



LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS  
DE VARIACIÓN CUADRÁTICA

CATALINA MARIA VARÓN MACHADO

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES

FACULTAD DE ESTUDIOS SOCIALES Y EMPRESARIALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

MANIZALES

2022

LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS  
DE VARIACIÓN CUADRÁTICA

Autora

CATALINA MARÍA VARÓN MACHADO

Proyecto de grado para optar al título de Magister en Enseñanza de las Ciencias

Tutora

SANDRA MARÍA QUINTERO CORREA

MAGÍSTER EN EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES.

FACULTAD DE ESTUDIOS SOCIALES Y EMPRESARIALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

MANIZALES

2022

## AGRADECIMIENTOS

*Agradecer a Dios por darme salud y vida para culminar satisfactoriamente este proceso.*

*A mis maestros, especialmente a mi tutora Sandra María Quintero, por su acompañamiento, entrega, compromiso y apoyo en este proceso formativo. Mil gracias por compartirme todos sus conocimientos.*

*A las directivas y estudiantes de la Institución Educativa Concejo de Medellín que fueron partícipes de este proceso, por brindarme la oportunidad de crecer profesionalmente.*

*A mi familia por su apoyo, en especial a mi madre Odila Machado y a mi hijo Samuel, por su amor incondicional y por motivarme cada día a seguir adelante.*

## RESUMEN

La presente investigación surge del interés de indagar sobre la forma en que el proceso de modelación matemática facilita la resolución de situaciones de variación cuadrática en estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Concejo de Medellín, ubicada en Medellín, Antioquia. Para dar respuesta a la pregunta de investigación se realizó un estudio cualitativo descriptivo a la luz de dos categorías de análisis: la modelación matemática y la solución de situaciones de variación cuadrática; para ello se diseñó e implementó una unidad didáctica como instrumento de investigación en tres momentos (ubicación, desubicación y reenfoque).

En el momento de ubicación se pudo constatar que los estudiantes presentan dificultades al enfrentarse a una situación de variación cuadrática y el uso de diferentes registros de representación semiótica fue reducido. En el momento de desubicación se les explicó a los estudiantes la importancia del proceso de modelación matemática transversalizado por la heurística de Miguel de Guzmán a través de diversas situaciones problema que fueron conduciendo a los estudiantes a mejorar sus procesos de razonamiento al momento de dar solución. Finalmente, en el momento de reenfoque se evidencia la forma en que la modelación matemática favorece la solución de situaciones de variación cuadrática.

**Palabras clave:** Modelación matemática, solución de problemas, variación cuadrática, registros de representación semiótica.

## **ABSTRACT**

This research arises from the interest of investigating the way in which the mathematical modeling process facilitates the resolution of quadratic variation situations in ninth grade students of the Medellin Council Educational Institution, located in Medellin, Antioquia. To answer the research question, a descriptive qualitative study was carried out in light of two categories of analysis: mathematical modeling and the solution of situations of quadratic variation; For this, a didactic unit was designed and implemented as a research instrument in three moments (location, dislocation and refocus). At the time of placement it was found that students have difficulties when facing a situation of quadratic variation and the use of different records of semiotic representation was reduced.

At the time of dislocation, the importance of the mathematical modeling process transversalized by Miguel de Guzmán's heuristics was explained to the students through various problem situations that led the students to improve their reasoning processes when giving solutions. Finally, at the moment of refocusing, the way in which mathematical modeling favors the solution of situations of quadratic variation is evident.

**Key words:** Mathematical modeling, problem solving, quadratic variation, semiotic representation registers.

## TABLA DE CONTENIDO

1	INTRODUCCIÓN .....	9
2	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	11
3	JUSTIFICACIÓN.....	22
4	OBJETIVOS.....	24
4.1	OBJETIVO GENERAL.....	24
4.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	24
5	REFERENTE TEÓRICO.....	25
5.1	LA MODELACIÓN MATEMÁTICA .....	25
5.2	LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS .....	28
5.2.1	Familiarización Con El Problema .....	32
5.2.2	Búsqueda De Estrategias .....	32
5.2.3	Llevar Adelante La Estrategia .....	32
5.2.4	Revisar El Proceso Y Sacar Consecuencias .....	33
5.3	RELACIÓN ENTRE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.....	33
5.4	EL APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA .....	35
6	METODOLOGÍA .....	39
6.1	ENFOQUE Y ALCANCE.....	39
6.2	POBLACIÓN Y CONTEXTO .....	40
6.3	UNIDAD DE TRABAJO .....	40
6.4	CONSIDERACIONES ÉTICAS .....	41
6.5	UNIDAD DE ANÁLISIS .....	41
6.6	TÉCNICAS Y FUENTES DE RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN .....	43
6.6.1	Prueba Diagnóstica.....	44
6.6.2	Entrevista Semi Estructurada.....	44
6.6.3	Validación De Los Instrumentos .....	44
6.7	UNIDAD DIDÁCTICA.....	44
6.7.1	Momento De Ubicación.....	45
6.7.2	Momento De Desubicación .....	46

6.7.3	Momento De Reenfoque.....	46
6.8	DISEÑO METODOLÓGICO.....	47
6.9	PLAN DE ANÁLISIS .....	47
7	ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS .....	49
7.1	MOMENTO DE UBICACIÓN .....	49
7.2	MOMENTO DE DESUBICACIÓN.....	56
7.3	MOMENTO DE REENFOQUE.....	63
8	CONCLUSIONES .....	74
9	RECOMENDACIONES .....	76
10	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	77

## ANEXOS

Anexo 1 Consentimiento informado para la intervención en la Institución .....	79
Anexo 2. Unidad didáctica .....	80
Anexo 3. Evidencia momento de ubicación .....	101
Anexo 4. Evidencia momento de desubicación.....	103
Anexo 5. Evidencia momento de reenfoque.....	104

## 1 INTRODUCCIÓN

La presente investigación está orientada a la descripción de la forma en que los estudiantes de grado noveno resuelven situaciones de variación cuadrática, evidenciando como el proceso de modelación matemática facilita la resolución de problemas de este tipo. Visto así, el proyecto centró su interés en dos categorías de análisis que fueron la modelación matemática y la resolución de situaciones de variación cuadrática.

En coherencia con ello, se consultó literatura de autores cuyos trabajos estuvieran enfocados en estas categorías, resaltando los trabajos de Villa (2007), Villa y Ruiz (2009), Posada y Villa (2016), Villa, Sánchez y Castrillón (2017), Amaya (2019) y Duval (2004) en la categoría de modelación matemática; y Miguel de Guzmán (2007) y Villa y Mesa (2007) en la categoría de solución de problemas de variación cuadrática. Dichos autores fueron tomados como referente en el marco teórico y en consecuencia para la triangulación teórica con el fin de respaldar las interpretaciones realizadas y brindar rigurosidad a las categorías estudiadas.

Por la metodología implementada, se realizó un estudio cualitativo – descriptivo, donde a través de las situaciones propuestas en los diferentes momentos de la Unidad Didáctica (UD) y los momentos de socialización generados a través de ellas, el análisis se realizó basado en las actividades tal como fueron abordadas por los estudiantes realizando el registro, la descripción, análisis e interpretación de los procesos realizados por los estudiantes.

Para el análisis se hizo una recolección de la información a través de la Unidad didáctica que se conformó en tres momentos (ubicación, desubicación y reenfoque) y de una entrevista semiestructurada al finalizar ésta, posteriormente se hizo una transcripción de la información, se realizaron unas matrices por momentos a la luz de las categorías para realizar un análisis del contenido (respuestas escritas), y del discurso (espacios de socialización y entrevista semiestructurada); para finalmente realizar una triangulación de datos y teórica y dar así respuesta a la pregunta de investigación.

De esta forma, con base en los resultados obtenidos, El proceso de modelación propicia al estudiante alternativas para llegar a la solución de un problema a través de la identificación de las magnitudes involucradas y del uso de diferentes registros de

representación semiótica; por medio de las transformaciones y articulaciones entre los diferentes registros de representación, los estudiantes logran comprender el concepto matemático, dar solución a una situación problema, verificar los resultados y aplicarlo a otras áreas del conocimiento; y Articulando los momentos del ciclo de modelación matemática propuesto por Posada y Villa (2006) con la Heurística de Guzmán para resolver problemas (familiarización, búsqueda de estrategias, llevar adelante la estrategia y revisión del proceso)., la modelación matemática facilita la resolución de problemas de variación cuadrática.

## 2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Durante la interacción directa con estudiantes de los distintos grados de educación básica secundaria de la Institución Educativa Concejo de Medellín, han surgido momentos en los que se generan algunos interrogantes en cuanto a la bidireccionalidad que debe existir entre los planteamientos del MEN, el contexto y los intereses de los estudiantes de esta población en particular.

Las matemáticas en la Institución Educativa Concejo de Medellín se desarrollan teniendo en cuenta esta bidireccionalidad; no obstante, el proceso de aprendizaje en los estudiantes ha estado más enfocado en conceptos que en competencias y es allí donde es necesario hacer una reflexión y replantear las estrategias utilizadas, de tal forma que le posibilite a los estudiantes en un primer momento ser más reflexivos e interpretativos, para que posteriormente potencien habilidades como la argumentación, la comunicación y la resolución de problemas.

Desde el Ministerio de Educación Nacional se ha propuesto en las últimas décadas, la resolución de problemas y la modelación, como procesos que deben transversalizar la educación matemática, y desde la Institución Educativa Concejo de Medellín se ha venido realizando un trabajo continuo en torno a ello, especialmente en la resolución de problemas; sin embargo, se observan varias dificultades al momento de enfrentar los estudiantes a este tipo de situaciones.

En primer lugar, parece existir una brecha amplia entre los problemas planteados en enunciados verbales y los contenidos matemáticos; se evidencia un problema de comprensión en los estudiantes, pues su primera reacción es expresar que no entienden, pocas veces leen y analizan bien el problema y por ende no logran inferir qué se les está preguntando.

En segundo lugar, algunos estudiantes inmediatamente tratan de relacionar la situación con temas vistos anteriormente sin hacer antes una interpretación de la situación; se observa también que muy pocas veces utilizan sistemas de representación diferentes para aproximarse a la solución del problema, simplemente tratan de acomodar una fórmula que para ellos carece de sentido y que de paso minimiza su significado, pero el asunto más

complejo que se evidencia en los estudiantes, específicamente de grado noveno, es que se limitan a realizar procesos mecánicos sin dar lugar a procesos de reflexión.

Desde la experiencia de aula, el plan de área de matemáticas y los módulos de aprendizaje diseñados por los maestros, se evidencia que en la Institución el proceso de modelación matemática se trabaja poco, porque generalmente a los estudiantes se les presenta el modelo ya construido como una simple fórmula que será resuelta a través de los algoritmos vistos en clase, se brindan pocos espacios para su construcción debido al afán de cumplir con los contenidos que se plantean desde el plan de área y las directrices del MEN.

Lo anterior, es uno de los factores que influye en la poca comprensión al momento de enfrentarse a la resolución de un problema, la forma en que reaccionan a ello y el hecho de que busquen aplicar y no contextualizar, inferir, comprender, representar y argumentar.

Adicionalmente, es necesario hablar también del objeto matemático que será transversalizado con los dos procesos mencionados anteriormente y que esté acorde con el nivel en el que se desarrolla la investigación. En este caso será la función cuadrática, porque está planteada desde el currículo de matemáticas para el grado noveno y además a través de su desarrollo histórico se puede observar que ha estado vinculada a la modelación de fenómenos de variación y cambio.

No obstante, la función cuadrática ha generado algunos interrogantes respecto a la forma en que los estudiantes la aprenden, lo que conduce a entablar una reflexión y diálogo en torno a la forma en que se lleva al aula y del por qué se hace difícil su comprensión, se habla de difícil porque esta es la forma en que los alumnos se refieren a ella

Desde su definición, una función cuadrática es aquella que puede escribirse de la forma:  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales cualquiera y  $a$  es distinto de cero. Si representamos "todos" los puntos  $(x, f(x))$  de una función cuadrática, obtenemos siempre una curva llamada parábola.

Desde la interpretación que se hace en los textos escolares donde es planteada como “una expresión algebraica que tiene determinadas características para ser graficada”; se brinda una perspectiva que carece de sentido y significado para los estudiantes, lo cual puede ser un primer factor para incrementar la dificultad con que ellos la perciben.

Por su parte, algunos textos plantean situaciones problema expresados en enunciados verbales, que no cobran sentido si el docente desde el aula no se sirve de ellos para lograr que los estudiantes a través de sus inferencias logren comprender la variación entre magnitudes para realizar un proceso de modelación y representación al lenguaje algebraico.

Los elementos descritos hasta el momento, ponen en evidencia la forma en que se visualizan las matemáticas en la institución, donde al momento de presentarle a los estudiantes de grado noveno una situación problema, éstos esperan a que el maestro les diga paso a paso qué hacer, presentan en muchas ocasiones dificultad para inferir los datos de un enunciado, para sacar conjeturas y buscar la forma de solucionarlo.

Otra dificultad radica en que los estudiantes no saben cómo avanzar para construir modelos matemáticos que los lleven a resolver una situación. En este orden de ideas, es indispensable pensar en una estrategia que los lleve a superar estas dificultades de una forma dinámica y es allí donde cobra importancia la modelación matemática y la resolución de problemas como procesos de pensamiento, para que, a través de la articulación entre estos dos procesos, los estudiantes logren resolver problemas matemáticos.

En coherencia con lo planteado hasta el momento, se indagaron seis fuentes bibliográficas que dieran cuenta de investigaciones sobre las problemáticas descritas, enfatizando en tres categorías que influyen de forma significativa en el proceso de aprendizaje de las matemáticas con estudiantes del grado noveno, pero que además brindan una luz de los resultados que se han obtenido a través de la implementación de estas prácticas.

La primera es la modelación matemática como proceso de construcción, simbolización y validación; la segunda es la resolución de problemas como estrategia para potenciar las habilidades que conducen a los estudiantes al desarrollo del pensamiento matemático; y finalmente el aprendizaje de la función cuadrática con el fin de generar una conexión entre este objeto matemático y los dos procesos anteriormente descritos. Entre los referentes encontrados cabe destacar las siguientes investigaciones:

En torno a la primera categoría, cabe resaltar la investigación de González y Flórez, (2018), quienes exponen la relación de los procesos de aprendizaje de situaciones de

variación a través de la modelación matemática. El estudio fue realizado con estudiantes de la educación básica secundaria y media en la ciudad de Bogotá; tuvo como objetivo indagar en procesos de modelación en situaciones de covariación para identificar cómo se desarrollan estos procesos y qué dificultades se presentan en las diferentes etapas de un proceso de modelación.

El enfoque del proyecto fue la investigación cualitativa, orientado en profundizar casos específicos a través de un estudio de casos. Entre los resultados obtenidos plantean lo sucedido en las diferentes etapas del proceso de modelación matemática, en este caso particular haciendo alusión a situaciones de variación.

En un primer momento sostienen que los estudiantes lograron encontrar las magnitudes intervinientes en el estudio, pero al momento de identificar la correlación entre ellas no todos logran establecer cuál es la variable dependiente y cuál es la independiente; en el momento de recolección de datos como parte del proceso de modelación, los investigadores afirman que no se presentó mayor dificultad en los estudiantes, pues a través de la representación tabular de las magnitudes pudieron cuantificar el fenómeno estudiado, evidenciar las correlaciones existentes y lograr cualificar y cuantificar las magnitudes estudiadas.

Por su parte en el momento de la recreación del modelo los estudiantes lograron identificar la forma en la que covarían las magnitudes estudiadas, más que todo a través de la representación cartesiana; en el momento de uso del modelo, su validación y comprobación fue evidente que los estudiantes empleaban las representaciones que se les facilitaron durante el análisis inicial, y a través de los tipos de imágenes usadas y construidas en el proceso, lograron dar una representación algebraica y así validar el modelo.

El anterior estudio es relevante para el presente proyecto, porque articula el proceso de modelación matemática con situaciones de variación, y en esta medida da claridad de los elementos y procesos a tener en cuenta al momento del diseño de las situaciones y de los resultados que se esperan obtener a partir de ellos.

Así pues, el fin de la investigación fue posibilitar que los estudiantes identificaran las magnitudes que intervienen en la situación y la correlación entre ellas, dar protagonismo

a la representación tabular para evidenciar las correlaciones existentes y cuantificar las magnitudes estudiadas, posibilitar la recreación de un modelo a partir de su representación cartesiana para identificar la covariación y finalmente lograr una articulación entre las representaciones tabular, cartesiana y algebraica.

En torno a esta misma categoría, Villa y Otros (2008), plantean algunos elementos que permiten reflexionar sobre el proceso de modelación como estrategia didáctica para abordar la construcción de conceptos matemáticos en el aula de clase adoptando como método de investigación el estudio de casos.

En un primer momento se identificaron las concepciones de los profesores frente al papel de la modelación en el aula de clase para posteriormente realizar una triangulación de los elementos hallados. En un segundo momento y con base en los resultados obtenidos, los investigadores diseñaron un conjunto de actividades que sirven como base para la reflexión, discusión e implementación en el aula de clases tanto por parte de los maestros como de los demás miembros de la investigación.

Para la investigación tomaron una situación propuesta para estudiantes de los últimos niveles de educación básica, planteada en Villa (2007), sobre el consumo de Internet en la ciudad ya que permitía identificar las variables, visualizar las formas de variación, el uso de diferentes tipos de representación, desarrollar un proceso de modelación y además porque era una situación contextualizada al momento de realizar la investigación.

Dicha situación, presentada en lenguaje natural y en un contexto real, indujo a los estudiantes a que mediante el sistema de representación tabular infirieran una relación entre el cambio de las dos magnitudes; sin embargo, en un primer momento no lograron expresar cuantitativamente dicha relación a pesar de que detectaron los algoritmos con los que hicieron su registro tabular.

Se concluye también que el proceso de modelación debe ir cruzado por el contexto social, la capacidad para leer, interpretar, proponer y resolver situaciones problemas que generen en el estudiante cierto grado de motivación y de destrezas frente a la actividad matemática.

La anterior investigación corrobora que el proceso de modelación es una herramienta en el aula de clase, que favorece despertar el interés y la motivación de los estudiantes frente a la actividad matemática, pero además aporta un elemento fundamental al proyecto, que es el papel y la actividad del maestro frente a este proceso.

Enfatiza además en la claridad que debe tener el maestro frente al objeto matemático que espera que sea modelado, su adaptación a un contexto que dote de sentido y significado la situación y la forma en que percibe la modelación matemática; y por otro lado la importancia en el diseño de situaciones que potencien las habilidades de los estudiantes para la resolución de problemas, lo anterior sugiere una conexión entre la modelación matemáticas y la resolución de problemas, factores determinantes en el presente proyecto de investigación.

En torno a la segunda categoría y desde la concepción del desarrollo del pensamiento matemático en jóvenes de los últimos grados de la educación básica y media, Barajas y López, (2015) realizaron una experiencia con un grupo de 20 estudiantes entre los 15 y 16 años pertenecientes a un club de matemáticas. Por medio de esta investigación los autores pretendían categorizar las estrategias empleadas en la resolución de problemas de los estudiantes, con el fin de favorecer la caracterización de la variación en diferentes contextos.

La situación planteada por los autores estuvo basada en la variación de la longitud de un arco, y en cuanto a las estrategias utilizadas por los estudiantes se obtuvo que sólo el 11% analizó el problema como una situación de variación y los demás emplearon expresiones algebraicas sin inquietarse por descubrir las relaciones matemáticas que estas generalizaban: usaron fórmulas.

La investigación concluye resaltando la importancia de promover la reflexión sobre el hecho de que no es suficiente que los estudiantes conozcan y apliquen las fórmulas matemáticas, pues una formación matemática fundamentada en ellas reduce la actividad matemática a ejercicios para resolver. Se resalta, además, la resolución de problemas como una excelente plataforma para potenciar el pensamiento matemático de los estudiantes y hacer del aula una pequeña comunidad de matemáticos que se reúnen.

Esta investigación es un buen referente para el presente trabajo, ya que enfatiza en la necesidad de propiciar a los estudiantes situaciones que promuevan el análisis y la reflexión al momento de resolver un problema; de igual forma hace claridad en la importancia de no reducir la actividad matemática a simples ejercicios para resolver, pues este hecho limita el desarrollo del pensamiento matemático a la aplicación de fórmulas, lo cual va en contra con los planteamientos del MEN y los fines de la educación en esta área, pues lo que se propone es desarrollar diferentes habilidades de pensamiento y que a través de la interacción con situaciones problema contextualizadas los estudiantes logren construir el concepto matemático que se requiere.

Bajo la mirada de esta misma categoría se analizó el trabajo de investigación de Fresneda y Sarmiento (2015), quienes muestran la implementación de la resolución de problemas como estrategia de aula para el proceso de aprendizaje de operaciones con expresiones algebraicas en estudiantes de grado octavo de un colegio de la ciudad de Bogotá. El objetivo de los investigadores fue mostrar cómo los estudiantes pasan por las cuatro fases propuestas por Polya para resolver un problema contextualizado a la vida cotidiana.

Para visualizar el objetivo, plantearon una situación problema mediante la cual buscaban que los estudiantes hallaran la solución teniendo en cuenta el área y el perímetro de un terreno; para ello movilizaron el proceso a partir del trabajo en pequeños grupos, los cuales debían ir construyendo la solución del problema planteado teniendo en cuenta las intervenciones del docente, cuya función principal fue dirigir el proceso y resolver las dudas de los estudiantes frente al conocimiento implícito.

Entre los principales logros resaltan el trabajo en grupo, lo que permite potenciar competencias como la comunicación, la argumentación, la representación, el razonamiento y la resolución de problemas; y en este mismo sentido plantean también que una situación problema relacionada con la vida cotidiana genera motivación en los estudiantes, puesto que pueden evidenciar la utilidad de los aprendizajes que adquieren.

Sin embargo, los autores plantearon que es importante reconocer que debido a la forma tradicional como los estudiantes han desarrollado su proceso de aprendizaje, al presentar la situación querían aplicar de inmediato procedimientos matemáticos sin tener en

cuenta que no poseían las herramientas conceptuales suficientes para hacerlo, dejando de lado el contexto de la situación.

Y finalmente como reflexión sugieren que en la resolución de problemas los estudiantes son los protagonistas en el proceso de construcción del conocimiento, debido a que una situación problema es un medio para que el estudiante se interese por aprender y vea por sí mismo la necesidad de construir conceptos matemáticos que le permitan su solución.

Esta investigación toma relevancia para el presente proyecto porque se resalta la implementación de situaciones problemas contextualizadas y adaptadas a la vida real del estudiante. Lo anterior, con el fin de que éste se interese por el aprendizaje, le genere motivación e interés, pero además porque al tratar de relacionarlo con su entorno real puede sugerir más opciones al momento de la resolución hasta encontrar la más adecuada.

Por otro lado, se resalta el papel social del sujeto y la importancia de su interacción con el otro en el desarrollo de competencias comunicativas y argumentativas principalmente, lo cual facilita el proceso de aprendizaje y en este caso concreto las diferentes posibilidades que pueden surgir al momento de resolver un problema.

La tercera categoría, que es al aprendizaje de la función cuadrática, está estrechamente ligada con la modelación matemática, y esta relación se visualiza a partir de la investigación realizada por Posso y Torres (2019), quienes en su trabajo analizan aspectos del razonamiento variacional desarrollados en estudiantes de grado noveno, al modelar fenómenos mediante la función cuadrática.

Los autores plantean que al estudiar la variación desde el enfoque covariacional, asociada a la función cuadrática en situaciones de la vida cotidiana, las matemáticas y otras ciencias, se movilizan aspectos del razonamiento durante los procesos de modelación, que pueden ser identificados y caracterizados. Para dicha investigación, los autores elaboraron y trabajaron dos situaciones contextualizadas prestando especial atención a la covariación entre cantidades de magnitud que se relacionan de manera funcional en eventos dinámicos y analizando la razón de cambio.

La situación se diseñó para desarrollarse en cuatro tareas: exploración e identificación de cantidades, registro tabular para establecer relaciones entre dos variables,

tabla de relaciones para identificar las relaciones de dependencia entre cantidades y aproximarse a un modelo, y una gráfica para identificar las relaciones de dependencia en la situación y la razón de cambio.

Entre los resultados obtenidos a través de la investigación, los autores resaltan que los primeros cálculos y cuestiones acerca de la exploración fueron abordados de manera natural por los estudiantes; al emplearse una tabla como otro registro, la mayoría de estudiantes tuvo facilidad para identificar las relaciones de dependencia; y se hizo evidente la dificultad que muestran los estudiantes en la construcción de modelos de situaciones problema, esto debido a las rutinas habituales de trabajo y ejercitación en forma mecánica.

La propuesta de la investigación anteriormente descrita, se convierte en un referente que aporta al presente proyecto al menos dos elementos a considerar: El primero, es que el proceso de aprendizaje de la función cuadrática debe ir orientado desde una perspectiva variacional, en la que los estudiantes en un primer momento puedan establecer las relaciones de dependencia entre las magnitudes y éste es un factor que se debe tener en cuenta al momento del diseño de la unidad didáctica.

Y, en segundo lugar, se reitera la relación entre el aprendizaje de la función cuadrática y el proceso de modelación matemática a través del planteamiento de situaciones problema que permitan a los estudiantes analizar, inferir y representar a través de diferentes registros una situación determinada para llegar a la función cuadrática como modelo matemático.

Bajo esta misma categoría, Silva (2018), propone utilizar la estrategia de modelación como medio de enseñanza aprendizaje para la comprensión de fenómenos de variación en estudiantes de básica secundaria y media.

Esta investigación se realizó bajo un enfoque cualitativo y es de tipo Investigación Acción; se diseñó una secuencia didáctica con situaciones de variación tales como el área de un paralelepípedo, la segunda ley de Newton, proporcionalidad cuadrática, entre otras.

Para los efectos del presente documento de investigación se dará enfoque en los resultados obtenidos en una situación de proporcionalidad cuadrática teniendo en cuenta los siguientes pasos del proceso de modelación, y obteniendo los siguientes resultados

En la formulación del problema la mayoría de los estudiantes comprendieron el enunciado y la situación a modelar; en la sistematización el 69% de los estudiantes lograron determinar una constante de proporcionalidad y relacionar variables; en la traducción al lenguaje matemático el 70% de los estudiantes realizaron la gráfica de Segundo grado completa y correctamente; sólo el 54% de los estudiantes identificaron la gráfica cuadrática y a qué clase de proporción corresponde; y en la generalización sólo el 49% de los estudiantes lograron encontrar la expresión matemática del fenómeno y lo generalizaron

Finalmente el autor concluye que la estrategia de modelación matemática, adecuadamente diseñada y desarrollada por parte del docente, utilizando un instrumento como la secuencia didáctica permite mejorar la comprensión matemática en las situaciones que involucran variación de magnitudes, sin embargo se necesita que el recurso de enseñanza sea propicio para el desarrollo de cada una de las etapas de la modelación, con el fin de obtener la verdadera comprensión del fenómeno de variación a estudiar, en este caso de variación cuadrática.

Afirma también que la representación gráfica de magnitudes ayuda al estudiante en la construcción de expresiones matemáticas que involucran variación y que la modelación matemática debe considerarse como alternativa de enseñanza para la comprensión de situaciones problemáticas elaboradas para los grados superiores y para el estudio de las funciones lineales y cuadráticas.

En coherencia con lo descrito en la anterior investigación, se resaltan varios aportes para la presente investigación: en primer lugar, la necesidad de diseñar situaciones cuyo enunciado este al nivel de comprensión de los estudiantes y que en esta medida propicien un proceso de modelación matemática en el cual logren establecer las variables involucradas en la situación de variación.

En segundo lugar, que por medio de dichas situaciones se propicie el uso de diferentes representaciones semióticas para que a través de su análisis los estudiantes logren aproximarse al modelo a partir de las relaciones encontradas entre ellas, tales como son la tabular y cartesiana principalmente.

Y finalmente, la secuencia didáctica como estrategia pedagógica que genere la posibilidad de avanzar en cada una de las etapas de la modelación de situaciones de variación cuadrática.

Luego de realizar el planteamiento del problema y hacer una revisión de los antecedentes, se puede concluir que es necesario replantear la educación matemática desde una perspectiva basada en la resolución de problemas y articulada con la modelación matemática como proceso para acercar a los estudiantes a la solución de las situaciones que potencien el pensamiento matemático y en el caso específico de esta investigación, el pensamiento variacional a través del aprendizaje de la función cuadrática.

En esta medida es un común denominador entre los antecedentes presentados, la importancia en el diseño de situaciones que permitan visualizar los procesos realizados por los estudiantes, y la forma en que su adaptación a fenómenos reales o tangibles favorece su aprendizaje .

Con base en lo expuesto, surge como pregunta de investigación:

**¿De qué forma la modelación matemática facilita la resolución de problemas de variación cuadrática, en los estudiantes del grado noveno de la I. E Concejo de Medellín?**

### 3 JUSTIFICACIÓN

En el marco de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la educación básica y media, es importante realizar una práctica investigativa continua en el aula de clase para entender las formas en que los estudiantes ven, interpretan y viven las matemáticas escolares, para así generar espacios de reflexión en torno a las problemáticas que surgen y las vías correctas para darles solución; y es en este contexto que la modelación matemática cumple un papel fundamental en la medida que lleva a los estudiantes a construir su conocimiento basados en la interpretación, razonamiento, simbolización y representación de diversas situaciones matemáticas, en la medida de lo posible adaptadas al contexto.

Desde las prácticas de aula con estudiantes de los grados superiores de educación básica y media se evidencia el choque que se genera en ellos al momento de enfrentarse a una situación problema, en primera instancia por la poca interpretación de los enunciados presentados debido a su descontextualización y en segundo lugar por las pocas posibilidades que se les brinda de pensar en diferentes estrategias para encontrar la solución.

Lo anterior lleva a los jóvenes a dos salidas: la primera de ellas es ni siquiera intentar resolver el problema; y la segunda es buscar inmediatamente una fórmula que a su criterio se adapte a la situación. Visto así, para mejorar las prácticas de aprendizaje en los estudiantes, el docente debe tener claro en primer lugar que saber matemáticas no es solamente aprender y memorizar definiciones y teoremas; y en segundo lugar apropiarse de la idea de que la educación matemática debe ir enfocada a que el estudiante formule, pruebe y construya modelos.

En esta medida la propuesta de la resolución de problemas como proceso de desarrollo del pensamiento matemático, favorece la apropiación del conocimiento por parte de los estudiantes, siempre y cuando se propongan situaciones bien diseñadas, contextualizadas y a su alcance.

En el grado noveno, en el cual se enfoca esta investigación se da una vital importancia al pensamiento variacional, especialmente a los sistemas algebraicos y a los modos de representación: no obstante, generalmente se piensa más en el contenido que en

la intencionalidad que éste puede tener para potencializar en los alumnos el pensamiento matemático a través del análisis, la reflexión, la interpretación, la solución de problemas y la modelación matemática. En este orden de ideas, se considera la modelación matemática como un proceso de vital importancia en este estudio, pues favorece las habilidades descritas anteriormente en la medida que posibilita al estudiante utilizar diferentes formas de representación para encontrar la solución a un problema dado.

En coherencia con lo anterior y teniendo en cuenta la perspectiva socio cultural del saber matemático, es fundamental que en el diseño de las situaciones que en este caso serán de variación cuadrática, se tengan en cuenta los intereses y creencias generados por el contexto de los estudiantes, bajo la luz de que estas tengan sentido para ellos y a la vez permitan analizar los procesos que realizan frente a la resolución de problemas a través de una aproximación al proceso de modelación matemática.

Para lograr los objetivos de esta investigación y en coherencia con el apartado anterior, se hace necesario pensar en un objeto matemático que permita visualizar la forma en que los estudiantes se aproximan a la resolución de problemas a través del proceso de modelación matemática, y por las características del grado en que será realizada, este objeto será la función cuadrática. En primer lugar, porque es uno de los contenidos planteados desde el currículo y en segunda instancia porque es un objeto matemático que facilita el proceso de modelación a partir de situaciones de variación.

## **4 OBJETIVOS**

### **4.1 OBJETIVO GENERAL**

Describir la forma en que la modelación matemática facilita la resolución de problemas de variación cuadrática, en los estudiantes del grado noveno de la I.E Concejo de Medellín.

### **4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

Identificar los procedimientos empleados por los estudiantes para resolver situaciones de variación cuadrática expresadas en enunciados verbales.

Registrar los elementos que intervienen en los procesos de modelación de situaciones problema en los estudiantes de grado noveno.

Reconocer los procesos de modelación matemática presentes en la resolución de problemas de variación cuadrática en estudiantes de grado noveno.

## **5 REFERENTE TEÓRICO**

El marco conceptual que se presenta a continuación contiene tres elementos fundamentales para la ejecución de la presente investigación y en esta medida para el replanteamiento y mejoramiento de las prácticas de aula en el área de matemáticas en los niveles superiores de la básica secundaria.

Tras el análisis y transversalización entre los textos de diferentes autores, los planteamientos del MEN y la experiencia docente en el aula de matemáticas, surge la importancia y la necesidad de pensar en la resolución de problemas como la práctica que permite a los estudiantes desarrollar habilidades de abstracción, razonamiento, análisis y simbolización. Esta última en relación con la modelación como representación matemática de diferentes situaciones, en este caso de variación cuadrática.

En este sentido los tres elementos a considerar son: La modelación matemática, la resolución de problemas y el aprendizaje de la función cuadrática.

### **5.1 LA MODELACIÓN MATEMÁTICA**

En el contexto de las prácticas de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en sus diferentes niveles, la modelación matemática cumple un papel fundamental, puesto que lleva a los estudiantes a construir su conocimiento basados en la interpretación, razonamiento, simbolización y representación de diversas situaciones matemáticas, en la medida de lo posible adaptadas al contexto.

Diferentes autores han hablado de la modelación como un proceso que en última instancia busca representar de forma matemática una situación del contexto real, para (Villa, 2007) “se llama simplemente modelo matemático, a un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación” (p.67).

En este sentido, se debe considerar que la modelación matemática como proceso tiene varias implicaciones entendidas como fases para su construcción. Según Villa & Ruiz (2009), la modelación matemática, implica una serie de acciones o fases que hacen que la construcción o interpretación de un modelo no se efectúe de manera instantánea en el aula de clase, a este proceso lo denominan ciclo de modelación e inicia determinando un

fenómeno o problema del “mundo real”, el cual debe ser observado y sometido a un proceso de experimentación que permita profundizar en su comprensión y en la búsqueda de datos, para con ello construir un modelo que represente el fenómeno.

Y en concordancia con ello, Posada y Villa (2006), plantean que para entender al proceso de modelación matemática como herramienta didáctica, se debe tener en cuenta aspectos tales como: El papel que juegan las diferentes magnitudes al interior del modelo, los problemas que surgen para la comprensión de los fenómenos, diferenciar el doble estatus que el objeto matemático juega cuando es tratado como modelo, las dificultades que surgen en el intento de generalizar los resultados matemáticos desarrollados por esta vía, el papel de los llamados sistemas semióticos de representación y el problema de la validez en los resultados obtenidos. En este orden de ideas Villa (2007), afirma,

La construcción de un modelo no se hace de manera automática ni inmediata, por el contrario, requiere de cierto periodo de tiempo en el cual el modelador pone en juego sus conocimientos matemáticos, el conocimiento del contexto y de la situación y sus habilidades para describir, establecer y representar las relaciones existentes entre las “cantidades”, de tal manera que se pueda construir un nuevo objeto matemático. Al proceso de obtención de un modelo matemático a partir de un fenómeno real es a lo que se llama: modelización matemática. (p.67).

En términos generales si se entiende la modelación matemática como un proceso para llegar a la generalización y posterior simbolización matemática, se debe en primera instancia generar situaciones en el aula que conduzcan a dicho proceso y como segundo elemento, se debe permitir que en los procesos de simbolización el estudiante pueda utilizar los sistemas de representación que le parezcan apropiados hasta llegar a la construcción del modelo. A través de estos dos elementos se da espacio para que los estudiantes infieran, ensayen, argumenten, representen y validen.

En torno al tipo de tareas que conducen a la modelación, Villa , Sánchez y Castrillón (2017), sugieren que la modelación “cobra vida” en el ámbito escolar si se propician tareas que estén diseñadas de acuerdo a las necesidades de formación de los estudiantes en su contexto educativo y al desarrollo de prácticas acordes con el ambiente de aprendizaje que se diseñe.

En este sentido, para mediar el aprendizaje a través del proceso de modelación matemática es fundamental en primera instancia pensar en el tipo de situaciones que se le plantean a los estudiantes y por ello su diseño debe estar mediado por los intereses y el contexto sociocultural de ellos; deben ser comprensibles, imaginables y estar relacionadas con la realidad que los rodea.

Se podría decir entonces, que uno de los obstáculos para que a los estudiantes se les dificulte el proceso de modelación matemática, es la descontextualización de las tareas que se les propone, por ello es tarea del docente diseñarlas de tal forma que incite a los estudiantes a querer resolverlas.

En palabras de Villa, Sánchez y Castrillón (2017), la modelación en la actividad escolar tiene dos características principales. La primera de ellas es que la actividad tiene que ser un problema y no un simple ejercicio para los estudiantes; la segunda enfatiza que la actividad debe extraerse de contextos cotidianos para los estudiantes.

Bajo estas características, el docente debe involucrar a los estudiantes con situaciones auténticas de la cultura y la sociedad a la que pertenecen y para ello estos mismos autores clasifican las tareas en modelación matemática en cuatro categorías: enunciados verbales, construcción de representaciones, modelación a través de proyectos, y uso y análisis de modelos. Para los efectos de esta investigación se hace énfasis sólo en la primera.

La categoría de enunciados verbales se divide en dos subcategorías: enunciados verbales realistas y problemas auténticos presentados como enunciados verbales; se tomará la segunda subcategoría, pues las situaciones diseñadas para los estudiantes actores de esta investigación serán todas presentadas como problemas auténticos propuestos como enunciados verbales, debido a que el diseño de estos enunciados sugiere la identificación de situaciones en contexto que sean susceptibles de ser modeladas, proporcionan condiciones para que los estudiantes se involucren en la producción de representaciones matemáticas de situaciones en contexto y obtengan una imagen más amplia de las relaciones entre las matemáticas y la experiencia cotidiana. Además, porque este tipo de tareas también puede ajustarse a currículos orientados al desarrollo de contenidos y con limitación de tiempo y espacio para el desarrollo de tareas matemáticas

## 5.2 LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En los procesos de aprendizaje de las matemáticas, es común escuchar y leer constantemente sobre la importancia de la resolución de problemas, pero es necesario indagar sobre varios asuntos respecto a ello. En primer lugar, qué se entiende por un problema en matemáticas, en esta medida se debe pensar exactamente en qué tipo de problemas se quieren proponer a los chicos, que habilidades se pretenden desarrollar a través de ellos y que medios se les brindan para obtener su solución.

En segundo lugar, cabe resaltar la forma en que diferentes autores han concebido la resolución de problemas en matemáticas y los aspectos que deben tenerse en cuenta al momento de utilizarla como estrategia didáctica.

En este orden de ideas, el primer paso es comprender qué es un verdadero problema en matemáticas, y frente a esto De Guzmán, (2007) afirma:

Tengo un verdadero problema cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida otras un tanto confusamente perfilada, y no conozco el camino que me puede llevar de una a otra. Nuestros libros de texto están, por lo general, repletos de meros ejercicios y carentes de verdaderos problemas. (p.34)

Al respecto, Schoenfeld (1985), señaló la categoría de los recursos; es decir, los conocimientos previos que posee el individuo; tales como conceptos, fórmulas, algoritmos, y todo aquello que se considere necesario saber para enfrentarse a un determinado problema. Resaltó también que uno de los aspectos importantes es que el profesor debe estar claro sobre cuáles son las herramientas con las que cuenta el sujeto que aprende, porque si al momento de resolver un determinado problema el individuo no cuenta con las herramientas necesarias para encontrar la solución, entonces no lo va a lograr.

En cuanto a las heurísticas, Schoenfeld (1985) señala que la persona que está resolviendo el problema debe saber qué es capaz de hacer y con qué cuenta, en este sentido, las acciones que involucra son: tener claridad acerca de lo que trata un problema antes de empezar a resolverlo, considerar varias formas posibles de solución y seleccionar una específica, monitorear el proceso y decidir cuándo abandonar un camino no exitoso y tomar

uno nuevo, llevar a cabo ese diseño que hizo y estar dispuesto a cambiarlo en un momento oportuno y finalmente revisar el proceso de resolución.

Tal como lo plantean Polya (1965) y Schoenfeld (1985), el propósito de la solución de problemas es desarrollar los procesos de pensamiento en los estudiantes a través de diferentes heurísticas; no obstante, para los efectos de la presente investigación, se toma la concepción de De Guzmán (2007), quien plantea cómo la resolución de problemas favorece dichos planteamientos, pero hace especial énfasis en los procesos de aprendizaje, tomando los contenidos matemáticos y su relación con el contexto, como campo de operaciones privilegiado para que la solución de problemas favorezca formas de pensamiento eficaces.

En esta medida, el docente debe plantear situaciones que favorezcan el desarrollo del pensamiento matemático y propicien el aprendizaje no solo de contenidos, sino de estrategias de resolución de problemas. Para ello se debe tener en cuenta en el diseño que dichas situaciones beneficien en los estudiantes actividades y habilidades tales como las que plantea De Guzmán (2007): La manipulación de objetos matemáticos, la activación de su propia capacidad mental, la reflexión sobre su propio pensamiento, la confianza en sí mismo, la diversión en el desarrollo de la actividad y la preparación para otros problemas de la ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana.

Este mismo autor plantea además, que la enseñanza a través de la solución de problemas genera varias ventajas en el aprendizaje de las matemáticas, entre ellas enuncia: la capacidad autónoma en los jóvenes para resolver sus propios problemas, los procesos efectivos de adaptación a los cambios de nuestra ciencia y de nuestra cultura no se hacen obsoletos, el trabajo se puede hacer atrayente, divertido, satisfactorio y creativo, muchos de los hábitos que así se consolidan tienen un valor universal, no limitado al mundo de las matemáticas y es aplicable a todas las edades.

Visto así, el propósito principal de las situaciones problema como estrategia en los procesos de aprendizaje, es lograr desarrollar en los estudiantes diferentes habilidades cognitivas y comunicativas que lo lleven a potenciar el desarrollo del pensamiento matemático; y para ello se debe pensar en situaciones que sean motivadoras, que potencien su interés y creatividad y que desarrollen su autonomía. Si se logra esto en el diseño de las situaciones, se logra dar un gran paso en el camino hacia la inferencia, reflexión, análisis y

simbolización como acercamiento de los estudiantes hacia el desarrollo del pensamiento matemático.

Desde esta perspectiva, el propósito principal de las situaciones problema como estrategia en los procesos de aprendizaje es lograr desarrollar en los estudiantes diferentes habilidades cognitivas y comunicativas que lo lleven a potenciar el desarrollo del pensamiento matemático; y para ello se debe pensar en situaciones que sean motivadoras, que potencien su interés y creatividad y que desarrollen su autonomía. Si se logra esto en el diseño de las situaciones, se logra dar un gran paso en el camino hacia la inferencia, reflexión, análisis y simbolización como acercamiento de los estudiantes hacia el desarrollo del pensamiento matemático.

En la educación matemática propuesta en los últimos años se ha hablado constantemente de la resolución de problemas, y sin lugar a duda muchos de los maestros de la educación básica y media en algún momento han hecho por lo menos el intento de implementar esta estrategia en sus aulas de clase; “Posiblemente los buenos profesores de todos los tiempos han utilizado de forma espontánea los métodos que ahora se propugnan” (De Guzmán, 2007, p.36), pero para este autor lo que tradicionalmente ha venido haciendo una buena parte de los profesores se puede resumir en cinco fases jerarquizadas de la siguiente forma: exposición de contenidos, ejemplos, ejercicios sencillos, ejercicios más complicados, y como una última fase los problemas, los cuales señala como un interrogante.

Esta forma de jerarquizar no se aleja mucho de lo que real y generalmente sucede en el aula de clase, donde el docente explica un contenido matemático, posteriormente lo ejemplifica motivando a los estudiantes a la práctica del algoritmo y finalmente propone un enunciado verbal el cual generalmente es denominado un problema, entendido como una forma de aplicar el algoritmo “aprendido” y no como un proceso de pensamiento matemático.

Esta perspectiva, si bien evidencia una intencionalidad de proponer la resolución de problemas como estrategia en el aula, se queda corta en el momento de entenderla como un proceso que genere la indagación, reflexión, argumentación y representación por parte de los estudiantes; para De Guzmán, (2007), el método de enseñanza por resolución de

problemas trata de armonizar adecuadamente las dos componentes que lo integran, la componente heurística, es decir la atención a los procesos de pensamiento y los contenidos específicos del pensamiento matemático.

En este orden de ideas, este mismo autor propone que la forma de presentación de un tema matemático basada en la resolución de problemas debería proceder más o menos del siguiente modo: En primer lugar proponer una situación problema de la que surge el tema, propiciar la manipulación autónoma de la situación por parte de los estudiantes, la familiarización con la situación y sus dificultades, la elaboración de las estrategias posibles y ensayos diversos por los estudiantes, elección de la estrategia para abordar y resolver el problema, realizar un recorrido crítico y un afianzamiento formalizado para finalizar con la generalización la resolución de nuevos problemas y las posibles transferencias de resultados.

La resolución de problemas vista como un proceso de desarrollo del pensamiento matemático implica mucho más que la presentación de un enunciado verbal para que el estudiante aplique un algoritmo dado; por el contrario, y tal como se sugiere, es todo un proceso a través del cual el estudiante descubre, plantea y replantea diferentes estrategias para hallar una solución, llegar a la generalización y establecer modelos transferibles a otras situaciones.

En esta medida “Un problema se presenta siempre dentro de cierto contexto y a menos que poseamos ya o podamos adquirir un conocimiento más amplio de tal contexto, nuestras posibilidades de resolución serán ciertamente escasas” (De Guzmán, 1995, p.232), de allí la necesidad del diseño de situaciones problema contextualizados y adaptados al nivel de los estudiantes.

Simultáneamente, Miguel De Guzmán propone cuatro etapas de desarrollo en la resolución de problemas, las cuales son en su respectivo orden: Familiarización con el problema, Búsqueda de estrategias, Llevar adelante la estrategia, Revisar el proceso y sacar consecuencias de él. A continuación, se explica cada una de ellas.

### **5.2.1 Familiarización Con El Problema**

El inicio del problema es una de las claves principales para el logro de la resolución exitosa. Se debe considerar la toma de tiempo necesario para leerlo pausadamente, con el fin de comprenderlo y analizarlo. Asimismo, se recomienda buscar la información necesaria para su solución y tener en claro los elementos que intervienen en el problema, el punto de partida y lo que se quiere lograr al resolverlo. Es indispensable tener una buena actitud, un gusto por el problema y estar en plena disposición para enfrentarse a su solución, esto puede contribuir a encontrar diferentes formas que garanticen el éxito de la tarea planteada.

### **5.2.2 Búsqueda De Estrategias**

Cuando se enuncia un problema normalmente se viene a la cabeza una primera idea para solucionar el mismo, pero no se debe conformar con esa primera idea para buscar la solución. Por eso se debe procurar diseñar varias estrategias posibles, pero sin llevarlas a cabo, puesto que cuando se tengan todas definidas se decidirá la más adecuada. Este paso es de gran relevancia por lo que aun teniendo una idea muy clara para solucionar el problema y no se esté seguro de que esa es la adecuada, no se debe olvidar que la fase consiste en buscar varias estrategias posibles.

### **5.2.3 Llevar Adelante La Estrategia**

De todas las estrategias encontradas para la solución del problema, se debe escoger la que tenga mayor posibilidad de éxito. Las estrategias encontradas no siempre se pueden llevar a cabo, aquí es donde cumple un papel importante la experiencia en la resolución de problemas porque de esta forma se puede tener una mejor visión de cuales de las estrategias nos conducen a encontrar los resultados esperados. Después de elegir la estrategia adecuada, esta se lleva a cabo con decisión y sino resulta se debe volver al paso anterior de búsqueda de estrategias hasta encontrar la más apropiada que nos permita la solución del problema en cuestión.

#### **5.2.4 Revisar El Proceso Y Sacar Consecuencias**

Es importante examinar con detenimiento y profundidad el camino que has seguido. ¿Cómo has llegado a la solución? Si no has sido capaz de resolver el problema, ¿por qué no has llegado a la solución? ¿Qué necesitas aprender?

En esta fase es el momento de evaluar si la estrategia ha funcionado y si se puede encontrar una forma más sencilla para resolver el problema; por último, se elaboran conclusiones para situaciones futuras. Esta es una etapa de reflexión, se debe pensar si la solución obtenida es acorde a lo que se pretendía y si existe una forma de encontrar la solución por un camino más simple.

### **5.3 RELACIÓN ENTRE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

Hasta ahora hemos entendido la modelación matemática y la resolución de problemas como dos procesos que potencian el desarrollo del pensamiento matemático y que de una forma bien estructurada propician en los estudiantes un mejor análisis, reflexión, interpretación y apropiación de los conceptos matemáticos; por esta razón existe una relación estrecha entre estos procesos.

Conjuntamente, “el proceso de modelación está íntimamente vinculado al estudio de situaciones de la realidad y, en la mayoría de los casos, a la solución de problemas.” (Villa & Ruiz, 2009, p.7). Bajo esta mirada, los autores afirman que uno de los propósitos de la matemática escolar, es el desarrollo del pensamiento matemático y que la resolución de problemas y la modelación matemática se consolidan como procesos fundamentales para alcanzar dicho propósito

En este orden de ideas y aludiendo a la relación existente entre estos dos procesos, el Ministerio de Educación Nacional, en los lineamientos curriculares de matemáticas (1998), afirma que “la resolución de problemas en un amplio sentido se considera siempre en conexión con las aplicaciones y la modelación. La forma de describir ese juego o interrelación entre el mundo real y las matemáticas es la modelación.” (p. 76).

En este documento se habla, además, del pensamiento matemático y de las habilidades que se deben desarrollar en los estudiantes, pero también se hace un énfasis

especial en la resolución de problemas y la modelación matemática como estrategias que potencializan dicho pensamiento y en la forma en que el contexto se vuelve un elemento crucial en este proceso.

El acercamiento de los estudiantes a las matemáticas, a través de situaciones problemáticas procedentes de la vida diaria, de las matemáticas y de las otras ciencias es el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento y para contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas. (p.24)

En este mismo sentido también plantean que el contexto se convierte en un factor preponderante en todas las fases del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, por tal razón es crucial que se creen situaciones problemáticas en las que los alumnos puedan explorar problemas, plantear preguntas y reflexionar sobre modelos.

Visto así, la resolución de problemas se propone como un camino para potenciar el desarrollo del pensamiento matemático y movilizar las actividades académicas; dicho camino permite a los estudiantes en cierta medida ser constructores de su propio conocimiento a través del análisis, la interpretación y la validación; pero para lograr esto no es suficiente tener la idea de plantear problemas, se hace estrictamente necesario que el docente al diseñar las situaciones tenga claro por lo menos 3 elementos: la intencionalidad al plantear la situación, su adaptación al contexto y alcance de los estudiantes y los elementos que debe incluir una situación problema.

En cuanto a la modelación matemática, se propone como un proceso que favorece el desarrollo del pensamiento y todas las habilidades que ello implica. En este sentido el MEN (1998) lo expresa de la siguiente forma:

La modelación es un proceso muy importante en el aprendizaje de las matemáticas, que permite a los alumnos observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos en forma significativa. En consecuencia, se considera que todos los alumnos necesitan experimentar procesos de matematización que conduzcan al descubrimiento, creación y utilización de modelos en todos los niveles (p. 101).

En este mismo texto se continúa dando vital importancia al diseño y planteamiento de las situaciones que el docente desea que sean modeladas por sus estudiantes, insistiendo en su relación con el contexto y la realidad, de tal forma que sea más accesible a ellos.

Por lo anterior sugieren que el punto de partida de la modelación sea una situación problema real, estructurada y planteada de acuerdo a los intereses de quien la va a resolver; lo que conduciría a la formulación de un problema que permita una aproximación con medios matemáticos. En este mismo orden de ideas, y una vez diseñada y planteada una situación con las características antes mencionadas, se busca que sea matematizada por los estudiantes a través de la modelación matemática, es decir,

Los datos, conceptos, relaciones, condiciones y suposiciones del problema enunciado matemáticamente deben trasladarse a las matemáticas, es decir, deben ser matematizados y así resulta un modelo matemático de la situación original. Dicho modelo consta esencialmente de ciertos objetos matemáticos, que corresponden a los “elementos básicos” de la situación original o del problema formulado, y de ciertas relaciones entre esos objetos, que corresponden también a relaciones entre esos “elementos básicos”. (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p.76)

En concordancia con los planteamientos anteriores, se puede inferir que lo que se pretende con la educación matemática en Colombia es que sea mediada por actividades y situaciones estructuradas y organizadas de forma tal que el estudiante adquiera no sólo conocimientos sino también habilidades para descubrir relaciones y formular conceptos matemáticos nuevos a través de procesos de modelación matemática y de resolución de problemas.

#### **5.4 EL APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA**

Para lograr los fines de esta investigación; es decir, para analizar la forma en que los estudiantes resuelven problemas a través del proceso de modelación matemática, es necesario involucrar un objeto matemático el cual en este caso es la función cuadrática. Esto, al menos por dos razones: en primera instancia porque es una de las temáticas que está establecida en el currículo para el grado noveno y en segundo lugar porque la función cuadrática puede y ha sido interpretada como modelo matemático de procesos de variación

cuadrática (Villa,2009).y uno de los fines es enfocar la investigación desde una perspectiva variacional.

Para la presente investigación, el aprendizaje de la función cuadrática se evidenciará en la forma en que los estudiantes solucionen problemas de variación cuadrática mediados por el proceso de modelación matemática.

Tomando en cuenta la construcción histórica del concepto de función cuadrática, vale la pena resaltar los planteamientos de Del Río (1996, p. 38), citado en Villa y Mesa (2007), “[Descartes] encontró métodos para construir geoméricamente los valores de una variable fijados los de la otra”.

Lo anterior en palabras de Villa y Mesa (2007), implica dos propiedades de la definición de función: la primera, el considerar dos cantidades variables y la segunda, una cierta relación de dependencia; afirmando además que la definición de función más empleada hoy en día es la de Dirichelt quien plantea que: “y es una función de x cuando al valor de x en un intervalo dado le corresponde un número y”. En coherencia con lo anterior Villa y Mesa (2008), plantean que:

Es posible afirmar que la función cuadrática como concepto se consolida una vez que el concepto de cuadrado es construido de manera significativa, y por otro lado, el concepto de función significativamente construido permitirá acoger la cuadratura como una clase de comportamiento funcional, y tiene el agregado de que se cuenta con muchas situaciones cotidianas en las que se puede tomar referencia para ser modeladas lo que le permite al estudiante un mayor desempeño en el saber hacer de su cotidianidad. (p.8).

El aprendizaje del concepto de función cuadrática ha sido considerado desde los planteamientos del MEN y llevado a los planes de área de las Instituciones educativas como un elemento casi obligatorio en la educación media y su interpretación ha estado basada en lo planteado por los libros de texto como una relación de dependencia entre variables. En esta medida se podría pensar que la enseñanza de este concepto en la escuela está enfocada a que los estudiantes entiendan el concepto de función como la simple existencia de pares ordenados, brindando así poca posibilidad de que comprendan las relaciones de variación y

cambio que existen entre las variables y como a través de esta función se pueden representar muchos fenómenos reales.

Al respecto Posada y Villa (2006), sugieren que en muchas oportunidades la poca comprensión del concepto de función se debe a que no sea vista como modelo matemático de un conjunto de situaciones que se rigen por características similares; visto así, el concepto de función cuadrática debe propiciar la generación de situaciones de variación mediante un proceso que parta de un fenómeno expresado en lenguaje natural para llegar a la construcción de sistemas simbólicos, y en esta medida se constituye como un buen objeto de modelación matemática.

Cuando se habla de un enfoque adecuado, se alude a ser visto y tratado desde una perspectiva variacional, comprendiendo las razones de cambio y ofreciendo una mirada diferente a la planteada en los libros de texto, donde tradicionalmente las funciones cuadráticas se han presentado como aquellas que pueden ser expresadas simbólicamente en la forma  $f(x)=ax^2 + bx + c$ , con  $a \neq 0$  y cuya gráfica es una sección cónica llamada parábola, restándole el valor académico y experimental que tiene esta función.

Referirse al pensamiento variacional en la función cuadrática, nos conduce a movilizar un poco las estructuras algebraicas, brindándoles un enfoque más allá de la estaticidad de sus fórmulas y gráficas y buscando el análisis de las relaciones entre las variables involucradas. Respecto a este pensamiento Vasco, (2006) plantea

El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. (p.6).

Generalmente en el estudio de la función cuadrática no se hace énfasis a la noción de variación, lo que dificulta entenderla como modelo matemático. Para avanzar un poco en esta perspectiva es necesario propiciar que los estudiantes realicen diferentes tipos de representación de las situaciones de variación cuadrática que se les presentan, para así aproximarse al modelo, “entendiéndolo en un primer momento como un modelo

matemático (sentido dinámico), y desde allí construir puentes que permitan entenderlo como un objeto matemático analítico (sentido estático)” (Posada y Villa, 2006, p.130).

En este orden de ideas y en relación con lo que los sistemas de representación aportan a la modelación de la función cuadrática, Posada y Villa, (2006), sugieren que dar inicio a la tarea de construir una función polinómica como modelo matemático, implica tener en cuenta actividades como: Discriminar las magnitudes, identificar la posible covariación entre las magnitudes, uso de tablas de valores, reconocer la razón de cambio y generar actividad cognitiva de conversión entre los diferentes registros de representación para objetivar el concepto matemático de función.

Según Amaya (2019), “además de esta relación, hay que tener en cuenta las representaciones que permita reproducir el objeto matemático que se estudia”; y se refiere a la representación semiótica descrita por Duval (2004) como “la forma que tienen las personas de externalizar sus representaciones mentales”.

Y si se tiene en cuenta que no es posible acceder a un objeto matemático a través del análisis de una sola de sus representaciones, ya que esto lleva al estudiante a confundir el objeto representado con su representante, se requiere tener actividad con diversas representaciones del objeto estudiado para que se llegue a comprenderse su funcionalidad (Duval, 2004).

Lo anterior implica que el estudiante debe explorar distintas representaciones de una función cuadrática para relacionar sus elementos con elementos del contexto sociocultural y poder así encontrarle sentido y significado. Por ello se propone que cada situación sea representada en el lenguaje natural, representación tabular, cartesiana y algebraica; pues según Duval (2004) no se puede acceder al concepto de función a través del análisis de una sola de sus representaciones.

En general y tal como se menciona en párrafos anteriores, el concepto de función cuadrática es un objeto de estudio interesante en los procesos de resolución de problemas y modelación matemática, siempre y cuando se le de un enfoque desde la perspectiva variacional, permitiendo a los estudiantes analizar, inferir y representar semióticamente hasta llegar a la construcción de un modelo; que en última instancia es el aprendizaje que se pretende lograr en los estudiantes.

## 6 METODOLOGÍA

### 6.1 ENFOQUE Y ALCANCE

Para describir la forma en que el proceso de modelación matemática favorece a los estudiantes del grado noveno de la I.E. Concejo de Medellín en los procesos de resolución de problemas de variación cuadrática, es importante conocer su contexto, sus experiencias cotidianas y la forma en que interactúan e intervienen al momento de enfrentarse a las situaciones planteadas.

En esta medida y reconociendo la importancia de realizar un análisis basado en las experiencias, procesos y formas de pensamiento de los estudiantes, esta investigación es de corte cualitativo, esto implica que se estudió “la realidad en su contexto natural, tal y como sucede, intentando sacar sentido de, o interpretar los fenómenos de acuerdo con los significados que tienen para las personas implicadas” (Rodríguez, Gil, & García, 1996, p.10).

En este mismo sentido, el análisis se realizó basado en las actividades tal cual como fueron abordadas por lo estudiantes, sin sesgar ni forzar situaciones para obtener determinados resultados; por tal razón éstas fueron diseñadas de forma tal que permitieran el proceder natural de sus formas de pensamiento, que pudieran ser expresadas en su lenguaje y representadas mediante los registros semióticos que ellos conocen; al respecto LeCompte (1995), citada en Rodríguez, Gil y García, (1996), plantea

La mayor parte de los estudios cualitativos están preocupados por el entorno de los acontecimientos, y centran su indagación en aquellos contextos naturales, o tomados tal y como se encuentran, más que reconstruidos o modificados por el investigador, en los que los seres humanos se implican e interesan, evalúan y experimentan directamente. (p. 11).

El tipo de estudio tomado para la presente investigación es el descriptivo, el cual según Hernández et al. (2004), busca especificar propiedades, características y rasgos importantes de cualquier fenómeno que se analice y a su vez describe tendencias de un grupo o población. En coherencia con ello y con los objetivos del presente trabajo se asume

esta postura, la cual, en palabras de estos mismos autores, es útil para mostrar con precisión los ángulos o dimensiones de un fenómeno, suceso, comunidad, contexto o situación.

## **6.2 POBLACIÓN Y CONTEXTO**

El proyecto de investigación se llevó a cabo en la Institución Educativa Concejo de Medellín, ubicada en el barrio la Floresta de Medellín Antioquia, es de carácter urbano y cuenta con cuatro sedes que acogen aproximadamente 4.000 estudiantes de diferentes estratos y problemáticas sociales.

El modelo pedagógico de la Institución comparte algunos principios del Modelos social crítico y del desarrollista; pretendiendo ofrecer una educación que permita la comprensión del mundo como una realidad en transformación

El grado noveno uno, a quienes estuvo dirigida esta investigación, está conformado por 38 estudiantes, jóvenes cuyas edades oscilan entre los 14 y 17 años, en su mayoría de procedencia de los barrios aledaños a la Institución, encontrándose entre los estratos 1 y 5; con muchas características diferentes desde sus núcleos familiares, sus creencias y sus intereses, pero con un punto en común entre la gran mayoría: la aversión hacia las matemáticas.

## **6.3 UNIDAD DE TRABAJO**

Para el presente estudio se diseñó una unidad didáctica, la cual fue implementada con estudiantes del grado noveno uno de la I. E. Concejo de Medellín, este grupo está conformado por 38 estudiantes, que por motivos de pandemia está dividido en dos subgrupos de 19; para el desarrollo del presente proyecto se cuenta con el apoyo de las directivas de la institución, el acompañamiento de los padres de familia y con la disposición de los estudiantes del grupo.

Para el análisis de la información, se recolectaron los datos de diez estudiantes, teniendo en cuenta la disposición de ellos y sus acudientes para participar y los resultados obtenidos a través de los instrumentos de investigación en los tres momentos planteados: Ubicación, Desubicación y Reenfoco. Éstos estudiantes se identificarán como E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10.

#### **6.4 CONSIDERACIONES ÉTICAS**

Teniendo en cuenta las consideraciones éticas pertinentes para toda investigación y especialmente la presente que será desarrollada con menores de edad, se cuenta con el consentimiento en primer lugar de la Institución y en segundo lugar de los padres de familia y jóvenes participantes. Por ello, en el anexo 1 se presenta el consentimiento firmado por los padres y estudiantes actores de este proceso, en el cual se da claridad sobre los propósitos de la investigación y la forma en que fue manejada la información.

#### **6.5 UNIDAD DE ANÁLISIS**

Tal como se mencionó en la Unidad de trabajo, para lograr los objetivos de la presente investigación se trabajó con estudiantes del grado noveno uno de la I.E. Concejo de Medellín. Se tuvo en cuenta para el análisis, las evidencias registradas en la Unidad Didáctica y la información recolectada a través de la entrevista semiestructurada que fue diseñada para ampliar las respuestas de los estudiantes al finalizar la Unidad.

Para la interpretación y consolidación de los resultados obtenidos a través de las actividades implementadas en la Unidad Didáctica se sistematizó la información en una matriz para cada momento de la UD; donde se presentaron cada una de las categorías de la investigación con la información clave recolectada en la UD y la entrevista semi estructurada, enfatizando en los elementos que coinciden en cada una de ellas, el punto de vista del investigador y los planteamientos realizados por los autores al respecto; para posteriormente realizar el análisis descriptivo.

**Tabla 1. Matriz de sistematización de la información**

Categoría	Matriz para la sistematización de la información		
	Información clave recolectada a través de la Unidad didáctica	Análisis del investigador	Postura de los autores
Modelación matemática Resolución de problemas de variación cuadrática Puntos donde convergen las categorías	Transcripción y análisis de la entrevista semi estructurada Conclusiones Recomendaciones		

*Fuente. Elaboración propia*

Para este proyecto de investigación se consideraron como ejes de análisis dos categorías: La modelación matemática, la Resolución de problemas de variación cuadrática basada en la heurística de De Guzmán, cada una de ellas con sus respectivas subcategorías e indicadores, tal como se presenta en la siguiente tabla:

**Tabla 2. Categorías y subcategorías de análisis**

Categoría	Subcategoría	Indicadores	Autores
Modelación matemática	Comprensión de un fenómeno contextualizado	M1: El estudiante describe y establece relaciones entre los datos del problema	Villa (2007). Villa y Ruiz (2009). Posada y Villa (2016). Villa, Sánchez y Castrillón (2017).
	Uso de diferentes sistemas de representación	M2: El estudiante usa diferentes registros de representación semiótica. M3: El estudiante representa las relaciones existentes entre magnitudes.	Amaya (2019). Duval (2004).

Resolución de problemas de variación cuadrática	Familiarización con el problema	S1: El estudiante identifica las magnitudes involucradas en el problema de variación cuadrática.	Miguel de Guzmán (1995) Miguel de Guzmán (2007)
	Búsqueda de estrategias	S2: El estudiante plantea posibles propuestas para la solución del problema, teniendo en cuenta los diferentes registros de representación semiótica de la función cuadrática.	Ministerio de Educación Nacional (1998) Villa y Mesa (2007). Villa y Mesa (2008).
	Llevar adelante la estrategia	S3: El estudiante implementa la estrategia más adecuada para dar solución al problema a través del ciclo de modelación matemática y articulando diferentes registros de representación.	
	Revisar el proceso y sacar consecuencias de él	S4: El estudiante hace revisión de la efectividad de la estrategia implementada, validando la función cuadrática como modelo matemático.	

*Fuente: Elaboración propia 1*

## 6.6 TÉCNICAS Y FUENTES DE RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

Para dar respuesta a la pregunta de investigación, es necesario implementar además de la secuencia didáctica, unos instrumentos que permitan una mayor interacción con los estudiantes y que faciliten la interpretación de la forma en que la modelación matemática favorece en ellos la resolución de problemas de variación cuadrática. Para ello se considerarán los siguientes instrumentos.

### **6.6.1 Prueba Diagnóstica**

Se elaboró una actividad, donde a través del planteamiento de situaciones problema se pretende identificar de qué forma los estudiantes solucionan situaciones de variación cuadrática a través del proceso de modelación, por tal razón, las situaciones están diseñadas de forma que permitan visualizar en un primer momento si los estudiantes logran aproximarse al proceso de modelación matemática.

### **6.6.2 Entrevista Semi Estructurada**

Se realizó una entrevista al finalizar la Unidad Didáctica que permita un acercamiento más directo a los protagonistas de la investigación y cuya finalidad es mirar la efectividad de las actividades realizadas en los tres momentos de la Unidad Didáctica, a fin de establecer con los estudiantes la forma en que el proceso de modelación matemática favoreció la resolución de problemas. Ésta será semiestructurada; es decir, se formularán unas preguntas iniciales las cuales en caso de ser necesario serán modificadas y reestructuradas de acorde a las respuestas que vayan dando los estudiantes y a la dinámica que se genere durante el diálogo con ellos.

### **6.6.3 Validación De Los Instrumentos**

En aras de que todos los instrumentos que serán aplicados para la recolección de la información necesaria en el presente proyecto de investigación sean validados, se realizará un estudio piloto de la prueba diagnóstica con estudiantes del grado noveno diferentes a los que serán protagonistas de la investigación y la Unidad Didáctica, ésta será revisada por pares académicos expertos. Lo anterior con el fin de determinar si es necesario realizar ajustes a la propuesta inicial, buscando así la consecución del objetivo de investigación.

## **6.7 UNIDAD DIDÁCTICA**

Posterior al análisis de la información obtenida a través de la prueba diagnóstica, se procederá a diseñar e implementar la unidad didáctica, mediante la cual se “pretende desarrollar aprendizajes significativos de una temática específica, razón por la cual es conocida como unidad relativa de trabajo.” (Tamayo, 2013, p.118). En este caso la

temática específica va enfocada a la modelación matemática en la resolución de problemas de variación cuadrática y la unidad didáctica estará estructurada en tres momentos: ubicación, desubicación y reenfoque.

La Unidad Didáctica (UD) que se diseñó, estuvo apoyada inicialmente por el modelo pedagógico de la Institución Educativa Concejo de Medellín, el cual comparte algunos principios del Modelo social crítico y del desarrollista; pretendiendo ofrecer una educación que permita la comprensión del mundo como una realidad en transformación, y donde el estudiante es un sujeto activo que pone en escena cotidianamente sus habilidades para integrar lo que sabe con lo que va a aprender. Adicional a esto, estará cruzada por los aspectos encontrados a través de la prueba diagnóstica inicial buscando desarrollar en los estudiantes habilidades de pensamiento que favorezcan la resolución de problemas de variación cuadrática a través del proceso de modelación matemática.

Como se planteó al inicio de este apartado, la ejecución metodológica de la Unidad Didáctica estuvo estructurada en tres momentos los cuales estuvieron mediados por actividades que permitan que el estudiante construya gradualmente su propio conocimiento y que a medida que vaya desarrollando las diferentes actividades pueda ir evolucionando conceptualmente y aproximándose a la modelación como proceso que favorece la solución de problemas de variación cuadrática.

El tiempo estipulado para la Unidad Didáctica fue de 4 semanas, con una intensidad de 4 horas semanales; cabe resaltar que en cada uno de los momentos de la Unidad Didáctica se realizó el registro fotográfico de cada actividad realizada por los estudiantes, con el fin de recoger las evidencias requeridas para el posterior análisis de datos.

### **6.7.1 Momento De Ubicación**

Se propuso una actividad donde se identificaron las acciones que llevan a cabo los estudiantes del grado noveno cuando se les plantea una situación problema. Para esto, se plantearán situaciones de variación cuadrática, representadas mediante enunciados verbales, y a partir de ellas se generarán una serie de preguntas enfocadas a la interpretación del problema, la inferencia de datos y la explicación de los estudiantes sobre sus razonamientos iniciales.

### **6.7.2 Momento De Desubicación**

En esta etapa, se propusieron dos situaciones problema que propiciaran en los estudiantes la representación mediante los diferentes sistemas propuestos en el proceso de modelación matemática de funciones; es decir, el registro tabular y cartesiano. Para ello se les brindó además del enunciado verbal que describía un fenómeno real, una tabla de valores que debían completar teniendo en cuenta la variación de las magnitudes y el plano cartesiano donde debían ubicar los valores hallados en la tabla, con el fin de que a través de los datos obtenidos logaran establecer relaciones entre las cantidades involucradas.

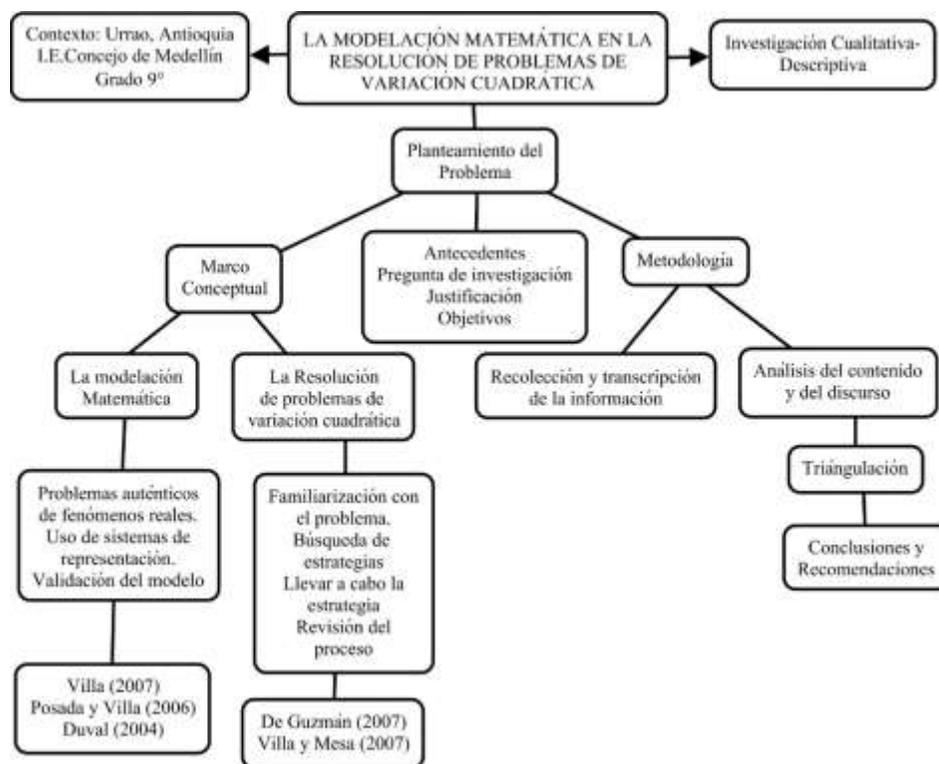
Mediante las actividades propuestas para este momento, se pretendieron dos aspectos principalmente: el primero que los estudiantes utilizaran los registros de representación propuestos para la modelación de situaciones de variación cuadrática; y segundo que siguiendo la heurística de Miguel de Guzmán pasaran del momento de familiarización con el problema, a los de búsqueda y ejecución de estrategias para dar respuesta a las preguntas planteadas en la situación teniendo como base los resultados obtenidos y analizables en el paso anterior.

### **6.7.3 Momento De Reenfoque**

Para el momento de reenfoque se realizaron actividades mediante las cuales se buscó evidenciar en los estudiantes los procesos de modelación que se han logrado trabajar desde el momento de ubicación, y analizar la efectividad de las situaciones planteadas en los momentos anteriores; es decir, establecer si los estudiantes logran validar la función cuadrática como modelo matemático para la solución de problemas de este tipo de variación.

## 6.8 DISEÑO METODOLÓGICO

Ilustración 1. Diseño metodológico



Fuente. Elaboración propia

## 6.9 PLAN DE ANÁLISIS

En coherencia con la metodología utilizada durante todo el proceso, la presente investigación se consolidó a partir de los datos recolectados a través de los instrumentos anteriormente mencionados y de una dialéctica establecida con los planteamientos realizados por autores como Villa (2007; De Guzmán (2007); Posada y Villa (2006), entre otros.

Dicha dialéctica facilitó el análisis de las categorías de investigación, mediante las cuales se busca dar respuesta a la pregunta ¿De qué forma la modelación matemática favorece la resolución de problemas de variación cuadrática, en estudiantes del grado noveno de la I. E Concejo de Medellín?

En coherencia con lo anterior, el análisis se realizó tomando como punto de partida los tres momentos diseñados en la Unidad Didáctica: Momento de Ubicación mediante el cual los estudiantes hicieron un primer acercamiento a las situaciones planteadas y servirá

como fuente de exploración de los saberes previos; el momento de Desubicación mediante el cual se buscó implementar estrategias para la construcción del conocimiento a través de procesos de modelación en la resolución de problemas, aplicando estrategias planteadas desde la heurística de Miguel de Guzmán y teniendo en cuenta desde lo planteado por Villa, el tipo de tareas que favorecen la modelación; y finalmente el momento de Reenfoco mediante el cual se buscó evidenciar los avances presentados por los estudiantes frente a la solución de situaciones de variación cuadrática a través del proceso de modelación matemática y la forma en que éste favorece el aprendizaje y los procesos de pensamiento matemático.

Para presentar los resultados obtenidos mediante la información recolectada, los diferentes instrumentos implementados se constituyeron en una importante fuente de información para analizar las construcciones y avances de los estudiantes y de este modo poder visualizar cómo la modelación matemática favorece la resolución de problemas de variación cuadrática. En este orden de ideas, se realizó una triangulación entre los resultados obtenidos a través de las respuestas de los estudiantes, los referentes teóricos propuestos para la investigación y el punto de vista y análisis del docente investigador; con el fin de dar respuesta a la pregunta y evaluar el alcance de los objetivos de la investigación.

## 7 ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

### 7.1 MOMENTO DE UBICACIÓN

Tal como se planteó en la Unidad Didáctica “Modelemos situaciones de variación cuadrática”, para el momento de ubicación, se implementó el instrumento inicial “Construyendo modelos I”, en el cual los estudiantes de grado noveno debían resolver dos situaciones problema que involucraban la modelación de la función cuadrática desde una perspectiva variacional.

Este momento se compuso de dos partes, la primera fue que los estudiantes de forma individual resolvieran las dos situaciones problema planteadas y la segunda fue una socialización de los resultados obtenidos para indagar a mayor profundidad sobre los razonamientos utilizados por ellos. Durante el desarrollo de ellas se logró identificar la forma en que los estudiantes abordaron las situaciones y dieron respuesta a las preguntas planteadas, resaltando las respuestas descritas a continuación.

En la primera situación “la empresa de telefonía”, se preguntó a los estudiantes por los valores que intervienen en la situación, cuáles de ellos son constantes y cuáles variables, frente a esto, los estudiantes E1, E2 y E3, dieron las siguientes respuestas:

*E1: Los valores que varían son los minutos por separado, los cuales tienen descuento, en cambio los valores constantes serían los minutos a larga distancia que no tienen ningún tipo de descuento*

*E2: El plan fijo es constante y tendría que pagar siempre los 1800, creo que sale más barato el cargo fijo que el otro porque por cada minuto pagaría 531 y haciendo el descuento y eso que tienen que ser varios para que le hagan el descuento.*

*E3: Para mi es mejor que no se compre el plan ya que cada minuto cuesta 540 y no se hace ningún descuento, en cambio en el otro por cada minuto le descuentan \$9 del total.*

Si bien se esperaba que los estudiantes identificaran los datos que eran variables en la situación (la cantidad de minutos, el descuento y el valor por minuto), y los que eran constantes (el cargo fijo del plan); no hubo comprensión del fenómeno descrito en la situación ya que en primera instancia, los estudiantes no establecieron claramente la relación entre los datos del problema, pues interpretaron el cargo fijo como un plan

diferente al planteado en el problema; es decir, en sus respuestas se evidencia que hablan de dos planes diferentes, cuando en realidad era un único plan; respuestas que dan cuenta de la poca comprensión del problema y la relación entre los datos involucrados en él

De lo anterior, se puede deducir que los estudiantes no contextualizaron bien el problema y por tal razón no identificaron ni establecieron las relaciones existentes entre las cantidades involucradas en él, lo cual es el primer paso para iniciar un proceso firme de modelación matemática; proceso que para Villa (2007) “requiere de cierto periodo de tiempo en el cual el modelador pone en juego sus conocimientos matemáticos, el conocimiento del contexto y de la situación y sus habilidades para describir, establecer y representar las relaciones existentes entre las “cantidades”, de tal manera que se pueda construir un nuevo objeto matemático”.

Si se analiza, además, la forma en que lo evidenciado hasta aquí influye en la resolución de problemas de variación cuadrática, las respuestas dadas por los estudiantes conllevan a pensar que no hay una familiarización con el problema, pues no se identifican adecuadamente las magnitudes involucradas en él, ni la relación entre éstas. Al respecto De Guzmán (2007) plantea que se recomienda buscar la información necesaria para la solución y tener en claro los elementos que intervienen en el problema, el punto de partida y lo que se quiere lograr al resolverlo. Es por ello, que para que exista una verdadera familiarización con el problema es necesario que el estudiante logre tener claro cuáles son los datos que éste le brinda y cómo pueden ayudarle en la solución. La poca familiarización se evidencia también en las respuestas dadas a la pregunta: ¿Cómo podríamos saber a partir de cuántos minutos Jhon obtendría el mayor descuento?

*E3: Se supone que son \$9 por minuto, entonces el mayor descuento no se podría sacar porque no importa el tiempo que uses la telefonía, por el minuto siempre te dan \$9.*

*E4: Creo que sobrepasando el cargo fijo que es de 1800*

*E7: Multiplicando \$540 por 10, eso nos da \$5400 y ese sería el mayor descuento*

En esta pregunta se esperaba que los estudiantes pudieran establecer las relaciones entre las magnitudes, y para ello era necesario que identificaran en el primer momento cuáles eran y qué papel jugaban dentro de la situación; lo cual como se describió anteriormente no se logró, razón por la cual los estudiantes no entendieron que el valor del

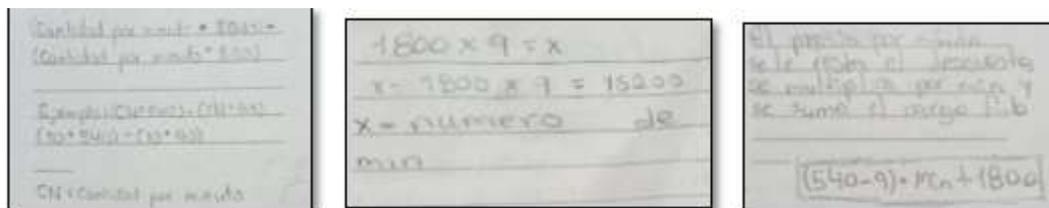
descuento varía en la medida que varía el número de minutos, y no era una magnitud constante.

Lo anterior indica que los estudiantes E3, E4 y E7, al dar solución a la pregunta planteada si bien usaron los valores dados en la situación, no establecieron correctamente las relaciones existentes entre ellos. En el caso de E3 tomó en cuenta el valor del descuento como un dato fijo sin importar el número de minutos, por lo cual no pudo establecer el mayor descuento; en el caso de E4 solo tomó el cargo fijo como referente y en concordancia con su respuesta en el punto anterior, se asume que es porque estaba tomando el cargo fijo como un plan diferente al planteado, sin establecer las relaciones entre las demás magnitudes; y en el caso de E7, toma el valor del minuto y un dato que no interfiere en la solución del problema (10), pues fue dado en un ejemplo, lo que indica que este estudiante no identificó los datos reales del problema.

Al indagar en la socialización grupal, sobre estas respuestas, los estudiantes afirmaron que no tenían claro cómo representar estas relaciones y no sabían cómo contestar; es decir, no buscaron diferentes estrategias para dar solución, así como lo plantea De Guzmán (2007), “Cuando se enuncia un problema normalmente se viene a la cabeza una primera idea para solucionar el mismo, pero no se debe conformar con esa primera idea para buscar la solución. Por eso se debe procurar diseñar varias estrategias posibles,”. Si bien dieron respuesta al interrogante, no se reflejó que hubiese varias estrategias para dar solución, se quedaron con una sola estrategia, la cual no fue la apropiada para resolver correctamente lo planteado.

Se puede decir de lo anterior, que, si bien se presentó una situación cotidiana teniendo en cuenta el contexto, buscando generar interés en los estudiantes y en coherencia con el propósito que se pretendía lograr, los estudiantes no dieron el primer paso para iniciar el proceso de modelación matemática porque no poseían los elementos conceptuales necesarios para darle solución. Al respecto Villa (2008), plantea que “el proceso de modelación matemática no se puede desarrollar en todo su sentido en el aula de clase, en parte porque algunas de las situaciones del mundo real a las que se pueden ver enfrentados los estudiantes, requieren de herramientas matemáticas que no siempre se encuentran en correspondencia con su desarrollo del pensamiento” (p.3).

En cuanto a la pregunta “¿Podría Jhon definir una expresión algebraica con la cual se pueda hallar el valor del plan para cualquier número de minutos? ¡Ayúdalo!”, se destacan las respuestas de los estudiantes E1, E10 y E6 quienes se atrevieron a hacer un acercamiento a la representación algebraica



*Respuestas E1, E10 y E6*

Si bien la intención de esta pregunta era lograr que los estudiantes construyeran una expresión algebraica, o más específicamente que logaran construir una función cuadrática que representara la situación, teniendo en cuenta la variación entre las magnitudes; se evidencia en la respuesta de E10, que no estaba pensando en una expresión algebraica como forma de representación de la situación, sólo estaba pensando en hallar un valor numérico, usando la operación que consideró conveniente, pero sin establecer una relación acertada entre las magnitudes, lo que da cuenta de que no hay una búsqueda de diferentes estrategias.

Al respecto Silva (2018) plantea que, por medio de las situaciones planteadas en el aula, se deben propiciar las diferentes formas de representación para que a través de su análisis los estudiantes logren aproximarse al modelo a partir de las relaciones encontradas entre ellas, tales como son la tabular y cartesiana principalmente.

En el caso de E1 y E6, si bien lograron hacer una aproximación a una representación algebraica, se evidencia que ésta es de tipo lineal y no cuadrática como lo representa la situación planteada; por tal razón se indagó por sus respuestas a través de la socialización grupal, donde expresaron lo siguiente:

*E1: Primero al valor del plan había que restarle el valor del descuento y multiplicarlo por el total de minutos y a este resultado se le tiene que sumar el cargo fijo.*

*E6: La cantidad por minuto se multiplica por el valor del minuto y también por el valor del descuento y estos dos resultados se restan. Así sabríamos el valor del plan para cualquier cantidad de minutos.*

En E1 se evidencia que trató de establecer una relación entre las magnitudes, acercándose a una representación funcional, pero de forma lineal; lo que indica que no hay una interpretación de la situación desde la variación cuadrática. Por su parte E6 hace un razonamiento similar, pero sin tener en cuenta el valor del cargo fijo.

De lo anterior se puede deducir que los estudiantes no establecieron correctamente la relación entre las magnitudes y se limitaron a un solo registro de representación sin pensar en varios caminos para dar solución, lo cual es el primer paso para iniciar un proceso firme de modelación matemática y para abordar las situaciones desde una perspectiva variacional, como la plantean Posada y Villa (2006)

En la situación 2 “Excursión al paraíso del pacífico colombiano”, frente a la pregunta “¿Si fueras el administrador de la agencia de viajes cuál sería el cupo máximo que aceptarías y por qué?”, las respuestas de los estudiantes E1, E2 y E7 fueron

*E1: Cualquier cupo sería rentable, ya que gano mucho más dinero*

*E2: Yo aceptaré lo máximo 40 estudiantes, es lo normal en un grupo porque si aceptaría más tendría un descuadre.*

*E7: El cupo máximo para la excursión sería de 50 personas para dividirlos en 2 grupos de 25 para que sea más seguro.*

Al indagar un poco sobre estas respuestas, se obtuvieron las siguientes afirmaciones:

*E1: Entre más personas vayan mejor, porque en los negocios a mayor cantidad mayor dinero.*

*E2: Los grupos normalmente son de 40 personas, entonces si fueran más de eso tendrían que buscar personas de otros grupos y así.*

*E7: Por los protocolos de bioseguridad no es recomendable que estén más de 25 personas juntas.*

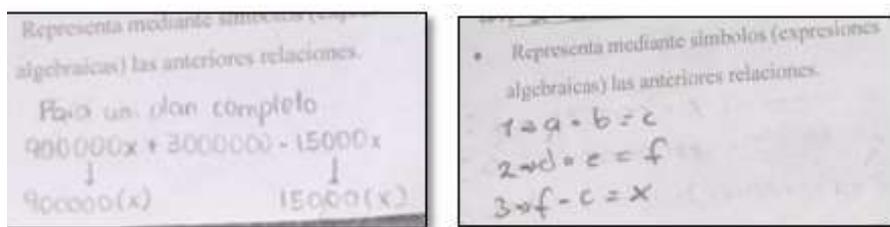
En estas respuestas se evidencia que los estudiantes no están pensando en el contexto de la situación planteada, en los datos suministrados y la relación entre ellos,

tampoco hay una búsqueda ni implementación clara de estrategias; y evidentemente no hay una revisión del proceso para reflexionar sobre la validez de la respuesta y la rentabilidad del plan ofrecido.

Respecto a esto se concluye que los estudiantes no están teniendo en cuenta un paso a paso para dar solución al problema, desconociendo la heurística para hacerlo; si bien creen estar familiarizados con el problema, no están tomando en cuenta el contexto real de éste, al no buscar la información necesaria para solucionarlo ni los elementos que intervienen en él; tampoco están buscando diferentes estrategias, lo que implica no poder discernir entre la más adecuada; y finalmente no están haciendo una revisión para ver si con el proceso llevado a cabo se logró dar una solución acorde a lo que se pretendía.

En términos de De Guzmán (2007), la resolución de problemas es un proceso en el que el estudiante descubre, plantea y replantea diferentes estrategias para hallar una solución, llegar a la generalización y establecer modelos transferibles a otras situaciones', afirmando que, si no se contextualiza realmente el problema, las opciones de solución serán escasas.

Cuando se les pide representar mediante expresiones algebraicas las relaciones existentes entre cada una de las magnitudes, para llegar al modelo que representa la situación, E1, E9 y E8 representan lo siguiente:



**Respuestas E1 y E8 respectivamente**

**E1:** Se multiplica el valor del viaje por el número de personas que van, a este valor se le suma la visita al parque y luego se multiplica el valor del descuento por el número de personas y esto se le resta a lo anterior. Creo que así podríamos obtener el valor del viaje para cualquier número de personas.

*E9: Todo se debe multiplicar por el número de miembros, tanto el descuento como el valor del viaje y puse número de miembros= valor total del grupo porque ese valor depende de cuántas personas vayan.*

*E8: En la primera expresión a es el número de miembros y b el valor del descuento, entonces c sería el valor del descuento para esa cantidad de personas. En la 2 d es el número de personas y e es el valor del viaje, entonces f sería el valor del viaje para esa cantidad de personas: y en la 3 se restan f y c para tener el valor total del viaje.*

Se esperaba que los estudiantes utilizaran en sus razonamientos algunos registros de representación que les ayudaran a construir el modelo matemático, es decir, la representación algebraica; no obstante, y tal como se evidencia en las imágenes, ellos no utilizaron ningún tipo de representación diferente al pedido en la situación para dar solución al problema, al indagar el por qué, se obtuvieron las siguientes respuestas:

*E1: Este tipo de problemas matemáticos sólo se resuelven a través de operaciones.*

*E9: No sé si no leí bien el problema, pero sólo me pedía resolverlo algebraicamente.*

*E8: No sabría qué tipo de representación usar, sólo sé que si me dan un problema se busca una ecuación o algo así para resolverla*

Las respuestas de estos tres estudiantes convergen en un mismo punto; al enfrentarse a un problema, inmediatamente buscan resolverlo a través de operaciones, ecuaciones o fórmulas ya conocidas, descartando el uso de diferentes sistemas de representación semiótica y desconociendo la heurística para dar solución a un problema matemático; es por ello que se debe hacer énfasis en el proceso de modelación matemática como estrategia que posibilita la resolución de problemas de variación.

Al respecto Posada y Villa, (2006), sugieren que dar inicio a la tarea de construir una función polinómica como modelo matemático, implica tener en cuenta actividades como: Discriminar las magnitudes, identificar la posible covariación entre las magnitudes, uso de tablas de valores, reconocer la razón de cambio y generar actividad cognitiva de conversión entre los diferentes registros de representación para objetivar el concepto matemático de función.

## 7.2 MOMENTO DE DESUBICACIÓN

En el momento de desubicación cuyos objetivos fueron generar procesos de aprendizaje en la solución de las dificultades presentadas por los estudiantes, respecto a situaciones de variación cuadrática y conducirlos hacia la heurística de resolución de problemas de Miguel De Guzmán, asociando el proceso de modelación matemática; se propuso en un primer momento una actividad en línea a través de geogebra, con el fin de reconocer los elementos de la función cuadrática, responder algunas preguntas en torno a ello y resolver una situación problema. De la socialización de esta primera parte, se obtuvieron los siguientes resultados:

A la pregunta, “explica cómo varía la función al variar los valores de  $a$  y  $c$ ” los estudiantes E8 y E9 respondieron:

*E8: si muevo  $a$  a la derecha se cierra y a la izquierda se abre y si muevo  $c$ , se mueve el vértice en el mismo eje.*

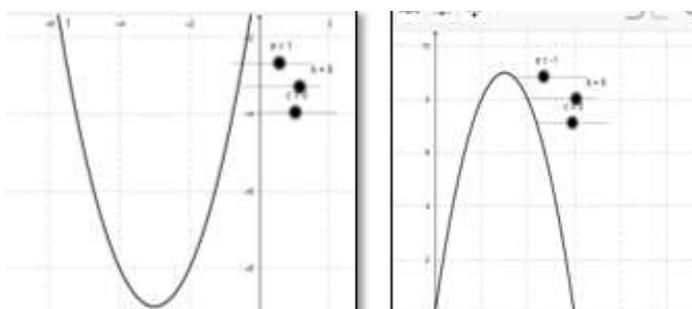
*E9: si se mueve  $a$  a la derecha la parábola se cierra, a la izquierda se abre y si se mueve  $c$  se mueve el vértice hacia arriba o abajo.*

En estas respuestas se puede evidenciar que, si bien los estudiantes describieron algunas variaciones de la curva, no tuvieron en cuenta los elementos de la función al momento de hacer sus afirmaciones. Por ejemplo, en el caso de  $a$ , no jugaron con valores negativos para establecer que de este parámetro depende si la función es cóncava o convexa; en el caso de  $b$  y  $c$  no los asociaron con el punto que forma el vértice de la parábola ( $x$  e  $y$ ) respectivamente, lo que implica que no establecieron la relación de dependencia entre las variables.

Al respecto Villa y Mesa (2007), afirman que la definición de función implica dos propiedades: la primera, el considerar dos cantidades variables; y la segunda, una cierta relación de dependencia; afirmando además que la definición de función más empleada hoy en día es la de Dirichelt quien plantea que: “ $y$  es una función de  $x$  cuando al valor de  $x$  en un intervalo dado le corresponde un número  $y$ ”. Y con lo observado en las respuestas de los estudiantes, al no asociar la dependencia existente entre  $b$  y  $c$  para definir el vértice ( $x$ ,  $y$ ), se puede decir que no se están teniendo en cuenta las dos propiedades que implica la definición de función.

Posterior a la interacción en la página web, se realizó una presentación en ppt acerca de los elementos de la función cuadrática y sus formas de representación, para luego proponerles una situación problema en la que debían poner en juego esos elementos a través de la página web y dar solución a los interrogantes planteados.

Al presentarles la situación cuya trayectoria parabólica está dada por la función  $f(x) = -x^2 + 6x$  y pedirles que establecieran los valores para  $a$ ,  $b$  y  $c$  según los datos de la función dada en la situación del lanzamiento del balón, se tomaron las siguientes capturas de los estudiantes E7, E2 y E8 respectivamente



*Respuestas de E7 y E2 respectivamente*

De la respuesta de E7, se puede deducir que, aunque trató de hallar una relación entre los elementos de la función dada para graficarlos, no tuvo en cuenta el signo del coeficiente  $a$ , razón por la cual la parábola hace alusión a una función convexa, cuando en realidad esta es cóncava; el estudiante E2 lo realizó correctamente verificando que la función dada en la gráfica es equivalente a la que fue dada inicialmente en la actividad; y el estudiante E8 estableció primero una relación entre la función cuadrática general y la planteada en la actividad, para así establecer los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

Analizando lo anterior desde una perspectiva variacional, se corrobora la necesidad de propiciar que los estudiantes realicen diferentes tipos de representación de las situaciones de variación cuadrática que se les presentan, para así aproximarse al modelo, “entendiéndolo en un primer momento como un modelo matemático (sentido dinámico), y desde allí construir puentes que permitan entenderlo como un objeto matemático analítico (sentido estático).” (Posada y Villa, 2006, p.130).

En la misma actividad, luego de que los estudiantes interactuaran en la página web indicada y de hacer la presentación en power point con los elementos de la función cuadrática, se le pregunta a los estudiantes: *Calcule la altura máxima que alcanza el balón y en qué instante. ¿Qué elemento de la parábola representa este dato?*, se obtuvieron las siguientes respuestas:

*E2: Es simplemente mirar la gráfica y ver cuál es el vértice, de ahí se saca la altura máxima y en qué momento, o sea, (3,9)*

*E7: El vértice es el que nos da ese dato*

*E8: la altura está en la y, o sea 9 y el tiempo en x o sea 3.*

El estudiante E7 utilizó la fórmula para hallar el vértice de la parábola y dar respuesta a la pregunta; si bien sus procedimientos estuvieron bien realizados y tuvo la claridad de que éste elemento de la parábola era el que debía tener en cuenta para hallar el dato pedido, tal como lo hizo al momento de graficar, no tuvo en cuenta el signo del coeficiente a, y por esta razón, aunque los demás procedimientos fueron correctos, el resultado no lo fue.

Por su parte el estudiante E2 asoció el vértice de la parábola con los datos pedidos, sin necesidad de realizar ningún procedimiento algebraico; y el estudiante E8 relacionó los coeficientes a, b y c dados en la función inicial de forma tal que halló el vértice de la función usando procedimientos algebraicos y aclarando que la altura está en el eje y y el tiempo en el eje x.

Con base en las respuestas dadas por estos tres estudiantes, se puede decir que hay un acercamiento a las relaciones entre mínimo dos registros de representación diferentes y que establecieron una relación clara entre elementos de la función con los datos pedidos en el problema, lo que les facilitó dar solución a éste.

Al respecto Amaya (2019), plantea que “hay que tener en cuenta las representaciones que permitan reproducir el objeto matemático que se estudia”; y se refiere a la representación semiótica descrita por Duval (2004) como “la forma que tienen las personas de externalizar sus representaciones mentales”.

Además de ello, se evidencia que los estudiantes reflejan una familiarización con el problema, buscaron la información necesaria para resolverlo, identificaron los elementos

que intervienen en él y lo que se quería lograr al resolverlo tal como lo plantea De Guzmán (2007).

Posterior a esta actividad, se desarrolla la parte dos del momento de desubicación, donde se proponen dos situaciones problemas que los estudiantes desarrollaron de manera individual, teniendo en cuenta las explicaciones previas de la heurística de Miguel de Guzmán y la incorporación del proceso de modelación matemática.

En la primera de ellas se propone hallar el área máxima de un espacio rectangular que será usado como aula de informática en el colegio y cuyo perímetro es 216m; y representar la situación mediante un modelo matemático en función de h.

Handwritten mathematical work showing the derivation of the maximum area for a rectangle with a perimeter of 216m. The student uses the quadratic formula to find the vertex of the area function.

base	altura	Área
10	98	980
20	88	1760
30	78	2340
40	68	2720
50	58	2900
60	48	2880
70	38	2660
80	28	2240

$P = 216$   
 $P = 2(b+h)$   
 $A = b \times h$   
 $216 = 2(b+h)$   
 $\frac{216}{2} = b+h$   
 $108 = b+h$   
 $108 - b = h$   
 $A = b \times (108 - b)$   
 $A = 108b - b^2$   
 $A = -b^2 + 108b$   
 $b = 108$   
 $a = -1$   
 $c = 0$   
 Vértice:  
 $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{108}{2(-1)} = \frac{108}{2} = 54$   
 $y = \frac{-b^2 - 4ac}{4a} = \frac{-108^2 - 4(-1)(0)}{4(-1)} = \frac{-11664 + 0}{-4} = \frac{11664}{4} = 2916$   
 $(54, 2916)$

Handwritten notes for the problem-solving process, divided into familiarization and search for strategies.

**1. FAMILIARIZACIÓN DEL PROBLEMA:**

- ¿Qué te pide el problema?  
La mayor área posible un modelo matemático
- ¿Qué datos del enunciado son los más importantes?  
El perímetro: 216 m
- ¿Qué magnitud te piden encontrar?  
El mayor área
- ¿Qué datos conoces del problema?  
 $P = 216$   
 $P = 2(b+h)$   
 $A = b \times h$
- Escribe que elementos requieres para solucionar el problema  
 las formulas, el valor de p

**2. BÚSQUEDA DE ESTRATEGIAS:**

- ¿Qué datos se necesitan para poder contestar las preguntas del problema?  
 Saber cual es el mayor area de ese perímetro  
 El vértice

**Respuesta E1**

En las respuestas de E1 se puede evidenciar que el estudiante se familiarizó con el problema, comprendiendo lo que éste pedía, reconociendo los datos más importantes del enunciado y los elementos que requería para su solución en los que incluyó las fórmulas de área y perímetro.

En cuanto a la búsqueda de estrategias, logró identificar los datos que necesitaba para poder contestar a las preguntas y estableció un plan para hacerlo, considerando la

elaboración de una tabla de valores y el uso de fórmulas que le permitieran encontrar el modelo matemático.

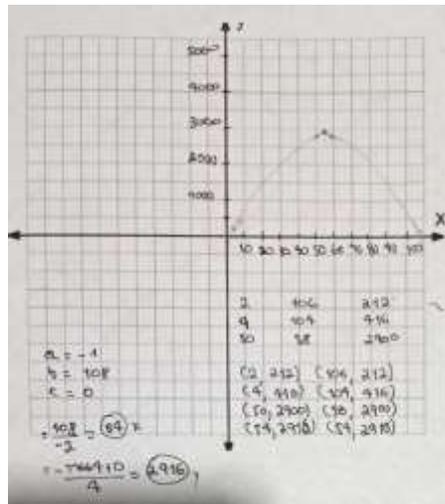
Al momento de llevar adelante la estrategia se puede observar que el estudiante usó las fórmulas de área y perímetro para llegar al modelo matemático (representación algebraica), aunque lo hizo en función de  $b$  y no de  $h$  como se pedía en el problema; sin embargo, de esta expresión extrajo los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  para hallar el vértice. Complementario a esto, realizó una tabla de teniendo en cuenta 10 valores, calculando el área con la base y la altura. (representación tabular).

Al socializar las respuestas, se indaga a mayor profundidad sobre los procesos realizados por el estudiante, preguntando qué criterios tuvo en cuenta para elegir los valores de la tabla y por qué subraya el último valor de ella.

*E1: primero usé la fórmula del perímetro, la despejé y la replacé en la del área, como me dio 108 caí en cuenta que eso es lo que tienen que sumar la base y la altura del rectángulo y que al multiplicarlos me dan el área, entonces empecé a tomar valores de 10 en 10 que me dieran 108 y los multipliqué. Pero ví que en el 60 empezaba a mermar el área y me acordé que con el vértice podía encontrar el valor, entonces encontré el vértice y comparé con la tabla y tenía lógica.*

En este sentido la respuesta de E1, da cuenta de que usó mínimo dos registros de representación para dar respuesta a un problema planteado en lenguaje natural, tuvo en cuenta la heurística de De Guzmán para abordar el problema y comparó los registros de representación usados para llegar a la solución; esto último está en concordancia con lo planteado por Villa y Ruiz (2009).

“La modelación matemática, vista como proceso, implica una serie de acciones o fases que hacen que la construcción o interpretación de un modelo no se efectúe de manera instantánea en el aula de clase, a este proceso lo denominan ciclo de modelación e inicia determinando un fenómeno o problema del “mundo real”, el cual debe ser observado y sometido a un proceso de experimentación que permita profundizar en su comprensión”. (p.5).



**Respuesta E6**

Conjuntamente al analizar las respuestas de E6, se observa que usó diferentes tipos de representación, en este caso tabular, cartesiano y algebraico; sin embargo sus procesos parecen incompletos por lo que se indagó sobre ello a través de la socialización.

*E6: yo empecé haciendo una tabla de valores tomando el valor mínimo y máximo de cada lado y con eso encontré dos coordenadas, luego tomé otro valor (4) e hice lo mismo, pero ví que los puntos quedaban muy cerca, entonces tomé otro valor más grande (50) y ya vi que los puntos quedaban más arriba o sea que se acercaban más a la altura máxima.*

Se le pregunta además de donde salen los valores de a, b y c, a lo que responde

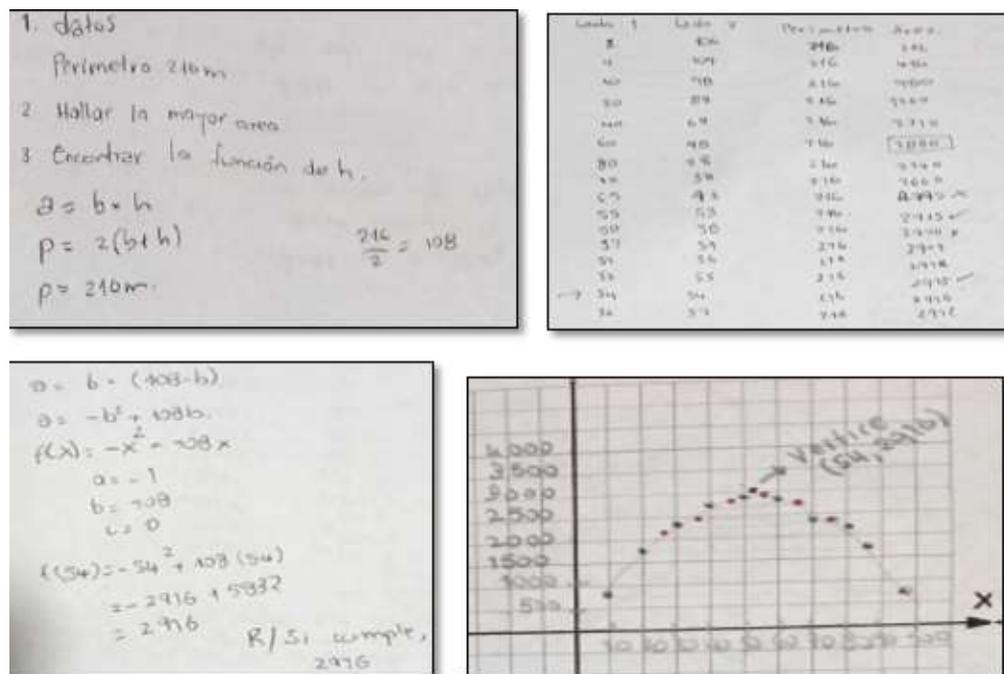
*E6: Había hecho unos cálculos con la fórmula del área y el perímetro y de ahí las saqué y después usé la formula del vértice, lo ubiqué en la gráfica y ví que solo se podía ese punto porque se repite el 54 y ahí entendí que el 196 era el área máxima.*

Se evidencia que E6, usó los diferentes tipos de representación para comparar, predecir y dar solución al problema; elementos vinculados al proceso de modelación matemática. En palabras de Villa, (2007), “se llama simplemente modelo matemático, a un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación” (p.67).

En cuanto a la heurística de De Guzmán, para la solución de problemas, E6 demuestra haber tendido familiarización con el problema y esto se evidencia en la claridad que tuvo al discriminar los datos que necesitaba y lo que le estaban pidiendo resolver; se

evidenció además que pensó en diferentes estrategias las cuales llevó a cabo para comparar y concretar la respuesta. En cuanto a la revisión del proceso, se le hicieron al estudiante las siguientes preguntas: a ¿Has conseguido encontrar la solución al problema?, b ¿Has encontrado algún error en el proceso realizado? ¿Cuál?, c ¿Qué papel cumplió el proceso de modelación matemática como estrategia para la solución del problema?; cuyas respuestas reafirman lo mencionado anteriormente sobre el avance en el proceso de resolución de problemas y el aporte que el proceso de modelación matemática le brindó para ello.

**E6:** a. sí, porque encontré lo que me estaban pidiendo; b. No encontré ningún error, porque verifiqué con los distintos procesos y vi que las respuestas coincidían; c. Me ayuda a encontrar la estrategia correcta para responder a las preguntas y me da más opciones para pensar.



**Respuestas E4**

Frente a esta misma situación, se analizaron los procesos llevados a cabo por E4, y tal como se evidencia en las imágenes, siguió paso a paso la heurística de De Guzmán, además tuvo en cuenta el ciclo de modelación matemática para llevar a cabo la estrategia de solución.

Se resalta de E4 que en la tabla de valores tiene algunos datos seleccionados, en la gráfica tiene los puntos de varios colores y en la representación algebraica luego de hallar

el modelo reemplaza la altura máxima (54). En la socialización se indagan por estos aspectos, obteniendo la siguiente respuesta:

*E4: primero seleccioné el 2280 porque pensé que era el área máxima, pero después ví que era 2915 y por eso están seleccionados también esos valores; después pensé en el 54 pero ví que todos los lados medirían eso y me confundí un poco hasta que recordé que el cuadrado también era un rectángulo y comprendí que esa sería la altura máxima.*

*E4: En el plano puse los puntos de 3 colores, azules teniendo en cuenta la base, rojos teniendo en cuenta ese mismo valor como altura y negro la altura máxima que es el vértice.*

*E4: Reemplacé el 54 en la función para verificar que si cumplía.*

En las respuestas dadas por E4, se evidencia que hubo un proceso de familiarización con el problema y de búsqueda de estrategias; y se resalta que hubo un proceso de verificación y de validación de los procesos realizados. Esto indica que analizó la situación planteada en lenguaje natural y la sometió a un proceso de experimentación que le permitió profundizar en su comprensión y en la búsqueda de datos para construir y validar el modelo que representaba la situación. A este proceso realizado por el estudiante, Villa y Ruiz (2009), lo denominan ciclo de modelación.

Respecto a lo descrito sobre los procesos de E1, E6 y E4, se puede concluir que el docente debe plantear situaciones que propicien el aprendizaje no solo de contenidos, sino de estrategias de resolución de problemas; tales como la manipulación de objetos matemáticos ( en este caso los distintos tipos de representación usados), la activación de su propia capacidad mental (al hacer procesos de análisis y comparación), la reflexión sobre su propio pensamiento (al hacer la revisión del proceso), la confianza en sí mismo, entre otros; tal como lo plantea De Guzmán (2007).

### **7.3 MOMENTO DE REENFOQUE**

En el momento de reenfoque se describe la forma en que los procesos de modelación matemática que se han logrado trabajar desde el momento de ubicación han favorecido la solución de problemas de variación cuadrática y la efectividad de las

situaciones planteadas en los momentos anteriores usando la heurística de Miguel de Guzmán.

La primera situación presentada en el momento de reenfoque, es similar a la del momento de ubicación, teniendo en cuenta el mismo contexto del problema presentado en lenguaje verbal y cambiando el valor de algunas cantidades, además se les proporcionó a los estudiantes una tabla de valores y un plano cartesiano para que los usaran en caso de considerarlo conveniente.

La situación se inicia preguntando *¿Cuáles son los valores que intervienen en la situación, cuáles de ellos varían y cuáles son constantes?*, con el fin de que los estudiantes identificaran las magnitudes involucradas en el problema.

*E3: varían 9000 de descuento por persona, costo. constante 1800000 por el grupo cargo fijo.*

*E10: varían costo por persona, descuento. Constante costo fijo.*

Las respuestas de E3 y E10 evidencian que a diferencia del momento de ubicación, los estudiantes en este punto de la unidad didáctica, lograron identificar las magnitudes involucradas en la situación estableciendo cuales son constantes y cuales variables; lo que según Posada y Villa, (2006), es el inicio de la tarea de construir una función polinómica como modelo matemático.

En concordancia con lo anterior, y reconociendo la relación existente entre la modelación matemática y la solución de problemas planteada desde Villa & Ruiz (2009), “el proceso de modelación está íntimamente vinculado al estudio de situaciones de la realidad y, en la mayoría de los casos, a la solución de problemas.”, (p.7). Visto así, el hecho de reconocer las magnitudes involucradas está ligado a la familiarización con el problema, primer paso fundamental para abordar su solución.

En la pregunta *¿De qué manera podrías saber si es conveniente o no adquirir el plan?*, se espera que los estudiantes emprendan la búsqueda de estrategias, expresando de forma organizada lo que van a hacer para resolverlo.

*E3: completando la tabla de valores y viendo en la gráfica donde empieza a bajar*

*E9: llenando la tabla y haciendo el plano y mirando como se relacionan los valores*

**E10:** primero completando la tabla de valores para comparar los resultados, verificándolos en el plano cartesiano y con la representación algebraica.

En las respuestas de E3, E9 y E10 se resaltan dos elementos que relacionan la modelación de la función cuadrática con la resolución de problemas; el primero de ellos es el uso de diferentes registros de representación tal como la plantean los estudiantes (tabular, cartesiano y algebraico), los cuales dan significado al proceso de modelación matemática; y el segundo, la búsqueda de estrategias para la solución de problemas y la elección de la más adecuada para abordarlos y resolverlos, tal como lo plantea De Guzmán(2007).

En coherencia con ello, la resolución de problemas implica mucho más que la presentación de un enunciado verbal para que el estudiante aplique un algoritmo dado; por el contrario y tal como lo sugiere este mismo autor, es todo un proceso a través del cual el estudiante descubre, plantea y replantea diferentes estrategias para hallar una solución; y es allí donde el proceso de modelación matemática a través del uso de registros de representación semiótica aporta elementos a los estudiantes para abordar la situación de variación cuadrática planteada.

En un segundo momento de la situación se les propone a los estudiantes completar un registro tabular, para establecer con base en él las relaciones existentes entre las magnitudes involucradas y acercarse así a la representación algebraica que se constituirá en el modelo matemático de la situación presentada.

Número de miembros del grupo	Valor del descuento por persona	Valor del viaje por persona	Valor total del viaje para el grupo
1	0.000	531.000	2.500.000
3	2.5.000	515.000	5.357.000
5	40.000	499.000	4.130.000
10	80.000	478.000	6.980.000
15	105.000	465.000	3.910.000
20	130.000	450.000	3.000.000
25	155.000	435.000	4.200.000
30	180.000	420.000	5.400.000
40	260.000	380.000	4.070.000
45	300.000	375.000	3.930.000
55	400.000	350.000	4.250.000

**Registro tabular de la situación**

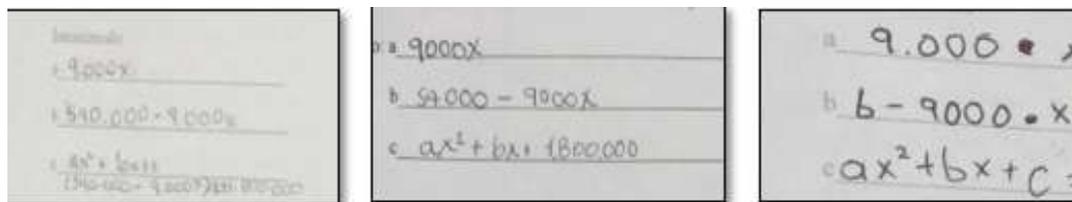
A partir de este registros se le plantea a los estudiantes tres preguntas con el fin de establecer las relaciones entre las magnitudes involucradas en la situación: *a. ¿Cómo hallamos los datos de la segunda columna?, b. ¿Y los de la tercera?, c. ¿y los de la cuarta?*, obteniendo las siguientes respuestas:

*E3: a. multiplicar \$9.000 por el número de miembros del grupo, b. a 540.000 le resto el valor de la segunda columna, c. multiplicar el valor de la tercera columna por el número de miembros del grupo y sumarle 1.800.000.*

*E9: a. multiplicando 9000 por el número de personas (x), b. restando a 540.000 9.000x, c. al resultado anterior sumarle 1.800.000*

*E10: a. descuento por número de personas, b. valor del viaje – descuento por persona, c. valor del viaje por persona por número de miembros mas precio fijo.*

Estas respuestas dan muestra de que los estudiantes representaron en lenguaje escrito los datos obtenidos en el registro tabular, estableciendo las relaciones existentes entre las cantidades, para posteriormente representarlas en el lenguaje algebraico tal como se muestra a continuación, cuando se les pidió expresar algebraicamente lo escrito en los puntos anteriores.

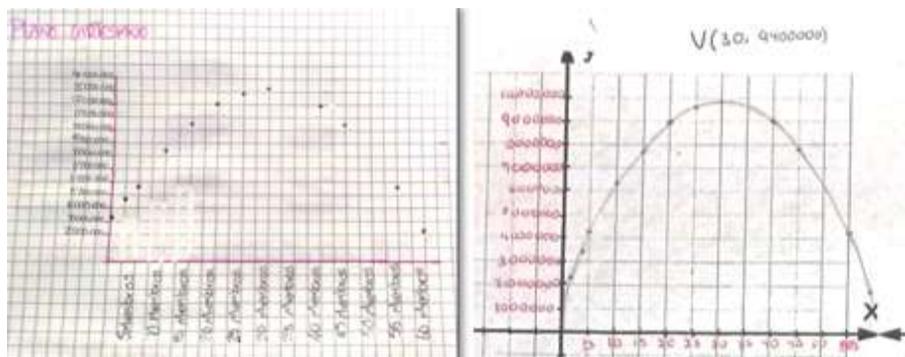


*Respuestas de E3, E9 y E10 respectivamente*

Se puede apreciar que *E1* logró llegar al modelo algebraico a través de la conversión entre diferentes tipos de representación, es decir, obtener función cuadrática que modela la situación planteada. *E9* y *E10* tuvieron un acercamiento a ella en los puntos a y b, donde lograron representar a través del lenguaje algebraico lo antes representado a través del verbal y la representación tabular; pero al formalizarla, si bien la relacionaron con la representación algebraica de la función cuadrática, no establecieron claramente la representación que se esperaba a través de la situación planteada; rescatando de *E9* que tuvo en cuenta el valor constante de *c*.

De acuerdo a lo anterior, se puede decir que los sistemas de representación semiótica en matemáticas, son un gran aporte a la modelación de la función cuadrática, tal como lo sugieren Posada y Villa, (2006), quienes plantean entre otras cosas, generar actividad cognitiva de conversión entre los diferentes registros de representación para objetivar el concepto matemático de función.

El momento final de la situación consistió en proponer a los estudiantes representar los datos obtenidos en el registro tabular en el plano cartesiano y con base en ello responder: *¿Para qué número de viajeros la empresa obtendría su máximo ingreso? ¿Cómo se puede observar este valor en la gráfica de la función?*. Las respuestas obtenidas fueron las siguientes:



*Representación cartesiana elaborada por E9 y E10 respectivamente*

**E9:** Llevaría 30 personas porque con un grupo de 60 saldría un descuento del 100% del costo del viaje, con 30 pasajeros tendría un muy buen descuento por persona y también sería bueno el descuento para el grupo.

**E10:** Con 30 personas, el vértice.

Se evidencia que E9 y E10 realizaron un adecuado registro cartesiano con base en los datos obtenidos en la tabla de valores, reconociendo la curva formada como una parábola y un registro de representación de la función cuadrática, y el vértice como el punto más alto de la curva, lo cual les ayudó a dar respuesta a el interrogante planteado. En la respuesta de E9 se puede visualizar en el análisis realizado, que está completamente contextualizado con la situación matemática, presentada como un problema del entorno real de los estudiantes.

Se puede decir entonces, que el tipo de problemas que se plantean a los estudiantes tiene mucho que ver en la forma que ellos abordan el concepto matemático y el proceso de modelación. En palabras de Villa, Sánchez, & Castrillón (2017), la modelación en la actividad escolar tiene dos características principales; la primera de ellas es que la actividad tiene que ser un problema y no un simple ejercicio para los estudiantes; la segunda enfatiza que la actividad debe extraerse de contextos cotidianos para los estudiantes.

Estos mismos autores plantean que los problemas auténticos presentados como enunciados verbales; proporcionan condiciones para que los estudiantes se involucren en la producción de representaciones matemáticas de situaciones en contexto y obtengan una imagen más amplia de las relaciones entre las matemáticas y la experiencia cotidiana.

En segunda situación planteada para el momento de reenfoque, la cual planteaba un premio de 20m de alambre para cercar un terreno rectangular de siembra aromática en la institución se les plantea a los estudiantes dos preguntas: ¿cuáles crees que deben ser las dimensiones del terreno a cercar para que su área sea máxima? y construye un modelo en forma algebraica que represente la situación.

En esta situación se les brinda a los estudiantes la completa libertad de usar los registros de representación que consideren, por ello sólo se plantea un problema auténtico presentado en lenguaje natural y una imagen del posible terreno.

Cabe resaltar también, que la situación se resolvió inicialmente de forma individual y luego fue socializada dentro de unos equipos organizados a gusto de los estudiantes para elegir cual querían exponer. De esta actividad se resaltaron los siguientes:

1.  $P = 20\text{m}$   
 $P = 2(b+h)$   
 $A = b \times h$

2. Vértice =  $(5, 25)$   
 $A = bx - ax^2$   
 $= 10x - ax^2$

base	altura	Area
1	9	9
2	8	16
3	7	21
4	6	24
5	5	25
6	4	24
7	3	21
8	2	16
9	1	9

→ mayor área

R/ dimensiones: base = 5m  
altura = 5m

**Respuestas E1**

Como se puede observar en la imagen, E1 utilizó los registros de representación tabular y algebraico, logrando a través de ellos dar respuesta a las preguntas planteadas en

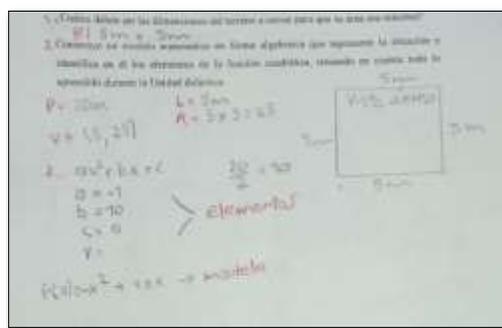
la situación. A través de la socialización se indagó a mayor profundidad sobre los procedimientos usados pidiendo al estudiante que describiera cómo resolvió el problema.

*E1: Primero miré que datos me estaban dando y qué tenía que encontrar, como era la mayor área y tenía el perímetro, entonces usé esas dos fórmulas, también hice una tabla de valores porque es la forma más fácil de mirar cual era la mayor área multiplicando la base por la altura, y de ahí saqué la respuesta a la primera pregunta.*

*También sabía que el punto donde estaba la mayor área era el vértice, o sea (5,25) y cogí la fórmula que habíamos hecho en otro problema parecido y replacé el 10 porque b es la mitad del perímetro y con eso resolví el punto 2.*

En la respuesta de E1, se observa que primero hizo una familiarización con el problema identificando los datos, lo que le pedía el problema y los elementos que necesitaba para su solución; además se evidencia que hay una estrategia clara para solucionarlo la cual lleva adelante con éxito; se resalta también las relaciones que encontró con problemas anteriores para abordar éste, lo que le facilitó en gran medida y de la mano del uso de diferentes sistemas de representación, la solución efectiva del problema.

Lo anterior hace alusión a la relación existente entre el proceso de modelación matemática y la solución de problemas que plantea el Ministerio de Educación Nacional, en los lineamientos curriculares de matemáticas (1998), reconociéndolas como estrategias que potencializan el pensamiento matemático cuando se generan situaciones cotidianas que estén relacionadas con otras situaciones, con las matemáticas y otras ciencias; proporcionan un aprendizaje activo y contribuyen significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas. Es por ello que incorporar el proceso de modelación matemática en la solución de problemas evidencia un avance significativo en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, tal como se refleja en las actividades desarrolladas por E1.



#### Respuestas E4

En la socialización de E4, se le pidió de igual forma que describiera el proceso usado para resolver la situación, obteniendo la siguiente respuesta:

*E4: Primero leí el problema y vi que me daban el perímetro 20 y me preguntaban por el mayor área, como ya habíamos hecho un problema similar sabía que el mayor área era el cuadrado dividí 20 entre 4 y de una supe que el lado era 5 y el área 25 y también recordé que ese era el vértice (5, 25)*

*Para el punto 2 cogí la función cuadrática, primero sabía que c era 0 y que a era -1 por el problema anterior y b era la mitad del perímetro, también por el problema anterior y así saqué los elementos y el modelo.*

Con base en estas respuestas se puede observar que E4 tuvo en cuenta la heurística de Miguel de Guzmán para dar solución al problema, de la siguiente forma: *familiarización con el problema* (al leerlo y extraer los datos que le daban y los que le pedían), *búsqueda de estrategias* (al asociarlo con problemas similares y pensar como los había solucionado), *llevar adelante la estrategia* (al usar la estrategia que consideró más pertinente de acuerdo a su experiencia).

Se puede observar también que hubo una comprensión del fenómeno y el uso de diferentes registros de representación, ambas subcategorías de la modelación matemática. Y que a través de ello hubo un análisis y una interpretación de una situación de variación cuadrática, lo que se evidencia en los resultados obtenidos.

Se indagó también sobre la revisión del proceso siguiendo la heurística de Miguel de Guzmán a través de las siguientes preguntas: 1. *¿crees que encontraste la solución y por*

*qué?, 2. ¿Qué papel cumplió el proceso de modelación matemática como estrategia para la solución del problema?*

*E4: 1. Sí, porque di respuesta a las preguntas propuestas, 2. Me dio la estrategia correcta para responder las preguntas.*

En esta etapa de reflexión, el estudiante se hace consciente de que la solución obtenida es acorde a lo que se pretendía y que el proceso de modelación matemática favoreció la resolución del problema.

En las respuestas descritas anteriormente, se puede observar el cambio que tuvieron los estudiantes a la hora de resolver problemas de variación cuadrática articulando el proceso de modelación matemática y la resolución de problemas desde la heurística de Miguel de Guzmán.

Si se observa la forma en que lo hicieron en el momento de ubicación y como fueron avanzando hasta el momento de reenfoque a través de las explicaciones y actividades realizadas, se puede decir que los estudiantes se apropiaron de la heurística de De Guzmán para la solución de problemas (familiarización, búsqueda de estrategias, llevar adelante la estrategia y revisión del proceso), articulando en cada uno de estos momentos el ciclo de modelación matemática propuesto por Posada y Villa (2006) (Discriminar las magnitudes, identificar la posible covariación entre las magnitudes, uso de tablas de valores, reconocer la razón de cambio y generar actividad cognitiva de conversión entre los diferentes registros de representación para objetivar el concepto matemático de función.).

Se resalta además, la articulación que realizaron los estudiantes entre las representaciones de la función cuadrática (tabular, cartesiana y algebraica para identificar la variación entre las magnitudes involucradas y comprender la funcionalidad del objeto matemático, pues en palabras de Duval (2004), citado en Amaya (2019).

No es posible acceder a un objeto matemático a través del análisis de una sola de sus representaciones, ya que esto lleva al estudiante a confundir el objeto representado con su representante, se requiere tener actividad con diversas representaciones del objeto estudiado para que se llegue a comprenderse su funcionalidad (p. 78).

Al finalizar la unidad didáctica, se aplicó una entrevista semiestructurada al grupo, generando un paralelo entre la percepción de los estudiantes sobre la forma como resolvían situaciones de variación cuadrática antes de ser desarrollada la Unidad; y de qué forma resuelven ese tipo de situaciones ahora, usando el proceso de modelación matemática y aplicando la Heurística de Miguel De Guzmán, llegando a los siguientes puntos en común:

*Antes se intentaba leer bien el problema y entenderlo bien para saber que había que hacer para solucionarlo, pero ningún estudiante expresó usar diferentes representaciones para buscar dicha solución, afirman que solo buscaban un método que no siempre funcionaba, normalmente solo miraban los números y los valores y con base en eso y con fórmulas se trataba de resolver y que la única forma de verificar era a través del uso de la calculadora.*

Ahora reconocen que *‘desde el plano cartesiano y las tablas de valores se comprende de manera más fácil la solución, resolviendo los problemas de manera práctica y muy diferente a lo que se hace escolarmente.’*

Resaltan además que *‘consideran importante la búsqueda de estrategias y la elaboración de un plan para resolverlo porque da una mejor comprensión del problema y una mejor forma para llegar a la solución adecuadamente’.*

Al finalizar la Unidad didáctica, para verificar los resultados obtenidos *‘miran que la respuesta del final si concuerde con lo que se está pidiendo en el problema y comparan entre las tablas, gráficas, números y fórmulas.’*

Afirman además que la modelación matemática les *‘da una forma de ver el problema que permite entender mucho mejor como resolverlo, que les da otras alternativas que no les dan da usando solo números y formulas normales.’*

Resaltan el valor del plano cartesiano, cuando afirman que *‘Con las gráficas por ejemplo podemos verificar muy fácil si la respuesta es correcta, porque, aunque el plano lo conocíamos desde séptimo, no lo usábamos para resolver este tipo de problemas y el plano nos muestra los valores que necesitamos para la función’*

Finalizan diciendo que *‘Todo esto es algo nuevo para nosotros, la modelación nos da los pasos y una mejor estrategia para cumplir con las preguntas que nos hacen y hacer*

*el trabajo bien, además esto lo podemos seguir implementando para resolver problemas de otras áreas, por ejemplo, en física también nos puede servir bastante.'*

De las declaraciones dadas por los estudiantes, se resalta la importancia que ellos reconocen ahora en buscar estrategias y ejecutar un plan al momento de resolver un problema de variación cuadrática, dando un reconocimiento especial a la forma en que el uso de diferentes registros de representación en el proceso de modelación matemática les permite entender mucho mejor como resolver un problema, verificar la solución y aplicarlo en otras áreas del conocimiento.

En concordancia con ello, De Guzmán (2007) plantea que se debe propiciar a través de la solución de problemas la manipulación de objetos matemáticos, la activación de la propia capacidad mental de los estudiantes, la reflexión sobre su propio pensamiento, y la preparación para otros problemas de la ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana.

Y como se puede evidenciar en las respuestas de los estudiantes, el proceso de modelación propicia todo lo anterior, ya que provee al estudiante alternativas para llegar a la solución de un problema a través de las representaciones semióticas descritas por Duval (2004), ya que es el dominio adecuado de las transformaciones entre las representaciones lo que lleva a los estudiantes a comprender un concepto matemático como lo plantea Amaya (2019).

## 8 CONCLUSIONES

La modelación matemática facilitó la resolución de situaciones de variación cuadrática en los estudiantes de grado noveno a través de la articulación del ciclo de modelación matemática con la Heurística de Guzmán para resolver problemas; familiarizándose con el problema a partir de la identificación de las magnitudes involucradas, buscando e implementando diferentes estrategias a través del uso de diferentes registros de representación semiótica; y revisando el proceso a través de la articulación entre dichos registros.

En el momento inicial, se pudo constatar que los estudiantes presentan dificultades al enfrentarse a una situación de variación cuadrática, se evidenció que no identificaron las magnitudes involucradas en el problema, no establecieron un plan para resolverlo, se limitaron al uso de cálculos numéricos y al ensayo de fórmulas ya conocidas, descartando el uso de diferentes registros de representación semiótica, el contexto de la situación y desconociendo la heurística para dar solución a un problema matemático.

En el instrumento final, al vincular el proceso de modelación matemática en la resolución de problemas de variación cuadrática desde la heurística de Miguel De Guzmán, los estudiantes abordaron de forma diferente las situaciones planteadas, pudieron familiarizarse con el problema, buscar y llevar a cabo una estrategia y revisar el proceso realizado; todo esto a través del ciclo de modelación, el cual a través del uso de diferentes sistemas de representación semiótica permitió establecer la relación entre las magnitudes y dar solución a los problemas.

El aprendizaje de la función cuadrática direccionado desde una perspectiva variacional con situaciones reales presentadas en lenguaje natural permitió a los estudiantes articular las representaciones tabular, cartesiana y algebraica para identificar la variación entre magnitudes y dar solución a las situaciones planteadas.

La implementación de Unidades Didácticas en las cuales se vincula el proceso de modelación matemática en la solución de situaciones de variación cuadrática, propicia en los estudiantes espacios de formación y reflexión más conscientes y dinámicos, lo cual les

permite interactuar de forma más efectiva con el objeto matemático a través de sus diferentes formas de representación.

## 9 RECOMENDACIONES

Se recomienda a los futuros investigadores realizar estudios que permitan fortalecer la resolución de problemas a través del proceso de modelación matemática, propiciando en los estudiantes espacios donde puedan llevar a cabo el ciclo de modelación.

Se recomienda abordar el concepto de función cuadrática desde una perspectiva variacional, generando situaciones que partan de un fenómeno expresado en lenguaje natural y que permita la construcción de diferentes registros semióticos de representación, para que en esta medida se constituya en un buen objeto de modelación matemática.

Se recomienda tener en cuenta en el diseño de las situaciones problema el contexto cotidiano del estudiante, de forma tal que éstas sean situaciones reales que permitan una mayor familiarización y motivación al momento de abordarlas.

## 10 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Amaya, T. (2019). Modelación matemática de relaciones funcionales contextualizadas.
- Barajas A, C., & López V, E. (2015). ¿Qué tan a menudo siente un estudiante que la fórmula no es suficiente para resolver un problema?: Una experiencia de aula del Club Matemático Euler, UIS. *Revista Colombiana de Matemática Educativa Vol.1*, 652-657.
- Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas. El trabajo de Alan Schoendfel. *Cuadernos de Investigación en Educación Matemáticas*. Vol 1. N°1.
- De Guzmán, M. (1995). *Para pensar mejor: Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*. Madrid: Pirámide.
- De Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación* N.º 43, 19-58.
- Duval, R. (2004). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del conocimiento. Cali: Universidad del Valle.
- Fresneda Patiño, E., & Sarmiento Pulido, S. (2015). Resolución de problemas: Estrategia de aula para el desarrollo de operaciones con expresiones algebraicas. *Revista Colombiana de Matemática educativa*, 616-622.
- González Vargas, J. E., & Flórez Vásquez, J. M. (2018). *La modelación matemática y la construcción de la covariación*. Bogotá: Tesis de Maestría.
- Hernández R, Fernández C y Baptista P. (2014). Metodología de la investigación. México D.F. Editorial. Mac Graw Hill.
- Mesa, Y. y Villa J. (2007). Elementos históricos epistemológicos y didácticos del concepto de función cuadrática. *Revista virtual FUCN*, 21.
- Mesa, Y., y Villa, J.A (2008). El Concepto de Función Cuadrática: Análisis histórico, epistemológico y didáctico. Monografía no publicada. Medellín: Universidad de Antioquia
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá: Gobierno de Colombia.
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.

- Posada, F. A., & Villa, J. A. (2006). El razonamiento algebraico y la modelación matemática. En F. A. Balvín, & J. A. Ochoa, *Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico Didáctica de las matemáticas*, 2 (págs. 127-163). Medellín: Gobernación de Antioquia.
- Posso, T. J., & Torres, L. A. (2019). Aspectos característicos del pensamiento variacional en la modelación de fenómenos a través de la función cuadrática. *Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, (págs. 1-8). Medellín.
- Rodriguez Gómez, G., Gil Florez, J., & García Jimenez, E. (1996). *Tradición y enfoques de la investigación cualitativa*. Obtenido de <https://www.researchgate.net>: [https://www.researchgate.net/publication/44376485\\_Metodologia\\_de\\_la\\_investigacion\\_cualitativa\\_Gregorio\\_Rodriguez\\_Gomez\\_Javier\\_Gil\\_Flores\\_Eduardo\\_Garcia\\_Jimenez](https://www.researchgate.net/publication/44376485_Metodologia_de_la_investigacion_cualitativa_Gregorio_Rodriguez_Gomez_Javier_Gil_Flores_Eduardo_Garcia_Jimenez).
- Silva Jimenez, C. (2018). *Estrategia de Modelación matemática para la comprensión de un fenómeno físico de variación*. Bogotá.
- Tamayo, M. (2008). *El Proceso De La Investigación Científica*. Limusa. (Barrantes, 2006)
- Tamayo, O. D. (2013). Las unidades didácticas en la enseñanza de las Ciencias Naturales, Educación Ambiental y Pensamiento Lógico Matemático. *Itinerario Educativo*, 115-135.
- Vasco, C. E. (2006). *El pensamiento variacional y la modelación matemática*.
- Villa Ochoa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo.
- Villa Ochoa, J. A., & Ruiz Vahos, M. (2009). Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte* N°27, 1-21.
- Villa Ochoa, J. A., Bustamante, C., Berrio, M., Ososio, A., & Ocampo Diego. (2008). El proceso de modelación matemática en las aulas. A propósito de sus 10 años de inclusión en los lineamientos curriculares colombianos. *Curso dictado en 9° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*.
- Villa Ochoa, J., Sánchez Cardona, J., & Castrillón Yepes, A. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas. *Espacio plural* V.18, 219-251.

## Anexo 1 Consentimiento informado para la intervención en la Institución



Medellín, Octubre de 2021

Señora  
**MÓNICA PATRICIA PÉREZ SÁNCHEZ**  
Rectora  
Institución Educativa Concejo De Medellín  
Ciudad

Cordial saludo,

Yo, CATALINA MARÍA VARÓN MACHADO, como estudiante de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias de la Universidad Autónoma de Manizales, solicito ante usted permiso para desarrollar dentro de la institución educativa y con los estudiantes de 9º grado, la propuesta de investigación denominada *La Modelación matemática en la resolución de problemas de variación cuadrática*.

Para el desarrollo de la investigación, se recolectará información a través de intervenciones de aula, guías de actividades y entrevistas. Vale la pena resaltar que la información se utilizará únicamente con fines investigativos y se mantendrá la confidencialidad de la misma, al igual que mi compromiso a dar a conocer los resultados a la comunidad educativa una vez concluido el proyecto.

Atentamente,

CATALINA VARÓN M.  
CATALINA MARÍA VARÓN MACHADO  
Estudiante de maestría en Enseñanza de las Ciencias  
Universidad Autónoma de Manizales

Helmy Higuera  
Coordinador académico



**UNIDAD DIDÁCTICA**  
**LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN LA RESOLUCIÓN DE**  
**PROBLEMAS DE VARIACIÓN CUADRÁTICA**

**GRADO:** Noveno

**OBJETIVO:** Identificar saberes previos, dificultades y habilidades en los estudiantes para construir modelos matemáticos a través de la resolución de problemas que involucren situaciones de variación cuadrática

**DBA No 1:** Propone y desarrolla expresiones algebraicas en el conjunto de los números reales y utiliza las propiedades de la igualdad y de orden para determinar el conjunto solución de relaciones entre tales expresiones.

**EVIDENCIAS DE APRENDIZAJE**

- Identifica y utiliza múltiples representaciones para modelar fenómenos de variación.
- Establece conjeturas al resolver una situación problema, apoyado en propiedades y relaciones entre números reales.
- Determina y describe relaciones al comparar características de gráficas y expresiones algebraicas o funciones.

Tabla. Momentos de la unidad didáctica 1

Objetivo	Actividades	Propósito	Descripción de las actividades	Tiempo
Identificar la manera como los estudiantes resuelven situaciones problemas asociadas al aprendizaje de la función cuadrática.	ACTIVIDAD 1. Instrumento de exploración: “Construyendo modelos 1”	<b>Momento de ubicación</b>		
		Identificar la forma en que los estudiantes se enfrentan a situaciones de variación cuadrática, a través de la resolución de problemas y la modelación matemática.	Se proponen dos situaciones problema a través de enunciados verbales sobre situaciones en contexto que sean susceptibles de ser modeladas. Los estudiantes deben en un primer momento identificar las magnitudes involucradas en el problema y acercarse a la construcción del modelo algebraico a través de unas preguntas orientadoras. En un segundo momento se socializa la actividad, buscando indagar más sobre los razonamientos de los estudiantes y construyendo una primeras ideas sobre los procesos a realizar.	6 horas (2 horas por día, 360 minutos)
Generar procesos de aprendizaje cruzados por la modelación matemática en la solución de las dificultades presentadas	ACTIVIDAD 1. Construcción y aplicación de un instrumento con situaciones asociadas al reconocimient o de los elementos de la función cuadrática y su	<b>Momento de desubicación</b>		
		Comprender los elementos y registros de representación de la función cuadrática a medida que los estudiantes se enfrentan a diversos problemas en variados	Se propondrá una actividad en línea a través de geogebra, la cual será posteriormente socializada en un encuentro presencial. En un segundo momento se propondrá una actividad por medio de una presentación ppt para identificar los	4 horas (2 horas por día, 240 minutos)

<p>por los estudiantes, respecto a situaciones problemas que vinculan situaciones de variación cuadrática.</p> <p>Conducir a los estudiantes en la heurística de resolución de problemas de Miguel De Guzmán, asociando el proceso de modelación matemática</p>	<p>importancia al resolver situaciones de variación.</p> <p><b>ACTIVIDAD 2.</b></p> <p>Explica ción por parte de la docente, de la solución de problemas relacionados con la variación cuadrática, utilizando la heurística de resolución de problemas de Miguel de Guzmán, asociando en el proceso la modelación matemática.</p>	<p>contextos que propicien identificar fenómenos de variación.</p> <p>Explicar a los estudiantes cómo resolver situaciones problemas que involucren la función cuadrática desde una perspectiva variacional, mediante la heurística de Miguel de Guzmán, incorporando el proceso de modelación matemática.</p> <p>Evidenciar los procesos realizados por los estudiantes en la aplicación de la heurística de resolución de problemas de Miguel de Guzmán, cruzada por el proceso de modelación matemática.</p>	<p>elementos de la función y resolver una situación problema, la cual será socializada en un encuentro presencial.</p> <p>Se presentará a los estudiantes un problema asociado a situaciones de variación cuadrática solucionado y modelado mediante la heurística de Miguel de Guzmán, donde a través del proceso de modelación matemática, se espera que los estudiantes logren representar el lenguaje natural en el lenguaje algebraico, reconocer una relación funcional y sus elementos, identificar los elementos de una función dada y la variación entre magnitudes.</p> <p>Además, se proponen dos situaciones problemas que el estudiante desarrollará de manera individual, teniendo en cuenta las anteriores explicaciones y utilizando la heurística de Miguel de Guzmán e incorporando el proceso</p>	<p>6 horas (3 horas por día, 360 minutos)</p>
---	---	---	--	---

---

de modelación matemática.

La solución de una de las situaciones problemas, será presentada por el estudiante mediante un video donde muestre el paso a paso de la solución, luego se socializarán mediante un encuentro virtual y en el que los estudiantes compartirán sus experiencias durante la solución de la situación problema al aplicar la heurística de Miguel de Guzmán, incorporando el proceso de modelación matemática.

Momento de reenfoque

Analizar las implicaciones de las actividades planteadas en la unidad didáctica respecto de la resolución problemas asociados al aprendizaje de la función cuadrática a través del proceso de modelación matemática.	ACTIVIDAD 1 Aplicación del instrumento “Interactúa con tus saberes II	Indagar acerca de la efectividad de las actividades desarrolladas sobre la forma en que los estudiantes resuelven problemas aplicando la heurística De Guzmán y el proceso de modelación matemática.	Aplicación del instrumento:” Construyamos modelos II” realizando algunas modificaciones con respecto al instrumento inicial, con el fin de establecer los cambios en la forma de resolver problemas aplicando la heurística de Miguel de Guzmán cruzada por el proceso de modelación matemática. Una vez realizado, se hará una socialización y el cierre de la unidad didáctica.	6 horas (3 horas por día, 360 minutos)
--	--	--	--	--

---

Fuente. Elaboración propia.

**MOMENTO 1: UBICACIÓN**  
**INSTITUCIÓN EDUCATIVA CONCEJO DE MEDELLÍN**  
**ACTIVIDAD 1: CONSTRUYENDO MODELOS I**

**PROPÓSITO**

Identificar la manera como los estudiantes resuelven situaciones problema asociadas al aprendizaje de la función cuadrática, desde la modelación de fenómenos de variación.

**RECURSOS**

Guía de la actividad para cada estudiante, presentación en power point, vínculos de páginas de actividades.

**DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD**

Este primer instrumento se realizará a través de una guía, donde los estudiantes tendrán la posibilidad de desarrollar de forma individual cada una de las situaciones planteadas; para ello dispondrán de un tiempo de 2 horas; luego se realizará un encuentro presencial que posibilite leerlas, analizarlas y socializarlas, brindando en todo momento la posibilidad de que los estudiantes participen de forma tal que a través de la interacción se pueda formalizar de alguna manera los resultados obtenidos. Esto permitirá identificar cómo los estudiantes abordan en un primer momento las situaciones problema, qué tienen en cuenta para la solución de éstas, la forma en que las analizan y los procesos que realizan. Cada situación problema está relacionada con situaciones de la cotidianidad, mediante lo cual se espera que los estudiantes puedan comprender de forma efectiva cada uno de los problemas.

**ACTIVIDAD 1**  
**CONSTRUYENDO MODELOS I**

La siguiente guía tiene dos situaciones problema que debes resolver en forma escrita, clara y ordenada mostrando todos los procedimientos que empleas.

**PROBLEMA 1.** Una empresa de telefonía que llegó nueva al mercado colombiano, le ofreció a John un plan de llamadas a larga distancia a \$540 el minuto, con un cargo fijo de \$1800 por el servicio (Este valor no tiene descuento). Sin embargo, para varios minutos, hace un descuento de \$9 por cada minuto, es decir, si gasta 10 minutos le descuentan \$90 por cada minuto. Antes de tomar una decisión, John quiere identificar cuáles son los valores que intervienen en la situación, cuáles de ellos varían y cuáles son constantes. ¿Qué indicaciones le darías frente a estos datos?

¿De qué manera podría saber John si es conveniente o no adquirir el plan?

---

---

---

---

¿Cómo podríamos saber a partir de cuántos minutos John obtendría el mayor descuento?

---

---

---

---

¿Cuál crees que podría ser el valor más alto del plan?

---

---

---

---

¿Según eso, si fueras el dueño de la compañía telefónica, máximo cuantos minutos aceptarías? ¿por qué?

---

---

¿Podría John definir una expresión algebraica con la cual se pueda hallar el valor del plan para cualquier número de minutos? ¡Ayúdalo!

---

---

## **PROBLEMA 2. EXCURSIÓN AL PARAÍSO DEL PACIFICO COLOMBIANO.**

Para el final del año 2022, la I.E. Concejo de Medellín quiere realizar una excursión con los alumnos del grado 11°, para lo cual solicitó una cotización a la agencia de viajes PACIFICO BIODIVERSO LTDA, la cual ofrece el siguiente paquete turístico a Nuquí, Chocó con un costo de \$900.000 por persona (Incluye visita al baño termal, al sendero cascada, a la cascada roñosa, caminata a la estación ambiental Amargal, Surfing, buceo y senderismo) y la visita al PNN Ensenada de Utria que tiene un costo de \$3.000.000 (Este valor no tiene descuento y es igual para cualquier número de personas). Sin embargo, para un grupo de estudiantes se hace un descuento de \$15.000 por cada persona, válido para cada uno de los miembros del grupo, es decir, si viajan 10 estudiantes se hace un descuento de \$150.000 a cada uno de los estudiantes que viajen. Con base en la información, responde:

¿Cuáles son las magnitudes que intervienen en la situación?

---

---

¿Cuáles de ellas varían y cuáles son constantes?

---

---

Si el costo para un grupo es de 16.500.000 incluyendo la visita al PNN Ensenada de Utria ¿Cuántas personas hacen parte del grupo? \_\_\_\_\_

¿Si tu fueras el administrador de la agencia de viajes cuál sería el cupo máximo que aceptarías y por qué?

---

---

Expresa con palabras la relación existente entre cada una de las siguientes cantidades

Número de miembros del grupo y valor del descuento por persona

---

---

Número de miembros del grupo y valor del viaje por persona

---

---

Número de miembros del grupo y valor total del viaje para el grupo

---

---

Representa mediante símbolos (expresiones algebraicas) las anteriores relaciones.

---

---

---

Para la solución de la actividad anterior, se brindará a los estudiantes un espacio de 2 horas de trabajo individual; al finalizar cada estudiante deberá presentar a la docente sus respectivas soluciones y socializarlas mediante un encuentro presencial de 2 horas de duración.

Durante dicho encuentro cada estudiante deberá identificar sus respuestas y explicar a la docente y demás compañeros el proceso utilizado para llegar a ellas. Con base en esto, se buscarán puntos en común y diferencias, que serán retroalimentadas para realizar un acercamiento a la formalización de los resultados obtenidos.

## **MOMENTO 2: DESUBICACIÓN**

### **OBJETIVO**

Reconocer los elementos de la función cuadrática, la forma en que éstos varían y como interfieren en la solución de situaciones de variación cuadrática

### **ACTIVIDAD 1. RECONOCIENDO LOS ELEMENTOS DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA**

La finalidad de esta actividad es que los estudiantes identifiquen en un primer momento la forma de hallar el vértice de una parábola y de evidenciar que ocurre al variar los valores de los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  dentro de la función.

En un segundo momento, se espera que los estudiantes a través de lo observado en la parte 1 y la retroalimentación por parte de la docente sobre los elementos de la función cuadrática, resuelvan 7 preguntas basadas en una situación problema.

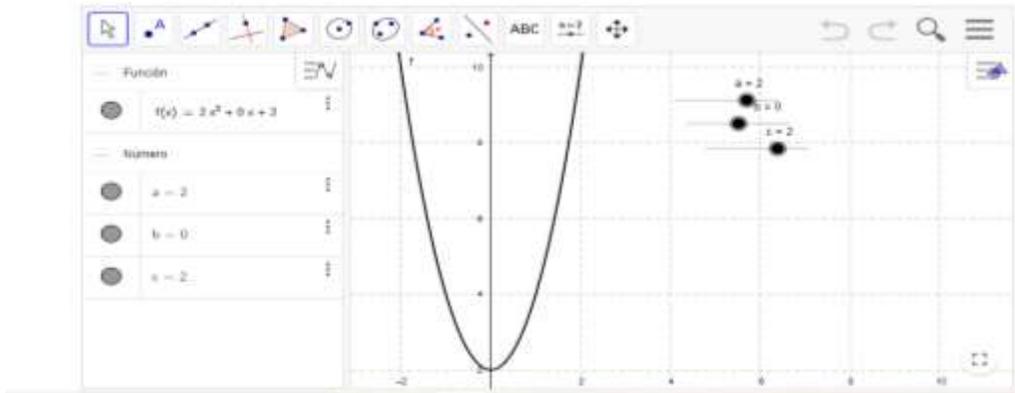
#### **PARTE 1**

En esta actividad los estudiantes tendrán la oportunidad de dirigirse a la siguiente página web

<https://www.geogebra.org/m/UUpQCSwc>

En esta página encontrarán la forma de hallar el vértice de una parábola y de visualizar cómo esta cambia al variar los valores  $a$ ,  $b$  y  $c$  de la función cuadrática. Los estudiantes jugarán con los valores, responderán las preguntas planteadas en la página y finalmente se completará la actividad con otras preguntas relacionadas con lo observado al cambiar los valores de los coeficientes. A continuación, se muestra en imágenes lo que los estudiantes se encontrarán en la página.

En la siguiente hoja de trabajo, tenemos la representación genérica para una función cuadrática en función de los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  que los deslizadores que encontrarás en la parte derecha. Contesta a las preguntas que encontrarás a continuación:



*Imagen de la pantalla de geogebra*

Interactúa con la gráfica para dar respuesta a las siguientes preguntas:

Calcula las coordenadas del vértice de la parábola que aparece en la imagen, representa este punto en la gráfica y toma captura de pantalla para enviar a la docente.

Explica qué ocurre al variar el coeficiente  $a$

---

Qué ocurre al variar el coeficiente  $b$

---

Qué ocurre al variar el coeficiente  $c$

---

Después de que los estudiantes hayan explorado y analizado la forma en que varía la gráfica, pero además de comprender cómo se halla el vértice de ésta, se hará la retroalimentación a través de un encuentro denominado “Qué observamos” el cual consiste en que cada estudiante formulará una conclusión respecto a la exploración realizada en la página y a la respuesta que dio a cada una de las preguntas.

La actividad inicia cuando el docente selecciona a un estudiante al azar y le formula la siguiente pregunta: ¿qué observaste? aclarando que el enunciado debe ser diferente a los planteados por sus demás compañeros. Cada aporte de los estudiantes será escrito en el tablero, creando un mapa de ideas.

Aprovechando las respuestas de los estudiantes se hará la socialización de la temática recordando el concepto de función cuadrática, la forma en que varía y los procesos a seguir para identificar los elementos de la parábola. Para finalizar concretamos todos los aportes para lograr que los conceptos queden claros y dar inicio al proceso de resolución de problemas.

## **PARTE 2. RESUELVO UNA SITUACIÓN PROBLEMA**

Teniendo en cuenta la socialización realizada con los estudiantes acerca del contenido de la página web, en lo que respecta a los elementos de la función cuadrática, la forma en que estos varían y teniendo en cuenta algunas definiciones dadas en la siguiente presentación power point; resuelve de manera individual las siguientes preguntas con base en la situación presentada.

Luego de la exploración y solución de los ejercicios, se realizará un encuentro presencial donde se hará la socialización de la actividad a través de un conversatorio con todos los estudiantes participantes, para ello, cada estudiante tendrá asignado su número de la lista, previamente se meten dentro de una bolsa todos los números y se va sacando de a uno al azar; de esta forma el estudiante seleccionado responderá a una pregunta realizada por la docente de las ya propuestas en la actividad. De esta misma forma se socializarán todas las preguntas.

Durante la intervención de los estudiantes, el docente va retroalimentando la temática con el propósito de ir fortaleciendo los procesos que se deben seguir para identificar los elementos de la función cuadrática y resolver situaciones problema de variación.

## **MOMENTO 2: DESUBICACIÓN**

### **ACTIVIDAD 2.**

#### **PARTE 1**

Explicación por parte de la docente sobre la solución de problemas relacionados con situaciones de variación cuadrática, utilizando la heurística de resolución de problemas de Miguel de Guzmán, e incorporando el proceso de modelación matemática.

#### **PROPÓSITO.**

Explicar a los estudiantes cómo resolver situaciones problemas que involucren la función cuadrática desde una perspectiva variacional, mediante la heurística de Miguel de Guzmán, incorporando el proceso de modelación matemática.

La explicación por parte de la docente se hará mediante la siguiente presentación de PowerPoint.

Esta presentación es de autoría de la docente, en ella se muestra paso a paso del uso de la heurística de Miguel de Guzmán y el proceso de modelación matemática para resolver la situación problema que involucra la función cuadrática desde una perspectiva variacional. En este sentido durante la presentación se puede evidenciar la forma como se vincula la resolución de problemas con las diferentes formas de representación que sugiere la modelación de funciones.

Esta presentación se compartirá con los estudiantes de forma presencial, permitiéndoles su participación en el momento que tengan inquietudes u aportes durante o al final de ella.

La docente les recuerda a los estudiantes la importancia de estar atentos a la explicación debido a que ellos harán uso de la heurística y el proceso de modelación matemática para solucionar situaciones problemas que se le propondrán más adelante.

A continuación, nuevamente se relaciona la situación problema y el proceso a seguir planteado durante la presentación de las diapositivas.

#### **PROBLEMA 1**

En el año 2020 la administración municipal lanzó un proyecto para la remodelación del parque de la floresta. La parroquia dueña del terreno dispuso de un lote cuyo perímetro era 20Dm para su construcción, los cuales podían ser optimizados de forma tal que el

parque quedará más amplio con la condición de que éste sea rectangular. ¿Cuál crees tú que podría ser la mayor área del parque? Representa la situación mediante un modelo matemático en función de  $h$ .

Luego de socializar la presentación y escuchar todos los aportes e inquietudes de los estudiantes, la docente concreta las ideas para así corroborar que lo explicado haya sido comprendido por los estudiantes; y de esta forma continuar con el proceso de solución de problemas haciendo uso de la Heurística de Miguel de Guzmán incorporando el proceso de modelación matemática, tal como se mostrará en la parte 2 de este momento: soluciona problemas.

## **PARTE 2. SOLUCIONA PROBLEMAS**

Se proponen dos situaciones problemas que el estudiante desarrollará de manera individual, teniendo en cuenta las anteriores explicaciones, utilizando la heurística de Miguel de Guzmán e incorporando el proceso de modelación matemática

La solución de una de las situaciones problemas, será presentada por el estudiante mediante un video donde muestre el paso a paso de la solución, el estudiante de manera autónoma decide qué situación problema escoger para mostrar en el video. Luego se socializarán mediante un encuentro presencial donde serán presentados con el fin de que cada estudiante comparta sus experiencias durante la solución de la situación problema al aplicar la heurística de Miguel de Guzmán, incorporando el proceso de modelación matemática.

### **MOMENTO 2: DESUBICACIÓN**

Resuelve cada uno de los siguientes problemas, teniendo en cuenta lo aprendido sobre la Heurística de Miguel de Guzmán y el proceso de modelación matemática. Puedes utilizar la tabla propuesta como guía del paso a paso para llegar a la solución de cada problema.

#### **PROBLEMA 1**

La secretaría de educación municipal desea apoyar el proceso de formación de los estudiantes de la I.E. Concejo de Medellín como bachilleres técnicos en informática, para ello quiere donar un espacio de 216 metros de perímetro, con el fin de construir un espacio rectangular que será utilizado para una sala de informática moderna.

¿Con este perímetro como ayudarías a construir la sala, para que tenga la mayor área posible? Representa la situación mediante un modelo matemático en función de h.

### **Familiarización del Problema**

¿Qué te pide el problema?

¿Qué datos del enunciado son los más importantes?

¿Qué magnitud te piden encontrar?

¿Qué datos conoces del problema?

Escribe que elementos requieres para solucionar el problema

### **Búsqueda de Estrategias**

¿Qué datos se necesitan para poder contestar las preguntas del problema?

¿Qué debes hacer para solucionar el problema? Explica de manera organizada como lo vas a resolver

¿Este plan es suficiente para dar solución al problema?

SI\_\_ NO\_\_ ¿Por qué?

### **Llevar Adelante la Estrategia, Revisión Del Proceso**

¿Has conseguido encontrar la solución al problema?

¿Por qué? Justifica tu respuesta

¿Has encontrado algún error en el proceso realizado? ¿Cuál?

¿Qué papel cumplió el proceso de modelación matemática como estrategia para la solución del problema?

### **PROBLEMA 2:**

En la clase de física el profesor está realizando una actividad sobre movimiento parabólico, para ello pide a un estudiante lanzar hacia arriba 1 pelota, la cual según el docente se desplaza siguiendo una trayectoria que cumple con la gráfica de la función cuadrática  $f(x) = -12x^2 + 96x + 100$ , donde  $f(x)$  indica la altura (en centímetros) alcanzada por la pelota al cabo de  $x$  segundos de transcurrido el lanzamiento.

Según esta información, ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en alcanzar su altura máxima?

Solucionemos utilizando la heurística de Miguel de Guzmán y a través del proceso de modelación matemática:

Después de la socialización de los videos realizados por los estudiantes se tendrá en cuenta la explicación que realicen para ver si evidencian un buen uso de la Heurística de Miguel De Guzmán incorporando en la solución del problema el proceso de modelación matemática.

### **MOMENTO 3: REENFOQUE**

#### **ACTIVIDAD 1. APLICACIÓN DEL INSTRUMENTO “CONSTRUYENDO MODELOS II”**

##### **PROPÓSITO**

Indagar acerca de la efectividad de las actividades desarrolladas sobre la resolución de problemas de variación cuadrática y evidenciar el avance a través de la incorporación del proceso de modelación matemática.

Aplicación del instrumento:” Construyendo modelos II” el cual se basa en el instrumento del momento inicial, con algunas modificaciones a fin de identificar los cambios en la forma en que los estudiantes resuelven problemas aplicando la heurística de Miguel de Guzmán y el proceso de modelación matemática. Para esta actividad se le entrega en un primer momento a cada estudiante la guía, la cual deberán resolver de forma individual, aplicando lo aprendido hasta el momento.

En un segundo momento, se propone un trabajo grupal de a tres estudiantes. A cada grupo se le asignará uno de los problemas propuestos en la guía, el cual deberán socializar al interior, para luego exponer a sus compañeros.

Finalmente, cada estudiante realizará las preguntas o inquietudes que surjan a través de las exposiciones, para terminar la unidad con la estructuración de unas conclusiones sobre todo lo aprendido en ella.

A Continuación, se muestra la guía que le será entregada a cada estudiante.

### **MOMENTO 3: REENFOQUE**

#### **ACTIVIDAD 1 CONSTRUYENDO MODELOS II**

##### **PROPÓSITO**

Identificar la manera como los estudiantes resuelven situaciones problemas asociadas al aprendizaje de la función cuadrática desde la modelación de fenómenos de variación, usando la heurística de Miguel De Guzmán

*¡Resuelve con atención los siguientes problemas, aplicando lo que has aprendido hasta ahora!*

Cada situación problema está relacionada con situaciones que nos podemos encontrar en la vida cotidiana; las cuales pueden ayudarnos a afianzar las habilidades en la resolución de problemas usando el proceso de modelación matemática.

¡Manos a la obra!

Resuelve cada una de las situaciones planteadas en forma escrita, clara y ordenada mostrando todos los procedimientos que empleas.

#### **VISITA AL PARQUE ARQUEOLOGICO SAN AGUSTIN**

Al finalizar el año 2021 la docente de sociales de la I.E Concejo de Medellín, quiere realizar una visita guiada con los alumnos del grado 9° al PARQUE ARQUEOLOGICO SAN AGUSTIN, para lo cual solicitó una cotización a la agencia de viajes PATRICOL S.A, la cual ofrece un paquete turístico a Huila que incluye transporte, alojamiento y alimentación, con un costo de \$540.000 por persona y la visita al Parque Arqueológico que incluye: Bosque de las Estatuas, Mesitas A, B y C, el águila, el Dios del sol, Fuente Ceremonial Y Alto del Lavapatás y tiene un costo fijo de \$1.800.000 para el grupo. Sin embargo, para un grupo de estudiantes se hace un descuento de \$9.000 por cada persona, válido para cada uno de los miembros del grupo, es decir, si viajan 2 estudiantes se hace un descuento de \$18.000 a cada uno de los estudiantes que viajen.

a. Antes de tomar una decisión, debes identificar cuáles son los valores que intervienen en la situación, cuáles de ellos varían y cuáles son constantes.

---

---

---

¿De qué manera podrías saber si es conveniente o no adquirir el plan?

---

---

---

¿Cómo podríamos saber a partir de cuántas personas obtendríamos el mayor descuento?

---

Con base en la información suministrada, complete la siguiente tabla

<b>Número de miembros del grupo</b>	<b>Valor del descuento por persona</b>	<b>Valor del viaje por persona</b>	<b>Valor total del viaje para el grupo</b>
1	9.000	531.000	2.341.000
3			
5			
10	90.000	450.000	6.300.000
15			
20			
25			
30			
40			
45			
55			
60			

*Registro tabular*

¿Cómo hallamos los datos de la segunda columna?

---

---

¿Y los de la tercera?

---

---

¿Y los de la cuarta?

---

---

¿Cuál es el valor más alto del plan?

---

---

¿Según eso, si fueras el dueño de la agencia de viajes, máximo cuántas personas aceptarías? ¿por qué?

---

---

Podrías expresar algebraicamente lo que escribiste en los puntos a,b y c?

Intentémoslo: a \_\_\_\_\_

b \_\_\_\_\_

c \_\_\_\_\_

Representa en el plano cartesiano los valores de las columnas 1 y 4 de la tabla anterior.

Ahora responde según la gráfica:

¿Cuál sería el máximo de personas que crees que debería aceptar la empresa?

---

¿Cómo se llama la curva construida? \_\_\_\_\_

¿Qué puntos de la curva nos ayudan o ayudan a la agencia de viajes a tomar la mejor decisión sobre el plan?

---

¿Para qué número de viajeros la empresa obtendría su máximo ingreso? ¿Cómo se puede observar este valor en la gráfica de la función?

---

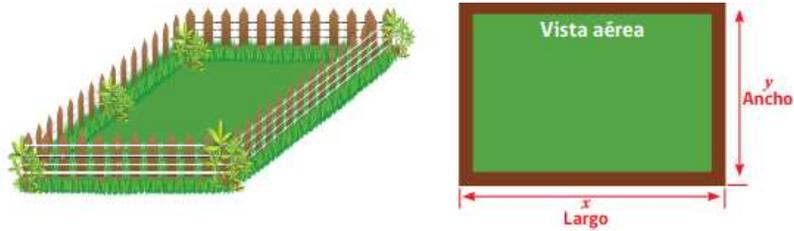
---

**PROBLEMA 2:**

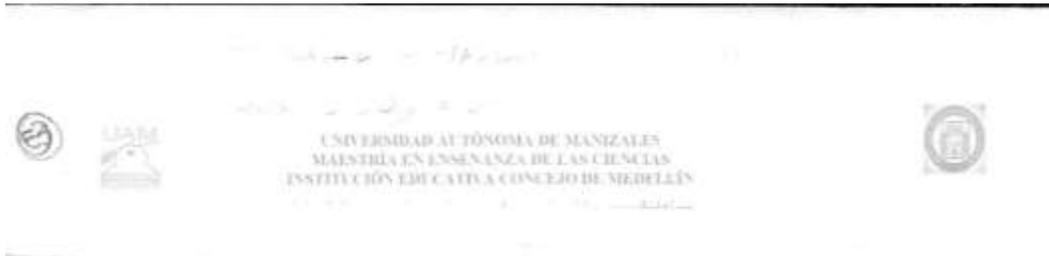
El equipo encargado del proyecto PRAE en la Institución Educativa, ganó un premio para cercar en forma rectangular un espacio de la zona verde de la sede Anexo, con el fin de que sea destinado para la siembra de plantas aromáticas. El premio eran 20 metros de alambre de púas que deben disponer en forma rectangular.

¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno a cercar para que su área sea máxima?

Construye un modelo matemático en forma algebraica que represente la situación e identifica en él los elementos de la función cuadrática, teniendo en cuenta todo lo aprendido durante la Unidad didáctica.



Anexo 3. Evidencia momento de ubicación



La siguiente guía tiene dos situaciones problema que debes resolver en forma escrita, clara y ordenada mostrando todos los procedimientos que empleas.

**PROBLEMA N° 1:** Una empresa de telefonía que llegó nueva al mercado Colombiano, le ofreció a Jhon un plan de llamadas a larga distancia a \$540 el minuto, con un cargo fijo de \$1800 por el servicio (Este valor no tiene descuento). Sin embargo para varios minutos, hace un descuento de \$9 por cada minuto, es decir, si gasta 10 minutos le descuentan \$90

- a. Antes de tomar una decisión, Jhon quiere identificar cuáles son los valores que intervienen en la situación, cuáles de ellos varían y cuáles son constantes. ¿Qué indicaciones le darías frente a estos datos?

Los valores que varían son los minutos por separado, los cuales tienen descuento, se cambia el valor constante serían los minutos a larga distancia que no tienen ningún tipo de descuento.

- b. ¿De qué manera podría saber Jhon si es conveniente o no adquirir el plan?

Jhon podría observar primero sus necesidades, qué es lo que él necesita y segundo ver a largo plazo cuánto le cuesta cada mes.

- c. ¿Cómo podríamos saber a partir de cuántos minutos Jhon obtendría el mayor descuento?

Podríamos dividir 540 (valor de 1 minuto) entre 9 (descuento) entonces sería 60 minutos, a partir de ahí se resta el valor total de 4 minutos.

- d. ¿Cuál crees que podría ser el valor más alto del plan? ¿Cómo lo hallarías?

El valor más alto del plan sería 700 minutos a la equivalente a 452.000

- e. Según eso, si fueras el dueño de la compañía telefónica, máximo cuantos minutos aceptarías? ¿por qué?

Yo aceptaría el valor anterior ya que este por el costo y descuento me solía bastante ganancia

- f. Podría Jhon definir una expresión algebraica con la cual se pueda hallar el valor del plan para cualquier número de minutos? Ayúdalo!



**PROBLEMA N° 2: Excursión al Paraíso del Pacífico Colombiano** Para el final del año 2022, la I.E. Concejo de Medellín quiere realizar una excursión con los alumnos



del grado 11°, para lo cual solicitó una cotización a la agencia de viajes PACIFICO BIODIVERSO LTDA, la cual ofrece el siguiente paquete turístico a Niquí, Chocó con un costo de \$900.000 por persona (Incluye visita al baño termal, al sendero cascada, a la cascada ríofosa, caminata a la estación ambiental Amargal, Surfing, buceo y senderismo) y la visita al PNN Ensenada de Utría que tiene un costo de \$3.000.000 (Este valor no tiene descuento y es igual para cualquier número de personas). Sin embargo para un grupo de estudiantes de hace un descuento de \$15.000 por cada persona, válido para cada uno de los miembros del grupo, es decir, si viajan 10 estudiantes se hace un descuento de \$150.000 a cada uno de los estudiantes que viajen.

Con base en la información, responde:

a. ¿Cuáles son las magnitudes que intervienen en la situación?

El paquete turístico (900.000)  
Visita al PNN (3.000.000)  
Descuento por persona (15.000)

b. ¿Cuáles de ellas varían y cuáles son constantes?

La única constante es la visita al PNN (3.000.000)  
el resto varía.

c. Si el costo para un grupo es de 16.500.000 incluyendo la visita al PNN Ensenada de Utría. ¿Cuántas personas hacen parte del grupo?

75 personas

d. Si tu fueras el administrador de la agencia de viajes cuál sería el cupo máximo que aceptarías y por qué?

Cualquier cantidad de personas, porque 45000, es en la mayoría de las partes y no supera el valor de cada estudiante.

e. Expresa con palabras la relación existente entre cada una de las siguientes cantidades

- Número de miembros del grupo y valor del descuento por persona

Hay una relación de aumento en el que si suben los miembros, sube el valor de descuento.

- Número de miembros del grupo y valor del viaje por persona

Hay una relación de aumento como la anterior.

- Número de miembros del grupo y valor total del viaje para el grupo

Hay una relación de aumento, pero hasta cierto punto, a partir de ahí se convierte en una relación disminutiva.

- Representa mediante símbolos (expresiones algebraicas) las anteriores relaciones.

$$\begin{aligned} 1 & \rightarrow g = b = c \\ 2 & \rightarrow d = e = f \\ 3 & \rightarrow f - c = x \end{aligned}$$

Anexo 4. Evidencia momento de desubicación.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES  
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS  
INSTITUCIÓN EDUCATIVA CONCEJO DE MEDELLÍN



---

**MOMENTO 3: REENFOQUE**

**CONSTRUYENDO MODELOS II**

Resuelve cada una de las situaciones planteadas en forma escrita, clara y ordenada mostrando todos los procedimientos que empleas.

**1. Visita al PARQUE ARQUEOLÓGICO SAN AGUSTÍN**

Al finalizar el año 2021 la docente de sociales de la U.E. Concejo de Medellín, quiere realizar una visita guiada con los alumnos del grado 9º al PARQUE ARQUEOLÓGICO SAN AGUSTÍN, para lo cual solicita una cotización a la agencia de viajes PATRUCO S.A. la cual ofrece un paquete turístico a Huila que incluye transporte, alojamiento y alimentación, con un costo de \$340.000 por persona y la visita al Parque Arqueológico que incluye: Bosque de los Estatuas, Mesitas A, B y C, el águila, el Dios del sol, Fuente Centesimal Y Alto del Tarapitús y tiene un costo fijo de \$1.200.000 para el grupo. Sin embargo para un grupo de estudiantes de Huila un descuento de \$9.000 por cada persona, válido para cada uno de los miembros del grupo, es decir, si viajan 2 estudiantes se hace un descuento de \$18.000 a cada uno de los estudiantes que viajan.

a. Antes de tomar una decisión, debes identificar cuáles son los valores que intervienen en la situación, cuáles de ellos varían y cuáles son constantes.

Varian: 9000 de descuento x persona

Costo:  
Constante: 1.200.000 por el grupo  
costo fijo

b. ¿De qué manera podrías saber si es conveniente o no adquirir el plan?  
Completando la tabla de valores y viendo en la gráfica donde empieza a bajar

c. ¿Cómo podríamos saber a partir de cuántas personas obtendríamos el mayor descuento?  
El mayor descuento se obtendría con 60 o más personas porque solo se pagaría el costo fijo

d. Con base en la información suministrada, complete la siguiente tabla

Número de estudiantes del grupo	Valor del descuento por persona	Valor del viaje por persona	Valor total del viaje para el grupo
1	9.000	340.000	331.000
2	18.000	340.000	322.000
3	27.000	340.000	313.000
4	36.000	340.000	304.000
5	45.000	340.000	295.000
6	54.000	340.000	286.000
7	63.000	340.000	277.000
8	72.000	340.000	268.000
9	81.000	340.000	259.000
10	90.000	340.000	250.000
11	99.000	340.000	241.000
12	108.000	340.000	232.000
13	117.000	340.000	223.000
14	126.000	340.000	214.000
15	135.000	340.000	205.000
16	144.000	340.000	196.000
17	153.000	340.000	187.000
18	162.000	340.000	178.000
19	171.000	340.000	169.000
20	180.000	340.000	160.000
21	189.000	340.000	151.000
22	198.000	340.000	142.000
23	207.000	340.000	133.000
24	216.000	340.000	124.000
25	225.000	340.000	115.000
26	234.000	340.000	106.000
27	243.000	340.000	97.000
28	252.000	340.000	88.000
29	261.000	340.000	79.000
30	270.000	340.000	70.000
31	279.000	340.000	61.000
32	288.000	340.000	52.000
33	297.000	340.000	43.000
34	306.000	340.000	34.000
35	315.000	340.000	25.000
36	324.000	340.000	16.000
37	333.000	340.000	7.000
38	342.000	340.000	-2.000
39	351.000	340.000	-11.000
40	360.000	340.000	-20.000
41	369.000	340.000	-29.000
42	378.000	340.000	-38.000
43	387.000	340.000	-47.000
44	396.000	340.000	-56.000
45	405.000	340.000	-65.000
46	414.000	340.000	-74.000
47	423.000	340.000	-83.000
48	432.000	340.000	-92.000
49	441.000	340.000	-101.000
50	450.000	340.000	-110.000
51	459.000	340.000	-119.000
52	468.000	340.000	-128.000
53	477.000	340.000	-137.000
54	486.000	340.000	-146.000
55	495.000	340.000	-155.000
56	504.000	340.000	-164.000
57	513.000	340.000	-173.000
58	522.000	340.000	-182.000
59	531.000	340.000	-191.000
60	540.000	340.000	-200.000
61	549.000	340.000	-209.000
62	558.000	340.000	-218.000
63	567.000	340.000	-227.000
64	576.000	340.000	-236.000
65	585.000	340.000	-245.000
66	594.000	340.000	-254.000
67	603.000	340.000	-263.000
68	612.000	340.000	-272.000
69	621.000	340.000	-281.000
70	630.000	340.000	-290.000
71	639.000	340.000	-299.000
72	648.000	340.000	-308.000
73	657.000	340.000	-317.000
74	666.000	340.000	-326.000
75	675.000	340.000	-335.000
76	684.000	340.000	-344.000
77	693.000	340.000	-353.000
78	702.000	340.000	-362.000
79	711.000	340.000	-371.000
80	720.000	340.000	-380.000
81	729.000	340.000	-389.000
82	738.000	340.000	-398.000
83	747.000	340.000	-407.000
84	756.000	340.000	-416.000
85	765.000	340.000	-425.000
86	774.000	340.000	-434.000
87	783.000	340.000	-443.000
88	792.000	340.000	-452.000
89	801.000	340.000	-461.000
90	810.000	340.000	-470.000
91	819.000	340.000	-479.000
92	828.000	340.000	-488.000
93	837.000	340.000	-497.000
94	846.000	340.000	-506.000
95	855.000	340.000	-515.000
96	864.000	340.000	-524.000
97	873.000	340.000	-533.000
98	882.000	340.000	-542.000
99	891.000	340.000	-551.000
100	900.000	340.000	-560.000

e. ¿Cómo hallamos los datos de la segunda columna?  
Multiplicar \$9.000 por el No de miembros del grupo

Anexo 5. Evidencia momento de reenfoque.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES  
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS  
INSTITUCIÓN EDUCATIVA CONCEJO DE MODELLÍN



---

**MOMENTO 3: REENFOQUE**

**CONSTRUYENDO MODELOS II**

Resuelve cada uno de las situaciones planteadas en forma escrita, clara y concisa mostrando todos los procedimientos que emplees.

**1. Visita al PARQUE ARQUEOLÓGICO SAN AGUSTÍN**

Al finalizar el año 2021 la docente de sociales de la LU Concejo de Modelín, quiere realizar una visita guiada con los alumnos del grado 9º al PARQUE ARQUEOLÓGICO SAN AGUSTÍN, para lo cual solicitó una cotización a la agencia de viajes PATRICIO S.A. la cual ofrece un paquete turístico a Huila que incluye transporte, alojamiento y alimentación, con un costo de \$540.000 por persona y la visita al Parque Arqueológico que incluye: Bosque de las Estatuas, Mesitas A, B y C, el águila, el Dios del sol, Fuente Ceremonial Y Alto del Casaguita y tiene un costo fijo de \$1.800.000 para el grupo. Sin embargo para un grupo de estudiantes se hace un descuento de \$9.000 por cada persona, válido para cada uno de los miembros del grupo, es decir, si viajan 2 estudiantes se hace un descuento de \$18.000 a cada uno de los estudiantes que viajen.

a. Antes de tomar una decisión, debes identificar cuáles son los valores que intervienen en la situación, cuáles de ellos varían y cuáles son constantes.

Varian: 9000 de descuento, y persona  
Costo  
Constante: 1.800.000 por el grupo  
costo fijo

b. ¿De qué manera podrías saber si es conveniente o no adquirir el plan?  
Completando la tabla de valores y viendo en la gráfica donde empieza a bajar

c. ¿Cómo podríamos saber a partir de cuántas personas obtendríamos el mayor descuento?  
El mayor descuento se obtendría con 60 o más personas porque solo se pagaría el costo fijo.

d. Con base en la información suministrada, complete la siguiente tabla

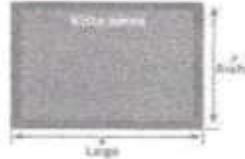
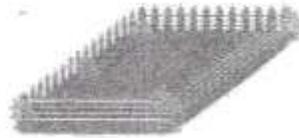
Número de miembros del grupo	Valor del descuento por persona	Valor del viaje por persona	Valor total del viaje para el grupo
1	9.000	540.000	531.000
2	18.000	540.000	1.056.000
3	27.000	540.000	1.581.000
4	36.000	540.000	2.106.000
5	45.000	540.000	2.631.000
6	54.000	540.000	3.156.000
7	63.000	540.000	3.681.000
8	72.000	540.000	4.206.000
9	81.000	540.000	4.731.000
10	90.000	540.000	5.256.000
11	99.000	540.000	5.781.000
12	108.000	540.000	6.306.000
13	117.000	540.000	6.831.000
14	126.000	540.000	7.356.000
15	135.000	540.000	7.881.000
16	144.000	540.000	8.406.000
17	153.000	540.000	8.931.000
18	162.000	540.000	9.456.000
19	171.000	540.000	9.981.000
20	180.000	540.000	10.506.000

e. ¿Cómo hallamos los datos de la segunda columna?  
Multiplicar \$9.000 por el n° de miembros del grupo

CC

**PROBLEMA N° 2:**

El equipo encargado del proyecto PRAE en la Institución Educativa, ganó un premio para cercar en forma rectangular un espacio de la zona verde de la sede Anexo, con el fin de



que sea destinado para la siembra de plantas aromáticas. El premio eran 20 metros de alambre de

púas que deben disponer en forma rectangular.

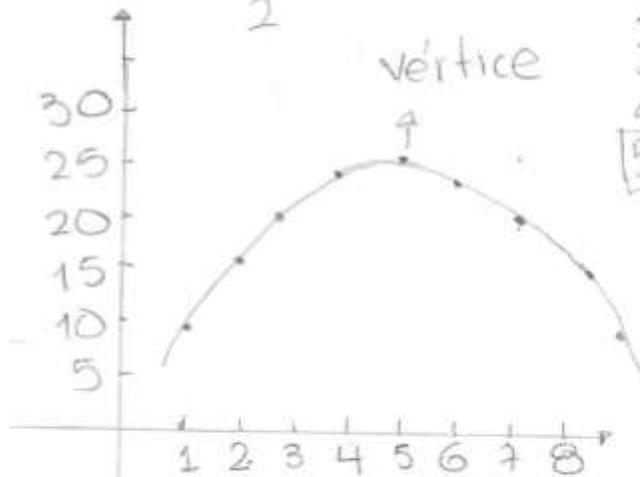
¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno a cercar para que su área sea máxima?

Construye un modelo matemático en forma algebraica que represente la situación e identifica en él los elementos de la función cuadrática, teniendo en cuenta todo lo aprendido durante la Unidad didáctica.

$P = 20$

$P = \frac{20}{2} = 10$

L1	L2	A
1	9	9
2	8	16
3	7	21
4	6	24
5	5	25
6	4	24



R/dimensiones 5m x 5m.

$V = (5, 25)$

$c = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2(-1)} = 5$      \*  $\frac{20}{2} = b+h$       $10 = b+h$       $h = (10-b)$   
 $5.2a = -b$       $A = b \cdot (10-b) = 10b - b^2$   
 $10a = -b$      R |  $10b - b^2$