecto de investigación



Fuente: elaboración propia

6.8 PLAN DE ANÁLISIS

Para facilitar el manejo de la información recolectada de las 3 actividades escogidas de la unidad didáctica y para realizar el respectivo análisis de los procesos de tratamiento y conversión de las representaciones de los números enteros, se utilizó una matriz que permitió condensar la información obtenida en cada pregunta; con esto, se buscaba describir y reconocer los procesos de tratamiento y conversión realizados por cada estudiante al tratar de resolver cada pregunta.

Esta matriz de análisis estaba compuesta por cuatro columnas, la primera hace referencia a la pregunta de cada cuestionario, la segunda indicaba la representación realizada por el estudiante (respuesta del estudiante a la pregunta) y las dos columnas

finales con las cuales se analizan los procedimientos realizados por los estudiantes con respecto a las actividades cognitivas de tratamiento y conversión.

Una vez realizada la sistematización de los datos obtenidos en cada actividad, se procedió a realizar el respectivo análisis teniendo como referente las categorías y subcategorías de análisis planteadas para este trabajo. En este caso los análisis se realizaron entorno a los procesos de tratamiento y conversión de las representaciones del objeto matemático número entero, con este análisis se buscó establecer en primer aspecto el reconocimiento que tenían los estudiantes sobre los diferentes registros de representación que pueden tener los números enteros (gráfico, verbal, numérico, algebraico, recta numérica, etc.), posterior a esto se analizaron los procesos de tratamiento, los cuales giran en torno a las reglas y propiedades del sistema semiótico en el cual se expresa la representación y por último se realizó un análisis sobre los procesos de conversión entre un registro de partida y uno de llegada, teniendo como referente los tres criterios de congruencia entre representaciones planteados por Duval (1999), correspondencia semántica, univocidad semántica terminal e igual orden posible de aprehensión de las unidades significantes.

7 ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En el siguiente apartado se muestran los resultados de 3 estudiantes, los cuales fueron denominados Jorge, Diana y Carlos. En cada uno de los casos se presentan los análisis de la prueba diagnóstica en donde se realiza una descripción de la forma en que cada estudiante lleva a cabo los procesos de reconocimiento, tratamiento y conversión de las diferentes representaciones que tiene el concepto matemático número entero previo a su enseñanza. En cada caso se presenta el análisis detallado de 4 ejercicios realizados en la prueba inicial, los cuales fueron seleccionados aleatoriamente. Cabe aclarar que se realizó el análisis detallado de cada interrogante y la respectiva respuesta de cada uno de los estudiantes objeto de análisis; no obstante, para el informe aquí presentado se presentan 4 y luego un análisis integrado que incluye lo hallado en las demás respuestas del cuestionario. También se presenta el análisis de las actividades intermedias con la cual se busca afianzar y reconocer los diferentes registros que puede tener el objeto matemático número entero junto con las actividades de tratamiento y conversión de cada representación y la prueba final con la cual se buscaba caracterizar los tratamientos y conversiones de los estudiantes en los diferentes registros a partir de una situación dada, con el fin de evidenciar los cambios logrados en los estudiantes; posteriormente se presenta un análisis integrado en cada caso, en el cual se evidencian los cambios logrados por cada estudiante al finalizar la intervención didáctica.

Las conversiones fueron caracterizadas a partir de los tres criterios de congruencia entre representaciones semióticas expresadas por (Duval, R., 1999).

CS: Correspondencia semántica

US: Univocidad semántica Terminal

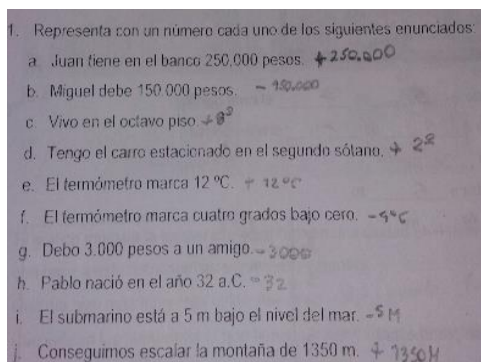
CO: Conservación del orden

Análisis de la prueba diagnóstica JORGE

Para el caso de Jorge, se presentará el análisis de las preguntas 1, 2, 3 y 4 y posteriormente un análisis general que da cuenta de cómo Jorge realiza las actividades de tratamiento y conversión.

A la pregunta 1 El estudiante Jorge realiza la siguiente representación:

figura 1 Registro de llegada de Jorge a la pregunta 1



Aquí podemos apreciar que Jorge presenta un reconocimiento de las unidades significantes del registro verbal, que le permiten realizar la conversión al registro numérico, en este sentido identifica y asocia palabras en cada enunciado que están relacionadas con los signos positivo y negativo. Por lo tanto, en las expresiones planteadas por el estudiante se puede evidenciar que se cumplieron los tres criterios de congruencia entre representaciones propuestos por Duval, (1999).

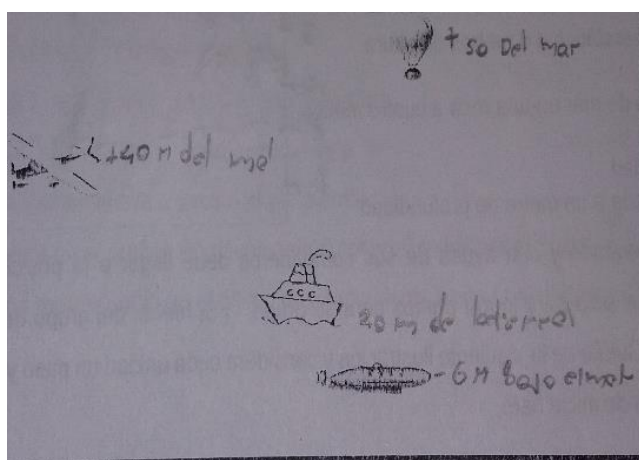
El criterio de CS se cumple, puesto que cada unidad significativa descrita en el registro verbal de cada ítem de la pregunta está relacionada con una unidad significativa del registro numérico de llegada. El criterio de US también se cumple puesto que cada unidad significativa del registro verbal está asociada con una única unidad significativa del registro numérico de llegada, un ejemplo para este criterio es la conversión del ítem a) de la pregunta, en este caso podemos observar que la palabra “tiene” se asocia con una única unidad significativa del registro de llegada la cual es el símbolo “+”.

El último criterio de CO se cumple puesto que la conversión realizada por el estudiante se hace siguiendo el orden de aprehensión de las unidades significantes del registro verbal (inicial) con el registro numérico de llegada.

Tal como lo plantea Duval 2004, “La articulación entre registros hace referencia a la discriminación y coordinación significativa de dos representaciones de diferente registro”.

A la pregunta 2 el estudiante Jorge realiza la siguiente representación:

figura 2 Registro de llegada de Jorge a la pregunta 2



En el procedimiento realizado por el estudiante se puede observar que no interpretó correctamente la situación y por lo tanto su interpretación es inapropiada, puesto que en los procedimientos se puede evidenciar que no se tuvo en cuenta las diferentes posiciones de los objetos y estas posiciones fueron tomadas de forma lineal; es decir, no tomó en cuenta el nivel del mar como punto medio que divide alturas positivas y negativas.

Con respecto a la conversión del registro inicial (gráfico) a un nuevo registro que permita simbolizar las posiciones de los diferentes objetos, se esperaba que el estudiante utilizara como recurso la recta numérica como un elemento que le permitiera dividir alturas sobre y bajo el nivel del mar y así poder establecer la verdadera posición de cada objeto referente al punto 0. En este caso podemos observar que el estudiante realiza la conversión utilizando el registro verbal en el cual no se tienen en cuenta las unidades significantes del registro inicial que le permiten interpretar y establecer la posición de cada objeto en el

registro de llegada. Analizando la conversión realizada por el estudiante desde los tres criterios propuestos por Duval (1999) tenemos que:

El criterio de CS: se cumple puesto que las unidades significantes del registro gráfico están asociadas con una unidad significativa en el registro de llegada.

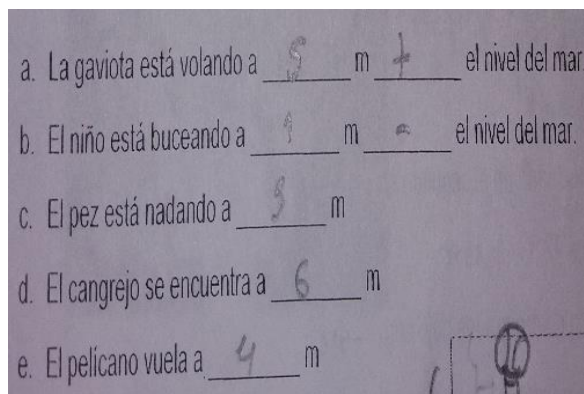
El criterio de US: no se cumple puesto que hay una unidad significativa encontrada por el estudiante, la correspondiente a la posición del barco que en la conversión al registro verbal no tiene el mismo significado que en el registro de partida.

El criterio de CO: no se cumple puesto que la conversión realizada por el estudiante de las unidades significantes del registro de llegada no es presentada en el mismo orden que aparecen en el registro gráfico.

En la conversión representada en la figura 2 se puede apreciar que al cambiarle el sentido a una unidad significativa da lugar a que cambie el sentido de la representación y, por lo tanto, la representación verbal no representa la verdadera posición de los objetos en el registro gráfico.

A la pregunta 3 el estudiante Jorge realiza la siguiente representación:

figura 3 Registro de llegada de Jorge a la pregunta 3



En el procedimiento realizado por el estudiante en la figura 3 se puede observar que tomó como referencia el nivel del mar y utilizó la recta numérica como un instrumento que le permitió establecer la posición de cada objeto en el gráfico; por lo tanto, hubo un reconocimiento de las unidades significantes del registro gráfico fundamentales para

realizar la conversión al registro verbal y numérico. Así, se puede evidenciar que se cumplieron los tres criterios de congruencia entre representaciones propuesto por Duval, (1999).

El criterio de CS si se cumple puesto que el estudiante relaciona cada unidad significativa del registro de partida (el dibujo) con una unidad significativa en el registro de llegada (la producción del estudiante), es el caso de la posición de la gaviota en el registro gráfico, su unidad significativa está relacionada en el registro de llegada con la expresión 5 y con el signo “+” lo que hace referencia a que esta está ubicada 5 metros sobre el nivel del mar.

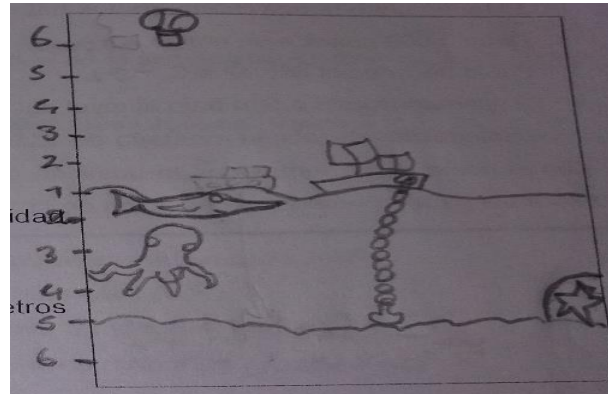
El criterio de US se cumple puesto que cada unidad significativa elemental del registro gráfico está asociada con una única unidad significativa en el registro de llegada, para ejemplificar lo anterior debemos decir que la conversión realizada por el estudiante al registro verbal y numérico guarda una relación uno a uno de las unidades significantes del registro de partida, puesto que las posiciones de los diferentes objetos (unidades significantes) en el registro de partida están asociadas con una única unidad significativa en el registro de llegada.

Y, por último, el criterio de CO se cumple puesto que existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes del registro gráfico al registro verbal y numérico. Puesto que la transferencia de unidades significantes entre el registro inicial y el final, se hace de manera transparente siguiendo el orden de la representación gráfica.

Por lo anterior se puede indicar que Jorge es un estudiante que realizó de forma correcta la conversión del registro gráfico al registro verbal; además, logró visualizar y reconocer la relación que existe entre los conceptos sobre y bajo el nivel del mar con los signos positivo y negativo que es fundamental para la conceptualización y representación de los números enteros. Y es que Muchas de las situaciones cotidianas envuelven la idea de magnitud con sentido; es decir de magnitudes que dependiendo si se toman a la derecha o a la izquierda, arriba o abajo de un punto de referencia dado, se les asigna un valor positivo o negativo (Acevedo y Ospina,1992).

A la pregunta 4 el estudiante Jorge realiza la siguiente representación:

figura 4 Registro de llegada de Jorge a la pregunta 4



El estudiante logró realizar una representación gráfica de la situación utilizando como referencia la construcción de una recta numérica horizontal para distribuir el espacio sobre y bajo el nivel del mar. Por lo tanto, en el gráfico planteado por el estudiante se puede evidenciar que no se cumplen algunos de los tres criterios de congruencia entre representaciones propuesto por Duval, (1999).

El criterio de CS se cumple puesto que cada unidad significativa del registro verbal (enunciado del problema) se asocia con una unidad significativa en el registro gráfico de llegada. Un ejemplo es la posición del pulpo en el registro de partida, en cuya descripción la unidad significativa tres metros de profundidad está asociada en el registro gráfico con la posición 3 metros bajo el nivel del mar.

El criterio de US no se cumple puesto que hay unidades significantes del registro verbal que no tienen el mismo significado en el registro de llegada, es el caso de la división realizada por el estudiante en la recta, en la cual no se tiene en cuenta el número cero (0) como unidad significativa que permite dividir el espacio en valores positivos y negativos. Por lo tanto, las expresiones gráficas planteadas por los estudiantes en el registro de llegada para cada situación descrita no obedecen a la verdadera posición que se indica en el registro verbal, puesto que al no tener en cuenta el punto cero en la representación final la conversión realizada por el estudiante no representa la verdadera posición de los objetos establecida en el registro de partida.

El criterio de CO no se cumple puesto que no existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes del registro de partida y el de llegada, porque se realizó un inadecuado tratamiento en el registro verbal en el cual no se tomó en cuenta el número cero (0) como punto de referencia para determinar las alturas sobre y bajo el nivel del mar, unidad significativa importante para ubicar cada objeto en el registro gráfico.

Del análisis anterior, se puede inferir que se deben propiciar situaciones que permitan mejorar los procesos de visualización matemática en los estudiantes, puesto que este proceso permite formar imágenes y usarlas efectivamente para el descubrimiento y el entendimiento matemático, considerando lo visual como un preludeo hacia la abstracción de conceptos y así permitir al estudiante formar varios modelos de una situación de aprendizaje (Hitt, 1998).

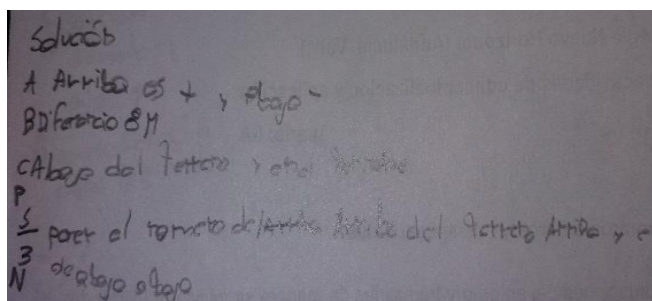
Análisis integrado de Jorge

En el primer instrumento el estudiante parece tener pocos conocimientos en cuanto al reconocimiento y al manejo de algunos registros de los números enteros, entre ellos tenemos el verbal, la recta numérica y el tabular, en estos se puede apreciar la dificultad para reconocer los valores negativos que podían ser asociados con diferentes situaciones descritas en la prueba. Otro aspecto importante que se evidencio fue la no discriminación de las unidades significantes en algunos registros como el tabular y el gráfico cartesiano los cuales son indispensables para realizar la conversión hacia otros registros, con respecto al tratamiento de las representaciones dentro de un mismo registro vemos que se notan deficiencias en cuanto al reconocimiento de las reglas que permiten trabajar dentro de un mismo registro y las cuales permiten realizar un tratamiento valido dentro de la misma representación.

Análisis actividad de conceptualización y aplicación sección 2 Jorge

A la pregunta 1 el estudiante Jorge realiza la siguiente representación:

figura 5 Registro de llegada de Jorge a la pregunta 1



En el procedimiento realizado por el estudiante se puede apreciar un reconocimiento e interpretación de las unidades significantes del registro gráfico que le permiten al estudiante resolver cada ítem de la pregunta de forma acertada garantizando una correcta conversión del registro gráfico al registro verbal. Es importante reconocer que el estudiante pudo asociar y reconocer las unidades significantes del registro inicial, las cuales hacen referencia al nivel del terreno como punto (0) que divide tanto a valores positivos como negativos, para simbolizar estas posiciones en la excavación el estudiante logró determinar en el gráfico los símbolos que le permiten diferenciar las alturas en la figura, para este caso pudo establecer una relación con las palabras arriba y abajo con los símbolos positivo y negativo.

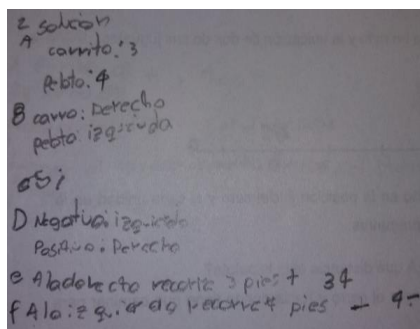
El uso de las diferentes representaciones de un objeto matemático es considerado como un fuerte soporte para la formación de conceptos. De acuerdo con lo planteado por (Duval,1999) es de suma importancia emplear y reconocer las diferentes representaciones para un mismo objeto matemático, dado que cuando se emplean varios sistemas de representación es óptima la construcción del concepto en la medida que se pueden establecer diferencias entre los objetos representados de sus representaciones.

Con respecto al tratamiento de la representación del registro de partida tenemos que el estudiante logra identificar el nivel del terreno como el punto medio de la recta numérica donde utiliza los signos positivo y negativo para diferenciar las alturas sobre el nivel y bajo

el nivel del terreno, con lo anterior se puede interpretar el reconocimiento de las reglas del registro en este caso el de la recta numérica.

A la pregunta 2 el estudiante Jorge realiza la siguiente representación:

figura 6 Registro de llegada de Jorge a la pregunta 2



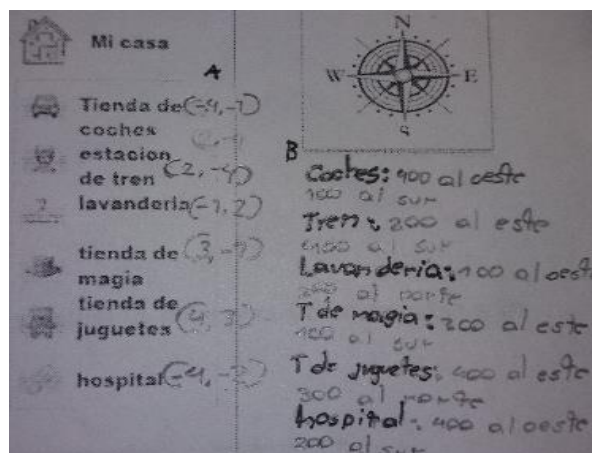
El estudiante presenta un reconocimiento de las unidades significantes del registro gráfico que le permitieron realizar los respectivos análisis y, en consecuencia, dar solución a los diferentes ítems de la pregunta. Es importante reconocer la importancia y la ayuda que le generó al estudiante la recta numérica construida debajo de las posiciones del niño y los diferentes objetos, puesto que a través de ella y sus conocimientos previos sobre la recta numérica pudo establecer sin dificultad las diferentes posiciones y los diferentes desplazamientos que debe realizar el niño para recoger cada objeto. En este sentido se puede apreciar el reconocimiento de unidades significantes como la posición (0) donde está ubicado el estudiante, la posición (derecha, +) del carrito y la posición (izquierda -) de la pelota, unidades significantes que son de suma importancia para la interpretación y conversión al registro verbal. Desde los criterios planteados por Duval (1999) para establecer si una conversión es congruente o no, se puede indicar que en el proceso realizado por el estudiante se hace un reconocimiento de las unidades significantes presentes en el registro de partida (gráfico) las cuales son puestas en correspondencia en el registro de llegada (verbal), con lo cual se aprecia una correcta interpretación de la situación y un cumplimiento de los criterios de congruencia de la representación (CS, US Y CO).

El estudiante en esta pregunta realiza un tratamiento de forma correcta que le permitió simbolizar los valores positivos y negativos en la reta numérica (registro inicial), lo cual desde las propiedades de construcción de la recta numérica sirvieron como puntos que indican los valores positivos (derecha) y valores negativos (izquierda), este reconocimiento se hace indispensable para la interpretación y posterior conversión de la representación del registro de partida.

Análisis prueba final Jorge

A la pregunta 1 el estudiante Jorge realiza la siguiente representación:

figura 7 Registro de llegada de Jorge a la pregunta 1

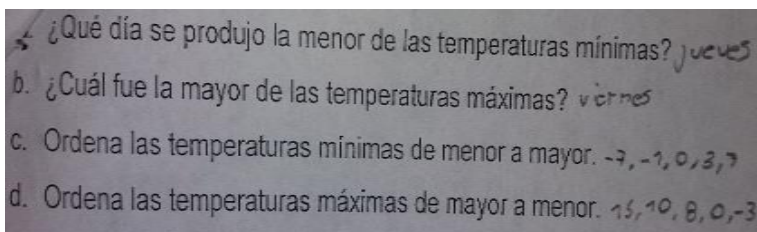


De acuerdo con el proceso realizado por el estudiante al solucionar esta pregunta se puede evidenciar un reconocimiento de las unidades significantes del registro de partida junto con las propiedades que rigen la representación de cualquier coordenada en el plano cartesiano. Y es desde este punto donde la conversión realizada por el estudiante del registro gráfico cartesiano al registro numérico y al registro verbal presentan gran dominio y reconocimiento de la forma como se establecen los puntos coordenados en el plano. Se puede apreciar que el estudiante establece la posición de cada edificio tomando siempre como punto de partida la posición 0 y a partir de ella empieza a reconocer la posiciones contando las unidades del registro inicial esto teniendo en cuenta las propiedades del plano que hacen referencia a que el primer punto de una coordenada cartesiana corresponde al eje

(x) el segundo punto corresponde al eje (y), situación que es manejada de forma clara por el estudiante en su proceso de conversión.

A la pregunta 2 el estudiante Jorge realiza la siguiente representación:

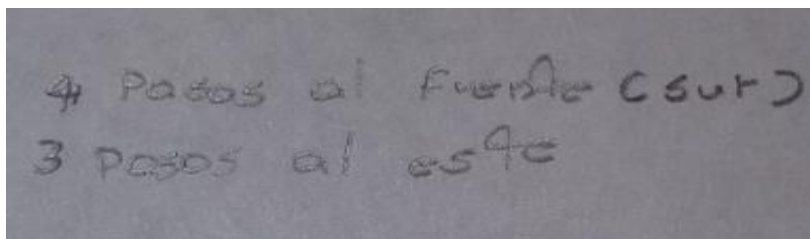
figura 8 Registro de llegada de Jorge a la pregunta 2



El estudiante logra identificar las unidades significantes que observa en el registro de partida (tabular) y las logra poner en correspondencia en el registro de llegada (verbal y numérico). Asimismo, se puede indicar que la conversión realizada a cada uno de los registros es acorde con los planteamientos y requerimientos que se realizan en cada ítem de la pregunta, en este sentido se puede observar que los tres criterios de congruencia entre representaciones se cumplen. Tal como lo expone Duval, (1999) los estudiantes antes de proceder a convertir una representación deben aprender a discriminar de manera específica cada una de las unidades que conforman el registro semiótico en el cual se expresan las representaciones que quieren convertir. Por lo anterior podemos observar que el estudiante logra reconocer y asociar los números enteros con temperaturas sobre cero (0) y bajo cero (0) elementos importantes si se quiere realizar un reconocimiento de cada unidad significativa del registro de partida que es relevante para resolver cada ítem de la pregunta.

A la pregunta 3 el estudiante Jorge realiza la siguiente representación:

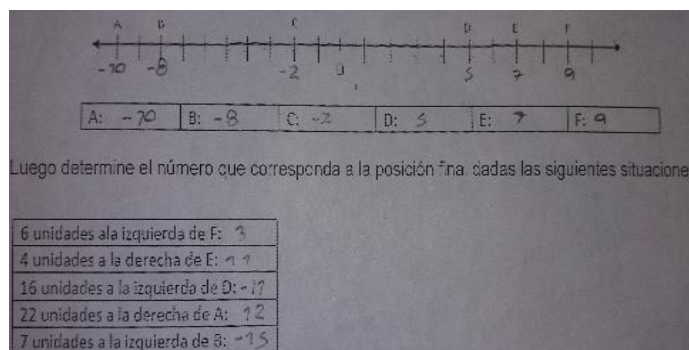
figura 9 Registro de llegada de Jorge a la pregunta 3



En esta pregunta el estudiante realiza un reconocimiento de las unidades significantes que le permiten realizar una conversión que no tiene en cuenta la conservación del orden de aprehensión de las unidades significantes del registro inicial; además, otro aspecto importante a resaltar es que en la conversión realizada no se tiene en cuenta las propiedades matemáticas que demarcan el registro inicial, en este caso las reglas que permiten operar en el plano cartesiano, más específicamente aquellas reglas que condicionan los desplazamientos y la simbolización de un punto en el plano. Analizando el procedimiento desde los criterios de congruencia propuestos por Duval (1999), se tiene que el criterio de CS se cumple puesto que cada unidad significativa del registro inicial está asociada con una unidad significativa del registro de llegada, es el caso de los desplazamientos realizados por el estudiante (4 pasos sur y 3 pasos al este), también el criterio de US se cumple puesto que las unidades significantes del registro de partida están relacionadas con una única unidad significativa del registro de llegada, es el caso de las unidades significantes 4 pasos sur y 3 al oeste, estas unidades están relacionadas con una única unidad significativa en el registro gráfico y por último el criterio de CO no se cumple puesto que no se tiene en cuenta las propiedades de desplazamiento y de simbolización de un punto en el plano cartesiano. El estudiante reconoce dos unidades significantes en el registro gráfico y las pone en correspondencia en el registro verbal, no obstante, no hay congruencia entre ambas representaciones por falta de criterio tres ya que las unidades significantes se presentan en el registro de llegada en un orden diferente al que están expresadas en el registro gráfico. En otras palabras al no tener en cuenta las propiedades que operan el registro inicial (plano cartesiano) la conversión que realiza el estudiante no representa la coordenada del punto F, puesto que este toma primero el desplazamiento en el eje Y y luego en el eje X, lo que deja ver el no reconocimiento de las reglas que operan la representación gráfica, lo que conlleva a que el orden en la conversión no sea coherente con el registro inicial, con lo cual la unidad significativa cambia su sentido en el registro de llegada; por lo tanto, la representación verbal descrita por el estudiante no representa la situación planteada en el registro gráfico.

A la pregunta 4 el estudiante Jorge realiza la siguiente representación:

figura 10 Tratamiento realizado por el estudiante Jorge a la pregunta 4



En esta pregunta el estudiante debía realizar un proceso de tratamiento a la representación inicial, el cual le permite resolver los interrogantes planteados. Es importante reconocer que el proceso realizado por el estudiante para resolver cada ítem de la pregunta presenta un correcto dominio y reconocimiento de las reglas de expansión del registro gráfico (recta numérica), las cuales establecen la forma en que deben ser ubicados los números enteros en la recta numérica. Puesto que tal como lo expone Duval (1999), la transformación de una representación en otra representación del mismo registro (un tratamiento), se hace según las reglas que corresponden a las posibilidades de funcionamiento del sistema y a las propiedades matemáticas representadas. En este caso el estudiante realiza el tratamiento de la representación teniendo en cuenta las reglas que permiten representar los números enteros en la recta numérica. En el proceso realizado, se puede observar que el estudiante reconoce que los números enteros positivos deben ser ubicados al lado derecho de la recta y los números enteros negativos a la izquierda teniendo como punto central que divide la recta al número 0.

Cambios detectados en Jorge

Teniendo en cuenta el análisis y el contraste entre el momento inicial y el momento final podemos evidenciar un cambio positivo de Jorge en cuanto al trabajo con las diferentes representaciones de los números enteros, en estos se puede apreciar un reconocimiento de las unidades significantes de cada registro (verbal, tabular, gráfico cartesiano, numérico y recta numérica) factor indispensable para realizar la conversión

entre registros, otro aspecto importante es que a partir del trabajo con las diferentes representaciones semióticas del objeto número entero el estudiante pudo establecer la relación entre los números enteros y situaciones de la vida real donde se puede utilizar esta clase de números para representarlas, en este caso el concepto número entero se potencio a partir de un trabajo articulado entre sus diferentes representaciones y las actividades cognitivas de tratamiento y conversión.

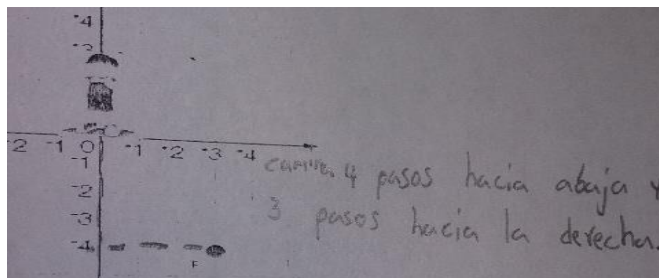
Para finalizar es importante reconocer que el estudiante presento algunas dificultades con respecto al registro cartesiano más precisamente con las reglas que permiten operar en este sistema semiótico, podemos ver que el estudiante todavía presenta problemas para reconocer algunas unidades significantes tanto en el eje X como en el eje Y lo cual conduce a realizar una conversión que no representa la situación descrita en el registro inicial, por este motivo se hace necesario retomar y profundizar el trabajo en este registro.

Análisis de la prueba diagnóstica DIANA

Para el caso de Diana se presentará el análisis de las preguntas 5, 6, 7 y 8 y, posteriormente un análisis integrado.

A la pregunta 5 la estudiante Diana realiza la siguiente representación:

figura 11 Registro de llegada de Diana a la pregunta 5



Con respecto al procedimiento realizado por la estudiante Diana en esta pregunta se puede indicar que realiza una conversión del registro gráfico (plano cartesiano) al registro verbal (producción del estudiante), en el cual se presenta un desconocimiento de las reglas para ubicar cualquier punto en el plano cartesiano, al respecto tenemos por regla general

que los movimientos se realizan siempre iniciando el eje (x) y posterior a esto se continúa el movimiento en el eje (y) de tal forma que la coordenada del punto F (3, -4) debe ser realizada en el siguiente orden 3 pasos a la derecha y 3 pasos hacia abajo, caso contrario ocurrió con la estudiante quien no reconoció las reglas del sistema semiótico las cuales son fundamentales en la conversión de las unidades significantes del sistema de representación gráfico al sistema de representación verbal. En consecuencia, se observa que la estudiante planteó otras unidades significantes que no responden a la verdadera representación y movimiento que debe realizar Juan para llegar a su destino (punto F en el plano cartesiano).

Analizando la conversión realizada por la estudiante de acuerdo con los criterios de congruencia entre representaciones propuesto por Duval, (1999) tenemos que:

El criterio de CS se cumple puesto que cada unidad significativa expresada en el registro gráfico inicial (plano cartesiano) está asociada con una unidad significativa en el registro verbal de llegada (producción del estudiante). Como ejemplo tenemos que las unidades significantes en el gráfico “3” y “-4” están relacionadas con las unidades significantes “4 pasos hacia abajo” y “3 pasos hacia la derecha” en el registro verbal.

El criterio de US se cumple ya que las dos unidades significantes encontradas por la estudiante en el registro gráfico en correspondencia con las unidades expresadas en el registro verbal poseen el mismo significado en ambas representaciones.

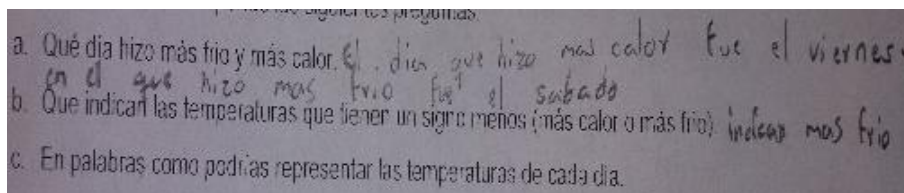
El criterio de CO no se cumple puesto que no existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes del registro de partida y el de llegada. Debido al desconocimiento de las reglas del sistema semiótico inicial (plano cartesiano) la estudiante realiza una conversión en un orden distinto donde se plantea primeramente el desplazamiento en el eje (Y) para luego realizar el movimiento en el eje (X), con lo cual se está desconociendo las reglas y el orden en que se debe realizar la conversión de acuerdo con el registro inicial.

Por consiguiente, el proceso de conversión implica un nivel de dificultad superior para los estudiantes puesto que son transformaciones que se realizan a un registro de partida, en las cuales no existen reglas que reglamenten o regulen su ejecución. Tal como lo plantea Duval (2004). “...la conversión de las representaciones semióticas constituye la

actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los alumnos.” (p.49)

A la pregunta 6 la estudiante Diana realiza la siguiente representación:

figura 12 Registro de llegada de Diana a la pregunta 6



En cuanto al proceso realizado por la estudiante Diana en esta pregunta se puede indicar que tuvo ciertas dificultades para comparar las diferentes temperaturas presentadas en el registro gráfico (inicial) su dificultad se orienta específicamente en la comparación de números enteros negativos, puesto que al no tener claro cuáles son las reglas para comparar dos números enteros la conversión que realiza la estudiante se fundamenta principalmente en tomar unidades significantes del registro inicial que no representan la situación descrita en cada ítem de la pregunta.

Con respecto a el registro verbal planteado por la estudiante (registro de llegada), se puede afirmar que no se cumple alguno de los tres criterios de congruencia entre representaciones propuestos por Duval, (1999).

El criterio de CS no se cumple puesto que hay unidades significantes en el registro de partida que no están asociadas a ninguna unidad significativa en el registro de llegada. Como ejemplo tenemos el ítem c) de la pregunta en la cual la estudiante no planteo ninguna representación que permitiera expresar en el registro verbal las diferentes temperaturas de cada día.

El criterio de US no se cumple puesto que hay expresiones planteadas por la estudiante que no significan lo mismo en el registro de partida. Es el caso del ítem a) donde se debía indicar que día de la semana fue en el que hizo más frío, para ello había que comparar las dos temperaturas de los días sábado y lunes (comparación de números negativos) para ello se podría utilizar un registro auxiliar (recta numérica o escala de

temperaturas) que le permitiera hacer esta comparación. Caso contrario ocurrió con la estudiante quien realizó una representación verbal que no tiene en cuenta las reglas para comparar dos números negativos, con lo que la representación elegida no corresponde al verdadero significado de la unidad significativa (día más frío) en el registro de partida.

El criterio de CO se cumple puesto que la conversión se realiza siguiendo el orden en que aparecen las unidades significativas en el registro de partida.

Por consiguiente, es importante reconocer que la conversión requiere necesariamente la identificación de las unidades significativas tanto en el registro de partida como en el de llegada, la cual es condición necesaria para todo proceso de conversión, así mismo, para el desarrollo de la coordinación entre distintos registros de representación.

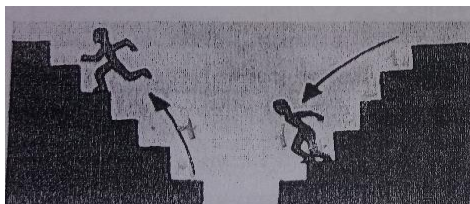
Hay que mencionar además que “la conversión, en los casos de no congruencia, presupone una coordinación de los dos registros de representación movilizados, coordinación que nunca existe al inicio y que no se construye espontáneamente...” (D’Amore, 2005, p.32)

A la pregunta 7 la estudiante Diana no realizó ninguna representación

La estudiante Diana en esta pregunta no brindó ninguna respuesta, se cree que esto pudo suceder por el desconocimiento y falta de interpretación del registro inicial (verbal), también pudo ser que falta claridad en la formulación de la pregunta y, por último, una causa pudo ser que no le alcanzó el tiempo a la estudiante para responder a esta pregunta.

A la pregunta 8 la estudiante Diana realiza la siguiente representación:

figura 13 Registro de llegada de Diana a la pregunta 8



En esta pregunta la estudiante reconoce que el registro de llegada es el numérico, por lo cual plantea que los movimientos realizados por Carlos y Miguel en el registro

gráfico (inicial) se pueden representar con la unidad significativa “1” en ambas escaleras, de este proceso podemos inferir que la estudiante no tuvo en cuenta el punto de partida de ambos movimientos ni la dirección de la flecha que indica la dirección del movimiento (unidad significativa importante para determinar la cantidad de escalones que subió o bajo cada persona) de esta forma la conversión realizada no representa los movimientos hechos por cada persona en el registro inicial.

Por lo anterior, se infiere que, aunque la estudiante pudo plantear un registro de llegada (numérico) este no significa lo mismo en ambas representaciones por lo tanto el criterio de US no se cumple de tal manera que la conversión no se realiza de forma transparente y no existe coordinación entre el registro gráfico y el registro numérico, con esto se evidencia la gran dificultad que presupone la conversión de dos registros para la mayoría de los estudiantes (Duval, 2006).

Análisis integrado de Diana

En el análisis del primer instrumento se puede evidenciar el reconocimiento de algunos registros de los números enteros como son el numérico y el verbal, pero referido al registro gráfico cartesiano, tabular y recta numérica se presentan serias dificultades en cuanto al reconocimiento de las unidades significantes de cada registro, las cuales son de suma importancia para la conversión. Es importante indicar que la estudiante presenta un mayor dominio del registro numérico puesto que en este registro no presenta dificultad para reconocer las unidades significantes y ponerlas en correspondencia con el registro verbal, caso contrario ocurre cuando realiza la conversión del registro verbal al registro gráfico cartesiano en este caso se percibe en el instrumento la dificultad para encontrar las unidades significantes de cada registro, lo que genera que algunas unidades significantes no sean tenidas en cuenta en la conversión lo que conduce a realizar un proceso incompleto o en algunos casos a no intentar realizar la conversión.

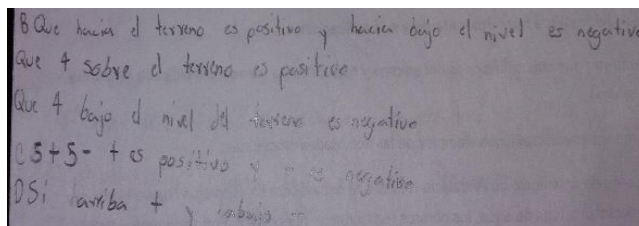
En cuanto al tratamiento vemos que la estudiante presenta desconocimiento de algunas reglas del sistema semiótico que permiten realizar el tratamiento a la representación inicial, en este sentido la estudiante realiza un tratamiento dentro de la representación que no genera una ganancia en conocimiento del registro inicial puesto que al no tener en

cuenta las propiedades matemáticas del registro inicial, se presenta un tratamiento y una representación que no tiene ninguna relación con lo representado en el registro inicial.

Análisis actividad de conceptualización y aplicación sección 2 Diana

A la pregunta 1 la estudiante Diana realiza la siguiente representación:

figura 14 Registro de llegada de Diana a la pregunta 1



En el proceso realizado por la estudiante se puede evidenciar un reconocimiento de las unidades significantes del registro gráfico inicial las cuales fueron determinantes para realizar la conversión al registro numérico y verbal. Estas unidades significantes reconocidas en el registro inicial hacen referencia inicialmente a las posiciones en la excavación, en este sentido la estudiante reconoció la unidad significativa “0” como punto de referencia que divide las posiciones sobre el nivel del terreno y bajo el nivel del terreno aspecto importante para determinar y comparar las diferentes ubicaciones descritas en el registro verbal de cada ítem de la pregunta. Así mismo la estudiante asocio los símbolos “+” y “-” con las unidades significantes “sobre el nivel del terreno” y “bajo el nivel del terreno” lo que le permitió realizar una conversión transparente que representa la situación descrita en el registro gráfico inicial.

Con respecto a los criterios de congruencia entre representaciones planteados por Duval, (1999) tenemos que:

El criterio de CS se cumple puesto que cada unidad significativa expresada en el registro de partida (gráfico) está relacionada con una unidad significativa en el registro de llegada (producción del estudiante). Como ejemplo tenemos el ítem b) donde la unidad significativa “+4 metros” está relacionada en el registro de llegada con la unidad significativa “4 sobre el terreno”.

El criterio de US se cumple ya que cada unidad significativa en el registro gráfico está relacionada con una única unidad significativa en el registro de llegada. Como ejemplo tenemos el ítem c) donde las unidades significantes “+5” y “-5” están relacionadas con las únicas unidades significantes “5 metros sobre el terreno” y “5 metros bajo el terreno”.

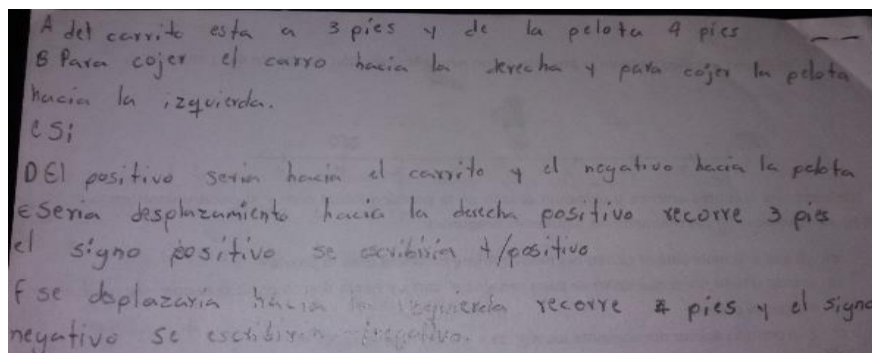
El criterio de CO se cumple puesto que la conversión realizada por la estudiante fue hecha de acuerdo con el orden en que aparecen en el registro inicial. Por lo anterior, la estudiante realizó una correcta interpretación y reconocimiento de las unidades del registro inicial y las puso en correspondencia con el registro final logrando así una conversión espontánea y transparente desde el registro gráfico hacia el registro verbal y numérico.

Por consiguiente, cuando un estudiante se ha apropiado de un concepto matemático este es capaz de realizar conversiones entre sus diferentes registros de representación, tal como lo expresa (Hitt, 1998) “Un determinado concepto es estable en un individuo si puede articular las diferentes representaciones del concepto sin contradicciones”.

Con respecto al tratamiento de la representación gráfica se puede indicar que la estudiante Diana utilizó los símbolos “+” y “-” para diferenciar en el gráfico las alturas sobre el nivel del terreno y bajo el nivel del terreno elemento importante que le ayudó a establecer y reconocer las diferentes posiciones en el registro gráfico.

A la pregunta 2 la estudiante Diana realiza la siguiente representación:

figura 15 Registro de llegada de Diana a la pregunta 2



A del carrito esta a 3 pies y de la pelota 4 pies
B Para cojer el carro hacia la derecha y para cojer la pelota hacia la izquierda.
C Si
D El positivo seria hacia el carrito y el negativo hacia la pelota
E Seria desplazamiento hacia la derecha positivo recorre 3 pies el signo positivo se escribiria +/positivo
F se desplazaria hacia la izquierda recorre 4 pies y el signo negativo se escribiria negativo.

En esta pregunta la estudiante Diana hace un reconocimiento de cada una de las unidades significantes presentes en el registro inicial (gráfico), estas unidades hacen

referencia a cada una de las posiciones de los objetos representados tales como la posición del niño (0), la pelota (-4) y carrito (+3), a partir del reconocimiento de cada una de las unidades significantes en el registro de partida, la estudiante pudo realizar la respectiva conversión en cada ítem de la pregunta, es importante indicar que el registro de llegada escogido por la estudiante fue el registro verbal, en el cual se puede observar un reconocimiento y una coordinación entre los dos registros lo que conduce a una conversión transparente.

Ahora bien, analizando el proceso de conversión realizado por la estudiante desde los tres criterios de congruencia planteados por Duval (1999) tenemos que:

El criterio de CS se cumple puesto que la estudiante logra relacionar cada unidad significativa en el registro gráfico de partida con una unidad significativa en el registro verbal de llegada. Como ejemplo tenemos el ítem a) de la pregunta donde la estudiante pudo asociar las unidades significantes “posición” de los objetos (carrito y pelota) con respecto a la posición del niño donde se planteó en el registro verbal “del carrito está a 3 pies” y “de la pelota 4 pies”.

El criterio de US se cumple puesto que cada unidad significativa en el registro gráfico de partida está asociada con una única unidad significativa en el registro verbal de llegada. Un ejemplo es el ítem e) de la pregunta donde la unidad significativa “distancia del niño al carrito” (+3 pies) está representada en el registro verbal con la unidad significativa “desplazamiento hacia la derecha positivo recorre 3 pies”.

El criterio de CO se cumple puesto que en la conversión realizada por la estudiante existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en los dos registros.

Con lo cual se puede apreciar que la conversión entre ambas representaciones es congruente ya que la transferencia del registro gráfico al registro verbal se hace de forma clara siguiendo el orden de la descripción gráfica del registro inicial.

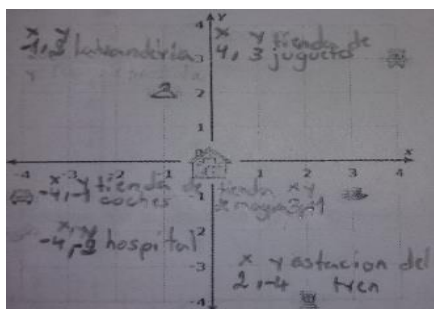
Según Duval (2006): “la conversión es el primer umbral de la comprensión en el aprendizaje de las matemáticas” (p. 166). Puesto que es la conversión la que permite la articulación entre los registros de representación en la enseñanza de las matemáticas, ya que

una conversión coherente y transparente realizada por un estudiante será el resultado de la comprensión conceptual de un objeto matemático. Así mismo, cualquier dificultad que se presente en la actividad de conversión, indicara la obtención de conceptos erróneos.

Análisis prueba final Diana

A la pregunta 1 la estudiante Diana realiza la siguiente representación:

figura 16 Registro de llegada de Diana a la pregunta 1



En el proceso realizado por la estudiante Diana a esta pregunta se puede observar un reconocimiento de cada una de las unidades significantes en el registro gráfico que le permitieron realizar la conversión al registro numérico y verbal. En este caso tenemos que la estudiante logro establecer las coordenadas de cada punto (diferentes establecimientos del barrio) en el plano cartesiano teniendo como referencia la ubicación de mi casa que se encuentra en la coordenada (0,0). con esto se puede apreciar un dominio y reconocimiento de las reglas que rigen el sistema semiótico (plano cartesiano) que hacen referencia a los movimientos que se pueden realizar en cada eje, para poder así establecer cada coordenada que tiene un componente (x, y) que simboliza en el registro inicial (plano cartesiano) la ubicación de cada establecimiento con respecto a “mi casa”.

Ahora bien, analizando la conversión realizada por la estudiante desde los tres criterios de congruencia entre representación propuesto por Duval, (1999) tenemos que:

El criterio de CS se cumple puesto que cada unidad significativa en el registro de partida (plano cartesiano) está relacionada con una unidad significativa en el registro de llegada (verbal - numérico), como ejemplo tenemos la unidad significativa “tienda de juguetes” la cual es representada con la unidad significativa (4,3) en el registro de llegada.

El criterio de US se cumple puesto que cada unidad significativa en el registro de partida está relacionada con una única unidad significativa en el registro de llegada, como ejemplo tenemos la posición de la lavandería la cual se representa en el registro de llegada con la unidad significativa (-1, 2).

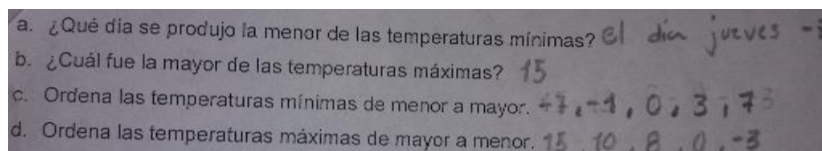
El criterio de CO se cumple puesto que la conversión realizada por la estudiante está hecha según el orden en que aparecen las representaciones en el registro gráfico inicial ya que todas y cada una de las unidades significantes presentes en el registro gráfico, se hacen presentes en el registro verbal y numérico con un mismo significado. Con lo cual se puede apreciar que la conversión entre ambas representaciones es congruente por el cumplimiento de los tres criterios de congruencia.

Es importante indicar que los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se constituyen en actividades que tienen como objetivo la construcción de conocimiento, por lo tanto, el docente tiene como trabajo el indagar sobre la forma en que aprenden sus estudiantes, que actividades ayudan a mejorar la enseñanza de los objetos matemáticos y reflexionar sobre el alcance que estas tienen en el aprendizaje (Ospina, 2012).

Para finalizar es relevante indicar que la estudiante no realizó la conversión propuesta en el ítem b) de la pregunta puesto que se cree que tuvo inconvenientes en la interpretación de la misma debido a los nuevos requerimientos que pedían la conversión a unidades de medidas reales (metros) y la ubicación de los objetos según la rosa de los vientos.

A la pregunta 2 la estudiante Diana realiza la siguiente representación:

figura 17 Registro de llegada de Diana a la pregunta 2



a. ¿Qué día se produjo la menor de las temperaturas mínimas? El día jueves -7
b. ¿Cuál fue la mayor de las temperaturas máximas? 15
c. Ordena las temperaturas mínimas de menor a mayor. -7, -1, 0, 3, 7
d. Ordena las temperaturas máximas de mayor a menor. 15, 10, 8, 0, -3

En esta pregunta se puede observar como la estudiante en su proceso de conversión logro identificar cada una de las unidades significantes del registro tabular, las cuales

hacían referencia a las diferentes temperaturas que se presentaron en la ciudad de Bogotá cinco días seguidos. Otro aspecto importante para reconocer es que la estudiante pudo asociar las temperaturas bajo cero con números negativos y las temperaturas sobre cero con números positivos lo que le permitió realizar una conversión transparente entre el registro tabular al registro verbal y numérico.

Con respecto a los tres criterios de congruencia entre representaciones planteados por Duval, (1999) tenemos que:

El criterio de CS se cumple ya que cada unidad significativa del registro de partida (tabular) está relacionada con una unidad significativa en el registro de llegada (verbal y numérico), es así como la unidad significativa “día que se produjo la menor de las temperaturas mínimas” en el ítem a) de la pregunta está relacionada con la unidad significativa “día jueves -7 grados”.

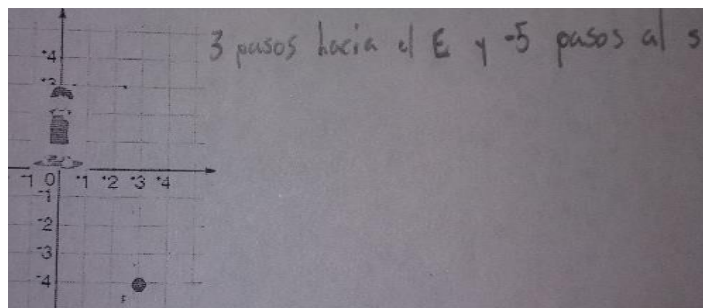
El criterio de US se cumple puesto que cada unidad significativa en el registro tabular está asociada con una única unidad significativa en el registro de llegada (verbal y numérico) que guarda el mismo significado que en el registro inicial. Como ejemplo tenemos en el ítem b) de la pregunta la unidad significativa “mayor de las temperaturas máximas” está relacionada con la unidad significativa “viernes 15 grados”.

El criterio de CO se cumple puesto que la conversión realizada por la estudiante se efectúa de acuerdo con el orden de aprehensión de las unidades significantes en el registro tabular.

Puesto que, se cumplen los tres criterios de congruencia entre las representaciones se puede decir que la conversión realizada por la estudiante es congruente ya que el paso del registro tabular al verbal y numérico se hace de forma clara y atendiendo al orden de la expresión en el registro tabular.

A la pregunta 3 la estudiante Diana realiza la siguiente representación:

figura 18 Registro de llegada de Diana a la pregunta 3



En el procedimiento realizado por la estudiante en la conversión del registro gráfico al registro verbal, se puede apreciar un reconocimiento de algunas unidades significantes en el registro inicial que le permitieron realizar una conversión incompleta al registro verbal y numérico, puesto que aunque se reconocen algunas unidades significantes en el registro gráfico hay otras que son seleccionadas por la estudiante que no están relacionadas con la posición del punto F, lo que genera un desconocimiento de las verdaderas unidades significantes que son importantes para realizar la conversión al registro verbal y numérico.

Analizando la conversión realizada por la estudiante desde los tres criterios de congruencia propuestos por Duval, (1999), se tiene que el criterio de CS se cumple puesto que cada unidad significativa del registro gráfico de partida está relacionada con una unidad significativa en el registro verbal y numérico de llegada, como ejemplo tenemos el desplazamiento en el eje X (+3), el cual está relacionado con la unidad significativa “3 pasos hacia el E” en el registro de llegada.

El criterio de US no se cumple puesto que solo una unidad significativa en el registro gráfico tiene el mismo sentido en el registro verbal y numérico, es la unidad significativa que se refiere al movimiento realizado en el eje X (3 pasos hacia el E), mientras que la segunda unidad significativa la que corresponde al movimiento realizado en el eje Y (4 pasos al sur) no significa lo mismo en el registro de llegada (-5 pasos al sur).

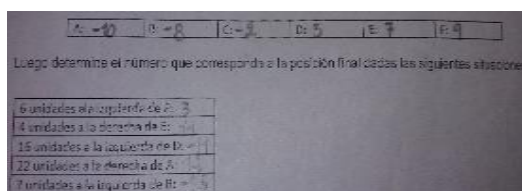
El criterio de CO se cumple puesto que existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en los dos registros.

La estudiante logró reconocer dos unidades significantes en el registro gráfico y las puso en correspondencia en el registro verbal y numérico, logrando así realizar una conversión incompleta puesto que el criterio de US no se cumple ya que la unidad designada para representar el movimiento en el eje Y (-5 pasos al sur) no tiene el mismo significado que en la representación inicial (4 pasos al sur) por lo tanto, la representación verbal y numérica propuesta por la estudiante no representa la situación expresada en el registro gráfico.

Por tanto, es importante reconocer las dificultades que presentan los estudiantes para la identificación de las unidades significantes en un registro, la cual es un elemento clave para realizar la conversión a otro tipo de registro. Sin embargo, las actividades de conversión en el aula de clase no son efectuados a conciencia por los estudiantes y se trabajan de forma espontánea sin identificar las unidades significantes de cada registro que es la clave para realizar la conversión (Duval,2004).

A la pregunta 4 la estudiante Diana realiza la siguiente representación:

figura 19 Tratamiento de Diana a la pregunta 4



En esta pregunta la estudiante logro reconocer las propiedades del sistema semiótico (recta numérica) que le permitió realizar un proceso de tratamiento transparente y con ello poder determinar la posición que ocupan los números enteros en la recta numérica. Otro aspecto importante es el reconocimiento del punto (0) como un elemento que divide la recta numérica en valores positivos (derecha) y valores negativos (izquierda), aspecto importante para determinar las posiciones de cada letra (A, B, C, D y E) en la recta. Así mismo, el tratamiento efectuado por la estudiante al registro inicial es realizado siguiendo las reglas de funcionamiento y a las propiedades matemáticas del sistema semiótico (recta numérica) las cuales son determinantes para poder realizar la transformación dentro del mismo sistema semiótico. Es así como al realizar un tratamiento sobre una representación semiótica se

aplican sobre ella determinadas reglas de expansión, las cuales permiten crear una nueva representación dentro del mismo sistema semiótico la cual provee nuevas posibilidades creativas, en cuanto permite visualizar nuevas informaciones y elementos que no estaban presentes en la representación inicial (Duval, 1999).

Cambios detectados en Diana

Una vez realizado el contraste entre los el instrumento inicial y el final podemos concluir que la estudiante Diana presenta un logro importante en cuanto al reconocimiento de las diferentes representaciones de los números enteros junto con los procesos de conversión y tratamiento de cada uno de estos registros. Es importante reconocer que a la estudiante en el instrumento inicial se le dificultaba encontrar todas las unidades significantes de cada registro semiótico, logrando con ello realizar en algunos casos conversiones incompletas puesto que habían unidades significantes que no eran tenidas en cuenta por la estudiante debido al desconocimiento de los elementos propios de cada registro de representación, posterior a esto en el instrumento final la estudiante mostro una mayor apropiación y reconocimiento de estas unidades en cada registro, con las cuales hacía corresponder cada unidad significativa del registro de partida, con su correspondiente unidad significativa en el registro de llegada de manera clara cumpliendo con los tres criterios de congruencia.

Para finalizar podemos decir que el tratamiento de las representaciones de los números enteros fue efectuado de forma correcta por la estudiante mostrando con ello un dominio de las reglas matemáticas que rigen la transformación dentro de un mismo registro de los números enteros.

Análisis de la prueba diagnóstica CARLOS

Para el caso de Carlos, se presentará el análisis de las preguntas 3, 5, 8 y 9.

A la pregunta 3 el estudiante Carlos realiza la siguiente representación:

figura 20 Registro de llegada de Carlos a la pregunta 3

a. La gaviota está volando a 5 m sobre el nivel del mar.
b. El niño está buceando a 1 m abajo el nivel del mar.
c. El pez está nadando a -5 m.
d. El cangrejo se encuentra a -6 m.
e. El pelicano vuela a +4 m.

En el proceso realizado por el estudiante a esta pregunta se puede indicar que hubo un reconocimiento de cada unidad significativa en el registro gráfico de partida (posiciones de los diferentes objetos) lo cual fue determinante para realizar la conversión al registro verbal y numérico. Es importante resaltar la importancia del registro gráfico auxiliar (recta numérica) el cual le sirvió como referente para determinar y simbolizar las diferentes posiciones de cada objeto en el gráfico, al respecto tenemos el reconocimiento de la unidad (0) como punto medio que divide las alturas (sobre el nivel del mar) y (bajo el nivel del mar) y las cuales el estudiante las pudo asociar con los símbolos (+) y (-) en el registro de llegada.

Analizando la conversión realizada por el estudiante desde los tres factores de congruencia planteados por Duval, (1999) tenemos que:

El criterio de CS si se cumple puesto que el estudiante relaciona cada unidad significativa presente en el registro gráfico con una unidad significativa en el registro de llegada (verbal y numérico), como ejemplo se puede citar el ítem e) de la pregunta donde la posición del pelicano en el registro gráfico está relacionada con la unidad significativa “+4” en el registro de llegada, lo que hace referencia a que está volando a “cuatro metros sobre el nivel del mar”.

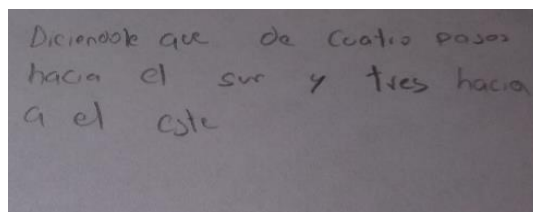
El criterio de US se cumple ya que cada unidad elemental en el registro gráfico está relacionada con una única unidad significativa en el registro de llegada, como ejemplo tenemos el ítem a) donde la posición de la gaviota está relacionada con la única unidad significativa “5 m sobre el nivel del mar” en el registro de llegada.

El criterio de CO también se cumple puesto que la conversión realizada por Carlos muestra un orden de aprehensión de las unidades significantes en ambos registros, donde la conversión se realiza de acuerdo con el orden en que aparecen en el registro gráfico.

Tenemos entonces que la conversión realizada por el estudiante Carlos cumple con los tres criterios de congruencia lo que garantiza que la representación final guarda una relación transparente con el registro inicial. Es importante resaltar que, para lograr una aprehensión significativa de un objeto matemático por parte de los estudiantes, se hace necesaria la interacción de diferentes registros de representación semiótica y sus transformaciones (tratamientos y conversiones) (Duval, 2006).

A la pregunta 5 el estudiante Carlos realiza la siguiente representación:

figura 21 Registro de llegada de Carlos a la pregunta 5



En el procedimiento realizado por el estudiante Carlos se puede apreciar una conversión realizada del registro gráfico cartesiano al registro verbal, en el cual se evidencia un desconocimiento de las reglas que operan el sistema semiótico (plano cartesiano) y las cuales son indispensables para ubicar cualquier punto en este caso la ubicación del punto F cuya coordenada es el punto (3,-4).

En consecuencia, al desconocer las reglas del sistema semiótico, la conversión realizada por el estudiante no representa los verdaderos movimientos que debe seguir Juan para llegar al punto F en el gráfico.

Ahora bien, analizando la conversión desde los tres criterios de congruencia propuestos por Duval, (1999) tenemos que:

El criterio de CS si se cumple puesto que cada unidad significativa expresada en el registro gráfico (plano cartesiano) está relacionada con una unidad significativa en el

registro verbal (producción del estudiante). Como ejemplo podemos citar la unidad significativa “-4” en el registro gráfico a la cual le corresponde la unidad significativa “cuatro pasos hacia el sur” en el registro verbal.

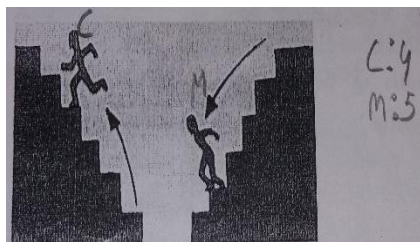
El criterio de US también se cumple puesto que las dos unidades significativas “-4” y “3” encontradas por el estudiante en el registro gráfico están relacionadas con una única unidad significativa en el registro verbal “cuatro pasos hacia el sur” y “tres pasos hacia el este”.

El criterio de CO no se cumple puesto que la conversión realizada por el estudiante no tiene en cuenta las reglas que operan el sistema semiótico (plano cartesiano) por lo tanto, su conversión presenta un orden diferente al establecido en el registro inicial, donde se plantea inicialmente el movimiento en el eje (y) y luego en el eje (x) lo que deja ver un desconocimiento de las reglas para representar cualquier punto en el plano.

Con relación a lo anterior podemos deducir que existen dificultades para realizar la conversión entre los registros debido al desconocimiento de las reglas que permiten operar en el registro inicial (plano cartesiano). Este problema es denominado por Duval como “fenómenos de no-congruencia” el cual se da entre las representaciones de un mismo objeto matemático que provienen de sistemas semióticos diferentes y el pasaje entre ellas no es inmediato” (Duval,1999).

A la pregunta 8 el estudiante Carlos realiza la siguiente representación:

figura 22 Registro de llegada de Carlos a la pregunta 8



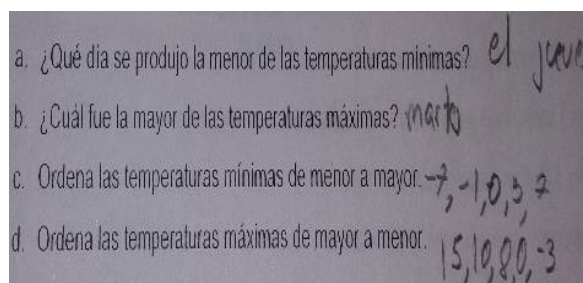
En esta pregunta el estudiante Carlos logro reconocer que el registro de llegada debía ser el numérico por lo tanto la conversión se realizó del registro gráfico (inicial) al registro numérico (llegada). en este proceso se puede evidenciar una elección de unidades

significantes que no representan la verdadera posición ni los movimientos realizados en cada escalera. otro aspecto importante es el desconocimiento de los puntos de partida donde inician los desplazamientos (se esperaba que los estudiantes tomaran como referente las flechas para determinar la orientación y la magnitud del desplazamiento realizado) así mismo, se esperaba que las unidades significantes “subir y bajar” fueran relacionadas con los números enteros positivos y negativos lo cual es fundamental para realizar la conversión al registro numérico.

En consecuencia, aunque el estudiante planteo un registro de llegada (numérico) para representar la situación descrita en el registro gráfico, este no significa ni representa lo mismo en ambos registros, por lo tanto, el criterio de US no se cumple ya que, al cambiarle el significado a las unidades significantes iniciales, cambia el sentido de la representación, por lo que la representación numérica no representa la situación descrita en el registro gráfico (Duval, 1999).

A la pregunta 9 el estudiante Carlos realiza la siguiente representación:

figura 23 Registro de llegada de Carlos a la pregunta 9



Realizando el respectivo análisis al procedimiento realizado por el estudiante Carlos a esta pregunta, se puede evidenciar un reconocimiento de cada una de las unidades significantes en el registro gráfico tabular (diferentes temperaturas de cada día) las cuales son de suma importancia para realizar la conversión al registro verbal y numérico (registro de llegada escogido por el estudiante). Es importante reconocer, el manejo que le dio el estudiante a las temperaturas negativas, en este caso vemos un proceso transparente y claro a la hora de comparar temperaturas negativas, mostrando con ello un correcto manejo de las reglas que permiten comparar dos números negativos.

Por lo anterior vemos que los tres criterios de congruencia planteados por Duval, (1999) se cumplen, al respecto el criterio de CS y US se cumplen puesto que cada unidad significativa del registro gráfico tabular está relacionada con una unidad significativa en el registro verbal y numérico, y el criterio de CO también se cumple puesto que la conversión se realiza de acuerdo al orden de aprehensión de las unidades significantes en el registro inicial.

Para concluir, es transcendental reconocer desde los aportes de Duval, (2006) que la aprehensión conceptual de un contenido matemático, se basa especialmente en la coordinación de dos registros de representación en este caso, el registro gráfico tabular y el registro verbal y numérico, esta articulación entre los registros se hace evidente por el uso rápido y espontaneo del proceso de conversión por parte del estudiante.

Análisis integrado de Carlos

Analizando la prueba inicial del estudiante Carlos podemos decir que es un estudiante que presenta un reconocimiento importante de la mayoría de los registros de los números enteros, en este sentido vemos que presenta un reconocimiento de las unidades significantes de los registros verbal, numérico, gráfico y recta numérica lo que le permite realizar una conversión transparente entre cada uno de estos registros. Otro aspecto importante para destacar del estudiante es la capacidad que tiene para adaptar y asociar los números enteros a diversas situaciones contextuales, en este sentido se puede apreciar como el estudiante logra reconocer y relacionar unidades significantes como “tener” en el registro verbal y las relaciona con la unidad significativa “+” en el registro numérico lo que muestra su fortaleza en la conversión de esta clase de registros.

Por otra parte, cuando realiza la conversión del registro gráfico cartesiano al registro verbal en este caso vemos como el estudiante presenta dificultades para realizar la conversión entre estos registros, estas dificultades se fundamentan principalmente en el no reconocimiento de las reglas matemáticas que permiten ubicar un punto en el plano cartesiano, al desconocer estas reglas la conversión se realiza siguiendo un orden diferente

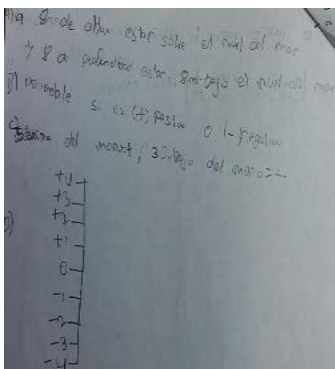
lo que conduce a presentar una representación verbal que no es congruente con lo descrito en el registro cartesiano.

Referente al tratamiento entre las representaciones vemos que el estudiante tiene presente las propiedades matemáticas del sistema semiótico a la hora de realizar las transformaciones dentro de un mismo registro, lo que permite realizar una expansión del registro inicial donde se presentan nuevas características del objeto matemático generando con ello una ganancia en conocimiento

Análisis actividad de conceptualización y aplicación sección 2 Carlos

A la pregunta 1 el estudiante Carlos realiza la siguiente representación:

figura 24 Registro de llegada de Carlos a la pregunta 1



El estudiante Carlos logró reconocer las unidades significantes presentes en el registro gráfico, las cuales son de suma importancia para realizar la conversión al registro verbal y numérico. Este reconocimiento hace referencia principalmente a discriminar el punto (0) en la gráfica como el punto que permite dividir las alturas sobre el nivel del terreno y bajo el nivel del terreno, otro aspecto importante fue la utilización de los signos (+) y (-) junto con los números para diferenciar las diferentes posiciones en la excavación.

Analizando la conversión dese los tres criterios de congruencia planteados por Duval, (1999) tenemos que:

El criterio de CS si se cumple ya que el estudiante relaciona cada unidad significativa del registro gráfico (inicial) con una unidad significativa en el registro verbal y

numérico (producción del estudiante). Para ejemplificar este criterio podemos citar el ítem a) donde la unidad significativa “+8” le corresponde la unidad significativa “8 de altura sobre el nivel del terreno” en el registro de llegada.

El criterio de US también se cumple puesto que cada unidad significativa en el registro gráfico está asociada con una única unidad significativa en el registro de llegada, manteniendo el mismo significado en las dos representaciones. Como ejemplo podemos citar la unidad significativa “-3” la cual en el registro de llegada le corresponde la unidad significativa “3 bajo del morro”.

El criterio de CO se cumple puesto que la conversión entre los registros se hizo de acuerdo al orden de aprehensión de las unidades significantes en el registro gráfico inicial.

Al cumplir la conversión realizada por el estudiante con los tres criterios de congruencia podemos decir que existe una articulación y una coordinación transparente entre el registro gráfico y los registros de llegada numérico y verbal.

Es importante reconocer desde los aportes de Duval, (2006) que al momento de desarrollar un concepto matemático las representaciones semióticas son el único medio que permiten y favorecen la comprensión de éste, puesto que un sistema de representación nunca deja ver todas las características del objeto matemático, por este motivo se hace necesario el tránsito por las diferentes representaciones que este permite, eligiendo así el sistema de representación más potente que permita la construcción con mayor facilidad del objeto matemático que se esté trabajando, en este caso el concepto de número entero.

Con relación al tratamiento de la representación gráfica inicial, se puede indicar que el estudiante Carlos en el ítem d) realizó la construcción nuevamente de la situación para ello utilizó la construcción de una recta numérica construida de forma vertical donde tomó como punto central el número (0) el cual divide las alturas sobre el nivel del terreno y bajo el nivel del terreno, es importante reconocer que el estudiante utilizó los símbolos “+” y “-” junto con los números para indicar y simbolizar las diferentes alturas lo cual contribuyó a realizar una nueva construcción que muestra aspectos más relevantes de la situación y que son de suma importancia para la actividad de conversión.

A la pregunta 2 el estudiante Carlos realiza la siguiente representación:

figura 25 Registro de Carlos a la pregunta 2

a) el carro a +3
b) la pelota a -4
B por el carro Derecha
pelota Izquierda
C Si:
D + hacia la derecha
- hacia la Izquierda
E hacia la derecha , +, +3+
F hacia la derecha , +, +3+

En esta pregunta el estudiante Carlos hace un reconocimiento puntual de cada una de las unidades significantes presentes en el registro gráfico inicial, estas unidades hacen referencia a las posiciones del niño (0), la pelota (-4) y el carrito (+3), las cuales son determinantes a la hora de realizar la conversión, en este caso el registro de llegada escogido por el estudiante es el numérico y verbal. Es importante reconocer la ayuda que le brindo la recta numérica al estudiante puesto que a partir de ella pudo establecer sin dificultad las diversas posiciones y los movimientos que debía realizar el niño para recoger cada uno de los objetos en el gráfico.

Analizando la conversión realizada por el estudiante desde los tres criterios de congruencia propuestos por Duval, (1999) tenemos que:

El criterio de CS si se cumple puesto que el estudiante hace corresponder en el registro de llegada cada unidad significativa del registro gráfico de partida. Como ejemplo podemos citar el ítem a) de la pregunta donde la unidad significativa posición del carrito con respecto niño “3 pasos a la derecha” está relacionada con la unidad significativa “+3”.

El criterio de US se cumple puesto que cada unidad significativa del registro gráfico se relacionada con una única unidad significativa en el registro de llegada la cual conserva el mismo significado del registro inicial. Como ejemplo podemos citar la unidad significativa correspondiente a la posición de la pelota la cual se representa “-4” en el registro final y corresponde a la unidad significativa “4 pasos a la izquierda” en el registro de partida.

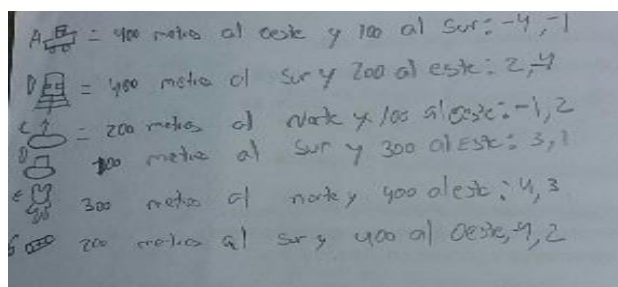
El criterio de CO también se cumple puesto que la conversión se realiza de acuerdo con el orden presentado en el registro inicial.

Por lo anterior, podemos decir que la conversión realizada por el estudiante es coherente puesto que logra articular el registro gráfico con el registro verbal y numérico logrando con esto una coordinación y una conversión transparente entre ambos registros.

Análisis prueba final Carlos

A la pregunta 1 el estudiante Carlos realiza la siguiente representación:

figura 26 Registro de llegada de Carlos a la pregunta 1



En el proceso realizado por el estudiante se puede percibir un reconocimiento tanto de las unidades significantes del registro inicial (plano cartesiano) como las reglas que permiten determinar cualquier coordenada en este sistema. Así mismo la conversión planteada por el estudiante reconoce como punto central la ubicación de mi casa la cual está ubicada en el punto (0,0) el cual es determinante para establecer las diferentes ubicaciones en el plano cartesiano de los otros edificios. Es importante reconocer que el estudiante utilizó como registros de llegada el verbal y el numérico donde se plantean los diferentes movimientos para llegar a cada punto además de establecer las coordenadas que simbolizan esa ubicación en el plano.

Analizando la conversión realizada por el estudiante desde los tres criterios de congruencia planteados por Duval, (1999) tenemos que:

El criterio de CS se cumple puesto que el estudiante relaciona cada unidad significativa del registro gráfico (posiciones de los edificios) con una unidad significativa en el registro de llegada. Como ejemplo tenemos la tienda de coches a la cual le corresponde

la unidad significativa (-4,1) y en el registro de llegada se representa con la unidad significativa “400 metros al oeste y 100 al sur”.

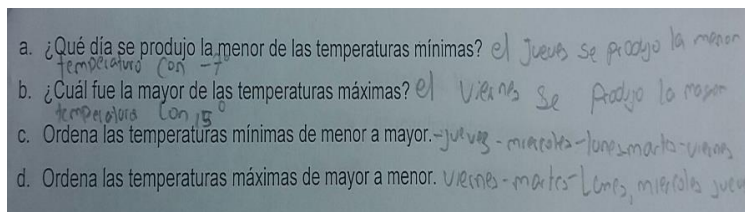
El criterio de US también se cumple ya que el estudiante relaciona cada unidad significativa del registro gráfico con una única unidad significativa en el registro de llegada la cual conserva su mismo valor. Como ejemplo tenemos la tienda de magia que en el registro inicial se representa con la coordenada “3,1” y en el registro de llegada con la unidad significativa “300 metros al este y 100 metros al sur”.

El criterio de CO también se cumple puesto que la conversión es realizada siguiendo el mismo orden de presentación en los dos registros.

Al cumplir los tres criterios de congruencia se puede indicar que el estudiante realiza una conversión transparente entre ambas representaciones donde existe una coordinación y una articulación entre ambos registros lo que conlleva a determinar que la transferencia del registro gráfico al numérico y verbal se hace de forma clara teniendo como referente el orden en que se presentan las unidades significantes en el registro gráfico (Duval, 1999).

A la pregunta 2 el estudiante Carlos realiza la siguiente representación:

figura 27 Registro de llegada de Carlos a la pregunta 2



El estudiante identifica de forma clara cada una de las unidades significantes presentes en el registro tabular, las cuales hacen referencia a las diferentes temperaturas que se produjeron en la ciudad de Bogotá en cinco días seguidos. De este proceso se puede indicar que el registro de partida es el gráfico tabular y el registro de llegada escogido por el estudiante es una mezcla entre verbal y numérico. Otro aspecto importante para resaltar en la conversión del estudiante fue la relación que pudo establecer entre las diferentes

temperaturas con los números enteros, es decir, asocio las temperaturas bajo cero con los números negativos y las temperaturas sobre cero con números positivos lo cual le sirvió como un elemento crucial a la hora de ordenar y comparar las diferentes temperaturas de cada día.

Analizando la conversión desde los tres criterios de congruencia propuestos por Duval, (1999) tenemos que:

El criterio de CS si se cumple puesto que cada unidad significativa del registro verbal se relaciona con una unidad significativa del registro verbal y numérico. Como ejemplo tenemos la unidad significativa “día que se produjo la mayor de las temperaturas mínimas” se relaciona con la unidad significativa “viernes con 15°”.

El criterio de US también se cumple ya que cada unidad significativa del registro tabular está relacionada con una única unidad significativa en el registro verbal y numérico la cual conserva el mismo significado que en el registro inicial. Como ejemplo tenemos el ítem a) de la pregunta, la unidad significativa “menor de las temperaturas mínimas” se relacionada con la unidad significativa “jueves -7°”.

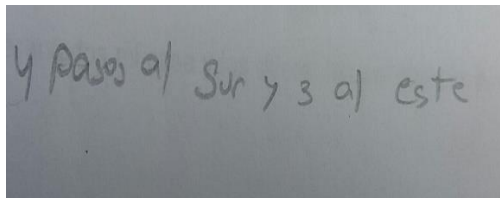
El criterio de CO se cumple puesto que la conversión se realiza de acuerdo al orden en que aparecen las unidades significantes en el registro inicial (tabular).

Por lo anterior la conversión del registro tabular al registro verbal y numérico se efectuó por parte del estudiante de forma clara donde se siguió de manera coordinada y coherente la articulación entre los dos registros, teniendo como referente la aprehensión de las unidades significantes en el registro inicial.

Es importante agregar que la aprehensión de un objeto matemático (números enteros) se fundamenta en la coordinación de al menos dos registros de representación (Duval, 1999), en nuestro caso el tabular y el verbal y numérico, esta articulación se percibe cuando el paso de un registro a otro se hace de forma espontánea y trasparente sin generar ningún problema para el estudiante.

A la pregunta 3 el estudiante Carlos realiza la siguiente representación:

figura 28 Registro de llegada de Carlos a la pregunta 3



En esta pregunta el estudiante reconoce las unidades significantes del registro gráfico (plano cartesiano) que le permitieron plantear una conversión al registro verbal y numérico. Estas unidades significantes hacen referencia a las coordenadas en el plano que se deben seguir para llegar al punto F (3,-4), coordenadas que fueron encontradas por el estudiante pero que en la conversión no se presentan de la misma forma que el en registro inicial puesto que se desconocen las reglas del sistema semiótico, más precisamente las reglas que condicionan los desplazamientos y la simbolización de un punto en el plano.

Analizando la conversión desde los tres criterios de congruencia planteados por Duval, (1999) se tiene que:

El criterio de CS se cumple puesto que cada unidad significativa en el registro inicial (plano cartesiano) está relacionada con una unidad significativa en el registro de llegada (producción del estudiante). Como ejemplo podemos citar la unidad significativa "+3" la cual se relaciona con la unidad significativa "3 pasos al este" en el registro de llegada".

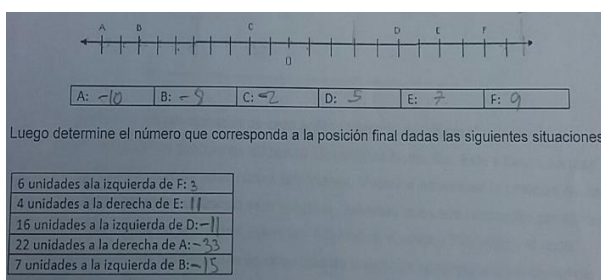
El criterio de US se cumple ya que cada unidad significativa presente en el plano cartesiano le corresponde una única unidad significativa en el registro verbal-numérico. Un ejemplo es la unidad significativa correspondiente al eje y "-4" la cual le corresponde la unidad significativa "4 pasos al sur" en el registro de llegada donde conserva el mismo significado que en el registro inicial.

El criterio de CO no se cumple puesto que la conversión se realiza en un orden diferente al establecido en el registro gráfico inicial. En este sentido tenemos que al desconocer las reglas para desplazarse en el plano cartesiano el estudiante plantea una conversión que cambia el sentido a la representación inicial.

Puesto que tal como lo planea Duval, (1999) cada sistema semiótico está definido por unas reglas de conformidad que permiten formar y trabajar con las unidades elementales del sistema. Por lo anterior es posible afirmar que las reglas de conformidad del sistema de representación gráfico (plano cartesiano) y del sistema de representación verbal-numérico no son semejantes.

A la pregunta 4 el estudiante Carlos realiza la siguiente representación:

figura 29 Tratamiento de Carlos a la pregunta 4



En esta pregunta se puede percibir un reconocimiento de las reglas que permiten realizar el proceso de tratamiento a la representación gráfica (recta numérica). En este caso el estudiante reconoce las reglas que le permiten ubicar los números enteros en la recta numérica, donde reconoce como punto central el número (0) el cual divide los valores positivos a la derecha y los valores negativos a la izquierda el cual es un factor determinante para realizar el tratamiento que le permitió solucionar cada ítem de la pregunta. En general, el tratamiento efectuado por el estudiante Carlos al registro inicial (recta numérica) cumple con las reglas de funcionamiento y con las propiedades matemáticas del sistema semiótico, las cuales son determinantes para realizar su expansión gráfica.

Puesto que tal como lo plantea Duval, (1999) un tratamiento permite realizar una transformación al registro inicial manteniendo el sistema semiótico de origen y cumpliendo con sus reglas de funcionamiento en el cual solo se moviliza un registro de representación.

Cambios detectados en Carlos

Contrastando los análisis de la prueba diagnóstica y los resultados obtenidos en la prueba final se puede decir que Carlos es un estudiante que solo presentó dificultades en la conversión del registro cartesiano al registro verbal más precisamente con las propiedades matemáticas de este sistema semiótico y al reconocimiento de sus unidades significantes las cuales eran un factor determinante para realizar una conversión coherente y transparente entre estos dos registros. Ahora bien, en el análisis del instrumento final se muestra un estudiante que pudo superar las dificultades iniciales mostrando un dominio en estos dos registros el cual se fundamenta en el reconocimiento de cada una de las unidades significantes del registro cartesiano las cuales hacen referencia a la ubicación de los puntos en cada eje cartesiano los cuales son fundamentales para establecer las coordenadas en el registro verbal.

Para finalizar, se debe indicar que Carlos es un estudiante que mostró en la prueba final un reconocimiento de las diferentes representaciones del concepto número entero, los elementos de cada una de ellas y como se relacionan estas unidades significantes con otras unidades en los diferentes registros de representación para realizar la conversión. Con esto se confirma que entre más representaciones semióticas se aborden en el aprendizaje de un concepto matemático y al interior de estas representaciones, se faciliten las condiciones de congruencia entre registros, se alcanza una mejor comprensión del objeto matemático, permitiendo que el estudiante pueda diferenciar el objeto matemático de sus diferentes representaciones semióticas, además de discriminar sus unidades significantes y ponerlas en correspondencia en otros registros, de esta forma al reconocer la invariancia entre las unidades significantes de cada registro permite la aprehensión del concepto matemático abordado durante el aprendizaje.

8 CONCLUSIONES

Teniendo como referencia los objetivos propuestos al inicio de este trabajo, a continuación, se presentan algunas conclusiones que tratan de mostrar lo encontrado en el análisis de las actividades y que sirven para explicar en cierta forma lo que se pretendía con cada objetivo.

- De acuerdo con los resultados obtenidos, podemos decir que un aprendizaje basado en las diferentes representaciones semióticas del concepto número entero junto con las actividades cognitivas de tratamiento y conversión permiten un mejoramiento significativo en el aprendizaje en los estudiantes, puesto que el tránsito entre las diferentes representaciones del objeto matemático mediante la articulación de los diferentes registros no permiten un aprendizaje mono registro, sino un aprendizaje estructurado donde se reconoce y se diferencia el concepto matemático de sus diferentes representaciones. Por lo tanto, para favorecer el aprendizaje del concepto número entero y el desarrollo del pensamiento conceptual, es fundamental que los alumnos puedan articular y generalizar la conversión de las diferentes representaciones semióticas (por ejemplo: de una expresión verbal pasar a la gráfica, de una representación numérica a una expresión recta numérica, o viceversa); para lo cual es necesario, enfrentarlos a suficientes situaciones de articulación entre las distintas representaciones.
- El análisis del instrumento de ideas previas permitió evidenciar dificultades asociadas con la interpretación de algunas situaciones contextuales, la dificultad para establecer estrategias que le permitan dar solución a las actividades y el poco conocimiento que tenían los estudiantes en cuanto a las diferentes representaciones semióticas del objeto número entero; asimismo, el desconocimiento de las actividades cognitivas de tratamiento y conversión que permiten transitar y trabajar con las diferentes representaciones del objeto matemático. Por otro lado, se pudo comprender que la conversión entre los registros es la actividad cognitiva que más genera problemas a los estudiantes puesto que el desconocimiento de las unidades

significantes del registro inicial presupone una conversión que no cumple con los tres criterios de congruencia lo que genera una conversión que no representa la situación presentada en el registro inicial.

- Los cambios que se pueden percibir después de aplicada la UD enfatizan principalmente en la superación de la mayoría de las dificultades identificadas en el instrumento inicial, de este modo los estudiantes pudieron caracterizar los diversos registros semióticos que tiene el concepto número entero, la identificación de las unidades significantes de cada registro, y la articulación entre los diferentes registros logrando una coordinación entre un registro inicial y uno final, todo esto se pudo corroborar a través del desempeño de los estudiantes en cada momento de la UD, donde se pudo describir los diferentes registros utilizados por los estudiantes, la coordinación y la conversión entre ellos mediante el cumplimiento de los tres criterios de congruencia (CS,US y CO) lo cual fue un punto clave para el aprendizaje, así mismo, la identificación de las reglas que le permiten realizar los procesos de tratamiento en cada una de las representaciones del objeto matemático número entero. Es importante reconocer que las actividades adaptadas al contexto del estudiante influyen en los registros de representación y en las actividades cognitivas utilizadas para afrontar la solución de estas situaciones.

9 RECOMENDACIONES Y PERSPECTIVAS A FUTURO

- Para la realización del trabajo se presentaron algunas dificultades metodológicas por ejemplo habría sido muy importante la incorporación de una actividad que permitiera un trabajo articulado entre cada uno de los registros semióticos del objeto número entero asociado a situaciones contextuales cercanas al estudiante que pudieran mostrar en mayor medida la construcción de representaciones y las actividades cognitivas de tratamiento y conversión en cada uno de estos registros.
- En este estudio se evidencia que los estudiantes muestran deficiencias conceptuales, de interpretación y falta de coordinación entre el registro plano cartesiano y el registro verbal, tienen diferentes dificultades al pasar de la representación gráfica a la representación verbal, por ejemplo, suponen que los valores en cada eje cartesiano se puede ubicar de cualquier forma sin tener en cuenta las propiedades matemáticas del sistema semiótico, lo que conlleva a realizar una representación incorrecta de estos valores en el registro verbal y muy pocos estudiantes justifican sus respuestas, lo que indica que han sido expuestos a prácticas de enseñanza donde no tienen que comunicar sus resultados. Por este motivo se hace necesario en futuras investigaciones un trabajo más arduo en este sistema de representación considerando sus propiedades y llevando al estudiante inicialmente a procesos de tratamiento dentro del mismo registro para posteriormente planificar actividades enfocadas en la conversión de este registro hacia otros sistemas de representación.
- Es claro que se debe incorporar la representación como una herramienta didáctica que le permite a los estudiantes acercarse a los objetos matemáticos y a las situaciones físicas de su entorno, por lo que la relación entre las diferentes representaciones de un objeto matemático asociadas con actividades de su entorno permiten que los estudiantes reconozcan las diferentes representaciones del objeto matemático, junto con las actividades de tratamiento y conversión lo que conlleva a acercar al estudiante al concepto matemático abordado en el proceso de aprendizaje.

- Es relevante considerar en el proceso de enseñanza de las matemáticas, que, aunque se tenga diversas representaciones semióticas para un mismo objeto matemático, solo se deben considerar aquellas que permitan la coordinación transparente entre los registros, esto con el fin de facilitar el aprendizaje del objeto matemático desde sus diversas representaciones.
- De acuerdo con los hallazgos de nuestro trabajo es necesario continuar investigando sobre las representaciones semióticas y su potencial en el aprendizaje de las matemáticas, puesto que estas representaciones son las que permiten el acceso a los objetos matemáticos debido a su naturaleza abstracta, por lo tanto, es fundamental crear UD que permitan al estudiante abordar los conceptos matemáticos desde un enfoque representacional combinado con las diversas situaciones contextuales del entorno del estudiante, puesto que las actividades de tratamiento y conversión son fundamentales para los procesos de conceptualización y comprensión de un concepto matemático, tal como lo expone Duval en su teoría de las representaciones semióticas.

10 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Anne, B. (2002). Algunos elementos de la historia de los números negativos. Recuperado del sitio http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/Usrn/fundoro/archivos%20adjuntos/publicaciones/otros_idiomas/Espanol/Penelope/Boye_negativos_es.pdf web:
- Ardila, R & otros. (2005). *Espiral 7*. Bogotá, editorial Norma.
- Becerra, O.J; Buitrago, M.R; Calderón, S.C; Gómez, R. Armando; Cañadas, M.C.; Gómez, P. (2012). Adición y sustracción de números enteros. En Gómez, Pedro (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 1* (pp. 19-75). Bogotá: Universidad de los Andes
- Bell, A. (1982). *Looking at children and directed numbers. Mathematics Teaching*, 100, 66-72.
- Berrios & Vldivia. (2012). *Estrategias en la enseñanza de números enteros en la escuela secundaria*. Revista Científica FAREM - Estelí, 38-41.
- Borjas, D. (2009). *Aprendizaje de los números enteros una “experiencia significativa” en estudiantes de séptimo grado*, Universidad pedagógica nacional francisco Morazán, Tegucigalpa, M.D.C, Honduras, 2009.
- Brousseau, G. (1983). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. Zarotoga.
- Bruno, A. & Martinón, A. (1994). *La recta en el aprendizaje de los números negativos*. Suma, 18, 39-48
- Bruno, A. (2001). *La enseñanza de los números negativos: formalismo y significado*. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 4(1), 415.
- Camargo, L & otros. (2002). *Alfa 7*. Bogotá, editorial Norma.

- Castillo, C. (2014). *Aprendizaje de adición y sustracción de números enteros a través de objetos físicos*, Universidad Nacional de Colombia Facultad de Ingeniería y Administración, Palmira, Colombia.
- Castro, E. y Castro, E. (1997). *Representaciones y modelización*. En Rico, L. (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.
- Cid, E. (2000, abril). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. XIV Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Cangas, España.
- Cid, E. (2002). *Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos*. Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (Vol. 2, pp. 529-542). Zaragoza, España: Publicaciones de la Universidad de Zaragoza
- Cid, E., & Bolea, P. (2010). *Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico*. Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action. Montpellier: IUFM de Montpellier.
- Chamorro, M. d. (2003). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid, España: Pearson Educación S.A.
- D'Amore, B. (2004). *Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética. Interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución*. Barcelona España: Uno pág. 35-106.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del valle. (Obra original publicada en francés: semiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Bern: Peter Lang/ Éditions Scientifiques Européennes, 1995).

- Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo* (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del Valle.
- Duval, R. (2006). *Un tema crucial en la Educación Matemática: La habilidad para cambiar un registro de representación*. La gaceta de RSME, Vol. 9.1. Enciclopedia Práctica de Pedagogía. (1988). Vol. 6. p. 501. España: Editorial Planeta.
- Duval, R. (2008). *Eight problems for a semiotic approach in mathematics education*. En: L. Radford, G. Schubring y F. Seeger (Eds.). (2008). *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture*, pp. 39-61. Rotterdam: Sense Publishers.
- Gallardo Cabello, A. (1996). *Uso de un modelo de enseñanza como recurso de investigación en el estudio de los números enteros*. Págs. 311-320. Investigaciones en matemática educativa II. Cinvestav. Grupo editorial iberoamericana.
- Glaeser, G. (1981), „*Epistémologie des nombres relatifs*”, *Recherches en Didactique des mathématiques*, 2(3), 303-346.
- Godino, J. (2003). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros*. Granada: Reprodigital.
- González, J. L., Iriarte, M., Jimeno, M., Ortíz, A., Ortíz, A., Sanz, E. & VargasMachuca, I. (1999). *Números enteros. Matemáticas: cultura y aprendizaje*. pp. 271-57. Madrid: Editorial Síntesis, S.A.
- Ifrah, G. (1987). *Las cifras: historia de una gran invención*. Madrid, España: Alianza.
- Jiménez, J. & Bolaños, J. (2015). *Uso de representaciones semióticas en el aprendizaje de las operaciones de suma y resta de números enteros en un aula con integración de población ciega*, Universidad Distrital Francisco José de Caldas facultad de ciencias y educación, Bogotá, Colombia.
- Iriarte, Jimeno y Vargas-Machuca (1991). *Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros*. *Suma*, (3)7, 13-18.

- Martínez, J. (2018). *Cambio de los modelos explicativos del concepto caída libre mediante el acercamiento del conocimiento científico al conocimiento escolar* (tesis de maestría). Universidad Autónoma de Manizales, Manizales, Colombia.
- MEN. (2017). *Vamos aprender matemáticas*. Bogotá, editorial SM, S.A.
- MEN. (1998). Lineamientos curriculares de Matemáticas. Bogotá. Editorial Magisterio.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*.
- Ospina, D. (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal*, Universidad Autónoma de Manizales, Maestría en Enseñanza de las Ciencias, Manizales, Colombia.
- Recalde, L. (2005) Notas del curso de historia de las matemáticas. Universidad del Valle, Cali-Colombia
- Tamayo, O. (2006) "*Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas*", Revista Educación y Pedagogía, Medellín, Universidad de Antioquia, Facultad de Educación, vol. XVIII, núm. 45, (mayo-agosto), pp. 37-49.
- Torres, B & otros. (2000). *Supermat 7*. Bogotá, editorial Voluntad.
- Uri, r. B. (2011). *Didáctica de la lengua castellana*. España: Graó de Irif S.L.
- Vílchez, M., (2014). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de E.S.O. respecto al concepto de número entero*. Estudio exploratorio. Memoria final del Máster en Didáctica de la Matemática. Granada, España: Universidad de Granada.

11 UNIDAD DIDÁCTICA

Unidad didáctica: “Aprendamos sobre los números enteros”.

Se propone el desarrollo de una unidad didáctica dividida en tres momentos: el primer momento (inicial), está orientado por el uso de dos actividades, la primera consiste en la aplicación de un instrumento de ideas previas para la identificación de conocimientos, representaciones, tratamiento y conversión, aptitudes, destrezas, motivaciones y creencias sobre el tema número entero que poseen los estudiantes inicialmente, la segunda actividad busca presentar mediante la utilización de dos videos la historia y la importancia de los números enteros en el desarrollo de la humanidad. En el segundo momento (desarrollo) se propone la aplicación inicialmente de un juego denominado “juguemos con los dados” con el cual se pretende introducir a los estudiantes al concepto de número entero, posterior a esto se plantea el uso de 3 actividades orientadas a presentar el concepto de número entero y sus operaciones de adición y sustracción, desde un enfoque semiótico que privilegie el uso de las diferentes representaciones de los números enteros y los procesos cognitivos de tratamiento y conversión en diferentes situaciones contextuales. Por último, se propone el momento de cierre, en el cual se presenta 3 actividades, la primera denominada “juguemos domino” con la cual se pretende evidenciar la apropiación y el reconocimiento del concepto de número entero (operaciones, representación y aplicación), la segunda actividad consiste en una entrevista grupal con la cual se pretende indagar sobre la efectividad de las actividades propuestas en la unidad didáctica con relación a los números enteros, y como última actividad se propone la aplicación de una prueba final compuesta por situaciones contextuales, donde el estudiante debe aplicar los conocimientos adquiridos en cuanto a los números enteros, sus operaciones y los procesos cognitivos de tratamiento y conversión de las diferentes representaciones de los números enteros.

Es importante resaltar que el propósito de esta unidad didáctica es plantear una serie de actividades que permitan al estudiante reconocer y apropiarse del concepto de número entero en diferentes situaciones. A partir de un enfoque semiótico que da prioridad al uso de representaciones del objeto matemático y las actividades cognitivas de tratamiento y conversión en los diferentes registros.

Metodología y recursos: Pretendo ubicarme en los roles de ser un orientador- facilitador del proceso de aprendizaje de los estudiantes, a través de la implementación de actividades y preguntas que permitan la construcción del concepto y su aplicación en situaciones contextuales. Se espera que los estudiantes sean verdaderos constructores de su propio aprendizaje, desarrollando las actividades propuestas por el docente que estarán centradas al contexto del estudiante, esto con el fin de motivarlos al desarrollo cognitivo, metacognitivo y a la motivación por aprender el concepto de número entero. Con relación a los recursos contaremos con el uso del tablero, proyector multimedia y fotocopias del material diseñado por el profesor.

Conexiones con otras materias: los números enteros son un tema muy importante tanto en el quehacer diario del hombre como en actividades científicas y académicas, por esta razón los conocimientos sobre los números enteros sobre pasan la aplicación a las matemáticas y toman un lugar importante en materias como las ciencias naturales, la física, la contabilidad, entre otras. Por lo anterior, se observa la relevancia de aprender este concepto y más aún cuando tiene diversas aplicaciones en diversos contextos. Un ejemplo es en la trigonometría donde se describen ángulos positivos y negativos, la utilización del plano cartesiano para la localización de puntos que no es más que dos rectas numéricas una horizontal y otra vertical que tienen en común la posición cero. Con relación al algebra existe un paralelo entre las operaciones básicas con números enteros y las operaciones básicas con términos semejantes. En la física se aplican en magnitudes vectoriales como la velocidad y desplazamiento. Y como último ejemplo vemos su aplicación en la contabilidad en la elaboración de estados financieros como el balance general donde se representa el de pasivo y activo.

DIMENSIONES QUE SE ABORDARAN EN LA UNIDAD DIDÁCTICA

A continuación, se describen las dimensiones que fueron seleccionadas y con las cuales se pretende lograr un mejoramiento en el aprendizaje de los estudiantes.

Representacional: orientada a la utilización de representaciones externas como medio para evocar las representaciones mentales construidas por los estudiantes en su experiencia contextual. Por lo anterior se proponen actividades orientadas a la utilización de las diferentes

representaciones de los números enteros y donde se requiera la utilización de las actividades cognitivas de tratamiento y conversión para la resolución de una situación. Es importante resaltar que el uso de representaciones semióticas y los procesos de tratamiento y conversión van a permitir una mayor conceptualización del objeto matemático número entero y en consecuencia un mejoramiento en los modelos mentales construidos por los estudiantes sobre el objeto matemático.

Situaciones de aplicación: se abordará con el uso de situaciones contextuales que le permitan al estudiante aplicar los conocimientos y procedimientos adquiridos en el desarrollo de la unidad didáctica. A través de este tipo de tareas, el docente podrá evaluar la capacidad del estudiante de aplicar la teoría estudiada a situaciones de la vida real. Y, además, tener un precedente sobre la evolución conceptual de los estudiantes sobre el concepto matemático planteado.

Epistemológica: se abordará mediante el desarrollo de un instrumento de ideas previas el cual tiene como objetivo identificar, concepciones, modelos mentales, representaciones y obstáculos que presentan los estudiantes en torno al concepto de número entero, partiendo desde las experiencias previas, que han tenido con relación al aprendizaje del objeto matemático. También se propone el desarrollo de actividades que lleven al estudiante a elaborar una exploración histórica y epistemológica del concepto de número entero.

Emocional: una prioridad para el docente es despertar el interés y curiosidad de los estudiantes por los nuevos contenidos. Para ello se debe proponer actividades que permitan relacionar los contenidos abordados con el entorno del estudiante, ya que proporcionan sentido a los conceptos y a los procedimientos con los que los estudiantes van a trabajar. Por lo tanto, las actividades propuestas por el docente en la unidad didáctica estarán asociadas al entorno de los estudiantes donde los estudiantes puedan ver la aplicación de los conceptos en un entorno real. Por último al introducir al estudiante a un tema nuevo, es importante dar los espacios para que estos expresen sus ideas y creencias sobre el tema en cuestión lo que va a permitir una mejor disposición y motivación por aprender.

Metacognitiva: se presenta después de la elaboración de las actividades propuestas y tiene como fin plantear una serie de preguntas encaminadas a que el estudiante reconozca y evalúe sus estructuras cognitivas, sus procedimientos, la metodología empleada, los procesos realizados, sus habilidades y las dificultades que presento en la solución de las actividades propuestas.

Objetivos unidad didáctica

- Identificar las ideas previas que tiene los estudiantes sobre el concepto de número entero, su diversas representaciones y los procesos de tratamiento y conversión en diferentes situaciones contextualizadas.
- Presentar el concepto de número entero a partir de la utilización de situaciones contextuales y actividades lúdicas que generen interés y motivación en los estudiantes.
- Fortalecer el aprendizaje de las operaciones suma y resta, en el conjunto de los números enteros mediante de la implementación de actividades que favorezcan su aprendizaje en profundidad.
- Construir el concepto de número entero a partir de la utilización de actividades asociadas a las diversas representaciones y los procesos de tratamiento y conversión.

TIEMPO DE EJECUCIÓN: 5 sesiones a desarrollar en 5 semanas, cada sesión de 2 horas para un total de 10 horas.

GRADO EN EL CUAL SE PRETENDE DESARROLLAR EL PROCESO DE ENSEÑANZA: Grado sexto del colegio Nuevo Horizonte del municipio de Andalucía Valle del Cauca.

GRUPO A IMPACTAR: Grado sexto del colegio Nuevo Horizonte del municipio de Andalucía, Valle del Cauca. El cual está conformado 18 estudiantes de los cuales 7 son mujeres y 11 son hombres.

Descripción del contexto: El colegio Nuevo Horizonte está ubicado en el barrio Ricaurte, perteneciente al municipio de Andalucía (valle del cauca), es una institución de carácter

privado que cuenta con una sede principal para bachillerato y primaria. Es importante aclarar que por ser una institución privada solo existe un solo grado sexto, el cual está conformado por 18 estudiantes, de los cuales 7 son mujeres y 11 hombres, cuyas edades oscilan entre los 11 y 14 años, pertenecientes a la población urbana de la región, se caracterizan por ser respetuosos, algo tímidos, colaborativos, participativos, disciplinados, que presentan ciertas dificultades entorno a los conocimientos matemáticos, pero se esfuerzan por realizar las cosas y aprender.

METODOLOGÍA PARA EL DESARROLLO DE LA UNIDAD: Grupal, individual y colectivo.

DESARROLLO UNIDAD DIDÁCTICA

Momento inicial: Este momento es primordial puesto que le permite al docente diagnosticar el nivel de conocimientos que traen sus estudiantes entorno al concepto de número entero, para ello se aplica un prueba diagnóstica con el fin de reconocer los modelos mentales que han construido los estudiantes, también para reconocer la utilización de los diferentes registros de representación semiótica del concepto número entero y las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de estas representaciones. Este momento también permite al estudiante comprender intuitivamente significados, representaciones y nociones básicas del tema que inicia. Para ello, la elaboración de la prueba diagnóstica y la presentación del tema utilizando los registros de representación le ayuda al estudiante a introducir conceptos nuevos en relación con otros ya conocidos.

Para este momento inicial se propone desarrollar dos tipos de tareas:

Tareas indagación: Orientadas a reconocer las ideas previas que tienen los estudiantes en cuanto al concepto de número entero, enfatizando en el reconocimiento de sus representaciones y los procesos de tratamiento y conversión de las mismas.

Tareas exploratorias: tiene como objeto que el estudiante adquiera nuevos conocimientos a través del desarrollo de actividades de: reconocimiento histórico del concepto,

investigación sobre el tema y descubriendo de situaciones contextuales donde se ve inmerso el concepto.

Este momento se plantea desarrollar en una sección (2 horas) para las cuales se propone dos actividades:

Actividad 1 (Individual): Prueba Diagnostica

Este cuestionario está compuesto por preguntas abiertas a cualquier concepción que tengan los estudiantes sobre el tema de números enteros, con las cuales se intentara copilar la información suficiente que permita realizar los análisis didácticos y semióticos (identificación de modelos explicativos, registros de representación, tratamiento y conversión, estrategias y procedimientos de los estudiantes, etc.).

Descripción prueba diagnóstica: La prueba contiene 9 preguntas donde se desprenden varios incisos que las complementan y en donde se involucran la conceptualización acerca de los números enteros su representación y reconocimiento en situaciones contextuales. Con cada pregunta se pretende alcanzar un objetivo en particular, a continuación, se describe el objetivo y lo que se espera obtener de cada pregunta para el desarrollo de la unidad didáctica.

Primera pregunta: es una pregunta que busca indagar cual es la concepción que tiene el estudiante sobre el concepto de número entero aplicado a situaciones contextuales. Esta pregunta es importante para nuestro análisis ya que nos permite ver cuáles son las expresiones planteadas por los estudiantes para representar situaciones de variación y en las cuales se haga necesaria la utilización de los números enteros para su representación. En esta pregunta se espera que los estudiantes planteen cualquier expresión numérica que permita ver que entienden por número entero, además, se busca contemplar cuales son los procedimientos y estrategias que utilizan los estudiantes para la realización de la conversión de registros en lengua natural y numéricos.

Segunda pregunta: se intenta determinar que tanto pueden asociar los estudiantes los números enteros en la representación de situaciones de la vida diaria. Esta pregunta es importante para nuestro análisis puesto que nos permite visualizar las expresiones y los procedimientos que

realizan los estudiantes para representar numéricamente la posición de los objetos que están en el gráfico.

En esta pregunta se espera que los estudiantes utilicen cualquier método (recta numérica, uso de regla, construcciones auxiliares, etc.) que le permita establecer la representación numérica de estos objetos, también se espera que el estudiante tenga en cuenta la utilización de los signos (+, -) en la representación de los objetos y en la conversión de los registros gráfico y numérico.

Tercera pregunta: consiste en que el estudiante pueda establecer la ubicación de cada objeto de la figura teniendo como punto de referencia el nivel del mar y el uso de la recta numérica dibujada a un costado de la figura. Con esta pregunta se pretende que los estudiantes entiendan los conceptos sobre el nivel del mar y bajo el nivel del mar, los cuales pueden ser asociados con los signos (+, -) para su notación más simplificada, también pueden indicar cuando un número es positivo o negativo dependiendo de la situación.

En esta pregunta se espera que los estudiantes tomen como referencia el nivel del mar y utilicen la recta numérica para establecer la posición de cada objeto en el gráfico, también se espera que los estudiantes logren visualizar y establecer la relación que existe entre los conceptos sobre y bajo el nivel del mar con los signos positivo y negativo que es fundamental para la conceptualización y representación de los números enteros.

Cuarta pregunta: Busca que los estudiantes puedan representar gráficamente las situaciones que están planteadas en los enunciados, teniendo como referencia el nivel del mar para la representación de cada una de estas situaciones. Esta pregunta es importante puesto que nos permite conocer la interpretación que le pueden dar los estudiantes a diferentes situaciones de variabilidad y su representación gráfica. Es importante resaltar que en esta pregunta los estudiantes tendrán que realizar un cambio de registro (conversión) para establecer la representación de cada situación, es decir, los estudiantes deben pasar de un registro en lengua natural a un registro gráfico de representación. Se espera que los estudiantes tomen como referencia para la construcción y representación de las situaciones la pregunta 2 de esta prueba puesto que tienen algún parecido en la construcción de las situaciones. Con esta

pregunta podemos realizar un análisis sobre la capacidad y dificultades que tienen los estudiantes de pasar de un registro de representación a otro (conversión).

Quinta pregunta: presenta una situación representada en un plano cartesiano donde el estudiante debe realizar y describir el desplazamiento hacia una posición F. Se espera que el estudiante establezca el signo del desplazamiento considerando como posición inicial el número cero en el plano, además establecer la relación entre las palabras (adelante, atrás, abajo, arriba, etc.) con los signos positivo y negativo, lo cual le va a permitir describir los desplazamientos realizados por medio de la conversión de la representación gráfica a la verbal y a la numérica.

sexta pregunta: consiste en que el estudiante interprete las 4 situaciones que se presentan en los gráficos y las pueda relacionar con los valores que ahí se presentan de las temperaturas de la ciudad en diferentes días. Se espera que los estudiantes relacionen la representación gráfica de la temperatura con su representación numérica y puedan establecer la relación que existe entre los números negativos con temperaturas bajo cero y los números positivos con temperaturas sobre cero. también se espera que el estudiante logre realizar la conversión del registro numérico al registro verbal de cada situación presentada.

Séptima pregunta: consiste en que el estudiante pueda construir la representación gráfica de la situación que se describe verbalmente en la pregunta, para ello cuenta con la ayuda de la recta numérica dibujada a un costado del recuadro. Se espera que el estudiante logre percibir la relación que existe entre las palabras subir y bajar con los signos (+, -) y con los números positivos y negativos, asimismo, el significado de los números con signo y su importancia como un medio que nos permite indicar direcciones opuestas utilizando un mínimo de palabras y símbolos o también las posibles funciones que tiene los símbolos (+, -), ya sea para indicar cuando un número es positivo o negativo o también señalar la operación adición o sustracción.

Octava pregunta: esta pregunta nos muestra la concepción que tiene los estudiantes sobre la noción de desplazamiento (subir, bajar) y la relación que existe con los símbolos (+, -) en la representación de este tipo de situaciones. Se espera que los estudiantes comprendan la ubicación y el movimiento que realiza cada persona en la situación, en el caso de Carlos el

estudiante debe reconocer que está subiendo gradas y que su posición inicial está indicada con el número cero, de manera que los desplazamientos realizados estarán indicados por los números positivos +1, +2 y +3, caso contrario ocurre con los desplazamientos de miguel que son hacia abajo y su posición inicial también es el número cero pero la representación de su desplazamientos estarán indicados por los números negativos -1, -2, -3 y -4. Con esta pregunta se busca contemplar cuales son los procedimientos y estrategias que utilizan los estudiantes para realizar la conversión del registro gráfico al registro numérico de la situación propuesta.

Novena pregunta: se presenta una tabla de datos donde esta consignada las temperaturas de cinco días en la ciudad de Bogotá de manera que se representan las temperaturas mínimas y máximas de cada día. Se espera que los estudiantes logren interpretar la tabla de datos y puedan establecer el valor del signo (+, -) que están delante los números con las temperaturas bajo cero y sobre cero, en este sentido tenemos que el estudiante debe realizar una correspondencia entre los valores positivo y negativo con la escala de temperatura, lo cual le va a permitir identificar y organizar las temperaturas de mínima a máxima.

ANEXOS

Anexo A. Prueba diagnostica

Nombre del estudiante:

grado:

Profesor:

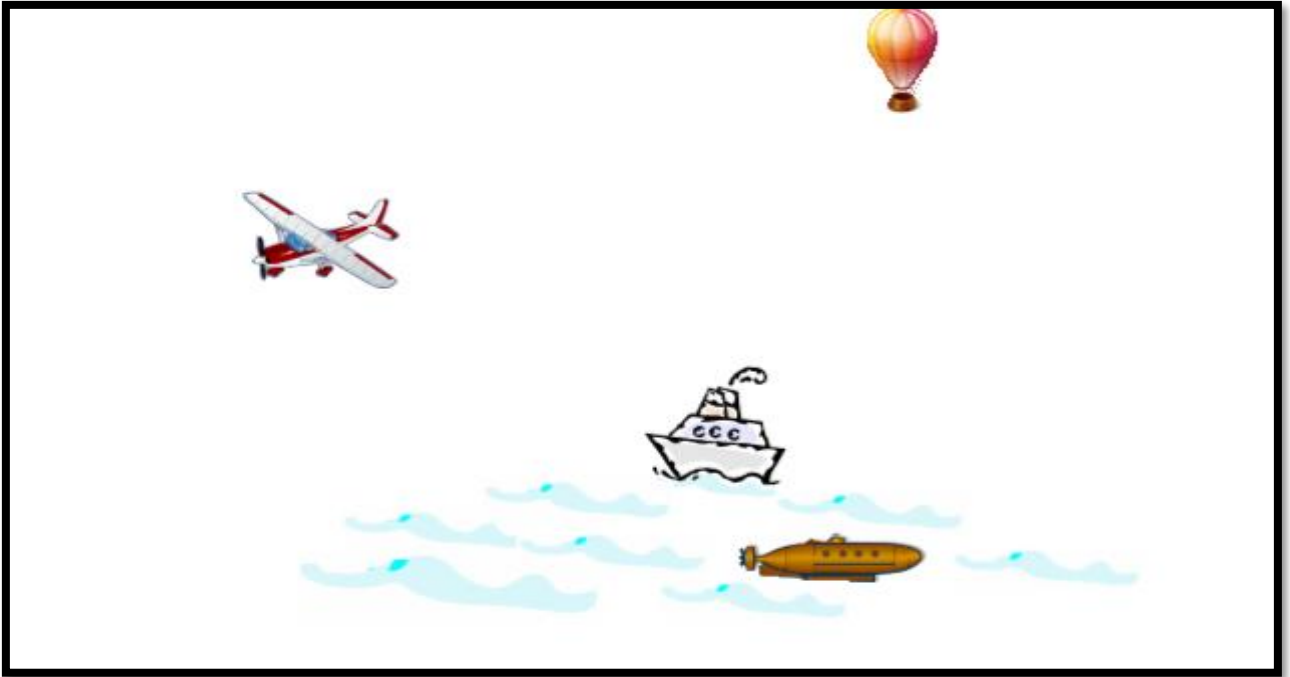
fecha:

Objetivo: conocer las concepciones, habilidades y destrezas que tiene los estudiantes sobre el concepto de número entero, su diversas representaciones y los procesos de tratamiento y conversión en diferentes situaciones contextualizadas.

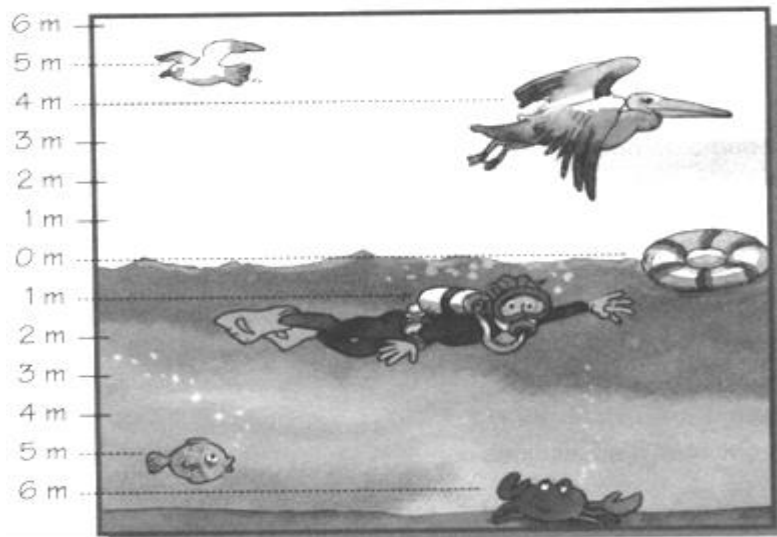
Instrucciones: A continuación, se presentan una serie de preguntas las cuales vas a resolver utilizando tus conocimientos y teniendo en cuenta los gráficos que en ellas aparecen. debes escribir los procedimientos que utilizaste para llegar a la respuesta.

1. Representa con un número cada uno de los siguientes enunciados:
 - a. Juan tiene en el banco 250,000 pesos.
 - b. Miguel debe 150.000 pesos.
 - c. Vivo en el octavo piso.
 - d. Tengo el carro estacionado en el segundo sótano.
 - e. El termómetro marca 12 °C.
 - f. El termómetro marca cuatro grados bajo cero.
 - g. Debo 3.000 pesos a un amigo.
 - h. Pablo nació en el año 32 a.C.
 - i. El submarino está a 5 m bajo el nivel del mar.
 - j. Conseguimos escalar la montaña de 1350 m.

2. Con el numero +50 indicamos la posición de un globo con respecto al mar. ¿Qué números utilizarías para representar la posición de la avioneta, el barco y el submarino?



3. Completa según la imagen teniendo como punto de referencia el nivel del mar. (punto 0 m)



- a. La gaviota está volando a _____ m _____ el nivel del mar.
- b. El niño está buceando a _____ m _____ el nivel del mar.
- c. El pez está nadando a _____ m
- d. El cangrejo se encuentra a _____ m

e. El pelícano vuela a _____ m

4. Dibuja en el recuadro:

a. Un pulpo a tres metros de profundidad.

b. Un barco en la superficie del mar.

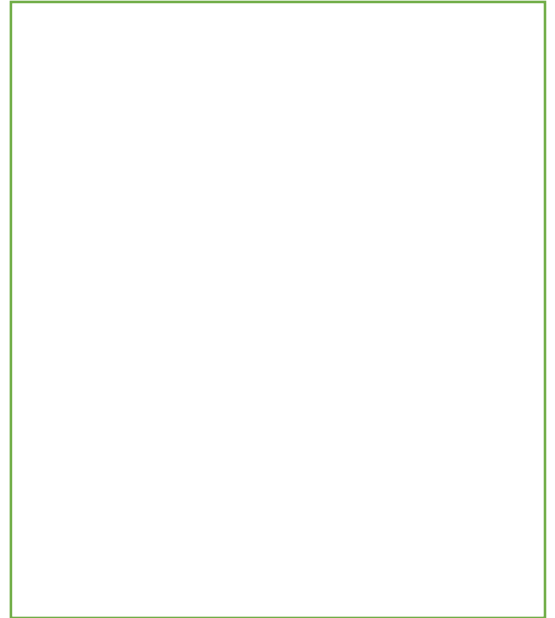
c. El ancla del barco a cinco metros de profundidad.

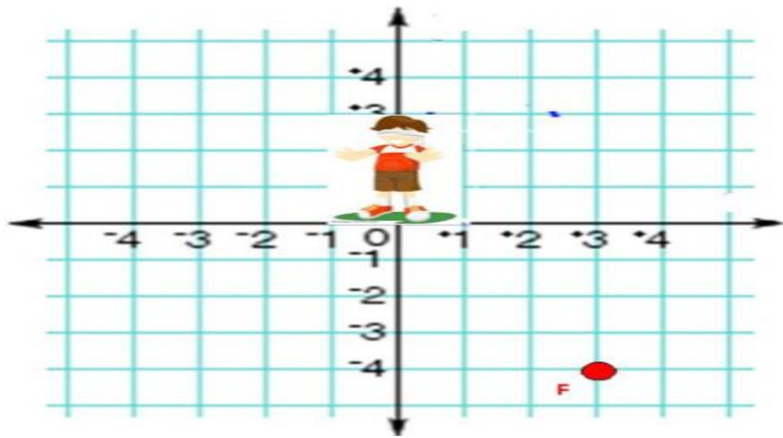
d. Un globo aerostático a 6 metros de altura.

e. Una estrella de mar en una roca a cuatro metros
de profundidad.

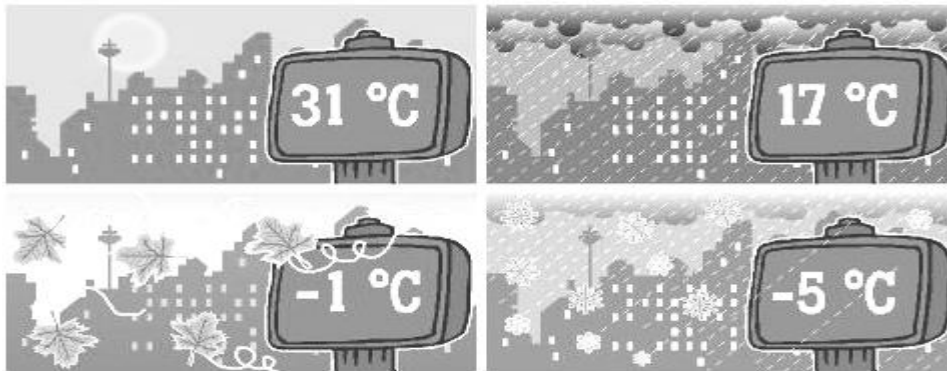
f. Un pez espada a un metro de profundidad.

5. Juan está vendado y con ayuda de sus compañeros debe llegar a la posición F que está marcada en el piso para lograr puntos para su grupo. ¿Si fueras del grupo de Juan como lo orientarías? Guíate de la siguiente ilustración y considera cada unidad un paso y Juan colocado en la posición de inicio cero.





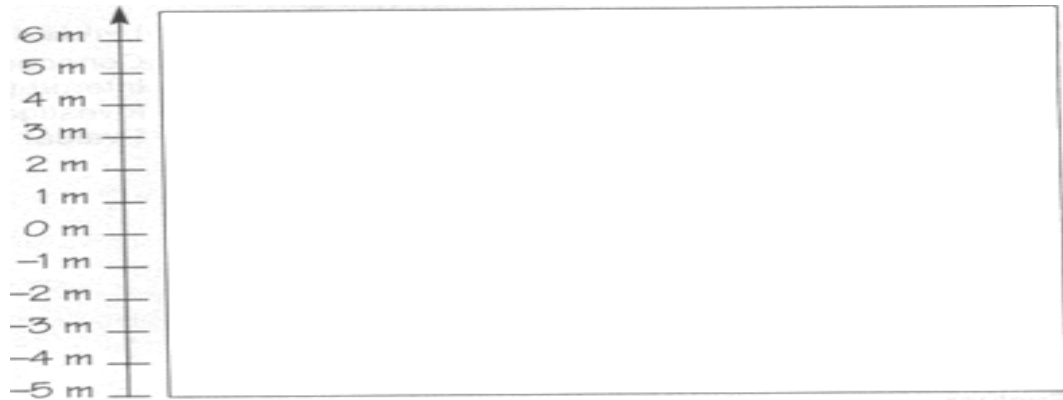
6.



El gráfico muestra la temperatura que hizo en una ciudad en 4 días seguidos con base a esto responde las siguientes preguntas:

- a. Qué día hizo más frío y más calor.
 - b. Que indican las temperaturas que tienen un signo menos (más calor o más frío).
 - c. En palabras como podrías representar las temperaturas de cada día.
7. Un buzo que hace trabajos en una obra submarina se encuentra en la plataforma base a 6 metros sobre el nivel del mar y realiza los desplazamientos siguientes:
- Baja 10 metros a dejar material
 - Baja 1 metro más para hacer una soldadura
 - Sube 3 metros para reparar una tubería
 - Finalmente vuelve a subir a la plataforma
- a. Representa en el gráfico los desplazamientos realizados por el buzo.

b. ¿Cuántos metros subió en el último desplazamiento hasta la plataforma?



8. Expresa con un número los desplazamientos que realizan Carlos y Miguel en cada escalera.



9. Dadas las siguientes temperaturas de cinco días de la semana registradas en la ciudad de Bogotá. Responde:

Temperaturas	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
Máxima °C	8	10	0	-3	15
Mínima °C	0	3	-1	-7	7

- ¿Qué día se produjo la menor de las temperaturas mínimas?
- ¿Cuál fue la mayor de las temperaturas máximas?
- Ordena las temperaturas mínimas de menor a mayor.
- Ordena las temperaturas máximas de mayor a menor.

Anexo B. Actividad 2: (historia y definición del concepto número entero)

Se propone presentar a los estudiantes un video que presente de forma lúdica el concepto de número entero desde los primeros usos en la antigüedad hasta la evolución del concepto en nuestros días. Este video le permitirá al estudiante visualizar el concepto de número entero desde el componente histórico, haciendo énfasis en las necesidades, características y aplicabilidad que dieron origen a este objeto matemático. Es importante resaltar que el uso de videos es una herramienta muy pertinente para enseñar puesto que las nuevas generaciones se han criado en un ambiente dominado por el uso de nuevas tecnologías, que hay que aprovecharlas y adaptarlas para un mejoramiento en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Video 1 :<https://www.youtube.com/watch?v=BroW3U-i-t8>

Video 2: <https://www.youtube.com/watch?v=6wtxNfZEjVU>

Después de observar los videos el docente les planteará a los estudiantes que respondan una serie de preguntas encaminadas a la conceptualización y reconocimiento del objeto matemático. Una vez resueltas las preguntas serán socializadas y explicadas en una clase magistral que estará orientada a presentar, definir y contextualizar el concepto de numero entero.

Un ejemplo de preguntas serán las siguientes:

- a) ¿Qué necesidad condujo a la creación de los números enteros?
- b) ¿son importantes los números enteros para la humanidad?
- c) ¿si existían los números naturales para que se crearon los números enteros?
- d) ¿Qué diferencias encuentras entre los naturales y los enteros? ¿explica tu respuesta?
- e) ¿Existen situaciones en tu entorno que se pueden representar con números enteros?
- f) ¿En tus palabras como podrías definir este nuevo conjunto numérico?
- g) ¿cómo crees que se puede representar un numero entro? ¿explica tu respuesta y expone algunos ejemplos?

Anexo C. Momento de Desarrollo

En este momento se propone actividades que lleven al estudiante a reconocer, relacionarse y trabajar con el concepto de número entero. Se espera que el desarrollo de dichas actividades le permita al estudiante entender, interpretar y aprender el concepto matemático.

Para este momento se proponen dos tipos de tareas:

Tareas experimentación: tiene como objeto que el estudiante adquiera nuevos conocimientos a través del desarrollo de actividades con material concreto (juego de dados). Estos objetos pasan a ser mediadores en la medida en que, a partir de las diferentes manipulaciones e instrucciones seguidas, le brindan al estudiante la comprensión de los conceptos que se pretenden enseñar, siendo el material físico o concreto de gran aceptación entre los estudiantes. estas actividades con material manipulable tienen como objeto acercar a los estudiantes a la representación gráfica de los números enteros y sus operaciones de suma y resta, resaltando el valor de lo positivo y negativo en los movimientos realizados durante la actividad.

Tareas de elaboración y construcción: tiene como propósito la presentación de actividades que le permitan al estudiante fundamentar los nuevos aprendizajes, los aplique en situaciones contextuales, evolucione sus conocimientos, sea capaz de fundamentar nuevos significados de forma constructiva relacionando y aplicando los conceptos adquiridos.

Este momento se plantea desarrollar en dos secciones (2 horas cada una):

Primera sección:

Actividad 1“juego de dados”

Objetivo: Introducir el concepto de número negativo, así como la notación de los números enteros y sus operaciones de adicción y sustracción a partir del desarrollo de actividades de desplazamiento.

Materiales: Dos dados de colores (negro y rojo) que contienen en sus caras el número 0 y los números (0,1,2,3,4,5), tabla de registro, dos rectas numéricas construidas en fomi o cartulina las cuales estarán graduadas hasta el número 20 en ambos sentidos teniendo como punto central el número 0, es importante resaltar que en algunas casillas de los números habrá indicaciones o preguntas que el estudiante debe resolver.

Experimentación

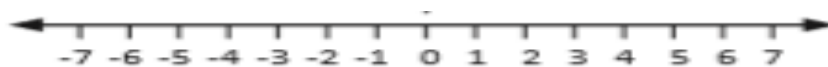
Se pide a los estudiantes que formen en dos grupos de 10 integrantes, se dan las instrucciones respectivas en cuanto al comportamiento para trabajar fuera del aula de clases, luego de esto se explica la metodología del juego y sus reglas. Es importante resaltar que mediante el desarrollo de la actividad el estudiante podrán tener la oportunidad de desplazarse, contar, representar gráficamente desplazamientos, realizar operaciones matemáticas, realizar trabajo individual, realizar trabajo colaborativo, interactuar con el grupo, aprender nociones de los conceptos de las operaciones, entre otras experiencias.

Instrucciones para el “juego de dados”

- a. Se forman cuatro grupos de 4 integrantes los cuales se enfrentarán de a dos grupos en cada recta numérica.
- b. Existen dos dados uno negro y uno rojo, el primero indica cuanto avanza y el segundo cuando debe retroceder, estos valores se Registran en la siguiente tabla los tiros y posición obtenida según los avances o retrocesos:

Número de tiro	Valor primer dado	Valor segundo dado	Avance total
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

- c. Los grupos deben representar los avances realizados en cada tiro en la siguiente recta numérica:



- d. Para poder salir del punto de partida (0) los dos números de los dos dados deben ser enteros pares. Cada grupo tiene dos oportunidades de lanzamiento, sino cede el turno.
- e. Cada grupo debe solucionar las preguntas que aparecen en algunas casillas, si no lo realiza correctamente retrocede 2 casillas.
- f. Gana el grupo que llegue primero a la casilla del número 20.
- g. Finalmente se vuelve al aula de clase y se realizan a partir de las experiencias encontradas en el desarrollo de la actividad, el registro de lo aprendido y la formulación conceptual.

Anexo D. Segunda sección (actividades de conceptualización y aplicación del concepto)

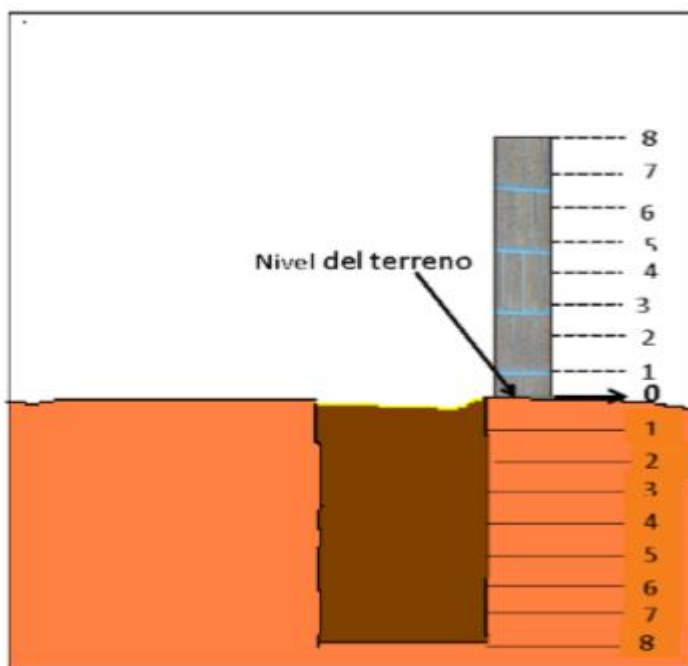
En esta parte se presentan actividades enfocadas a la conceptualización del objeto matemático mediante la utilización de los registros gráficos, lengua natural y simbólico y las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de estos registros. Estas actividades le permiten al estudiante fundar y visualizar el concepto número entero asociándolo a situaciones de su entorno contextual.

Actividad 1 (individual) los números enteros y sus aplicaciones

Objetivo: Interpretar diversas situaciones del entorno y traducirlas de manera simplificada utilizando los números enteros.

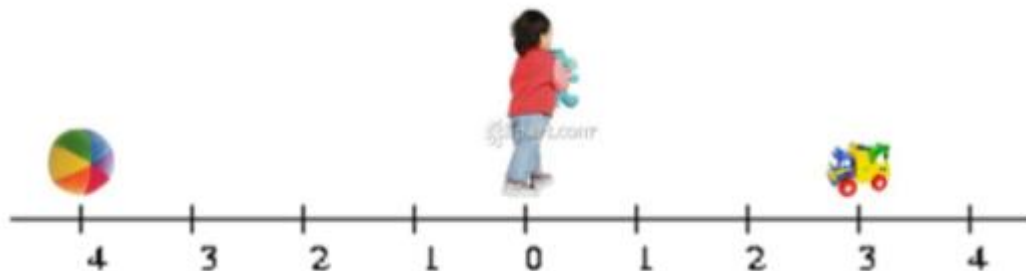
A continuación, se presentan algunos ejemplos de las actividades propuestas:

1. La empresa de acueducto de Andalucía realizó una excavación en el colegio Nuevo Horizonte para detectar una fuga de agua, los obreros realizaron un hueco de 8 metros de profundidad al lado de un muro de 8 metros de altura como se muestra en el gráfico:



- ¿Qué diferencia existe entre estar a 8 metros de altura encima del muro y estar a 8 metros de profundidad en la excavación?
- Con respecto a la figura 4 describe alguna diferencia entre la marca para los 4 metros sobre el nivel del terreno y la marca para los 4 metros bajo el nivel del terreno. Argumenta cómo puedes diferenciar esas dos marcas
- Inventa un código para representar cuándo se está a 5 metros sobre el nivel del terreno o bien a 3 metros bajo el nivel del terreno. Justifica por qué el código sustituye a las frases “sobre el nivel del terreno” o “bajo nivel del terreno.
- ¿Podrías colocar a los números de arriba y abajo alguna seña o signo para diferenciarlos? ¡Inténtalo!

- El siguiente grafico muestra la posición de un niño y la ubicación de dos de sus juguetes:



Utilizando los números enteros y ubicando al niño en la posición inicial cero y si cada unidad en la figura representa un pie responde las siguientes preguntas:

- ¿A qué distancia está el carrito del niño? ¿A qué distancia esta la pelota?
- ¿Hacia dónde tiene que caminar para recoger el carro y hacia donde tiene que caminar para recoger la pelota?
- ¿Se podrían aplicar nuevamente los signos + y - en este caso?
- Cuando una persona u objeto cambia de posición a esto se le llama desplazamiento. ¿Cuál sería el desplazamiento positivo y cual el negativo?

- e) ¿Si el niño determina recoger primero el carro hacia donde se desplazaría y que distancia recorre? ¿Qué signo se le otorgaría a este desplazamiento? ¿Cómo se escribiría?
- f) ¿Si el niño determina recoger primero la pelota hacia donde se desplazaría y que distancia recorre? ¿Qué signo se le otorgaría a este desplazamiento? ¿Cómo se escribiría?

1. Después de haber desarrollado la actividad de los puntos 1 y 2 responde las siguientes preguntas:

Reflexión Metacognitiva:

- a) ¿Entiendes de forma clara cada situación de las preguntas?
- b) ¿Eres capaz de describir la situación en sus palabras?
- c) ¿Crees que el procedimiento que hiciste es el correcto?
- d) ¿En qué crees que te equivocaste?
- e) ¿Qué métodos utilizaste para resolver el problema?
- f) ¿Qué dificultades tuviste para resolver el problema?
- g) ¿Cómo puedo verificar la solución del problema?

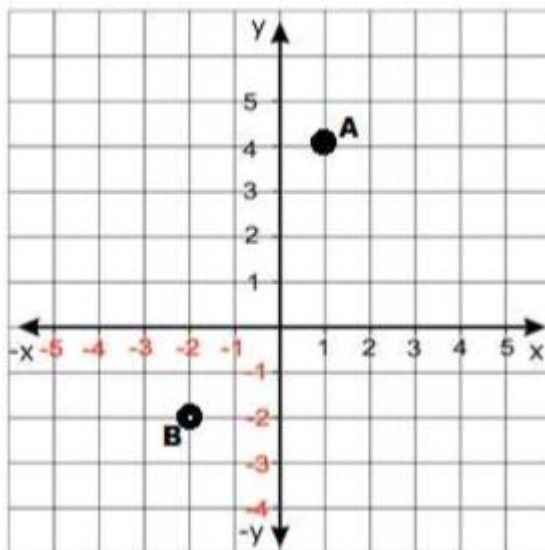
Actividad 2 (grupal)

Objetivo: Afianzar los conceptos adquiridos en la actividad de experimentación con el material concreto (juego de dados).

Se pide que los estudiantes formen equipos de 3 estudiantes para realizar la siguiente actividad, justificando en cada punto el respectivo procedimiento realizado.

- 1. Encuentra los valores de los siguientes desplazamientos y represéntalos mediante la recta numérica. (punto 0 inicio desplazamientos).
 - a. 3 avances positivos y 2 avances positivos.
 - b. 5 avances positivos y 7 avances positivos.
 - c. 8 retrocesos negativos y 6 retrocesos negativos.
 - d. 7 retrocesos negativos y 8 avances positivo.

- e. 9 retrocesos negativos y 8 avances positivos
2. Utilice la representación en la recta numérica para graficar los siguientes casos; regístralos numéricamente con su resultado:
- $-3+7$
 - $(2- 8) +6$
 - $8+5- 6$
 - $(12-14) +6$
3. Un minero está a 12 metros bajo tierra. El minero desciende 15 metros más y luego debe subir 20 metros a dejar materiales a un depósito ubicado en esta posición. ¿A Cuántos metros bajo tierra se encuentra el minero?
- Realiza un gráfico donde se pueda visualizar los desplazamientos del minero.
 - ¿Cuál es el punto de referencia a partir del cual se hacen los desplazamientos? ¿Por qué?
 - ¿Qué desplazamientos debe hacer el minero desde su posición inicial, si el depósito está en la superficie de la tierra? ¿a 2 metros bajo tierra? ¿a 5 metros sobre la tierra?
4. Observa el plano. Los puntos A y B representan dos almacenes de video juegos.



- Determina las coordenadas de los almacenes de video juegos.

- b. Andrés vive en el segundo cuadrante de este plano cartesiano, y la panadería más próxima a su casa es A. Da las coordenadas de tres puntos en los que puede estar la casa de Andrés.

Anexo E. Momento de Cierre

En este momento se proponen actividades que conlleven a la estructuración y a la consolidación del aprendizaje, además se evalúa el nivel de apropiación de los conceptos matemáticos y su aplicación en situaciones contextuales. Por lo anterior, se propone el uso de actividades de mayor complejidad, que llevarán al estudiante a un nivel de reflexión y de apropiamiento más profundo sobre el concepto número entero, destacando su evolución conceptual, su importancia en el desarrollo de la humanidad y sus principales usos en situaciones reales.

Las actividades que se proponen para este momento están divididas en tres clases, las cuales tienen un objetivo específico en el proceso de aprendizaje:

Actividades de aplicación y descontextualización: este tipo de actividades le permite al docente evaluar la capacidad adquirida por el estudiante de aplicar la teoría estudiada a situaciones de la vida real y contextual.

Actividades de indagación y valoración de la unidad didáctica: se propone la aplicación de una entrevista semiestructurada la cual se realizará antes de aplicar la actividad de síntesis (actividad final de la unidad didáctica) y con ella se pretende indagar sobre la efectividad de las actividades propuestas con relación al concepto de número entero.

Actividades de síntesis: este tipo de actividades están orientadas a motivar la obtención de conclusiones a partir de lo aprendido en el desarrollo de la unidad didáctica. Estas servirán también para valorar el trabajo realizado por el estudiante y así evidenciar si los objetivos propuestos se pudieron cumplir.

Este momento se desarrollará en 2 secciones (2 horas cada una) orientadas de la siguiente forma:

Anexo F. Sección 1 Actividad 1 “Domino matemático”

Objetivo: Reconocer el concepto de número entero aplicado en diversas situaciones que involucran las operaciones de adición y sustracción.

Materiales: se elaboran cuatro juegos de domino de 20 fichas cada uno, donde en cada ficha está escrita una operación matemática de forma que su respuesta coincida con la de otro de los rectángulos hasta completar las 20 piezas del dominó matemático.

$7+4$	-2	$-3-4$	-6	$-8+1$	-13	$5+3$	-2	$15-+3$	-7		
$6+8$	-19	$-6+0$	3	$-6-4$	14	$5+(-3)$	11	$-6+(-9)$	18	$-7-6$	8
$-9+(-7)$	8	$8+6$	-4	$-4-1$	16	$-9-8$	2	$-10+2$	14	$-15+(-4)$	9
$4+3$	-16	$-10-3$	7	$5+(-9)$	-17	$4-9$	-15	$10+(-1)$	-7	$-6+12$	-10
$-5-13$	-9	$5-14$	-5	$10+0$	-18	$-6+4$	-3	$1+3$	10	$9+7$	-6

Experimentación: Se pide a los estudiantes que formen grupos de 4 integrantes, luego de esto se explica la metodología del juego y sus reglas. Es importante resaltar que mediante el desarrollo de la actividad los estudiantes podrán tener la oportunidad de: reconocer y aplicar las operaciones de adición y sustracción de enteros, representar gráficamente estas operaciones, realizar trabajo individual, trabajo colaborativo, interactuar con el grupo, aprender nociones de los conceptos de las operaciones, entre otras experiencias.

Instrucciones para el juego “Domino matemático”

- Se forman grupos de 4 estudiantes y a cada grupo se le entrega un domino matemático.

- B. mediante el empleo del dominó cada grupo jugara entre sus miembros uniendo la operación indicada con su resultado.
- C. Cada estudiante debe escribir la operación indicada en cada ficha jugada en cada turno, comprobando si los resultados coinciden con la otra ficha, para esto realizaran las operaciones utilizando la recta numérica.
- D. Pierde el turno el estudiante que no realice correctamente la colocación de las fichas.
- E. Gana el primer estudiante que termine las fichas.
- F. Terminado el juego el docente realizara la revisión de los dominós de cada grupo realizando las apreciaciones y correcciones pertinentes de forma grupal.

Anexo G. Segunda sección Actividad 2 “Entrevista semiestructurada”

Objetivo: Indagar sobre la efectividad de las actividades desarrolladas en la unidad didáctica con relación al concepto de número entero desde sus diferentes representaciones, vinculando los procesos cognitivos de tratamiento y conversión.

La Actividad 2, corresponde a la aplicación de una entrevista semiestructurada al total de estudiantes (16) que participaron en la aplicación de la unidad didáctica, a quienes se les indagara sobre las actividades desarrolladas en la unidad didáctica las cuales estaban enfocadas hacia la presentación del concepto número entero desde sus diferentes registros de representación y los procesos de tratamiento y conversión. Se espera que mediante la entrevista los estudiantes expongan sus concepciones desarrolladas sobre los números enteros, sus fortalezas y debilidades, dudas, cuestionamientos y opiniones sobre las actividades presentadas.

Metodología de la entrevista

Se pedirá a los estudiantes que ubiquen sus asientos en forma de u, posterior a esto el docente iniciara la entrevista en forma de charla con los estudiantes donde se empezara a abordar cada una de las preguntas establecidas por el docente para este momento. Es importante reconocer que cada estudiante debe expresar su punto de vista sobre cada pregunta, para luego de forma grupal hacer las apreciaciones y aclaraciones pertinentes.

Las preguntas para la entrevista serán las siguientes:

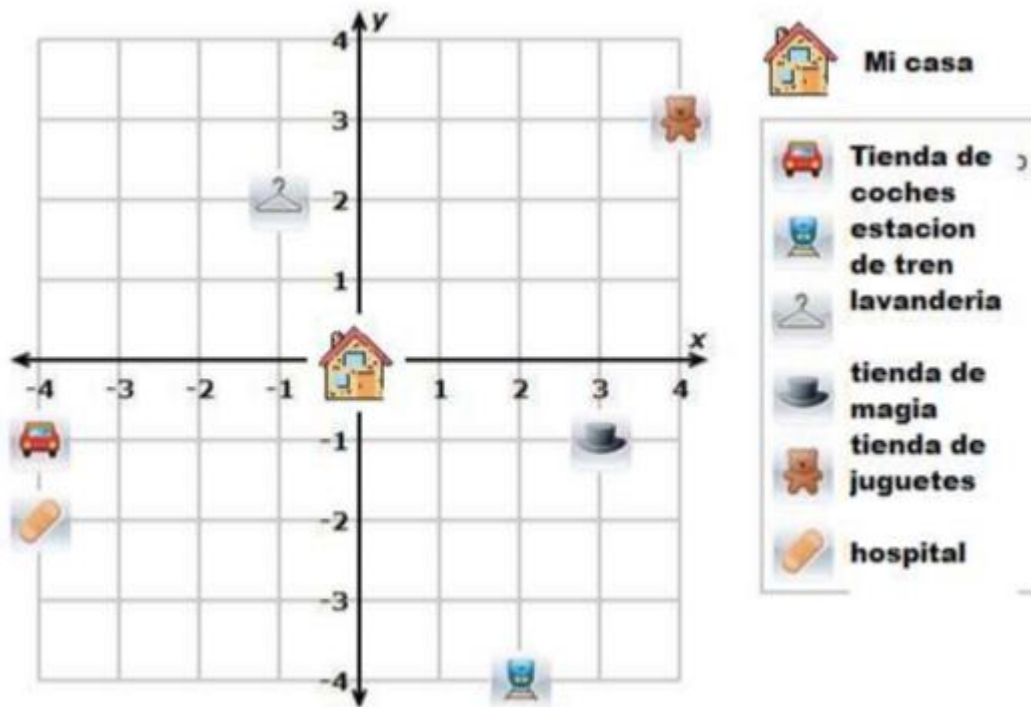
1. ¿Qué problemas y dificultades tuvo al desarrollar las actividades propuestas? ¿cómo lograste afrontarlas y superarlas?
2. ¿lograste reconocer cada una de las representaciones de los números enteros? ¿tuviste algún problema al pasar de una representación a otra?
3. ¿Las actividades que realizaste “juego de dados” y “domino matemático” fueron útiles para tu aprendizaje? ¿fue motivante para ti desarrollarlas?

4. ¿Qué conceptos nuevos adquiriste al desarrollar cada una de las actividades propuestas?
5. ¿Consideras que las actividades desarrolladas en la UD han sido de utilidad para tu proceso formativo?
6. ¿El uso del material manipulable motivó y despertó tu interés por el aprendizaje de las matemáticas?
7. ¿Qué tan motivante y necesario fue trabajar estas actividades fuera del aula de clases?

Anexo H. Actividad 3 (valoración conceptos y procedimientos adquiridos) (Individual)

Objetivo: valorar la aplicación de los conocimientos adquiridos en el desarrollo de la unidad didáctica en situaciones reales y contextuales, reconociendo las diferentes representaciones de los números enteros y las actividades cognitivas de tratamiento y conversión entre registros.

1. En el siguiente plano aparecen representados mi casa y los diferentes establecimientos de mi barrio.



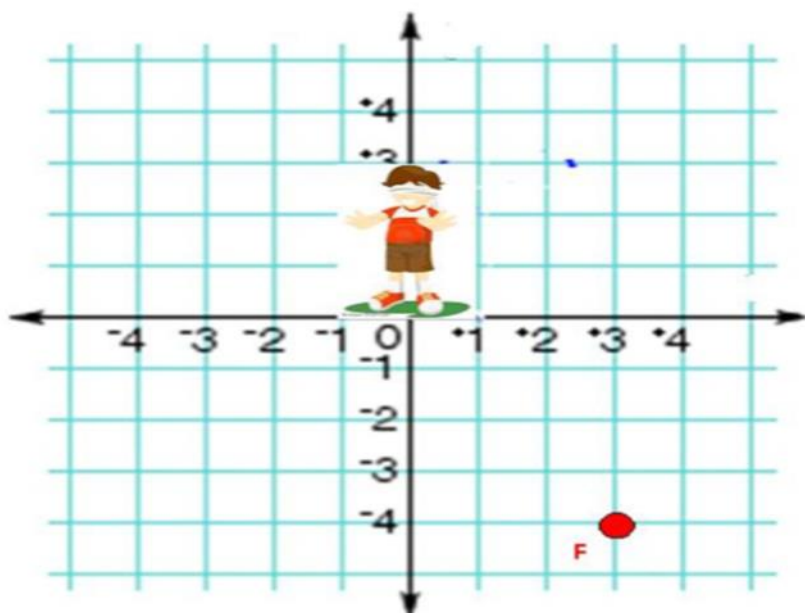
- a) Establece las coordenadas de cada edificio respecto de “mi casa”.
- b) Para indicar las direcciones utilizamos los términos Norte, Sur, Este y Oeste. La rosa de los vientos muestra esas cuatro direcciones. Vuelve a establecer la posición de cada edificio del mapa utilizando esas palabras, sabiendo que cada cuadradito corresponde a 100 metros en la realidad. Ejemplo: “100 metros al oeste y 300 metros al norte.”



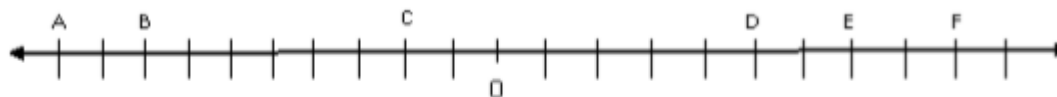
2. Dadas las siguientes temperaturas de cinco días de la semana registradas en la ciudad de Bogotá. Responde:

Temperaturas	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
Máxima °C	8	10	0	-3	15
Mínima °C	0	3	-1	-7	7

- ¿Qué día se produjo la menor de las temperaturas mínimas?
 - ¿Cuál fue la mayor de las temperaturas máximas?
 - Ordena las temperaturas mínimas de menor a mayor.
 - Ordena las temperaturas máximas de mayor a menor.
3. Juan esta vendado y con ayuda de sus compañeros debe llegar a la posición F que está marcada en el piso para lograr puntos para su grupo. ¿Si fueras del grupo de Juan como lo orientarías? Guíate de la siguiente ilustración y considera cada unidad un paso y Juan colocado en la posición de inicio cero.



4. Orientándose por la siguiente figura. Determine los números enteros que correspondan a las posiciones A, B, C, D y F.



A:	B:	C:	D:	E:	F:
----	----	----	----	----	----

Luego determine el número que corresponda a la posición final dadas las siguientes situaciones:

6 unidades a la izquierda de F:
4 unidades a la derecha de E:
16 unidades a la izquierda de D:
22 unidades a la derecha de A:
7 unidades a la izquierda de B:

Valoración final: se utilizará una evaluación formativa durante cada sección de clase, y estará enmarcada por la participación y producción de los estudiantes en el desarrollo de las actividades propuestas en la unidad didáctica. Además, se tendrá en cuenta la actividad 1 y 3 del momento de cierre como instrumentos que le permiten evidenciar al docente la evolución

conceptual y el nivel de apropiación de conceptos y procedimientos por parte de los estudiantes y con ello comprobar si los objetivos propuestos se cumplieron.

La actividad que se propone para este momento le permite al docente evaluar la capacidad adquirida por el estudiante de aplicar la teoría estudiada a situaciones de la vida real y contextual. Además, se pretende indagar sobre las diferentes actitudes, destrezas y motivaciones que presentan los estudiantes a la hora de realizar la actividad propuesta. Se utilizará la rúbrica como un instrumento que nos permite registrar y analizar la información obtenida mediante la ejecución de la actividad propuesta por el estudiante, en esta no solo se analizará el resultado obtenido en la aplicación de la actividad, sino también el proceso seguido por el estudiante, sus motivaciones, intereses, aptitudes y desempeño. Además, la información recolectada mediante este instrumento permitirá tener una visión integral sobre el estudiante, reflexionar sobre su proceso para tomar decisiones que regulen los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Objetivo evaluación: Indagar y reflexionar sobre los procesos realizados por los estudiantes en el desarrollo de la actividad propuesta, reconociendo sus fortalezas, debilidades, la efectividad de las estrategias empleadas, el nivel de satisfacción y motivación por el tema, evolución conceptual y metacognitiva de los estudiantes después de finalizar la unidad didáctica.

Tiempo para la actividad de evaluación: Esta actividad se propone desarrollar durante la ejecución de la actividad 1 y 3 del momento de cierre.

Anexo I. Instrumento para recolectar y analizar la información obtenida en la actividad de evaluación

Indicadores	Nivel avanzado	Nivel medio	Nivel básico
Identifica las diferentes representaciones de los números enteros en la actividad planteada.	Identifica de forma clara las diferentes representaciones de los números enteros en la actividad.	Con alguna dificultad reconoce las diferentes representaciones de los números enteros en la actividad propuesta.	Reconoce con mucha dificultad algunas representaciones de los números enteros en la actividad propuesta.
Reconoce posibles estrategias a emplear para dar solución a la actividad.	Reconoce y Plantea correctamente una estrategia que le permita dar solución a la actividad.	Con alguna dificultad reconoce y emplea una estrategia que le permite dar solución a la actividad.	No logra reconocer de forma correcta una estrategia que le permita dar solución a la actividad.
Establece relaciones a partir de la suma y resta de cantidades.	Establece criterios que le permiten indicar las diferencias entre las operaciones adición y sustracción.	Con dificultad establece criterios que le permiten diferenciar la adición de la sustracción	Presenta mucha dificultad para establecer algunos criterios que le permitan diferenciar la adición de la sustracción.
Reconoce los criterios que le permite realizar la conversión del	Reconoce de forma clara las unidades significantes del registro numérico que le permiten	Con alguna dificultad logra reconocer las unidades significantes del	No reconoce las unidades significantes en el registro numérico lo que conlleva a que

registro numérico al gráfico.	realizar la conversión al registro gráfico.	registro numérico, lo que genera que realice una conversión incoherente con la representación numérica.	no realice la conversión al registro gráfico.
Reflexiona sobre su aprendizaje y evalúa su satisfacción frente a su desempeño en la actividad.	Reflexiona de forma clara y profunda sobre los resultados y procedimientos efectuados durante el desarrollo de la actividad.	Presenta algunas indagaciones de forma superficial sobre los resultados y procedimientos efectuados durante la actividad.	No presenta reflexión alguna sobre sus resultados y procedimientos empleados en el desarrollo de la actividad.
Indaga y plantea preguntas al docente y a sus compañeros sobre las formas de afrontar y solucionar la actividad.	Indaga y plantea preguntas interesantes a sus compañeros, que les hacen parar a pensar y cuestionar sobre la mejor forma de solucionar la actividad.	Plantea algunas preguntas sencillas pero que no confronta a sus compañeros sobre la mejor forma de afrontar y dar solución a la actividad.	No plantea ninguna pregunta ni indaga sobre las formas de solucionar la actividad.