

CARACTERIZACIÓN DEL PROCESO DE REGULACIÓN METACOGNITIVA EN  
LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SOBRE MEDIDAS DE TENDENCIA  
CENTRAL

AMAURY ARRIETA JARABA

ASESORA: Mg. ANDREA MILENA OSORIO CÁRDENAS

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGISTER EN  
ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MANIZALEZ  
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

2016

## TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	8
<b>1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....</b>	<b>9</b>
<b>1.1 Justificación.....</b>	<b>9</b>
<b>1.2 Descripción del problema.....</b>	<b>12</b>
<b>1.3 OBJETIVOS.....</b>	<b>15</b>
<b>1.3.1 OBJETIVO GENERAL.....</b>	<b>15</b>
<b>1.3.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS.....</b>	<b>15</b>
<b>2. REFERENTE CONCEPTUAL.....</b>	<b>16</b>
<b>2.1 Antecedentes.....</b>	<b>16</b>
<b>2.1.1 Estudios sobre resolución de problemas y metacognición.....</b>	<b>16</b>
<b>2.1.2 Estudios sobre el aprendizaje de las medidas de tendencia central.....</b>	<b>21</b>
<b>2.2 REFERENTES TEÓRICOS.....</b>	<b>24</b>
<b>2.2.1 Resolución de problemas.....</b>	<b>24</b>
2.2.1.1 Estrategias de resolución de problemas.....	24
2.2.1.2 Modelos de resolución de problemas.....	25
2.2.1.3 Factores que intervienen en el proceso de resolución de problemas matemáticos.....	26
<b>2.2.2 La Metacognición.....</b>	<b>27</b>
2.2.2.1 Elementos de la metacognición.....	27
2.2.2.2 Metacognición y Resolución de Problemas.....	29
<b>2.2.3 Medidas de tendencia central.....</b>	<b>29</b>
2.2.3.1 Complejidad del significado de las medidas de tendencia central.....	30
2.2.3.2 Errores en el cálculo de las medidas de tendencia central.....	30
2.2.3.3 Dificultades en la Interpretación de gráficos.....	31
<b>2.2.4 Unidades Didácticas.....</b>	<b>32</b>
2.2.4.1 ¿Qué es la unidad didáctica?.....	32
2.2.4.2 Elementos de la unidad didáctica (Tamayo et al. 2010).....	32
2.2.4.2.1 Obstáculos epistemológicos:.....	32
2.2.4.2.2 Obstáculos Ontológicos:.....	33
2.2.4.2.3 Historia y epistemología de la ciencia.....	33
2.2.4.2.4 Estudio de múltiples lenguajes.....	34
2.2.4.2.5 La reflexión Metacognitiva.....	34
<b>3. METODOLOGÍA.....</b>	<b>36</b>
<b>3.1 Categorías.....</b>	<b>36</b>

<b>3.2 Diseño metodológico</b> .....	36
<b>3.2.1 Procedimiento</b> .....	36
3.2.1.1 Fase de aplicación de la unidad didáctica: .....	37
3.2.1.2 Fase de análisis general: .....	38
<b>3.3 Enfoque de la investigación:</b> .....	39
<b>3.4 Contextualización</b> .....	39
<b>3.4.1 Unidad de trabajo</b> .....	39
<b>3.5 Técnicas e instrumentos:</b> .....	40
<b>3.5.1 Técnicas:</b> .....	40
<b>3.5.2 Instrumentos:</b> .....	41
<b>3.6 Plan de análisis</b> .....	42
<b>4. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN</b> .....	44
<b>4.1 MOMENTO DE UBICACIÓN</b> .....	44
<b>4.1.1 ANÁLISIS DE LOS OBSTÁCULOS ONTOLÓGICOS Y PROCEDIMENTALES</b> .....	44
4.1.1.1 ANÁLISIS DE LOS OBSTÁCULOS ONTOLÓGICOS EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE MEDIDA DE TENDENCIA CENTRAL .....	44
4.1.1.2 ANÁLISIS DE LOS OBSTÁCULOS PROCEDIMENTALES EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE MEDIDA DE TENDENCIA CENTRAL .....	46
<b>4.1.3 ANÁLISIS DE LA CATEGORÍA REGULACIÓN METACOGNITIVA</b> .....	50
4.1.3.1 Subcategoría: Planeación .....	50
4.1.3.2 Subcategoría: Monitoreo.....	51
4.1.3.3 Subcategoría: Evaluación.....	52
<b>4.2 MOMENTO DE DESUBICACIÓN</b> .....	53
<b>4.2.1 ANÁLISIS DE LOS OBSTÁCULOS ONTOLÓGICOS Y PROCEDIMENTALES</b> .....	53
4.2.1.1 ANÁLISIS DE LOS OBSTÁCULOS ONTOLÓGICOS EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS SOBRE MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL.....	53
4.2.1.2 ANÁLISIS DE LOS OBSTÁCULOS PROCEDIMENTALES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SOBRE MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL .....	54
<b>4.2.2 ANÁLISIS DE LA CATEGORÍA REGULACIÓN METACOGNITIVA</b> .....	58
4.2.2.1 Subcategoría: Planeación .....	58
4.2.2.3 Subcategoría: Evaluación.....	61
<b>4.3. MOMENTO DE REENFOQUE</b> .....	62
<b>4.3.1 ANÁLISIS DE LOS OBSTÁCULOS ONTOLÓGICOS Y PROCEDIMENTALES</b> .....	62
4.3.1.1 OBSTÁCULOS ONTOLÓGICOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SOBRE MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL .....	62

4.3.1.2 OBSTÁCULOS PROCEDIMENTALES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL .....	64
4.3.1.2.1 Subcategoría: Media Aritmética o Promedio.....	64
4.3.1.2.2 Subcategoría: Moda.....	65
4.3.1.2.3 Subcategoría: Mediana.....	66
<b>4.3.4 ANÁLISIS DE LA CATEGORÍA REGULACIÓN METACOGNITIVA .....</b>	<b>66</b>
4.3.4.1 Subcategoría: Planeación .....	66
4.3.4.2 Subcategoría: Monitoreo.....	67
4.3.4.3 Subcategoría: Evaluación.....	68
4.3.4.4 Pregunta realizada al final del proceso.....	68
<b>5. CONCLUSIONES DE LA INVESTIGACIÓN.....</b>	<b>72</b>
<b>6. RECOMENDACIONES .....</b>	<b>74</b>
<b>7. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.....</b>	<b>75</b>
<b>8. ANEXOS.....</b>	<b>82</b>

## INDICE DE TABLAS

Tabla 1. Categorías de análisis.....	36
Tabla 2. Matriz de organización de información.....	38
Tabla 3. Caracterización de las concepciones (Pozo, 1988).....	44
Tabla 4. Concepciones acerca del promedio.....	45
Tabla 5. Concepciones acerca de la moda y mediana.....	45
Tabla 6. Preguntas relativas al diagrama.....	49
Tabla 7. Preguntas de planeación.....	50
Tabla 8. Preguntas de Monitoreo.....	51
Tabla 9. Preguntas de Evaluación.....	52
Tabla 10. Respuestas de estudiantes a P.18.....	55
Tabla 11. Preguntas relativas al diagrama.....	57
Tabla 12. Estrategias cognitivas.....	59
Tabla 13. Preguntas de Evaluación.....	60
Tabla 14. Preguntas de media aritmética.....	61
Tabla 15# de helados vendidos.....	64
Tabla 16. # De galletas vendidas.....	66
Tabla 17. Procesos mejorados con la regulación metacognitiva.....	71

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Respuesta de E.2 a P.5.....	47
Figura 2. Respuesta de E.3 P.4.....	47
Figura 3. Respuesta de E.1 a P.6.....	48
Figura 4. Respuesta de E.5 a P.6.....	48
Figura 5. Respuesta de E.6 a P.6.....	48
Figura 6. Respuesta de E.3 a P.6.....	51
Figura 7. Respuesta de E.1 a P.18.....	54
Figura 8. Respuesta de E.2 a P.18.....	55
Figura 9. Respuesta de E.3 a P.18.....	55
Figura 10. Respuesta de E.4 a P.18.....	55
Figura 11. Respuesta de E.6 a P.18.....	55
Figura 12. Respuesta de E.3 a P.19.....	55
Figura 13. Respuesta de E.5 a P.18.....	56
Figura 14. Respuesta de E.4 a P.19.....	56
Figura 15. Respuesta de E.1 a P.20.....	56
Figura 16. Respuesta de E.2 a P.21.....	57
Figura 17. Respuesta de E.2 a P.21.....	58
Figura 18. Respuesta de E.1 a P.23.....	58
Figura 19. Respuesta de E.5 a P.23.....	58
Figura 20. Respuesta de E.2 a P.20.....	59
Figura 21. Respuesta de E.3 a P.21.....	59
Figura 22. Respuesta de E.1 a P.19.....	59
Figura 23. Respuesta de E.2 a P.18.....	60
Figura 24. Respuesta de E.4 a P.20.....	60
Figura 25. Respuesta de E.6 a P.19.....	60
Figura 26. Respuesta de E.1 a P.14.....	65

## ÍNDICE DE GRÁFICAS

Gráfica 1. Consumo de energía.....	49
Grafica 2. Número de accidentes.....	57
Grafica 3. Ganancia promedio.....	65

## INTRODUCCIÓN

Esta investigación tuvo como objetivo caracterizar la relación que existe entre la regulación metacognitiva y la resolución de problemas sobre medidas de tendencia central. El enfoque que se utilizó fue el cualitativo con carácter descriptivo y el diseño metodológico un estudio de caso, en el cual se analizaron 6 estudiantes del grado 8°.

La intervención se realizó a través de una unidad didáctica que tuvo tres momentos: momento de ubicación, momento de desubicación y momento de reenfoque. En cada momento se realizaron problemas auténticos sobre medidas de tendencia central elaborados todos por el investigador. Se tuvieron en cuenta múltiples lenguajes (discurso oral, escrito, gestos, imágenes, diagramas, otros) mediante el cual los estudiantes expresaron las respuestas de los problemas planteados, además, en el desarrollo de las actividades se realizaron preguntas de regulación metacognitiva con el propósito de identificar en cada uno de los estudiantes cómo iban evolucionando conceptualmente.

El análisis de los datos se realizó a través de un proceso de triangulación, el cual se llevó a cabo mediante el contraste de la información procedente en su mayoría de los instrumentos de lápiz y papel, en el cual se manifestaron las diferentes respuestas y los procesos de resolución de problemas de los estudiantes, así mismo, de las entrevistas y de los gráficos realizados por los estudiantes. Las Preguntas Metacognitivas se clasificaron de acuerdo a las categorías de análisis previamente establecidas como fueron la planeación, el monitoreo y la evaluación.

El informe de investigación se encuentra organizado en 6 partes. El primer numeral contiene el planteamiento del problema en el cual se describe la justificación, la descripción del problema a investigar y los objetivos del proyecto.

El segundo numeral contiene el referente conceptual en el cual se describen los antecedentes y los referentes teóricos de la investigación.

El tercer numeral contiene la metodología, en el cual se describen las categorías de análisis con sus respectivos autores, el diseño metodológico, el procedimiento y enfoque de la investigación, además, se describe las técnicas e instrumentos y el tipo de análisis a que se realizó.

En el cuarto numeral se realizó el análisis de la información, teniendo en cuenta las categorías propuesta en la investigación.

En el quinto y sexto numeral se plantearon las conclusiones y recomendaciones respectivamente.

# 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

## 1.1 Justificación

La resolución de problemas es un tema importante dentro del ámbito escolar, principalmente en el campo de las matemáticas, es así como Orton (1990) plantea que “la resolución de problemas puede considerarse como la verdadera esencia de las matemáticas”. (p. 51). Además, “aprender a resolver problemas es el principal motivo para estudiar matemáticas”. (Carl, 1989 según citan Carrillo y Contreras, 2000:14).

Así mismo, a nivel internacional se le brinda importancia a la resolución de problemas, es así como los estándares del National Council of Teachers of Mathematics NCTM (2003), recogen la resolución de problemas como uno de los ejes del currículo. Estos destacan que la enseñanza de las matemáticas debería centrarse en la resolución de problemas como parte de la comprensión de las matemáticas, y describen:

- “La resolución de problemas no es un tema aparte, sino un proceso que debería impregnar el estudio de las matemáticas y proporcionar un contexto en el que se aprendan los conceptos y destrezas” (NCTM, 2003, p. 186)
- “La resolución de problemas es una característica notable de la actividad matemática y un medio importante para desarrollar el conocimiento matemático” (NCTM, 2003, p. 120).
- “La esencia de la resolución de problemas es saber qué hacer al enfrentarse con problemas no familiares” (NCTM, 2003, p. 264).
- “La resolución de problemas da oportunidades para usar y ampliar el conocimiento de los conceptos de todos los Estándares de contenidos” (NCTM, 2003, p. 120).
- “Los buenos problemas pueden inspirar la exploración de ideas matemáticas importantes” (NCTM, 2003, p. 186).
- “La resolución de problemas es fundamental para la investigación y la aplicación de las matemáticas” (NCTM, 2003, p. 260).

Teniendo en cuenta lo anterior, es importante implementar un proyecto de investigación que apunte a mejorar los procesos de resolución de problemas en medidas de tendencia central, permitiendo que los estudiantes puedan reflexionar sobre los métodos de solución, monitorear sus estrategias, y tener control sobre su aprendizaje, y para ello se requiere de la combinación y aplicación de estrategias, en este caso enmarcadas en la metacognición, en este sentido, Pozo (1990) plantea que:

Si una persona tiene conocimiento de sus procesos psicológicos propios, podrá usarlos más eficaz y flexiblemente en la planificación de sus estrategias de aprendizaje, es decir, las secuencias de procedimientos y actividades cognitivas que se integran con el propósito de facilitar la adquisición, almacenamiento y utilización de información (p. 201).

Así mismo, describir la relación entre la resolución de problemas y los procesos metacognitivos llevados a cabo, permitiría un aporte teórico y fundamentalmente didáctico. El poder reconocer qué procesos metacognitivos están relacionados con ciertas características de la resolución de problemas, podrá brindar información pertinente para desarrollar estrategias didácticas que potencien esta relación con el fin de permitir mejores niveles de desempeño, y destrezas de los estudiantes al momento de resolver problemas. En este sentido (Bermeosolo, 2005, p. 214) manifiesta que:

Hay mayor probabilidad de tener éxito si se dedica tiempo a los pasos implicados en la solución de problemas, a saber: detección del problema, representación clara del problema, planificación de la solución, realización del plan, evaluación de la solución y consolidación de los logros.

De la misma manera, el presente trabajo es importante porque presenta el diseño y aplicación de una unidad didáctica y actividades que permitan aplicar estrategias metacognitivas, y de esta manera formar estudiantes autónomos, con la capacidad de resolver tareas relevantes en la vida cotidiana, incorporando elementos de autorregulación metacognitiva; en este sentido Rickey & Stacy (2001), plantean que:

Promover la metacognición en las clases parece una manera prometedora de mejorar la comprensión de conceptos y las habilidades para resolver problemas de ciencias, algunos profesores de ciencia han comenzado a implementar métodos de enseñanza que intentan estimular a los estudiantes a ser más metacognitivos. (p.918)

Este proyecto es pertinente, debido a que actualmente en la institución se trabaja con problemas descontextualizados en los cuales los estudiantes no le encuentran ningún sentido e importancia. En esta propuesta se realizarán problemas contextualizados y significativos para el estudiante, de tal manera que le encuentren sentido a lo que aprenden; es así que:

Problemas contextuales bien seleccionados ofrecen oportunidades para que los estudiantes desarrollen estrategias de solución informales, altamente contextualizadas, y se utilizan en la construcción de conceptos matemáticos[... ..]el contexto puede aún ser no realista o [ubicarse] dentro de las matemáticas, si el desarrollo del concepto lo requiere. Sin embargo, el contexto del problema debe ser experimentado como real por los estudiantes...El mundo real se utiliza como un dominio en el cual podemos usar nuestros conceptos matemáticos en la forma que deseemos (Doorman, Drijvers, Dekker, Van den Heuvel-Panhuizen, de Lange & Wijers, 2007, p.406-407).

Otro aspecto destacado de esta propuesta, es que proporcionará herramientas que les permitan a los estudiantes enfrentar problemas en estadística de una forma diferente, teniendo control de su propia experiencia, convirtiéndose en el eje central del proceso, y siendo consiente cada vez más de lo que hace y porqué lo hace, mostrando relevancia en la aplicación de la metacognición en los procesos de resolución de problemas, al respecto. Martin y Marchesi (1990), plantean que:

Los procesos metacognitivos en la resolución de problemas cumplen una función autorregulatoria la cual permite a la persona: a) planificar la estrategia de acuerdo con la

cual desarrollará el proceso de búsqueda de la solución del problema; b) aplicar la estrategia y controlar su proceso de desarrollo o ejecución; c) evaluar el desarrollo del plan, es decir, de la estrategia diseñada, a fin de detectar posibles errores que se hayan cometido; y d) modificar el curso de la acción cognitiva en función de los resultados de la evaluación. (p.47)

Por otro lado, se destaca la importancia de la enseñanza de la estadística, que es una ciencia que ha ido evolucionando a través de los años, resaltando su aplicación en todos los campos del saber, sobre todo en la educación, en este sentido BATANERO (2001) manifiesta:

El interés por la enseñanza de la estadística, dentro de la educación matemática, viene ligado al rápido desarrollo de la estadística como ciencia y como útil en la investigación, la técnica y la vida profesional, impulsado por la difusión de los ordenadores, el crecimiento de su potencia y rapidez de cálculo y las posibilidades de comunicación.(p.6)

Así mismo, el MEN (2006), propone en los estándares básicos de competencias en matemáticas para el grado octavo, en el pensamiento aleatorio y sistemas de datos, utilizar conceptos de media, mediana y moda y explicitar con los estudiantes sus diferencias en distribuciones de distinta dispersión y asimetría; por lo anterior, es pertinente realizar un proyecto de investigación que apunte a mejorar las dificultades que presentan los estudiantes en los conceptos de medidas de tendencia central; cabe destacar que las investigaciones en este campo son escasas, al respecto BATANERO (2001), manifiesta:

El número de investigaciones sobre la didáctica de la estadística es aún muy escaso, en comparación con las existentes en otras ramas de las matemáticas. Por ello, no se conocen aun cuales son las principales dificultades de los alumnos en muchos conceptos importantes. Sería también preciso experimentar y evaluar métodos de enseñanza adaptados a la naturaleza específica de la estadística, a la que no siempre se pueden transferir los principios generales de la enseñanza de las matemáticas. (p.6)

Teniendo en cuenta todo lo anterior, es necesario buscar alternativas para que los estudiantes mejoren los procesos de resolución de problemas y tengan una mejor comprensión sobre las medidas de tendencia central. Un elemento que puede contribuir a esta situación es la regulación metacognitiva teniendo en cuenta las posibilidades que esta brinda para que los educandos reconozcan su potencial y limitaciones, de tal manera que se conviertan en estudiantes autónomos capaces de planificar, controlar y evaluar lo que hacen.

## 1.2 Descripción del problema

La sociedad moderna experimenta un creciente desarrollo científico, tecnológico y social, cada vez se considera más importante tener una buena preparación matemática que permita el acceso a dichos conocimientos, un aspecto importante en esta área es la resolución de problemas, en este sentido el MEN (2006) en los estándares básicos de competencia, plantea:

Este es un proceso presente a lo largo de todas las actividades curriculares de matemáticas y no una actividad aislada y esporádica; más aún, podría convertirse en el principal eje organizador del currículo de matemáticas, porque las situaciones problema proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que las situaciones que se aborden estén ligadas a experiencias cotidianas y, por ende, sean más significativas para los alumnos. Estos problemas pueden surgir del mundo cotidiano cercano o lejano, pero también de otras ciencias y de las mismas matemáticas, convirtiéndose en ricas redes de interconexión e interdisciplinariedad. (p. 52).

Sin embargo, diferentes reportes internacionales y nacionales, muestran el bajo nivel en el que están los países latinoamericanos y en especial Colombia en lo que respecta a los procesos para resolver problemas matemáticos, es así, como el ICFES (2012), en el informe nacional de resultados en las evaluaciones internacionales PISA, señalan que:

En matemáticas, el 74% de los estudiantes colombianos se ubicó por debajo del nivel 2 y el 18%, en el nivel 2. Esto quiere decir que solo dos de cada diez estudiantes pueden hacer interpretaciones literales de los resultados de problemas matemáticos; además, emplean algoritmos básicos, fórmulas, procedimientos o convenciones para resolver problemas de números enteros, e interpretan y reconocen situaciones en contextos que requieren una inferencia directa. En contraste, apenas 3 de cada mil alcanzaron los niveles 5 y 6, quienes están en estos niveles tienen pensamiento y razonamiento matemático avanzados: pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias de resolución de problemas; conceptúan, generalizan y utilizan información; aplican conocimientos en contextos poco estandarizados; reflexionan sobre su trabajo y pueden formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos. (pág. 8)

La resolución de problemas implica la comprensión y dominio de un conjunto de conceptos, procedimientos, códigos simbólicos, y de algunas habilidades de pensamiento; pero la realidad es que los estudiantes presentan dificultades en la comprensión de los problemas, en su representación, en seleccionar las operaciones adecuadas y en su ejecución, conllevando a presentar apatía por el área, algunas de las dificultades que presentan los estudiantes al resolver problemas, según De La Rosa (2007) son:

- El alumno no percibe cuáles de los recursos algorítmicos y heurísticos de que dispone son los apropiados para afrontar un determinado problema.
- El alumno una vez que ha encontrado una vía de solución, no examina otras posibilidades.

- El alumno no pone en juego destrezas de estimación que le permitan comprobar las soluciones a las que llega.
- El alumno lee el enunciado de un problema rápidamente y, enseguida, se dispone a hallar la solución, sin una reflexión previa sobre cuál es la demanda del problema.
- El alumno sabe realizar una operación o problema pero no sabe explicar el procedimiento empleado. (p.31)

Así mismo, Company y otros (1988), citado por Nortes (2009), destacan como dificultades más comunes en la resolución de problemas:

- a) Una deficiente comprensión lectora, b) Una complejidad del texto, c) La representación mental del problema; d) dificultad de localizar las metas a alcanzar que faciliten la solución; e) familiaridad del sujeto con los procedimientos necesarios para resolver el problema; f) la utilización de un plan adecuado; g) el conocimiento del procedimiento operativo y factores afectivos. (p.320).

Del mismo modo, en el aprendizaje de los conceptos estadísticos, los educandos también presentan algunas dificultades, específicamente en la comprensión de las medidas de tendencia central. Algunos de los errores que presentan los estudiantes en el cálculo de la media, mediana y moda, según Mayén, Batanero y Díaz (2009) son:

- Conflictos relacionados con los campos de problemas: No usar las medidas de tendencia central en la comparación de dos conjuntos de datos. En su lugar, algunos estudiantes resuelven el problema comparando datos aislados; de este modo, presentan la concepción local de asociación.
- Conflictos relacionados con definiciones de distintos objetos matemáticos: Confundir las medidas de tendencia central con el valor de la variable; la media con las frecuencias absolutas; las frecuencias absolutas con los porcentajes, y el valor de la variable con la frecuencia.
- Conflictos relacionados con las propiedades de las medidas de tendencia central o con conceptos relacionados con ellas: Suponer definida la media en un conjunto de datos ordinales, o confundir la variable ordinal con la variable medida en escala de razón o intervalo.
- Conflictos al aplicar un procedimiento: Calcular la media de las frecuencias; establecer una correspondencia que no conserva la escala de medida; establecer correspondencias diferentes en grupos que se quiere comparar, o aplicar una correspondencia que transforma un conjunto variable en otro constante.

De igual manera, los estudiantes de la Institución Educativa Normal Superior de Sincelejo presentan dificultades al momento de resolver problemas, asociadas con la falta de comprensión de los enunciados y en algunas ocasiones realizan razonamientos incorrectos, manifestando confusiones en la elección de las operaciones que deben realizar y su respectiva ejecución. Además, se les dificulta justificar los procedimientos de solución y reflexionar sobre sus resultados, están más orientados a resolver los

problemas de forma de forma mecánica, sin darle un sentido lógico a lo que están resolviendo. Todo lo anterior detectado durante las clases que orienta el docente de matemáticas, reflejado en los trabajos, exámenes y expresión oral de los educandos.

Respecto a la resolución de problemas sobre medidas de tendencia central, los educandos se limitan a calcular el promedio, la mediana y la moda, mediante la fórmula o el algoritmo, sin tener claridad sobre lo que significan estas nociones, cuáles son sus características, diferencias y cuando se pueden aplicar, dedicándose en su mayoría a repetir algoritmos de forma mecánica, dejando a un lado la comprensión de los conceptos y el análisis de lo que se está haciendo, causando desmotivación por el área.

Por otro lado, los estudiantes son poco reflexivos cuando resuelven problemas, y no se detienen con el docente a analizar las dificultades en el proceso de resolución; a comprender los pasos realizados, a corregir los errores, a evaluar su desempeño, a regular su aprendizaje; el docente simplemente se limita a orientar los contenidos dejando de lado la importancia de implementar la metacognición, que permita al estudiante, reflexionar, conocer y regular sus propios procesos de aprendizaje. En este sentido, Flórez (2000) señala que: “La metacognición se refiere a los conocimientos que las personas tienen sobre su propia cognición, motivándolas a prever acciones y a anticipar ayudas para mejorar su rendimiento y resolver mejor los problemas” (pag.5).

Teniendo en cuenta todo lo anterior, surge la siguiente pregunta de investigación en este proyecto: ¿De qué manera la regulación metacognitiva favorece el proceso de resolución de problemas sobre medidas de tendencia central de los estudiantes de grado 8° de la Institución Educativa Normal Superior de Sincelejo?

## **1.3 OBJETIVOS**

### **1.3.1 OBJETIVO GENERAL**

Caracterizar de qué manera la regulación metacognitiva favorece el proceso de resolución de problemas sobre medidas de tendencia central en los estudiantes de grado 8°

### **1.3.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS**

- Identificar los obstáculos ontológicos y procedimentales que presentan los estudiantes cuando solucionan problemas sobre medidas de tendencia central
- Describir la relación que se da entre la regulación metacognitiva y la resolución de problemas.

## **2. REFERENTE CONCEPTUAL**

### **2.1 Antecedentes**

Los antecedentes que se presentan a continuación dan cuenta de los resultados de algunas investigaciones que reconocen la importancia de la resolución de problemas y metacognición en matemáticas, como también algunas dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las medidas de tendencia central:

#### **2.1.1 Estudios sobre resolución de problemas y metacognición**

Iriarte y Sierra (2011), en su tesis de maestría, presentan la influencia de la implementación de estrategias didácticas con enfoque metacognitivo en el desarrollo de la habilidad de resolución en problemas matemáticos para estudiantes de básica primaria. El diseño metodológico utilizado fue cuasi-experimental, y se pudo concluir que la resolución de problemas matemáticos es una actividad compleja, en la cual se requiere que a los estudiantes se preparen en elementos como: formación de modos de actuación, métodos de solución y procedimientos específicos, elementos constitutivos de la competencia que incluyen a su vez conocimientos tanto cognitivos como metacognitivos.

Así mismo, los autores concluyen que la aplicación de estrategias metacognitivas caracterizadas por la toma de conciencia, son necesarias utilizarlas al resolver problemas, y que los procesos de planeación, monitoreo, y evaluación, permiten la regulación del proceso mental de sí mismo. Los resultados obtenidos de esta investigación en los grupos experimentales demuestran la eficacia del programa de intervención basado en estrategias didácticas con enfoque metacognitivo, el cual produjo una mejora en la competencia resolución de problemas matemáticos contextualizados.

Troncoso (2013), realizó una tesis de maestría en la que presenta una investigación que estableció las implicaciones que tiene la incorporación de estrategias metacognitivas en la enseñanza de las matemáticas. Un aspecto relevante en esta investigación es que se cede el control del aprendizaje al estudiante de manera progresiva, es decir, él es quien regula su propio avance. Esta estrategia se implementó por medio del uso de talleres con estudiantes de grado sexto en los que se plantearon problemas relacionados con situaciones reales.

De la investigación se pudo concluir que la metacognición juega un papel importante en el aprendizaje de las matemáticas, debido a que permite a los estudiantes establecer de manera ordenada la planeación de la resolución de un problema, y realizar un proceso de reflexión tanto al momento de seleccionar las estrategias, como al momento de identificar los errores cometidos, para tenerlos en cuenta en la resolución de

problemas posteriores. Enseñar a los estudiantes diferentes estrategias para resolver un problema ofrece un mayor potencial al momento de tener éxito en su desempeño, ya que la forma tradicional no siempre es bien asimilada por todos los estudiantes, de esta manera podrán seleccionar aquellas estrategias que les facilite más la resolución de problemas, de acuerdo a sus niveles y ritmos de aprendizaje.

De igual manera el autor concluye que para que la metacognición sea efectiva en el aprendizaje de las matemáticas, se debe ceder progresivamente el control de la resolución de los problemas a los estudiantes, dando una guía inicial y permitiendo empoderarse de sus propios procesos de aprendizaje, así, se puede llegar a generar autonomía en los estudiantes y procesos de reflexión sobre el trabajo que realicen. Así mismo, los autoinformes juegan un papel fundamental en la implementación de estrategias metacognitivas, ya que su elaboración permite que el estudiante reflexione sobre las dificultades que tuvo, sus aciertos y elementos que le pueden ayudar a mejorar su aprendizaje.

Moreno y Daza (2014), realizaron un proyecto de investigación que tuvo como punto de partida las ciencias cognitivas en la que se utilizó como herramienta principal para el aprendizaje la metacognición. Se buscó determinar el impacto de diferentes estrategias metacognitivas en la resolución de problemas matemáticos en tres estudiantes de 7° grado del Colegio Gimnasio Los Portales de Bogotá.

Los resultados mostraron que los estudiantes desarrollaron de manera significativa procesos de planeación, los cuales les permitieron la toma de conciencia necesaria para poner en acción diversos mecanismos de solución de los diferentes problemas, entre ellos la supervisión regular del proceso. De igual forma, se destacó la importancia de la mediación por parte del docente para poder llegar paulatinamente al desarrollo de tareas de manera autónoma. También, se evidenció el desarrollo de dispositivos básicos de aprendizaje como la motivación y la autoconfianza, especialmente en las estudiantes que presentaron mayor dificultad en la prueba de entrada.

El autor concluye que la estrategia metacognitiva más utilizada por los estudiantes en la resolución de problemas en el área de matemáticas, es la planeación, ya que esta impacta positivamente en el control y la evaluación de la tarea abordada, pues al tener la claridad en la meta a obtener, el sujeto se hace más consciente de la situación a resolver y la manera de abordarlo; en este sentido, puede establecer las estrategias adecuadas teniendo en cuenta los datos, los procesos que requiere y así ejecutar con mayor detenimiento el seguimiento de lo emprendido con el fin de lograr la meta y tener éxito en la tarea establecida.

Pulido (2014), realizó una investigación que buscó caracterizar los procesos metacognitivos que llevan a cabo los estudiantes de grado noveno con desempeños superior y bajo en matemáticas cuando resuelven problemas relacionados con las operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división. El enfoque de investigación

fue cualitativo con un alcance descriptivo y las categorías de análisis en este proyecto dentro de la metacognición, fueron los componentes declarativo y procedimental. Se pudo concluir que los procesos metacognitivos no tienen una secuencia lineal, sino por el contrario, su relación es casi de superposición, en donde cada uno influencia al otro y se realizan de manera simultánea: mientras se planea se regula y evalúa, mientras se regula también se vuelve a planear y se evalúa nuevamente y así sucesivamente.

El autor concluye que los participantes que solucionaron de manera más adecuada los problemas fueron aquellos que planificaron, regularon y controlaron mejor su ejecución. Pero también se debe considerar el caso contrario, que los procesos metacognitivos sin algún grado de conocimiento específico por sí solos no determinan que la solución del problema sea posible. De igual manera existe una relación de proporcionalidad directa entre los procesos metacognitivos y la resolución de problemas matemáticos, esto es, a mayor complejidad del problema mayor es la necesidad de regular la cognición.

Martínez y Negrete (2010), realizaron una investigación enmarcada en los criterios metodológicos del paradigma cuantitativo, con un diseño cuasiexperimental de grupos equivalentes (control y experimental), esta tuvo como propósito fundamental el desarrollo de habilidades metacognitivas en niños, para lo cual se diseñó, implementó y evaluó una propuesta de mediación basada en la enseñanza de estrategias heurísticas en la solución de problemas matemáticos. El estudio mostró que los estudiantes no son conscientes de las estrategias que usan al resolver problemas matemáticos, en consecuencia, es poca la actividad de monitoreo y evaluación que realizan sobre estas; de igual manera, es deficiente su capacidad para evaluarlas o adaptarlas según los contextos de la tarea, lo cual destaca la validez del programa de intervención que tiene en cuenta los aspectos tanto condicionales referidos al conocimiento, como los procedimentales referidos a la regulación.

Así mismo, los autores concluyen que las estrategias de resolución de problemas que conocían los estudiantes participantes del proyecto, no eran suficientes para enfrentar eficientemente diferentes tipos de problemas; es decir, que ante situaciones nuevas en los que los algoritmos aprendidos no les ofrecían la solución, se sentían perdidos y frustrados, lo anterior validó el éxito del programa aplicado, puesto que al enseñarles estrategias heurísticas los estudiantes contaron con un variado menú de posibilidades para planificar, monitorear y evaluar su proceso, dependiendo de las características de la tarea; además, la habilidad metacognitiva que mostró mayor comportamiento hacia las categorías altas, fue la planificación de la tarea, caso contrario de la habilidad toma de conciencia donde la diferencia respecto al grupo control fue mínima; esto permite concluir claramente que el programa de intervención de enseñanza de estrategias heurísticas, tiene como mayor bondad los aspectos relacionados con la planeación de la tarea a desarrollar.

Domènech (2004), en su tesis doctoral, presenta la relación entre el proceso de resolución de problemas, la inteligencia y la metacognición; estableciendo una comparación entre adolescentes con alta y mediana capacidad intelectual; en respuesta al supuesto de que los primeros poseen mayores y mejores recursos cognitivos que los segundos, lo que puede repercutir en una mejor resolución. Se concluye en cuanto a la metacognición, que es un factor que favorece la comprensión y resolución de problemas. Ambos aspectos (capacidad intelectual y capacidad metacognitiva), estudiados conjuntamente, pueden aportar información valiosa sobre las propuestas educativas en la resolución de problemas: si conocemos qué aspectos están incluidos en la resolución, qué procesos subyacen a la respuesta exitosa y qué características muestran las personas que resuelven correctamente, se tendrán las pautas necesarias para educar en la resolución de problemas.

Forster (2011), realizó una investigación que tuvo como objetivo analizar el nivel de eficacia de los estudiantes de 8º, para solucionar problemas utilizando distintos formatos de respuesta, y determinar la capacidad explicativa de los componentes metacognitivos y motivacionales en dicha habilidad. En este trabajo se pudo concluir que hay una correlación positiva entre ellas tanto en el formato de respuesta libre, como en el formato de respuesta dirigida. Esto implica que a nivel general hay una relación directa entre la efectividad para solucionar problemas y los componentes metacognitivos y motivacionales.

El autor concluye, que los componentes de planificación y autoeficacia se relacionan con la efectividad para solucionar problemas, pero los componentes de Monitoreo, de esfuerzo e interés por la tarea tienen un comportamiento diferenciado tanto en formato como en el tipo de situaciones. Así mismo, se puede decir, que los componentes de la metacognición se relacionan con la eficacia para solucionar problemas en todas las situaciones, pero la relación es diferente en el formato de respuesta abierta que en el de respuesta dirigida. Los componentes de la motivación también se relacionan con la eficacia para solucionar los problemas; sin embargo, en esfuerzo e interés por la tarea esta relación es débil y se asocia solo a algún formato de respuesta y en algunas situaciones.

Rodríguez (2005), llevó a cabo un análisis de la bibliografía más relevante relativa a las dificultades que se presentan en el desarrollo de la capacidad de resolución de problemas y el modo de mejorar la instrucción con el objetivo de lograr este aprendizaje en los alumnos. Con esta revisión se pudo constatar el papel fundamental que se asigna a la metacognición en la resolución de problemas de matemática. Así mismo, se encontró que todavía quedan muchos aspectos por investigar en torno a qué es la metacognición, a los componentes que están implicados en la resolución de problemas, y como se relacionan estos elementos.

El autor concluye, que la ausencia de un modelo de la actividad matemática que incorpore la resolución de problemas y con ello los aspectos metacognitivos, de manera

integrada en el proceso de enseñanza-aprendizaje, hace difícil el desarrollo transpositivo necesario para llevar a la práctica este objetivo educativo. De este modo, la imposibilidad de incorporar la resolución de problemas en los niveles superiores de la disciplina hace que tampoco se logre en los niveles más concretos y ello deriva en el aislamiento de la resolución de problemas como un aspecto separado de los demás.

Silva (2009), realizó una investigación sobre el método y las estrategias utilizadas por alumnos de 6º grado para resolver problemas matemáticos, el cual tuvo como finalidad comprender mejor los factores que intervienen en la resolución. Esta investigación consideró de vital importancia un acercamiento más profundo a las respuestas de los alumnos. El estudio reveló que los conocimientos previos son herramientas claves para el éxito en la resolución de problemas, especialmente en aquellos que demandan la aplicación de conceptos específicos como los de geometría: área y perímetro, en cuyo caso los vacíos conceptuales obstaculizaron la obtención de respuestas correctas. A pesar de ser un recurso indispensable, se encontró que un número importante de estudiantes no cuentan con los conocimientos previos, conceptos, nociones y sus relaciones suficientes para resolver los problemas matemáticos.

La autora concluye, que en lo concerniente al establecimiento de un plan, este paso tiene importancia en la medida que permite al alumno trabajar para lograr un objetivo definido. Se observó que ante la ausencia de un plan, los alumnos tienden a utilizar estrategias irreflexivas, que en la mayoría de los casos desembocan en errores. Se encontró que ante la ausencia de comprensión y de un plan justificado, los alumnos recurren frecuentemente a la realización de operaciones con los datos proporcionados, aunque éstas carezcan de sentido. Así mismo, el repertorio de estrategias empleadas por los alumnos no es muy amplio y tienden a concentrarse prácticamente en una: la selección de la operación pertinente según la incógnita. Si bien ésta puede ser una estrategia efectiva, no siempre condujo a respuestas correctas y, contradictoriamente, su efectividad tiende a disminuir en los problemas más fáciles.

De los antecedentes mencionados anteriormente, se puede concluir que la implementación de la reflexión metacognitiva mejora los procesos de enseñanza-aprendizaje y ayuda a los estudiantes a resolver problemas de una forma organizada, caracterizándose por la toma de conciencia, en la cual, el educando es capaz de planear, monitorear y controlar el proceso mental de sí mismo; permitiendo un proceso de reflexión al momento de seleccionar las estrategias e identificar los errores, para tenerlos en cuenta en la resolución de problemas posteriores.

De igual manera para que la metacognición sea efectiva en los procesos de resolución de problemas, se debe ceder progresivamente el control a los estudiantes, dando una guía inicial, permitiendo generar autonomía en ellos logrando procesos de reflexión sobre el trabajo que realicen. Además, los procesos metacognitivos no tienen una secuencia lineal, sino por el contrario, su relación es casi de superposición, en

donde cada uno influencia al otro y se realizan de manera simultánea: mientras se planea se regula y evalúa, mientras se regula también se vuelve a planear y se evalúa nuevamente y así sucesivamente.

En lo que respecta al proceso de planeación, las investigaciones revelan que este paso tiene importancia en la medida que permite al alumno trabajar para lograr un objetivo propuesto. Ante la ausencia de un plan, los alumnos tienden a utilizar estrategias irreflexivas, que en la mayoría de los casos los llevan a cometer errores y a la realización de operaciones sin ningún sentido lógico. En caso contrario, cuando los estudiantes planean se evidencia organización en el proceso, permitiendo la toma de conciencia necesaria para implementar diversos mecanismos de solución en los problemas planteados.

### **2.1.2 Estudios sobre el aprendizaje de las medidas de tendencia central**

Cubides y Rosada (2011), realizaron un trabajo de investigación que estuvo encaminado al estudio de las dificultades que los estudiantes presentan en la obtención e interpretación de las medidas de tendencia central en la resolución de problemas. En este trabajo se pudo concluir que los estudiantes no diferencian qué medida de tendencia central es más representativa para un problema en particular, de igual manera, los educandos no conocen o tienen escasos conocimientos en las propiedades que cumplen cada medida de posición central.

Los autores concluyen, que los estudiantes, en la mayoría de los casos tienden a utilizar la media aritmética, sin tener en cuenta sus propiedades, es decir, se le facilita más usar esta medida en cualquier problema propuesto. Así mismo, en los cálculos realizados, se pudo observar que el estudiante presenta dificultad en la parte algorítmica, en cuanto a las medidas de tendencia central, puesto que al calcular la mediana no ordenaban los datos de forma correcta, como también en la media aritmética no dividían entre el total de los datos. Presentaron gran dificultad en escoger la medida de tendencial central más representativa para llegar a la solución de los problemas, en este caso debían utilizar la mediana y sus propiedades. También, los estudiantes presentan confusiones en el cálculo de la mediana y en qué casos utilizarla como mejor representante.

Cobo (2003), realizó una investigación de tipo teórico-experimental sobre el significado y la comprensión de las medidas de posición central en la Educación Secundaria Obligatoria, aquí se analiza los tipos de problemas, representaciones, procedimientos de cálculo, definiciones, propiedades y argumentaciones relacionados con estos objetos. La investigación presentó el carácter multidimensional del significado y de la comprensión del promedio. Así mismo proporcionó información detallada de errores y conflictos semióticos relacionados con los diferentes elementos de significado del promedio.

La autora concluye que los alumnos utilizan correctamente una amplia gama de elementos de significado de las medidas de posición central, incluso cuando no lleguen a obtener la solución correcta a las tareas planteadas. Las soluciones correctas pueden obtenerse a partir de razonamientos variados, que indican una diversidad de significados personales sobre el tema. Además, la dificultad de las tareas sobre promedios se puede explicar por la complejidad semiótica de las mismas y la existencia de conflictos semióticos en los estudiantes, durante el proceso de resolución de los problemas.

De igual manera el estudio mostró la dificultad generalizada en la lectura e interpretación de gráficos. Dada la importancia que en estadística tienen los gráficos, como modo de representación y exploración de una distribución, se considera que éste es un aspecto que debe tenerse en cuenta en la enseñanza. Los estudiantes mostraron dificultad no sólo en la lectura a nivel intermedio de datos sino incluso en la lectura literal de un gráfico, confundiendo valores de la variable con sus frecuencias o incluso con sus etiquetas.

Chan (2009), realizó una investigación que tuvo como objetivo elaborar una propuesta didáctica sobre la media aritmética y la mediana, mediante el uso de gráficas, para generar entendimiento con respecto a su propiedad de representatividad. Se pudo concluir que algunos errores y dificultades sobre las medidas de posición central, varianza, desviación estándar, distribuciones de probabilidad, pruebas de hipótesis, entre otros, se encuentran relacionados con el tratamiento de las representaciones estadísticas de los conjuntos de datos, en particular, cuando son en forma de gráficas (columnas, barras, circulares, etc.). Entre los factores que pueden ocasionar tales dificultades, se tienen las prácticas que los docentes de matemáticas ejecutan durante el tratamiento de los conceptos estadísticos, teniendo como secuencia: definición ejemplos y ejercicios, siguiendo la predeterminación de los currículos escolares y los libros de texto.

Mayen (2009), realizó una investigación que estuvo orientada a evaluar el significado personal que los estudiantes Mexicanos de Educación Secundaria y Bachillerato asignan a las medidas de tendencia central. Este trabajo fue la continuidad de un trabajo previo realizado por Cobo (2003) con estudiantes españoles en el comienzo y final de la Educación Secundaria Obligatoria, en el que analiza los resultados obtenidos en un cuestionario construido por ella misma.

Se realizó un análisis semiótico de las respuestas de los estudiantes, y se encontraron las siguientes dificultades:

- Conflictos terminológicos y de comprensión de representaciones, que es cuando se asigna una expresión o representación incorrecta a un cierto objeto matemático, así algunos estudiantes confunden los términos “mediana” con “media” y en menor frecuencia con “moda”

- Conflictos conceptuales, que es cuando el estudiante, aunque conoce el término, utiliza una definición no adecuada desde el punto de vista institucional, debido a errores de interpretación (semióticos) en toda o parte de la definición.
- Conflictos al atribuir propiedades a un concepto, que consiste en asignar una propiedad inexistente a un objeto matemático o bien no reconocerla cuando la tiene.
- Alumnos que suponen que la media se sitúa siempre en el centro de la distribución, conoce (suma, multiplicación, etc.) pero no las medidas de posición central, exceptuando la moda.
- Conflictos procedimentales que consisten en la confusión de un algoritmo o de alguno de sus pasos, por ejemplo, usar el algoritmo de la media simple en el cálculo de la media ponderada.

Tobón (2013), realizó un trabajo de tipo exploratorio y descriptivo, basado en una práctica pedagógica con la implementación de un curso virtual, en una plataforma Moodle, como una herramienta para ayudar a los estudiantes de grado 6° en la comprensión y asimilación de los conceptos estadísticos de media, mediana y moda de manera contextualizada, apoyando conjuntamente su proceso de aprendizaje.

En la investigación se pudo concluir que se presentó un avance en el mejoramiento del nivel de desempeño académico de los estudiantes, mostrando la plataforma virtual y el curso virtual como una combinación de herramientas de apoyo en el proceso educativo, además, el curso virtual permitió colocar al alcance de los alumnos diferentes materiales de estudio, ayudando a enriquecer sus conocimientos y contribuyendo a mejorar el proceso de aprendizaje. Así mismo, la plataforma Moodle, permite y facilita el proceso y evaluación del aprendizaje de los alumnos y además se resalta el papel de facilitador al docente y de protagonista al alumno dejando de lado un poco la enseñanza tradicional en beneficio de las nuevas formas de aprender.

Villanueva y Moreno (2010), realizaron un estudio que tuvo como propósito, contribuir al mejoramiento de la competencia interpretativa a partir de la implementación de la metodología del enfoque didáctico Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), en la enseñanza y aprendizaje de la estadística descriptiva desde las medidas de tendencia central. Se pudo concluir que para contribuir a desarrollar la competencia interpretativa, en el aprendizaje de la estadística, se deben implementar en los estudiantes procesos cognitivos y metacognitivos, que les permitan resolver problemas, desarrollar la innovación, la creatividad, la capacidad para aprender a aprender y el trabajo en equipo. En este sentido el enfoque metodológico didáctico ABP y las mediaciones tecnológicas utilizadas en esta investigación, han mostrado la pertinencia y eficacia en el aprendizaje de los estudiantes.

De los antecedentes mencionados anteriormente, se puede concluir que los estudiantes presentan algunos conflictos en la resolución de problemas sobre medidas de tendencia central, entre los más destacados están: Conflictos terminológicos y de comprensión de representaciones, conflictos conceptuales, conflictos en manejo de

propiedades, conflictos procedimentales, y en términos generales presentan gran dificultad en escoger la medida de tendencia central más representativa para llegar a la solución de un problema.

Así mismo, en las investigaciones encontradas acerca de las medidas de tendencia central, no se encontró evidencia acerca de la aplicación de estrategias metacognitivas en la resolución de problemas, en este sentido, los estudiantes realizan pocas reflexiones acerca de los errores que cometen. De aquí que se hace necesario buscar estrategias que permitan poder superar los errores lograr regular sus propios avances en el proceso de resolución de problemas; por lo cual se hizo novedoso y pertinente implementar la reflexión metacognitiva en este campo, permitiendo que los estudiantes puedan reflexionar sobre su propio aprendizaje, mostrar autonomía y regular sus propios avances, logrando con ello reconocer y corregir errores.

## **2.2 REFERENTES TEÓRICOS**

Este trabajo se fundamentó en la resolución de problemas planteado por Schoenfeld (1992), la Metacognición por Brown (citada por Tamayo, 2006), la resolución de problemas y metacognición planteado por Martín y Marchesi (1990), las medidas de tendencia central por Batanero y Godino (2002), y la Unidad didáctica por Tamayo (2010). A continuación se abordan dichas teorías.

### **2.2.1 Resolución de problemas**

Lesh & Zawojewski (2007) definen la resolución de problemas como “el proceso de interpretar una situación matemáticamente, la cual involucra varios ciclos interactivos de expresar, probar y revisar interpretaciones, de ordenar, integrar, modificar, revisar o redefinir grupos de conceptos matemáticos desde varios tópicos dentro y más allá de las matemáticas” (p. 782). En este sentido, el estudiante para resolver problemas debe realizar un proceso con diferentes pasos que le permitan recolectar, organizar y analizar información, aplicar estrategias para poder llegar a la solución.

#### **2.2.1.1 Estrategias de resolución de problemas**

De acuerdo con Poggioli (1999),” las estrategias para resolver problemas se refieren a las operaciones mentales utilizadas por los estudiantes para pensar sobre la representación de las metas y los datos, con el fin de transformarlos y obtener una solución” (p. 26). En este sentido, señala que estas estrategias comprenden los métodos heurísticos, los algoritmos y los procesos de pensamiento divergente. Los métodos heurísticos según Poggioli (1999) son “estrategias generales de resolución y reglas de decisión utilizados por los solucionadores de problemas, basadas en la experiencia previa con problemas similares. Estas estrategias indican vías o posibles enfoques a seguir para alcanzar una solución” (p. 27).

### 2.2.1.2 Modelos de resolución de problemas

El modelo más clásico, pero aún vigente, de las fases por las que atraviesa la resolución de problemas en matemática, es el descrito por Polya (1945). Es un proceso que consta de cuatro fases:

- Comprensión del problema
- Planificación
- Ejecución del plan
- Supervisión

Este modelo ha inspirado la gran mayoría de los modelos de resolución de problemas que se han elaborado posteriormente. Los modelos de resolución de problemas que han seguido al de Polya guardan estrechos vínculos con él y representan una forma de poder identificar diversos heurísticos que han servido para mejorar la resolución de problemas de los alumnos.

Así mismo, Dewey (1933) presentó un modelo para resolver problemas, con las cinco fases siguientes:

- Identificación de la situación problemática.
- Definición precisa del problema.
- Análisis de medios-fines. Plan de solución.
- Ejecución del plan.
- Evaluación de la solución. Supervisión. Generalización.

Schoenfeld (1985), inspirado en las ideas de Polya, diseñó uno de los modelos más completos, sobre todo en estrategias heurísticas. Se basa en una observación minuciosa del proceso de resolución de problemas por sujetos reales y, a posteriori, construye bloques de conductas más o menos homogéneas, que se dan en un período de tiempo, y así califica los bloques de modo que especifiquen su función en la globalidad del proceso. Distingue cuatro fases: análisis, exploración, ejecución y comprobación de la solución obtenida.

Analizar y comprender un problema: dibujar un diagrama, examinar un caso especial, intentar simplificarlo.

Diseñar y planificar una solución

Explorar soluciones:

- considerando una variedad de problemas equivalentes,
- considerando ligeras modificaciones del problema original, y
- considerando amplias modificaciones del problema original.

Verificar la solución.

1. ¿Verifica la solución los criterios específicos siguientes?:

a) ¿Utiliza todos los datos pertinentes?

b) ¿Está acorde con predicciones o estimaciones razonables?

- c) ¿Resiste a ensayos de simetría, análisis dimensional o cambio de escala?
2. ¿Verifica la solución los criterios generales siguientes?:
- a) ¿Es posible obtener la misma solución por otro método?
- b) ¿Puede quedar concretada en casos particulares?
- c) ¿Es posible reducirla a resultados conocidos?
- d) ¿Es posible utilizarla para generar algo ya conocido?

Puig y Cerdán (1988) presentan un modelo, basado en las ideas de Dewey y en el modelo de Polya, para la resolución de problemas aritméticos verbales, que consta de las siguientes fases:

- Lectura.
- Comprensión.
- Traducción.
- Cálculo.
- Solución.
- Revisión. Comprobación.

### **2.2.1.3 Factores que intervienen en el proceso de resolución de problemas matemáticos**

Schoenfeld (1992), presenta una caracterización de las dimensiones o categorías que explican el éxito o fracaso de los estudiantes en la resolución de problemas:

- a) El conocimiento o recursos básicos que incluye definiciones, hechos, formulas, algoritmos y conceptos fundamentales asociados con un dominio matemático particular o tema.
- b) Estrategias cognitivas o heurísticas que involucran formas de representar y explorar los problemas con la intención de comprender los enunciados y plantear caminos de solución. Algunos ejemplos de estas estrategias son dibujar un diagrama, buscar un problema análogo, establecer submetas, descomponer el problema en casos simples, etc.
- c) Las estrategias metacognitivas que involucran conocimiento acerca del funcionamiento cognitivo propio del individuo (¿Qué necesito? ¿Cómo utilizo ese conocimiento?) y estrategias de monitoreo y control del propio proceso cognitivo (¿Qué estoy haciendo? ¿Por qué lo hago? ¿A dónde voy?).
- d) Las creencias y componentes afectivos que caracterizan la conceptualización del individuo acerca de las matemáticas y la resolución de problemas, y la actitud y disposición a involucrarse en actividades matemáticas.

En la resolución de problemas, Schoenfeld (1992), propone ir más allá de una descripción de las estrategias y ofrecer oportunidades para que los estudiantes desarrollen el poder prescriptivo relacionado con su uso. En particular sugiere:

- a) Ayudar a los estudiantes a desarrollar un gran número de estrategias de resolución de problemas más específicas y que relacionen de forma clara clases específicas de problemas
- b) Enseñar estrategias de monitoreo que permitan a los estudiantes aprender cuándo pueden utilizar estrategias apropiadas y el contenido matemático relevante en la resolución de problemas.
- c) Desarrollar formas de robustecer las creencias de los estudiantes sobre la naturaleza de las matemáticas, la resolución de problemas, y sobre sus propias competencias o formas de interactuar con situaciones matemáticas.

Por esta razón se toma como referente principal para la investigación en lo concerniente a resolución de problemas.

### **2.2.2 La Metacognición:**

La metacognición se refiere, según, Klinger (2001, p. 85), como “el conocimiento que el individuo tiene sobre los procesos de cognición y de estados tales como la memoria, la atención, el conocimiento, la conjetura y la ilusión”.

De acuerdo a la concepción de (FLAVELL, 1976, p. 232), la metacognición:

Se refiere al conocimiento que uno tiene sobre los propios procesos y productos cognitivos o sobre cualquier cosa relacionada con ellos, es decir, las propiedades de la información o los datos relevantes para el aprendizaje. Por ejemplo, estoy implicado en metacognición (metamemoria, metaaprendizaje, metaatención, metalenguaje, etc.) si me doy cuenta de que tengo más problemas al aprender A que al aprender B, si me ocurre que debo comprobar C antes de aceptarlo como un hecho... La metacognición se refiere, entre otras cosas, al control y la orquestación y regulación subsiguiente de estos procesos

Teniendo en cuenta los conceptos anteriores, se puede decir que la metacognición es el grado de conocimiento que el estudiante tiene sobre sí mismo, sobre los requerimientos de la tarea que debe realizar y sobre su propio aprendizaje, en este proceso se necesita la reflexión del qué, cómo y porque se hacen las cosas.

#### **2.2.2.1 Elementos de la metacognición**

Según Tamayo (2001), citando a Gunstone & Mitchell (1998), el estudio de la metacognición aborda tres aspectos generales: Conocimiento, conciencia y control sobre los propios procesos de pensamiento.

El conocimiento declarativo, es un conocimiento proposicional referido a un saber que acerca de uno mismo como aprendiz y de los diferentes factores que influyen de manera positiva o negativa en nuestro rendimiento.

El conocimiento procedimental, es un saber cómo se hacen las cosas, cómo

sucedan, es un tipo de conocimiento que puede representarse como heurístico y como estrategia en las cuales los individuos definen los pasos seguidos en la solución a un problema.

El conocimiento condicional, es un saber por qué y cuándo se usan el conocimiento declarativo y el procedimental. (p.50)

Según Reynolds 1992, (citado por Schraw 1998), este tipo de conocimiento ayuda al estudiante a distribuir selectivamente los recursos y a usar las estrategias más eficientemente, permite además identificar el conjunto de condiciones y las exigencias situacionales de cada tarea de aprendizaje.

La conciencia metacognitiva, según Hartman 1998, (citado por Tamayo 2006), es un saber de naturaleza intra-individual, se refiere al conocimiento que tienen los estudiantes de los propósitos de las actividades que desarrollan y de la conciencia que tienen sobre su progreso personal; es un conocimiento que permite el control o la autorregulación del pensamiento y de los procesos y productos del aprendizaje.

La regulación metacognitiva, según Schraw 1998, (citado por Tamayo 2006), se refiere al conjunto de actividades que ayudan al estudiante a controlar su aprendizaje; se relaciona con las decisiones del aprendiz antes, durante y después de realizar cierta tarea de aprendizaje. Se asume que la regulación metacognitiva mejora el rendimiento en diferentes formas: mejora el uso de la atención, proporciona una mayor conciencia de las dificultades en la comprensión y mejora las estrategias ya existentes. Se ha encontrado un incremento significativo del aprendizaje cuando se incluyen, como parte de la enseñanza, la regulación y la comprensión de las actividades.

Brown (citada por Tamayo, 2006, p.3) señala los tres procesos cognitivos esenciales:

**Planeación:** Es un proceso que se realiza antes de enfrentar una tarea o meta escolar, implica la selección de estrategias apropiadas y la localización de factores que afectan el rendimiento; la predicción, las estrategias de secuenciación y la distribución del tiempo o de la atención selectiva antes de realizar la tarea; consiste en anticipar las actividades, prever resultados, enumerar pasos.

**Monitoreo:** se refiere a la posibilidad que se tiene, en el momento de realizar la tarea, de comprender y modificar su ejecución, por ejemplo, realizar auto-evaluaciones durante el aprendizaje, para verificar, rectificar y revisar las estrategias seguidas.

**Evaluación:** Realizada al final de la tarea, se refiere a la naturaleza de las acciones y decisiones tomadas por el aprendiz; evalúa los resultados de las estrategias seguidas en términos de eficacia.

### **2.2.2.2 Metacognición y Resolución de Problemas**

De acuerdo con García y La Casa (1990), la metacognición en la resolución de problemas se expresa en la capacidad que tiene el sujeto que resuelve el problema de observar los procesos de pensamientos propios que él implica en la realización de la tarea, y de reflexionar sobre ellos.

Para Martín y Marchesi (1990), los procesos metacognitivos en la resolución de problemas cumplen una función autorregulatoria la cual permite a la persona: (a) planificar la estrategia de acuerdo con la cual desarrollará el proceso de búsqueda de la solución del problema; (b) aplicar la estrategia y controlar su proceso de desarrollo o ejecución; (c) evaluar el desarrollo del plan, es decir, de la estrategia diseñada, a fin de detectar posibles errores que se hayan cometido; y (d) modificar el curso de la acción cognitiva en función de los resultados de la evaluación.

Así mismo, Davidson y Sternberg (1998) consideran que las habilidades metacognitivas desempeñan un papel destacado en la resolución de problemas ya que ayudan a:

- a) Codificar estratégicamente la naturaleza del problema y obtener una representación mental de sus elementos.
- b) Seleccionar las estrategias adecuadas para la consecución del objetivo.
- c) Identificar los obstáculos que impiden y dificultan el progreso.

### **2.2.3 Medidas de tendencia central**

En la enseñanza de la estadística descriptiva, las medidas de tendencia central (media, mediana y moda) juegan un papel importante, puesto que contribuyen en el análisis, inferencia, interpretación y comprensión de los datos. Estos conceptos utilizados en los procesos de interpretación estadística, permiten indagar el trasfondo de los datos.

En este sentido, Batanero y Godino (2002) plantean:

La comparación de dos distribuciones de frecuencias correspondientes por ejemplo, a muestras distintas de una misma variable (como número de hermanos, altura, etc.), puede hacerse de una manera directa por medio de la tabla, o visualmente con ayuda de gráficos estadísticos. Pero también se puede hacer eligiendo un valor representativo de cada muestra. La media, la moda y mediana son soluciones matemáticas idóneas para este tipo de problema según distintas circunstancias. Reciben el nombre de “estadísticos” o características de posición (o tendencia) central. (pág. 21)

Batanero y Godino, (2002), plantean los siguientes conceptos:

La media aritmética: Es la principal medida de tendencia central. Es el número que se obtiene sumando todos los valores de la variable estadística ( $x_i$ ) y dividiendo por el número de valores ( $n$ ).

La moda: Es el valor de la variable que tiene mayor frecuencia.

La mediana: Si suponemos ordenados de menor a mayor todos los valores de una variable estadística, se llama mediana al número tal que existen tantos valores de la variable superiores o iguales como inferiores o iguales a él.(p.714)

### **2.2.3.1 Complejidad del significado de las medidas de tendencia central**

Según Batanero 2000, (citada por Mayen 2009), las siguientes razones avalan la complejidad de las medidas de tendencia central:

- Los estudiantes asignan intuitivamente a la media, mediana y moda propiedades de las operaciones aritméticas elementales que no se conservan para las medidas de posición central.
- Las medidas de posición central se pueden referir a diferentes objetos matemáticos que los estudiantes confunden entre sí: media de una variable estadística, media de una variable aleatoria, media de una distribución muestral.
- Las propiedades de la media, mediana y moda no son siempre comunes. Por ejemplo, mientras que en el cálculo de la media intervienen todos los datos, esto no ocurre con la mediana o moda.
- Los algoritmos de cálculo para cada una de las medidas de posición central son varios, dependiendo de la forma en que se den los datos (agrupados, sin agrupar, gráficamente). Esto causa problemas en los estudiantes, que están acostumbrados a un solo algoritmo para cada situación

### **2.2.3.2 Errores en el cálculo de las medidas de tendencia central**

Dentro de los errores que presentan los estudiantes en el cálculo de la media, mediana y moda, según Carvalho (2001) son:

- Moda: Tomar la mayor frecuencia absoluta, en lugar de tomar el valor de la variable que aparece con mayor frecuencia. Subyace en este error una confusión entre frecuencia y valor de la variable.
- Mediana: No ordenar los datos para calcular la mediana, por entender la mediana como el centro “no ordenado” de la distribución; calcular el dato central de las frecuencias absolutas ordenadas de forma creciente, es decir, confundir frecuencia con valor de la variable; calcular la moda en vez de la mediana; tomar como mediana el valor central de las frecuencias de la tabla.

- **Media:** Hallar la media de los valores de las frecuencias (de nuevo se confunde frecuencia y valor); no considerar la frecuencia absoluta de cada valor en el cálculo de la media, es decir, no ponderar los datos.

Por su parte, Garret y García (2005), señala las siguientes estrategias incorrectas en el cálculo de la media:

- Dividir el resultado obtenido por la suma de los valores de la variable, confundiendo de nuevo frecuencia y valor de variable.
- Usar el algoritmo de la media ponderada pero determinando de forma errónea la suma total.
- Usar correctamente el algoritmo pero redondeado el resultado encontrado.
- Elegir un dato cualquiera como media, para la solución pretendida.
- Otros de los errores que cometen los estudiantes es utilizar fórmulas incorrectas para calcular la media, no dividir por el total de la muestra o no tener en cuenta el peso de los distintos valores de la variable. Las estrategias intuitivas pasan a estrategias algebraicas con la instrucción, aunque la dificultad en el uso del cero para el cálculo de la media permanece en todos los niveles educativos estudiados.

### **2.2.3.3 Dificultades en la Interpretación de gráficos**

Las representaciones gráficas son necesarias para el trabajo estadístico, a través de ellas se puede visualizar mejor la información, pero a los estudiantes les cuesta analizar gráficos, en este sentido, Mayen (2009), plantea:

Las representaciones gráficas son especialmente difíciles para los alumnos, tal vez debido a que en la enseñanza tradicional no se les presta tanta atención como merecen. Se supone que la lectura de los gráficos estadísticos es obvia, pero cada gráfico estadístico tiene sus propios convenios que algunos alumnos no conocen. (Pág.102)

Según Batanero y Godino (2002), se pueden distinguir cuatro niveles distintos de comprensión de los gráficos, que pueden aplicarse a las tablas y gráficos estadísticos, estos son:

Lectura literal (leer los datos): Este nivel de comprensión requiere una lectura literal del gráfico; no se realiza interpretación de la información contenida en el

mismo.

Interpretar los datos (Leer dentro de los datos): incluye la interpretación e integración de los datos en el gráfico; requiere la habilidad para comparar cantidades y el uso de otros conceptos y destrezas matemáticas.

Hacer una inferencia (Leer más allá de los datos): requiere que el lector realice predicciones e inferencias a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico.

Valorar los datos (Leer detrás de los datos): Supone valorar la fiabilidad y completitud de los datos. (p. 726)

## **2.2.4 Unidades Didácticas**

### **2.2.4.1 ¿Qué es la unidad didáctica?**

“Se entiende por unidad didáctica como un proceso flexible de planificación de la enseñanza de los contenidos relacionados con un campo del saber específico para construir procesos de aprendizaje en una comunidad determinada”, (Tamayo *et al.* 2010, p. 107).

En este sentido, la unidad didáctica permite al docente planificar de forma ordenada una serie de contenidos en un tiempo determinado, esta permite mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje y adaptar las actividades teniendo en cuenta el contexto y nivel de los educandos, evitando de esta manera la improvisación del maestro.

### **2.2.4.2 Elementos de la unidad didáctica (Tamayo et al. 2010)**

En la presente investigación es importante trabajar una unidad didáctica sobre problemas de medidas de tendencia central, porque será un proceso flexible de planificación, en la cual se abordará la enseñanza de los conceptos desde una perspectiva constructivista, integrando aspectos tales como: la historia y epistemología de los conceptos, los obstáculos epistemológicos de los estudiantes, la reflexión metacognitiva y los múltiples lenguajes, e identificando cómo van evolucionando conceptualmente los educandos. A continuación se describen estos elementos:

#### **2.2.4.2.1 Obstáculos epistemológicos:**

La noción de obstáculo es tomada de Bachelard 1976 (citado en Mora, 2002), quien lo define como:

Las limitaciones o impedimentos que afectan la capacidad de los individuos para construir el conocimiento real o empírico. El individuo entonces se confunde por el efecto que ejercen sobre él algunos factores, lo que hace que los

conocimientos científicos no se adquieran de una manera correcta, lo que obviamente afecta su aprendizaje (pág. 2).

En este caso el obstáculo es considerado como un tipo de conocimiento ya disponible, que frecuentemente está instalado en nuestra mente desde hace mucho tiempo y no lo hemos percibido como tal.

El conocer los obstáculos epistemológicos que presentan los estudiantes cuando resuelven problemas sobre medidas de tendencia central permitirá tener una visión amplia y real del estado de los estudiantes frente a la comprensión de los conceptos de moda, media y mediana, los errores procedimentales que cometen, la confusión en las formulas, los conocimientos previos que traen y que pueden dificultar el aprendizaje, el dominio del lenguaje, las experiencias cotidianas y los modelos mentales que tienen. Así mismo se podrá constatar las dificultades cuando resuelven problemas, los razonamientos que realizan, los pasos que llevan a cabo, sus fortalezas y debilidades.

#### **2.2.4.2.2 Obstáculos Ontológicos:**

Pozo *et al.* (1988) realizan una caracterización de los obstáculos ontológicos más frecuentes en los estudiantes manifestados como concepciones espontáneas, inducidas o analógicas. A continuación se describen cada una de ellas:

**Concepciones Espontáneas:** Se forman por las percepciones sensoriales que tienen los niños acerca del mundo que les rodea y de hechos de la vida cotidiana.

**Concepciones Inducidas:** son creencias inducidas debido a procesos de socialización. Estas concepciones se originan en el entorno familiar, social y por la influencia de los medios de comunicación.

**Concepciones Analógicas:** Se derivan de las comparaciones que se realizan con hechos de la vida cotidiana, así la comprensión del concepto se basa en la formación de analogías generadas por los propios alumnos en su entorno familiar o en la escuela.

#### **2.2.4.2.3 Historia y epistemología de la ciencia**

La historia de la ciencia estudia los diferentes cambios y evolución del pensamiento científico en una trayectoria espacio-temporalmente dinámica de las teorías científicas. De otra parte, la epistemología se entiende como el estudio del conocimiento científico frente al estudio del conocimiento común.

Según Tamayo *et al.* (2010, p. 11), el estudio de la historia de la ciencia ofrece, tanto a los docentes como a los estudiantes, las siguientes ventajas:

- Ubicar la temática científica objeto de estudio en un contexto temporal, lo que permite relacionarla con otros acontecimientos de otras disciplinas y hacer un entramado en el cual el hecho científico se observa como un elemento relacionado con otros sucesos.
- Comprender los desarrollos actuales de la disciplina en cuestión.

- Conocer los hitos históricos de la disciplina para comprender los distintos estilos de pensamiento desarrollados en la época.
- Identificar algunos de los obstáculos que impiden el desarrollo científico y algunos de los elementos externos a la ciencia misma que catalizan su propio desarrollo, tales como: políticas educativas, políticas de desarrollo científico, aperturas educativas a otras fronteras, entre otros.
- Observar el concepto científico desde la diacronía.
- Observar la influencia de la ciencia en el desarrollo social.
- Orientar posibles desarrollos para la didáctica de la ciencia.

#### **2.2.4.2.4 Estudio de múltiples lenguajes**

Según Cabré, (2006) citado por Tamayo *et al.* (2010, p. 11), el lenguaje tiene una función simbólica: Representa el pensamiento de una comunidad o un grupo social, una situación sociolingüística, socioeconómica, sociopolítica o sociocultural. Tiene una función representativa debido a que lo utilizamos para hablar de la realidad a partir de las imágenes mentales que se crean a través de él, y finalmente, tiene una función comunicativa; esto es, necesitamos el lenguaje, al lado de otros sistemas posibles, para expresarnos y dar a conocer la información a los demás.

Asumir el lenguaje desde un punto de vista funcional conduce a establecer estrategias de enseñanza en las cuales un tema o un concepto determinado puede presentarse a los estudiantes de múltiples maneras y, los estudiantes, por su parte, pueden asumir su comprensión desde diferentes perspectivas. El maestro debe partir de este supuesto, con el fin de evitar la homogeneidad en el proceso de enseñanza–aprendizaje. Lo anterior pretende sembrar en el maestro y en el estudiante la idea de que no hay una única forma de comprender el fenómeno, sino que podemos acercarnos a él mediante múltiples formas de expresión o de comunicación, es decir, mediante múltiples lenguajes.

#### **2.2.4.2.5 La regulación Metacognitiva**

En el modelo de la unidad didáctica presentada, la metacognición cobra importancia cuando los docentes y los estudiantes la explicitan en el aula de clase, mediante la comunicación (verbalizaciones, escritura de textos, expresión corporal, representaciones gráficas, etc.) y al transitar entre dichos modos.

Algunas de las ventajas que trae el conocimiento de los procesos cognitivos y la regulación del diseño y aplicación de la unidad didáctica según Tamayo *et al.* 2010, son:

- La explicitación de la reflexión de los procesos cognitivos y sus diferentes estrategias de regulación permite a los estudiantes experimentar otras formas de expresión y desarrollar la creatividad con la ayuda de los múltiples lenguajes.

- La práctica de la actividad metacognitiva en el aula permite modificar la planificación de la enseñanza, porque el docente logra conocer las estrategias que utiliza el estudiante para aprender y, de este modo, adapta los contenidos de la enseñanza a las necesidades de aprendizaje del estudiante.
- La práctica de la metacognición facilita la identificación de obstáculos epistemológicos, lingüísticos y pedagógicos en los actores del proceso de enseñanza–aprendizaje. (pág.119)

Estos procesos metacognitivos le permitirán al estudiante mejorar sus estrategias de resolución de problemas, logrando una mayor profundidad y autonomía en el aprendizaje; en el que el educando tenga la posibilidad de explorar por sí mismo los caminos que le ayuden a encontrar la solución del problema, y de esta manera poder ensayar, replantear, comparar, y verificar los pasos que realiza.

### 3. METODOLOGÍA

#### 3.1 Categorías

En la tabla 1 se muestran las categorías de análisis con sus respectivos autores de referencia:

Tabla 1. Categorías de análisis

<b>Categorías de análisis</b>	<b>Subcategorías</b>	<b>Autor de referencia</b>
Resolución de problemas	-El conocimiento o recursos -Estrategias cognitivas o heurísticas -Las creencias y componentes afectivos	Schoenfeld (1992)
Metacognición	Regulación (Planeación, Monitoreo y Evaluación)	Brown (citada por Tamayo, 2006)
Medidas de tendencia central	Media, Moda y Mediana	Batanero y Godino (2002), Carvalho (2001), Garret y García (2005)

Fuente: Elaboración propia

#### 3.2 Diseño metodológico

El diseño que se utilizará en esta investigación es el estudio de caso, el cual se puede definir como “estudios que al utilizar los procesos de investigación cuantitativa, cualitativa o mixta; analizan profundamente una unidad para responder al planteamiento del problema, probar hipótesis y desarrollar alguna teoría”. (Hernández, Fernández, y Baptista, 2006 pág.224)

En el estudio de caso, según Munarriz (1992),

Se parte del supuesto de que en cualquier caso nos encontramos con múltiples realidades y que para analizarlas es necesario que el investigador realice una inmersión en el campo de estudio. Debe conocer desde dentro la trama del problema estudiado. Nos referimos a un estudio natural donde del investigador forma parte del escenario natural de las personas, instituciones, etc. investigadas. Ello permitirá al investigador hacer preguntas y hallar respuestas que se basen en los hechos estudiados sin partir de las preconcepciones del investigador, es decir, comprender los acontecimientos tal como los conciben los participantes. (p.104).

##### 3.2.1 Procedimiento

Teniendo en cuenta que el objetivo general es caracterizar de qué manera la reflexión metacognitiva favorece el proceso de resolución de problemas sobre medidas de

tendencia central, esta investigación se desarrollará a través de la aplicación de una unidad didáctica que contiene diferentes problemas auténticos sobre medidas de tendencia central, elaborados todos por el investigador. Los problemas planteados deben promover múltiples lenguajes y además contienen preguntas de autorreflexión metacognitiva. Para conseguir este objetivo se trabajaron dos fases, en las cuales se desarrolló cada objetivo específico, estas dos fases fueron: Fase de aplicación de la unidad didáctica (tiene tres momentos: momento de ubicación, momento de desubicación y momento de reenfoque), y la fase de análisis general. A continuación se describen cada una de las fases y momentos:

### **3.2.1.1 Fase de aplicación de la unidad didáctica:**

#### Momento de Ubicación:

En este primer momento se desarrolló el primer objetivo específico: Identificar los obstáculos ontológicos y procedimentales que presentan los estudiantes cuando solucionan problemas sobre medidas de tendencia central. Para conseguir este objetivo se realizaron dos problemas auténticos elaborados por el investigador, acerca de las medidas de tendencia central, se tuvieron en cuenta múltiples lenguajes (discurso oral, escrito, gestos, imágenes, diagramas, otros) mediante el cual los estudiantes expresaron las respuestas de los problemas planteados. En el desarrollo de dicha actividad se realizaron preguntas de autorregulación metacognitiva para darle solución. A partir de los resultados encontrados se realizó una categorización de los obstáculos presentados, este análisis se mostró a los estudiantes, permitiendo que ellos identifiquen sus obstáculos iniciales.

#### Momento de Desubicación

En este momento se tuvieron en cuenta los obstáculos detectados anteriormente, por lo cual se hizo énfasis en las estrategias de planeación, control y evaluación que los estudiantes podían aplicar para resolver los problemas. En este sentido, se observaron unos videos y se aplicó un cuestionario referente a los conceptos y propiedades de las medidas de tendencia central. Así mismo, se plantearon dos problemas auténticos sobre medidas de tendencia central los cuales contenían preguntas de regulación metacognitiva que permitieron identificar al docente lo que iba sucediendo con los obstáculos caracterizados.

#### Momento de Reenfoque:

En este momento se realizaron cuatro actividades con problemas auténticos sobre medidas de tendencia central, estos tuvieron mayor complejidad que los anteriores y se registró lo que sucedió con los obstáculos, permitiendo incorporar el uso de múltiples lenguajes y preguntas de autorregulación metacognitiva.

Durante los tres momentos se pudo identificar lo que sucedía con las categorías de análisis propuesta en la investigación, dicha exploración permitió hacer comparación

directa con lo realizado en los dos momentos anteriores, con el propósito de identificar en cada uno de los estudiantes cómo fue superando los obstáculos y analizando la manera como la metacognición favorece la resolución de problemas.

### 3.2.1.2 Fase de análisis general:

En esta fase se desarrolló el segundo objetivo específico: Describir la relación que se da entre los procesos metacognitivos y las estrategias de resolución de problemas. Aquí se realizó el análisis de la información recolectada en la aplicación de la unidad didáctica, en este sentido Bedoya (2002), citado por Solano y Bedoya (2013), denomina Análisis Didáctico (AD) a:

El proceso mediante el cual el profesor de matemáticas, basándose en conocimientos didácticos, diseña, implementa y evalúa las distintas actividades de planificación, ejecución y evaluación de la enseñanza de las matemáticas; tiene carácter local o situado en relación tanto con el contenido como con el contexto. Estas mismas actividades se pueden adaptar con propósitos investigativos, confiriéndole de esta manera al AD carácter de metodología auxiliar de investigación. Tal como se dijo inicialmente, el AD, o mejor, los conocimientos, habilidades y capacidades de los profesores para realizarlo, constituye indicadores de una formación y de competencia profesional de estos. (P.42)

En esta fase también se caracterizó de qué manera la reflexión metacognitiva favorece el proceso resolución de problemas sobre medidas de tendencia central, como también la formulación de conclusiones y recomendaciones. La información se organizó a través de una matriz, y después se asociaron las recurrencias dadas en las respuestas de los educandos con el fin de describir lo que sucedió en cada categoría. Ver tabla 2

Tabla 2. Matriz de organización de información

<b>Estudiante x</b>	<b>Categoría</b>	<b>Subcategoría</b>	<b>Pregunta</b>
<b>Respuesta (evidencia)</b>			
<b>Interpretación acorde con el marco teórico</b>			
<b>Autores que respaldan la interpretación</b>			

Fuente: Elaboración propia

La unidad didáctica se ejecutó durante 5 semanas, cuatro horas semanales para cada grupo distribuidas así:

Momento de ubicación: Una semana

Momento de Desubicación: Una semana

Momento de Reenfoque: tres semanas

### **3.3 Enfoque de la investigación:**

Esta investigación tuvo un enfoque Cualitativo con carácter descriptivo. En cuanto a la investigación cualitativa, Rodríguez, Gil y García (1996), manifiestan que:

La investigación cualitativa estudia la realidad en su contexto natural, tal y como sucede, intentando sacar sentido de, o interpretar los fenómenos de acuerdo con los significados que tienen para las personas implicadas. La investigación cualitativa implica la utilización y recogida de una gran variedad de materiales, entrevista, experiencia personal, historias de vida, observaciones, textos históricos, imágenes, sonidos que describen la rutina y las situaciones problemáticas y los significados en la vida de las personas. (Pág. 32).

Así mismo, la investigación descriptivas de acuerdo con Hernández, Fernández, & Baptista, (2006) “busca especificar propiedades, características y rasgos importantes de cualquier fenómeno que se analice. Describe tendencias de un grupo o población” (p. 103). En coherencia con esto, el objetivo de la investigación es la caracterización de los procesos metacognitivos en la resolución de problemas de medidas de tendencia central, la descripción de estos procesos, con base en las acciones que los estudiantes realizan durante la resolución de problemas.

### **3.4 Contextualización**

La presente investigación se desarrolló en la Institución Educativa Normal Superior de Sincelejo (IENSS), ubicada en el Municipio de Sincelejo del departamento de Sucre.

En el año (2015), la institución cuenta con alrededor de cuatro mil ochocientos veinticuatro (4824) estudiantes matriculados. Ofrece educación en los niveles de preescolar, básica primaria, básica secundaria, media, y ciclo complementario de formación docente.

En el aspecto socio-económico la mayor parte de los estudiantes viven en barrios de estratos bajos; se cuenta con un 12% de estudiantes desplazados, un 5% de estudiantes pertenecientes a grupos étnicos, un 24% y 15% vinculados a SISBEN 1 y 2 respectivamente. Entre las ocupaciones que más presentan los padres de familia se destacan: vendedor ambulante, ama de casa, comerciante y mototaxistas.

#### **3.4.1 Unidad de trabajo**

La unidad de trabajo para la aplicación de la unidad didáctica fueron los estudiantes de grado 8º, Grupo Ay B, con un total de 83 estudiantes de género mixto, sus edades oscilan entre los 12 y 14 años. En el aspecto académico, el 25% de los estudiantes

presentaron bajos resultados en el área de matemáticas en el año inmediatamente anterior; y no presentaban problemas disciplinarios.

Para la investigación se analizaron las actividades de 6 estudiantes, todos ellos de género mixto, se escogieron por conveniencia, debido a que eran los que evidenciaban escribir más y expresar mejor sus ideas, además fueron los que presentaron más obstáculos en la realización de los problemas sobre medidas de tendencia central. En este sentido, Kinnear y Taylor (1998. Pag.404) manifiestan que “en el muestreo por conveniencia la selección de un elemento de la población que va formar parte de la muestra se basa hasta cierto punto en el criterio del investigador”.

### **3.5 Técnicas e instrumentos:**

#### **3.5.1 Técnicas:**

Las técnicas utilizadas en la investigación fueron: La observación participante, entrevistas semi-estructurada, y el pensamiento en voz alta.

Anguera (1978), plantea que “la observación participante es el acto donde el observador registra e interpreta los datos al participar en la vida diaria del grupo u organización que estudia, entrando en la conversación de sus miembros, y estableciendo alguna forma de asociación o estrecho contacto con ellos” (p.128).

Así mismo, Rojas (2003) manifiesta que:

La observación participante es la técnica más importante en el campo de la Antropología donde el investigador debe involucrarse en las tareas cotidianas que los individuos realizan, sirve para conocer más de cerca un grupo de personas, así como también sus actitudes y conductas ante determinados estímulos; las situaciones que los llevan a actuar de uno u otro modo, la manera de resolver los problemas familiares o de la comunidad dentro del grupo (p.208).

Se ha seleccionado la entrevista semiestructurada ya que según (Hernández, Fernández, y Baptista, 2006 P.597) “se basan en una guía de asuntos o preguntas y el entrevistador tiene la libertad de introducir preguntas adicionales para precisar conceptos u obtener mayor información sobre los temas deseados...”. Es decir, no todas las preguntas están predeterminadas en la estructura de la entrevista.

En cuanto al pensamiento en voz alta, Armengol (2007), manifiesta:

Los protocolos de pensamiento en voz alta son instrumentos metodológicos que implican, como su nombre indica, el uso de informantes ‘pensando en voz alta’ mientras llevan a cabo una actividad. Los pensamientos articulados siguiendo esta técnica se graban para poder ser transcritos y analizados con la ayuda de unas categorías preestablecidas para reflexionar sobre los objetivos del trabajo de investigación. La metodología ha sido ampliamente utilizada para analizar actividades de resolución de problemas en numerosos estudios de psicología cognitiva y su uso se ha extendido para analizar los procesos de escritura. (p. 28)

Cada una de las sesiones de entrevista y observación se grabaran con audio y video con el fin de poder realizar los reportes verbales de cada estudiante y el posterior análisis de la información recolectada.

### **3.5.2 Instrumentos:**

Los instrumentos utilizados iban incluidos en la unidad didáctica y aplicados en los diferentes momentos, estos se describen a continuación:

En el momento de ubicación:

- Instrumentos para detectar los obstáculos ontológicos y procedimentales en la resolución de problemas sobre medidas de tendencia central, (2 instrumentos).

El primer instrumento aplicado fue un problema auténtico elaborado por el investigador, titulado: olimpiadas de matemáticas en Sincelejo; este contenía un enunciado y varios datos numéricos en la cual el estudiante debía hallar el promedio, la moda y la mediana para poder resolverlo, además, tenía una serie de preguntas metacognitivas para la solución del mismo.

El segundo instrumento fue un problema autentico elaborado por el investigador, titulado: Consumo de luz eléctrica; este contenía un diagrama de barras que mostraba el consumo de energía eléctrica en Kwh de la casa de un estudiante durante los últimos 6 meses, y varias preguntas que buscan que el estudiante interprete el diagrama para hallar el promedio y la media de los datos mostrados, así mismo presenta una serie de preguntas metacognitivas para la solución del mismo.

En el momento de Desubicación:

- Instrumento para identificar los conceptos que tienen los estudiantes acerca de las medidas de tendencia central y sus propiedades. (1 instrumento).

Este primer instrumento es un cuestionario acerca de los conceptos de las medidas de tendencia central y sus propiedades, también contiene preguntas metacognitivas.

- Instrumentos para identificar los procesos metacognitivos que intervienen en la resolución de problemas sobre medidas de tendencia central, (2 instrumentos).

El segundo instrumento es un problema auténtico elaborado por el investigador, titulado: Mototaxismo en Sincelejo; este consta de un enunciado y varios datos numéricos y no numéricos en la cual el estudiante debía hallar el promedio, la moda y la mediana para poder resolverlo, también presenta un diagrama de barras en la cual el estudiante debía interpretar para hallar las medidas de tendencia central. De igual forma tiene una serie de preguntas metacognitivas para la solución del mismo.

El tercer instrumento es un problema auténtico elaborado por el investigador, titulado: campeonato de microfútbol en la institución; este consta de un enunciado con datos numéricos y no numéricos y una tabla con ciertos valores en la cual el estudiante debía interpretar y hallar la media, la moda y la mediana. Así mismo, se presenta un

diagrama de barras para que el estudiante lo interpretara y contestara una serie de preguntas relativas a las medidas de tendencia central. De igual forma se presentan una serie de preguntas metacognitivas para la solución del mismo.

En el momento de Reenfoque:

- Instrumentos para identificar y describir la relación que se da entre los procesos metacognitivos y las estrategias de resolución de problemas sobre medidas de tendencia central, (4 instrumentos).

El primer instrumento es un problema auténtico elaborado por el investigador, titulado: Actividades para excursión; este consta de un enunciado con datos numéricos y no numéricos y dos tablas con ciertos valores en la cual el estudiante debía interpretar y hallar la media, la moda y la mediana. Así mismo, se presenta un diagrama de barras para que el estudiante lo interpretara y contestara una serie de preguntas relativas a las medidas de tendencia central. De igual forma se presentan una serie de preguntas metacognitivas para la solución del mismo.

El segundo instrumento, consta de 4 problemas elaborados por el investigador, en la cual el estudiante debía hallar las medidas de tendencia central, y contestar una serie de preguntas. De igual manera, se presentan preguntas metacognitivas para la solución de los mismos.

El tercer instrumento es una encuesta que debían realizar los estudiantes, y aplicarla a estudiantes de otros grados y después de recolectar la información, debían analizar los datos y responder una serie de preguntas que implican hallar las medidas de tendencia central. De igual forma se presentan una serie de preguntas metacognitivas para el proceso llevado a cabo.

El cuarto instrumento consta de 5 problemas realizados por el investigador, para que los estudiantes los resolvieran utilizando el programa EXCEL, estos también incluyen preguntas metacognitivas.

### **3.6 Plan de análisis:**

El tipo de análisis que se realizó es del discurso, según (Tamayo *et al.* 2010), “El análisis del discurso, y por ende del lenguaje, permite acercarnos cualitativamente a diferentes representaciones de los estudiantes sobre distintos hechos o fenómenos.” (p.96)

Se realizó un análisis del discurso oral y escrito que realizaron los estudiantes en las diferentes actividades y en los diferentes momentos de la investigación. En este sentido Tamayo (2001) manifiesta que “el análisis de los textos escritos es usado ampliamente con el propósito de comprender los procesos de aprendizaje y cambio conceptual en los estudiantes” (p.48)

Según Tamayo (2001):

Los textos escritos, como sistemas externos de representación que son, se constituyen a través de un complejo proceso de reconstrucciones, no son sólo la traducción de representaciones internas o de otros sistemas simbólicos como el lenguaje. Los textos tienen naturaleza propia que repercute en la cognición y en el aprendizaje de quien los utiliza. Un texto es un modelo de la realidad a la que hace referencia según ciertas restricciones y como modelo representativo, crea nuevas realidades y nuevas relaciones. (p.46)

De igual manera el análisis de los textos permitió obtener información de los obstáculos procedimentales y ontológicos que presentaban los estudiantes en la resolución de problemas sobre medidas de tendencia central, se pudo evidenciar aspectos de diferente naturaleza, tales como los relacionados con el conocimiento cotidiano y el científico que ellos poseen. Así mismo, a través de los textos escritos se pudo verificar el avance de los educandos en todo el proceso.

## 4. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

El proceso de triangulación se llevó a cabo mediante el contraste de la información procedente de instrumentos de lápiz y papel, de las grabaciones y entrevistas realizadas a los estudiantes en los diferentes momentos, teniendo en cuenta las categorías de análisis previamente establecidas.

### 4.1 MOMENTO DE UBICACIÓN

#### 4.1.1 ANÁLISIS DE LOS OBSTÁCULOS ONTOLÓGICOS Y PROCEDIMENTALES

##### 4.1.1.1 ANÁLISIS DE LOS OBSTÁCULOS ONTOLÓGICOS EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE MEDIDA DE TENDENCIA CENTRAL.

El análisis sobre los aspectos ontológicos se centra básicamente en identificar a partir de los textos elaborados por los estudiantes, diferentes concepciones alternativas acerca de las medidas de tendencia central. Estas concepciones pueden ser espontáneas, inducidas o analógicas. Para ello se tiene siguiente caracterización general, (Pozo, 1988): ver tabla 3

Tabla 3. Caracterización de las concepciones

<b>Concepciones Espontáneas</b>	<b>Concepciones Inducidas</b>	<b>Concepciones Analógicas</b>
Se forman en el intento de dar significado a las actividades cotidianas	Son creencias inducidas debido a procesos de socialización	Se derivan de las comparaciones que se realizan con hechos de la vida cotidiana
Se forman por las percepciones sensoriales que tienen las personas acerca del mundo	Asimilación de creencias, la cultura el lenguaje	Se originan al estudiante no poseer concepciones espontáneas sobre algún tema, como respuesta actúan por analogía

Fuente: Tomado de (Pozo, 1988)

Dentro de los obstáculos ontológicos presentados por los estudiantes en la resolución de problemas sobre medidas de tendencia central, se encontraron algunos relacionados con las concepciones inducidas. Estas concepciones están influenciadas por los procesos de socialización que se presentan en el ambiente escolar y otras por la influencia de estos términos en el lenguaje cotidiano o uso común. En primer lugar se muestran algunos ejemplos que proponen los estudiantes los cuales están relacionados con las notas que le entregan al final del periodo. De las 18 oraciones con sentido relacionadas con las concepciones inducidas todas estuvieron relacionadas con lo sociocultural. Ver tabla 4.

Tabla 4. Concepciones acerca del promedio

Pregunta	Respuesta del estudiante
P.1 ¿Qué entiendes por promedio?	E.1: <i>Son las notas finales</i> E.2: <i>Es la suma de las notas del periodo</i> E.3: <i>Es la suma de las notas cuando me entregan el boletín</i> E.4: <i>Es la suma de las notas del área</i> E.5: <i>Es la suma de las notas finales</i> E.6: <i>Es la suma de las notas del periodo</i>

Fuente: Elaboración propia basada en registro de estudiantes

Todo lo anterior refleja que el contexto escolar de los estudiantes influye en su concepción acerca de lo que es el promedio, debido a que es en la escuela donde escuchan este término. En este sentido, Figueroa *et al.*, (2006) manifiestan que:

Los medios de comunicación, la interacción con amigos y familiares e incluso con los profesores constituyen una fuente de información de primera mano para los estudiantes. De allí obtienen ideas que fundamentan sus creencias y con las cuales forman sus conceptos sobre los fenómenos que observan (P.27)

Las respuestas dadas por los estudiantes manifiestan cierto obstáculo debido a que asumen el promedio como una suma, olvidando que se tiene que dividir entre el total de los datos, lo cual ocasiona errores de procedimientos al momento de hallarlo.

Otros de los elementos analizados en las medidas de tendencia central fueron la moda y la mediana, dentro de las cuales los estudiantes también presentaron concepciones inducidas. Ver tabla 5

Tabla 5. Concepciones acerca de la moda y mediana

Pregunta	Respuesta textual del estudiante
¿Qué entiendes por moda?	E.1: <i>Es algo que lo tiene todo el mundo.</i> E.2: <i>Es la ropa que se está usando</i> E.3: <i>Es lo que usa todo el mundo</i> E.4: <i>Es la ropa que usa la gente</i> E.5: <i>Es lo que se está usando en el momento</i> E.6: <i>Es lo que usa todo el mundo</i>
¿Qué entiendes por mediana?	E.1: <i>Es una persona pequeña de baja estatura.</i> E.2: <i>Es algo pequeño, pero no tanto.</i> E.3: <i>Es una forma de estatura pequeña</i> E.4: <i>Es una medida pequeña, no tan grande</i> E.5: <i>Es un valor muy pequeño</i> E.6: <i>Es un valor pequeño que va en el centro</i>

Fuente: Elaboración propia basada en registro de estudiantes

En las respuesta de los estudiantes se presentan concepciones inducidas influenciadas quizás por el entorno social y cultural inmediato donde se expone el termino moda y mediana, asociando el termino al lenguaje cotidiano o uso común, intentando de forma más o menos consciente transferir el significado que se le da habitualmente a su significado en el campo de la estadística. En este sentido, Llorens *et al.* (1989) manifiesta que “la mayor parte de la terminología científica utilizada en la enseñanza básica y secundaria procede del lenguaje ordinario, tras un complejo proceso de diferenciación y precisión semántica de los significados etimológicos o del uso ordinario” (pag.113).

Todo lo anterior refleja la influencia del contexto inmediato del estudiante en la formación de los conceptos, en este sentido, Pozo *et al.* (1988. P.88) manifiesta: “entre las fuentes socioculturales del conocimiento del alumno cabe destacar no solo la familia y el sistema educativo sino también la creciente influencia de los medios de comunicación en la formación de concepciones”.

Frente a la pregunta ¿cómo te sentiste al resolver el problema?, El estudiantes E.1, responden: “*Me sentí mal porque no me acuerdo casi de los temas y sé que me equivoqué*”.

Por su parte el estudiante E.2 responde: “*Tengo miedo de equivocarme porque no me acuerdo de estos temas*”

El estudiante E.3 expresa: “*Me sentí perdido porque no me acuerdo de nada, y creo que esto es difícil*”

Los estudiantes E.4, E.5, E.6 manifiestan: “*Me sentí mal y desmotivado*”

Todo lo anterior refleja que los estudiantes al no recordar los conceptos ni las formulas, y al pensar que el tema es difícil, presentan una actitud negativa frente a la resolución de los problemas. En este sentido, Socas (1997) afirma que:

Muchas de las actitudes negativas y emocionales hacia las matemáticas están asociadas a la ansiedad y el miedo. La ansiedad por acabar una tarea, el miedo al fracaso, a la equivocación, etc. generan bloqueos de origen afectivo que repercuten en la actividad matemática de los alumnos (p.135).

#### **4.1.1.2 ANÁLISIS DE LOS OBSTÁCULOS PROCEDIMENTALES EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE MEDIDA DE TENDENCIA CENTRAL.**

Se tendrá en cuenta la definición de obstáculo que describen Serradó, A., Cardeñoso, J. M., & Azcárate, P. 2005) citando a Socas (1997) el cual define un obstáculo como:

Aquel conocimiento que ha sido, en general, satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes. Este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta a problemas nuevos. (pag.3)

Los obstáculos procedimentales identificados están relacionados con las estrategias heurísticas que empujan los estudiantes para resolverlos. Dentro de los obstáculos

procedimentales presentados por los estudiantes en la resolución de problemas sobre medidas de tendencia central tenemos:

En la pregunta P.4: ¿Cuál es el peso promedio del curso?, los estudiantes E.1 y E.2 respondieron “*El promedio es 47*”, escogieron como el promedio el dato mayor, presentando una confusión con la moda, o posiblemente tomaron un valor cualquiera para dar respuesta a lo pedido. En este sentido, Garret y García (2005) señalan que “dentro de las estrategias incorrectas en el cálculo de la media está elegir un dato cualquiera como media, para la solución pretendida”. Una de las evidencias de lo que hicieron los estudiantes para hallar el promedio se presenta en la figura 1.

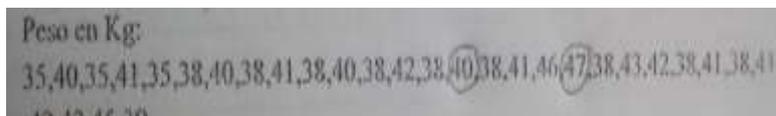


Figura 1. Respuesta de E.2 a P.5

Por su parte, los estudiantes E.3, E.4; E.5, y E.6 respondieron: “*El promedio es 1201*”. Estos se limitaron a sumar los datos olvidando que se debe dividir entre el total, presentándose un obstáculo. En este sentido, Barrantes (2006) manifiesta:

Un obstáculo se manifiesta por los errores que no son debidos al azar. Son errores que aparecen una y otra vez, son reconocibles, se sabe que van a aparecer y que persisten. Además, estos errores en un mismo sujeto están ligados entre sí por una fuente común, básicamente una manera de aprender o una concepción característica, un conocimiento anterior que tiene que ver con todo un dominio de acción. (pag.4)

Una evidencia del proceso como hallaron el promedio se refleja en la figura 2

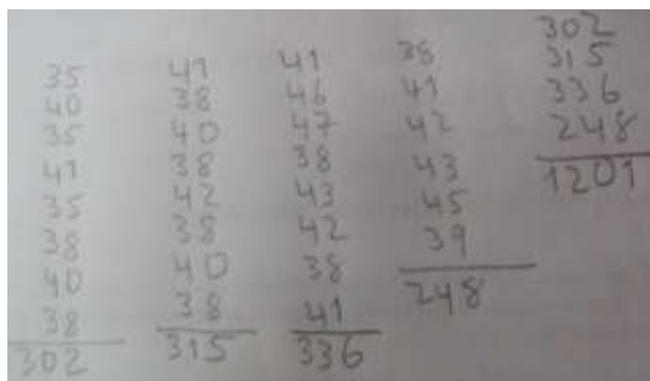


Figura 2. Respuesta de E.3 a P.4

En términos generales, se evidencia que los estudiantes no realizan el proceso correcto para hallar la media aritmética, en este sentido Batanero y Godino, (2002), plantean que “la media aritmética es la principal medida de tendencia central. Es el número que se obtiene sumando todos los valores de la variable estadística ( $x_i$ ) y dividiendo por el número de valores ( $n$ ).

Para la pregunta P.5: ¿Cuál es la Moda de la variable peso?, los estudiantes E.1, E.2, E.3, respondieron: “*La moda es 40, ya que es el dato del centro*”. Estos presentan un obstáculo debido a que confunden la moda con la mediana y no tienen en cuenta el

concepto de la moda que según Batanero y Godino, (2002), “la moda es el valor de la variable que tiene mayor frecuencia”. (p.714).

Por su parte, los estudiantes E.4, E.5, E.6 frente a P.5 responden: “*la moda es 47 ya que es el dato mayor*”. Estos presentan el obstáculo de creer que la moda es el dato mayor y no el de mayor frecuencia. En este sentido Carvalho (2001) manifiesta que dentro de los errores que presentan los estudiantes en el cálculo de la moda, está “tomar la mayor frecuencia absoluta, en lugar de tomar el valor de la variable que aparece con mayor frecuencia. Subyace en este error una confusión entre frecuencia y valor de la variable.”

Frente a la pregunta P.6: ¿Cuál es la mediana de la variable edades? los estudiantes E.1, E.2 E.3, E.4 responden: “*La mediana es 12*”. Los estudiantes escogen el menor valor de la muestra como la mediana, por lo cual presenta un obstáculo al hallarla debido a que asumen que esta es el valor más pequeño. Ver figura 3

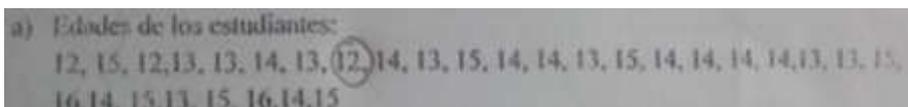


Figura 3. Respuesta de E.1 a P.6

Por su parte el estudiante E.5, responde a P.6: “*la mediana es 15*”. Este estudiante escoge el valor del centro, pero se le olvida ordenar los datos, por lo cual presenta un error al hallar la mediana, en este sentido Carvalho (2001) manifiesta que dentro de los errores que presentan los estudiantes en el cálculo de la mediana está “no ordenar los datos para calcular la mediana, por entender la mediana como el centro “no ordenado” de la distribución”.

En la figura 4 se muestra el proceso llevado a cabo por E.5 para hallar la mediana

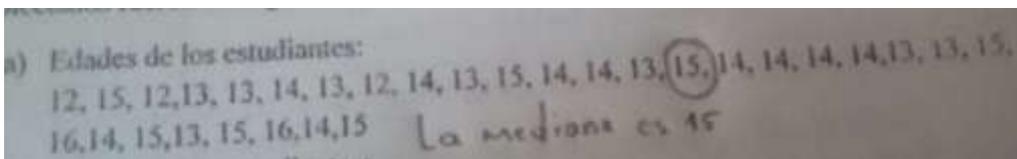


Figura 4. Respuesta de E.5 a P.6

El estudiante E.6 responde a P.6: “*la mediana es 14*”. Este estudiante escoge el valor del centro y ordena los datos, pero se le olvida que en la mediana se deben tener en cuenta todos los datos al momento de ordenarlos, evidenciando un obstáculo que le impide resolver el problema. Ver figura 5

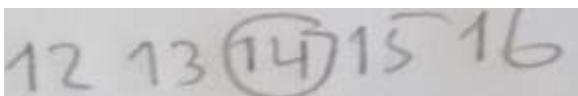


Figura 5. Respuesta de E.6 a P.6

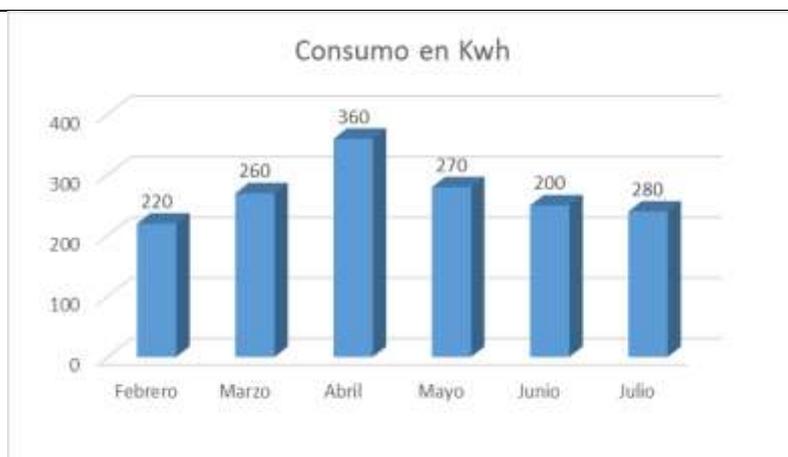
En términos generales, los estudiantes E.1, E.2, E.3, E.4, E.5, E.6 presentaron obstáculos frente al procedimiento para hallar la mediana, al respecto Batanero y

Godino, (2002), plantean que “si suponemos ordenados de menor a mayor todos los valores de una variable estadística, se llama mediana al número tal que existen tantos valores de la variable superiores o iguales como inferiores o iguales a él. (p.714)

A continuación se presentan algunas preguntas relativas a las medidas de tendencia central pero los datos se encuentran representados en un diagrama de barras:

Tabla 6. Preguntas relativas al diagrama

### PREGUNTAS RELATIVAS AL DIAGRAMA



Gráfica 1. Consumo de energía

P.9: La siguiente grafica muestra el consumo de energía en los últimos 6 meses de la casa de un estudiante de 8º, él manifiesta que el consumo promedio en los últimos 6 meses en su casa fue de 200 Kwh, ¿estás de acuerdo? ¿Por qué?

P.10: ¿Cuál es la moda en el diagrama?

P.11: ¿Cuál es la mediana en el diagrama?

Para la pregunta P.9, los estudiantes E.1 y E.2, respondieron: “no estoy de acuerdo porque el promedio es 360”. El estudiante presenta un obstáculo al hallar la media aritmética en el diagrama debido a que toma el mayor dato de la muestra, presentando posiblemente una confusión con la moda. Por su parte, los estudiantes E.3, E.4; E.5, y E.6 frente a P.9 respondieron: “no estoy de acuerdo porque el promedio es 1590”, evidenciando un obstáculo al considerar el promedio solo como una suma de datos olvidando dividir entre el total de ellos.

Para la pregunta P.10 los estudiantes E.1, E.2, E.3, E.4; E.5, y E.6 respondieron: “la moda es 360” evidenciando un obstáculo debido a que escogen la frecuencia y no la variable con la mayor frecuencia. Para la pregunta P.11, los estudiantes E.1, E.2, E.3, E.4, E.5, y E.6 responden: “la mediana es 200”, evidenciando el obstáculo de considerar la mediana como el dato menor.

En términos generales, los estudiantes E.1, E.2, E.3, E.4; E.5, y E.6 no realizan un análisis profundo de la información contenida en el gráfico, realizando simplemente una lectura literal del mismo, al respecto Batanero y Godino (2002), manifiestan que se pueden distinguir cuatro niveles distintos de comprensión de los gráficos, que pueden aplicarse a las tablas y gráficos estadísticos, uno de ellos es “lectura literal (leer los datos): Este nivel de comprensión requiere una lectura literal del gráfico; no se realiza interpretación de la información contenida en el mismo” (p. 726).

#### 4.1.3 ANÁLISIS DE LA CATEGORÍA REGULACIÓN METACOGNITIVA

##### 4.1.3.1 Subcategoría: Planeación

La planeación es un proceso que se realiza antes de resolver el problema, este permite detallar los pasos que se llevaran a cabo para resolverlo. En este sentido Brown (citada por Tamayo, 2006, p.3) señala:

La planeación es un proceso que se realiza antes de enfrentar una tarea o meta escolar, implica la selección de estrategias apropiadas y la localización de factores que afectan el rendimiento; la predicción, las estrategias de secuenciación y la distribución del tiempo o de la atención selectiva antes de realizar la tarea; consiste en anticipar las actividades, prever resultados, enumerar pasos.

La tabla 7 muestra las preguntas relacionadas con la subcategoría planeación, para indagar acerca de los procesos que llevan cabo los estudiantes.

Tabla 7. Preguntas de planeación

PREGUNTAS DE PLANEACIÓN
P.12: ¿Entendiste el enunciado del problema? ¿Cuántas veces lo leíste?
P.13: ¿Subrayaste la información importante? ¿Organizaste los datos?
P.14: ¿Qué debes hacer para resolver el problema? ¿Tienes algún plan?

Fuente: Elaboración propia basada en unidad didáctica

En los procesos de planeación llevados a cabo por los estudiantes E.1, E.2, E.3, E.4, E.5, E.6, manifiestan entender el enunciado y expresan que leen el problema en promedio de 1 a 2 veces para comprenderlo. No se presenta organización de los datos, solo se evidencia que los estudiantes E.5 y E.6 encierran y subrayan información importante en el problema, además, ninguno de ellos manifiesta tener un plan para resolver el problema, solo se limitan a realizar algunas operaciones sin un sentido lógico, todo esto incide en sus dificultades para resolverlo, debido a que no cuenta con una estrategia de planeación adecuada.

Por otro lado, en las respuestas dadas por los estudiantes E.1, E.2; E.3; E.4; E.5, E.6 se evidencia que dentro de las estrategias cognitivas utilizadas para resolver problemas sobre medidas de tendencia central está encerrar en círculos datos importantes, también utilizan líneas para resaltar datos relevantes del problemas. Del

mismo modo cuando hallan el promedio organizan los datos en subgrupos de forma vertical para facilitar la suma de los datos, en este sentido, Schoenfeld (1992) manifiesta que:

Las estrategias cognitivas o heurísticas involucran formas de representar y explorar los problemas con la intención de comprender los enunciados y plantear caminos de solución. Algunos ejemplos de estas estrategias son dibujar un diagrama, buscar un problema análogo, establecer submetas, descomponer el problema en casos simples, etc.

Una de las estrategias utilizadas por los estudiantes para la planeación fue encerrar los datos en círculos. Ver figura 6

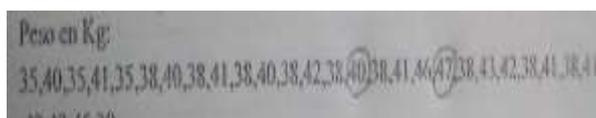


Figura 6. Respuesta de E.3 a P.6

Teniendo en cuenta todo lo anterior, se puede decir que las preguntas relativas a la planeación, permitieron que los estudiantes se dieran cuenta que no contaban con un plan detallado para resolver los problemas, en este sentido, al no tener claro una serie de pasos a seguir, originaba un desorden en la ejecución de las operaciones y las diferentes actividades. Es por ello que surge la necesidad en los educandos de una mejor organización y de crear una ruta para resolver los problemas.

#### 4.1.3.2 Subcategoría: Monitoreo

El monitoreo es un proceso importante en la resolución de problemas porque permite verificar de forma continua lo que se está haciendo y poder corregir en caso de errores. En este sentido Brown (citada por Tamayo, 2006, p.3) señala que “el Monitoreo se refiere a la posibilidad que se tiene, en el momento de realizar la tarea, de comprender y modificar su ejecución, por ejemplo, realizar auto-evaluaciones durante el aprendizaje, para verificar, rectificar y revisar las estrategias seguidas”

La tabla 8 muestra las preguntas relacionadas con la subcategoría monitoreo, para indagar acerca de los procesos que llevan cabo los estudiantes para revisar lo que hacen.

Tabla 8. Preguntas de Monitoreo

PREGUNTAS DE MONITOREO
P.15: ¿Crees que lo estás haciendo bien?
P.16: ¿Te sirve el esquema que planteaste?

Fuente: Elaboración propia basada en unidad didáctica

En los procesos llevados a cabo por los estudiantes E.1, E.2, E.3, E.4, E.5, E.6, se evidencia que no realizan monitoreo de lo que hacen y no saben si lo que está haciendo está bien, se limitan a realizar operaciones sin un sentido lógico, argumentando que

tiene dudas y que se les olvidaron los conceptos que se están trabajando, lo cual les impide revisar y corregir lo que están haciendo.

Los estudiantes E.1, E.2, E.3, E.4 manifiestan: “*No sé si lo que estoy haciendo está bien*” mientras que E.5 y E.6 expresan: “*no revise las operaciones que hice*”, esto refleja que no existe un control de lo que se está haciendo por parte de los educandos.

Teniendo en cuenta lo anterior, las preguntas de monitoreo permitieron que los estudiantes reconocieran la necesidad de revisar lo que se hace, de identificar si las estrategias que estaban aplicando eran las adecuadas, de corregir operaciones y en algunos casos leer nuevamente el problema y reorganizar los datos, lo que permitía encontrar posibles errores para no cometerlos en problemas posteriores.

#### 4.1.3.3 Subcategoría: Evaluación

La evaluación es un proceso que permite revisar si lo que se hizo está bien, replantear algunas estrategias y evaluar el cumplimiento de las metas. En este sentido Brown (citada por Tamayo, 2006, p.3) señala que “la evaluación realizada al final de la tarea, se refiere a la naturaleza de las acciones y decisiones tomadas por el aprendiz; evalúa los resultados de las estrategias seguidas en términos de eficacia”.

La tabla 9 muestra las preguntas relacionadas con la subcategoría planeación, para indagar acerca de los procesos que llevan cabo los estudiantes para evaluar lo que hicieron.

Tabla 9. Preguntas de Evaluación

PREGUNTAS DE EVALUACIÓN
P.17: ¿Qué dificultades encontraste para resolver el problema?
P.18: ¿Verificaste la solución?
P.19: ¿Considera que el plan funcionó bien? Sí ____ No ____ ¿Por qué?

Fuente: Elaboración propia basado en unidad didáctica

Frente a las preguntas, P.17 y P.18, los estudiantes E.1, E.2, E.3, E.4, E.5, E.6 respondieron: “*No verifiqué la solución y la dificultad que encontré fue que no me acuerdo del tema ni de las fórmulas*”

En los procesos llevados a cabo por los estudiantes E.1, E.2, E.3, E.4, E.5, E.6, expresan: “*No tuve ningún plan, creo que por eso tuve dificultades*”, además se evidencia que no realizan una evaluación del proceso llevado a cabo en la resolución del problema, argumentando que no se acordaban de las fórmulas ni del tema, por lo cual no saben si lo que hicieron está bien.

Únicamente se refleja como evaluación el hecho de que reconocen que tienen dificultades y que si se les explica y recuerdan los conceptos pueden resolver el problema, es así como E.1, E.2, E.3, E.4 manifiestan: “*Tengo dificultades con la*

*división y no recuerdo las fórmulas de las medidas de tendencia central*". Por su parte E.5 y E.6 expresan: *"confundo las medidas de tendencia central y sus fórmulas"*. Todo lo anterior indica que hay reconocimiento por parte de los educandos de dificultades en el tema.

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede decir que las preguntas relativas a planeación permitieron que los estudiantes reconocieran la necesidad de evaluar el proceso llevado a cabo cuando se resuelven problemas, de realizar una retrospectiva en cada uno de los pasos implementados. Esto brindaría la posibilidad de identificar si las estrategias utilizadas fueron eficaces, si se presentaron errores, si quedaron cosas por hacer y además saber cuál era el grado de satisfacción y motivación frente al tema.

## **4.2 MOMENTO DE DESUBICACIÓN**

### **4.2.1 ANÁLISIS DE LOS OBSTÁCULOS ONTOLÓGICOS Y PROCEDIMENTALES**

#### **4.2.1.1 ANÁLISIS DE LOS OBSTÁCULOS ONTOLÓGICOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SOBRE MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL**

En este segundo momento se analizó lo que sucedió con los obstáculos ontológicos encontrados en el primer momento referidas a concepciones inducidas.

Para la pregunta P.10 ¿Qué entiendes por promedio?, el estudiante E.1 responde: *"Es cuando se suman todos los números"*. Para este estudiante todavía persiste el obstáculo ontológico de asumir el promedio como una suma únicamente, se presenta una concepción inducida influenciada quizás por el entorno social y cultural inmediato que es el colegio donde se expone el término promedio. Esto lo asocia con la suma de las notas que le dan en las diferentes áreas al final del periodo debido a que lo escuchan en el contexto escolar.

Todo lo anterior refleja la influencia del contexto educativo del estudiante en la formación de los conceptos, en este sentido, Pozo *et al.* (1988. P.88) manifiesta que "el hecho de entender las ideas de los alumnos como constructos personales no debe hacernos olvidar que su construcción tiene lugar en un contexto social que induce o favorece cierto tipo de ideas". En este caso el ambiente escolar induce a que el estudiante tenga ese concepto acerca del promedio.

Por su parte los estudiantes E.2, E.3, E.4, E.5, E.6, frente a P.10 responden: *"Es la suma de los datos dividido entre el total"*. Estos estudiantes evidencian un acercamiento al concepto y ya lo asocian al campo de la estadística, sin embargo todavía lo asocian solo a la aplicación de un algoritmo. En este sentido Russell y Mokros (1991) manifiestan que dentro de las concepciones de los estudiantes sobre los promedios una de ellas es que la vean solo como una "relación algorítmica", es decir, una fórmula de cálculo.

Frente a lo que entienden los estudiantes por moda, E.1, E.2, E.3, E.5 responden: “Es el dato mayor”. Estos estudiantes a pesar que ya asocian el concepto de moda al campo de la estadística, todavía persiste un obstáculo debido a que la sumen como el dato mayor y no como el dato de mayor frecuencia.

Por su parte los estudiantes E.4 y E.6 respecto a lo que entienden por moda responden respectivamente: “Es el dato con mayor frecuencia” y “es el dato que más se repite”, lo cual es correcto. Estos estudiantes evidencian haber superado el obstáculo encontrado en el primer momento del proyecto frente al concepto de moda.

En este segundo momento frente a la subcategoría mediana, los estudiantes E.1, E.2, E.3, E.4, E.5, manifiestan: “Es el dato del centro”. Esto evidencia acercamiento al concepto de mediana, sin embargo, no manifiesta que los datos deben estar ordenados.

Por su parte el estudiante E.6 frente a P.6 responde: “Es el dato del centro cuando ordenamos los datos de menor a mayor”. Este estudiante evidencia haber superado el obstáculo ontológico encontrado en el primer momento frente al concepto de mediana.

#### 4.2.1.2 ANÁLISIS DE LOS OBSTÁCULOS PROCEDIMENTALES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SOBRE MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

En este segundo momento se analizará lo que sucedió con los obstáculos procedimentales referidos a las estrategias heurísticas encontrados en el primer momento.

Para el problema: Se preguntó en la oficina de tránsito el número de comparendos por día durante el mes de junio y estos fueron los resultados:

45, 36, 70, 38, 56, 72, 24, 63, 51, 74, 25, 64, 48, 68, 75, 24, 68, 64, 39, 40, 65, 120, 82, 96, 66, 80, 93, 84, 105, 63.

P.18: ¿Cuáles es el número promedio de comparendos en el mes de junio?

Frente a P.18, el estudiante E.1 responde: “el promedio es 1898”, sigue manteniendo el obstáculo procedimental de no dividir entre el total de los datos. Al respecto Monereo y otros (1995) plantean que “los procedimientos heurísticos son acciones que comportan un cierto grado de variabilidad y su ejecución no garantiza la consecución de un resultado óptimo”. (p. 20).

El proceso llevado cabo por E.1 para hallar el promedio se presenta en la figura 7.

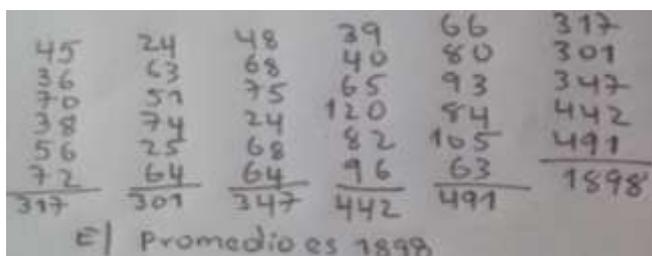


Figura 7. Respuesta de E.1 a P.18

Por su parte los estudiantes E.2, E.3, E.4, E.5, E.6 responden a P.18: “*el promedio es 63,2*”, evidenciando un proceso correcto para hallarlo. En este sentido Cobo (2003) manifiesta que “la media aritmética se calcula sumando todos los datos y dividiendo por el número total de ellos”. Se nota que los estudiantes han superado el obstáculo encontrado en el primer momento frente a la medida de tendencia central media aritmética. Ver tabla 9.

Tabla 10. Respuestas de estudiantes P.18

RESPUESTA DE ESTUDIANTES A P.18

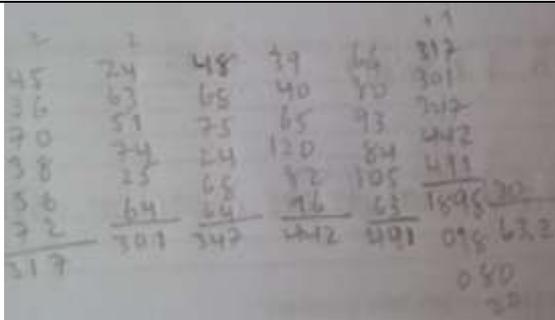


Figura 8. Respuesta de E.2 a P.18

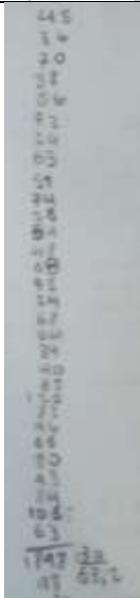


Figura 9. Respuesta de E.3 a P.18

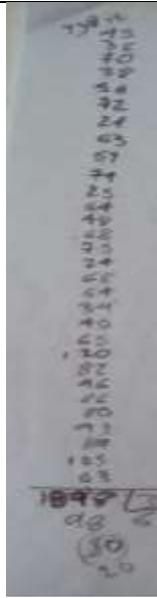


Figura 10. Respuesta de E.4 a P.18

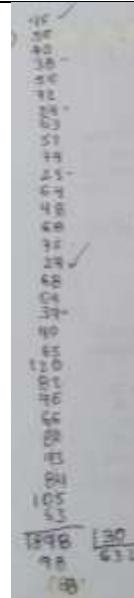


Figura 11. Respuesta de E.6 a P.18

Fuente: Elaboración propia basada en registro de estudiantes

Para la pregunta P.19: ¿Cuál es la mediana de los datos reportados por el tránsito?, los estudiantes E.1 y E.2 respondieron: “*la mediana es 64*”. A pesar de ordenar los datos de menor a mayor, no tuvieron en cuenta que el número de datos era par, presentando un obstáculo al hallar la mediana debido a que tenían que sumar los dos datos del centro y dividirlo entre dos. En este sentido Cobo (2003) manifiesta “Para datos no agrupados en clases, número de valores par, la mediana es la media aritmética de los dos valores que se encuentren en el centro”. Ver figura 12.

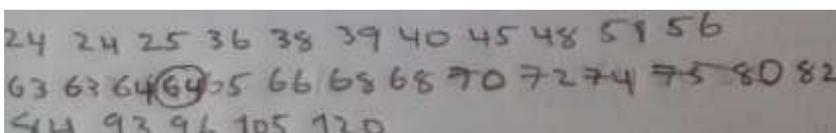


Figura 12. Respuesta de E.2 a P.19

El estudiante E.3 frente a P.19 responde: “la mediana es 75”, se mantiene el obstáculo de no ordenar los datos, es decir, se toma el valor del centro pero sin ordenarlos, (ver figura 13). En este sentido, Mayen (2009, pag.13) manifiesta que “la mediana se define intuitivamente como el valor que ocupa el centro de la distribución cuando los datos se ordenan en forma creciente”.

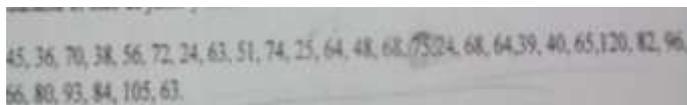


Figura 13. Respuesta de E.3 a P.19

Por su parte los estudiantes E.4, E.5 y E.6 frente a P.19 respondieron: “la mediana es 64,5”, evidenciaron un proceso correcto al hallar la mediana, superando el obstáculo encontrado en el primer momento. Ver figura 14

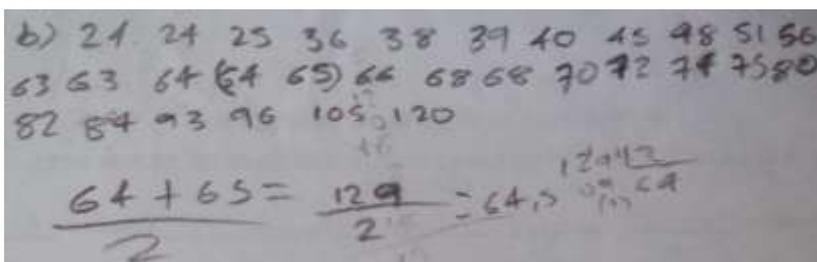


Figura 14. Respuesta de E.4 a P.19

Para el problema: Una empresa realizó una encuesta a 25 mototaxistas para averiguar cuál es la marca de moto que más les gusta para trabajar entre: Auteco (A), Yamaha (Y), Suzuki (S) y Honda (H), estas fueron sus respuestas:

A, S, A, Y, A, S, A, H, A, A, S, Y, Y, A, A, S, S, Y, A, S, Y, A, A, S, A

P.20: ¿Cuál es la moda en esta encuesta? ¿Por qué?.

Frente a la pregunta P.20 los estudiantes E.1, E.2, E.3, E.4, E.5, E.6 respondieron: “la moda es Auteco (A) porque es el que más se repite, 12 veces”. Evidenciando un proceso correcto al hallar la moda. Al respecto, Mayen (2009, pág. 14) expresa que “la moda es el valor de mayor frecuencia”. Lo cual evidencia haber superado el obstáculo encontrado en el primer momento. Ver figura 15

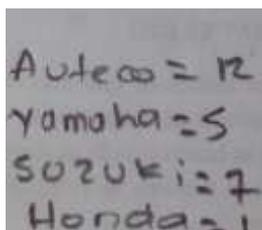


Figura 15. Respuesta de E.1 a P.20

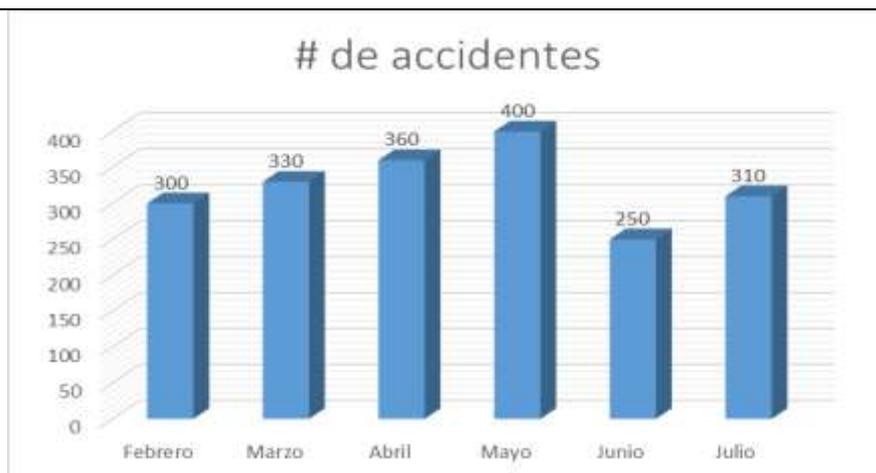
En la tabla 11 se plantean preguntas relativas a las medidas de tendencia central pero los datos se encuentran en un diagrama de barras.

Tabla 11. Preguntas relativas al diagrama

---

PREGUNTAS RELATIVAS AL DIAGRAMA

---



Grafica 2. Número de accidentes

P.21: ¿Cuál es el promedio de accidentes durante el último semestre?

---

P.22: ¿Cuál es la moda en el diagrama?

---

P.23: ¿Cuál es la mediana en el diagrama?

---

Fuente: Elaboración propia basado en la unidad didáctica

Para la pregunta P.21, el estudiante E.1 responde: “*el promedio es 1950*” lo cual evidencia que sigue manteniendo el obstáculo de no dividir entre el total de los datos, al considerar el promedio como una suma únicamente. Ver figura 16

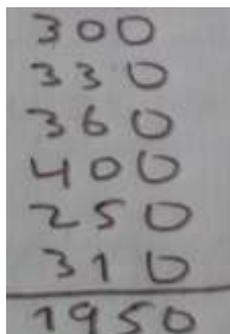


Figura 16. Respuesta de E.2 a P.21

Por su parte los estudiantes E.2, E.3, E.4, E.5, E.6 responden a P.21: “*el promedio es 325*”, evidenciando un proceso correcto para hallarlo. Al respecto Mayen (2009, pag.13) expresa que “la media es la medida de tendencia central más intuitiva es el valor obtenido sumando las observaciones y dividiendo esta suma por el número de datos que hay en el grupo”. Lo cual se evidencio en el procedimiento de los estudiantes superando el obstáculo encontrado en el primer momento frente a la medida de tendencia central media aritmética. Ver figura 17

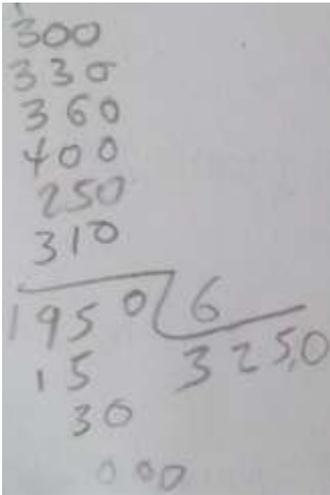


Figura 17. Respuesta de E.2 a P.21

Para la pregunta P.23, los estudiantes E.1, E.2 Y E.3 respondieron: “*la mediana es 360*”, se mantiene el obstáculo de no ordenar los datos. Ver figura 18

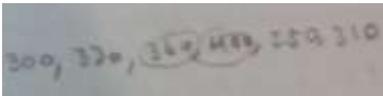


Figura 18. Respuesta de E.1 a P.23

Por su parte los estudiantes E.4, E.5 y E.6 frente a P.23 responden: “*la mediana es 320*”, evidenciaron un proceso correcto al hallar la mediana, superando el obstáculo encontrado en el primer momento. Ver figura 19

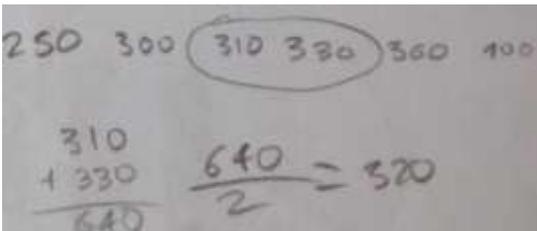


Figura 19. Respuesta de E.5 a P.23

## 4.2.2 ANÁLISIS DE LA CATEGORÍA REGULACIÓN METACOGNITIVA

### 4.2.2.1 Subcategoría: Planeación

En este segundo momento, frente a la pregunta P.3: ¿Qué debes hacer para resolver el problema? ¿Tienes algún plan?, los estudiantes E.1, E.2; responden: “*El plan que tengo para resolver el problema es el siguiente: leer el problema varias veces hasta entenderlo, ordenar los datos, realizar sumas y divisiones, rectificar las operaciones*”. En lo que manifiestan estos estudiantes se evidencia un plan más detallado de los pasos que debe realizar para resolver el problema, comparado con lo que hacían en el primer momento.

Por su parte los estudiantes E.3; E.4; E.5, E.6 frente a P.3 responden: “lo primero que tengo que hacer e leer el problema de 2 a 3 veces, ir marcando los datos para contarlos y después ordenarlos de menor a mayor, aplicar la fórmula dependiendo si es la moda, la media o la mediana, realizar las operaciones y por ultimo revisar lo que hice para corregir cualquier cosa”. En lo que manifiestan estos estudiantes se evidencia tener un proceso de planeación ordenado, en la cual se enumeran los pasos a seguir para resolver el problema. Al respecto (Sanz 2010, p.115) plantea que “la planeación está dirigida a la definición de los objetivos que se desea alcanzar, a la selección de las estrategias, a la prevención de dificultades”.

Todo lo anterior refleja como la planeación tiene relación con las estrategias cognitivas utilizadas por los educandos, en este caso se evidencia en el proceso llevado a cabo para empezar a resolver se encuentra: leer varias veces el problema, encerrar en círculos datos importantes, utilizar líneas para resaltar números, organizar los datos en forma ascendente, extraer datos del diagrama para después sumarlos. Es decir entre más estrategias cognitivas tenga el educando mejor puede ser su proceso de planeación. En este sentido, Schoenfeld (1992) manifiesta que “Las estrategias cognitivas o heurísticas involucran formas de representar y explorar los problemas con la intención de comprender los enunciados y plantear caminos de solución”.

E la tabla 12 se muestra las estrategias cognitivas utilizadas por los estudiantes para resolver los problemas de medidas de tendencia central.

Tabla 12. Estrategias cognitivas

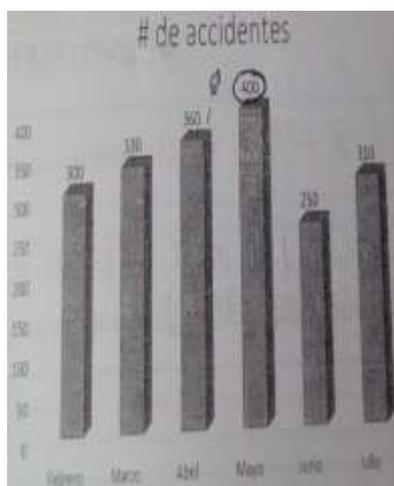
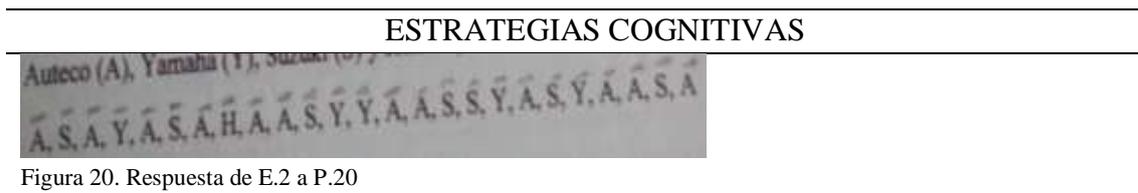


Figura 21. Respuesta de E.3 a P.21

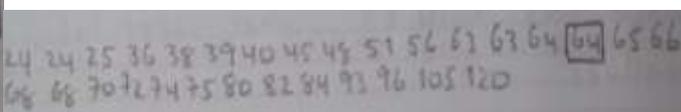


Figura 22. Respuesta de E.1 a P.19

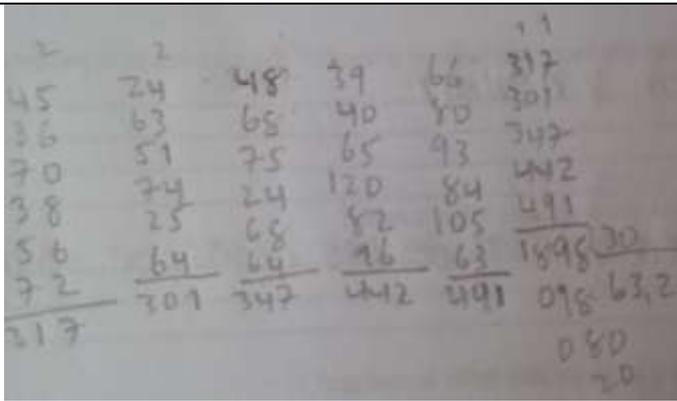


Figura 23. Respuesta de E.2 a P.18

A	12
X	5
S	7
H	1

Figura 24. Respuesta de E.4 a P.20

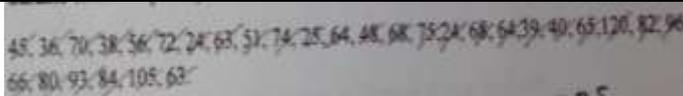


Figura 25. Respuesta de E.6 a P.19

Fuente: Elaboración propia basado en registro de estudiantes

En este segundo momento, la planeación permitió que los estudiantes elaboraran una serie de pasos para resolver el problema, lo cual originó una mejor organización de los datos, identificación de las operaciones que iban a utilizar, resaltar elementos importantes y entender mejor el problema.

#### 4.2.2.2 Subcategoría: Monitoreo:

En este segundo momento, los estudiantes frente a la categoría monitoreo reflejan un avance respecto al primer momento, esto se evidencia en las respuestas dadas por los educandos, algunas de ellas se describen a continuación:

Los estudiantes E.1, E.2, E.4 manifiestan: *“a veces me devuelvo a leer nuevamente el problema varias veces”*.

El estudiante E.3 expresa: *“al revisar la división en el promedio, me di cuenta que tenía un error, borre lo que tenía malo y lo corregí”*

Por su parte el estudiante E.5 expresa: *“rectifique la suma al hallar el promedio y tenía un erro que después corregí”*

El estudiante E.6 manifiesta: *“en la mediana se me había olvidado ordenar los datos y rectifique y los ordené y después resolví el problema”*

En las respuestas dadas por los estudiantes E.1, E.2; E.3; E.4; E.5, E.6 se evidencia que realizan monitoreo de lo que hacen porque revisan las operaciones para ver si están bien, cuentan varias veces los datos, utilizan marcas en los números y algunas veces borran para corregir operaciones. Se evidencia más comprensión del tema y verifican mejor lo que están haciendo. Al respecto Sanz (2010.p.116) plantea que el monitoreo “Consiste en la realización de la actividad y en el control que se ejerce sobre cada uno de los aspectos implicados en su desarrollo y sobre los posibles factores que pueden incidir en la concentración y distribución de los recursos”.

En este segundo momento, el monitoreo permitió a los estudiantes revisar la operaciones realizadas, detectar y corregir errores, replantear pasos del plan, justificar algunas operaciones y volver a leer el problema para una mejor comprensión.

#### 4.2.2.3 Subcategoría: Evaluación

En este segundo momento, los estudiantes frente a la categoría evaluación, reflejan haber mejorado en este aspecto comparado con el primer momento. En la tabla 13 se presentan las preguntas relativas a la subcategoría evaluación.

Tabla 13. Preguntas de Evaluación

PREGUNTA
P.6: ¿Qué dificultades encontraste para resolver el problema?
P.7: ¿Verificaste la solución?
P.8: ¿Considera que el plan funcionó bien? Sí _____ No ____ ¿Por qué?
P.9: ¿Cómo te sentiste al resolver el problema?

Fuente: Elaboración propia basado en la unidad didáctica

Los estudiantes E.1, E.2; frente a P.6, P.7, y P.8, responden: *“una de las dificultades que tuve en el problema fue organizar los datos para hallar el promedio”, “corregí una de las sumas, ya que me había equivocado”, “el plan que diseñe me sirvió porque esos fueron los pasos y me funcionaron”*

Por su parte los estudiantes E.3, E.4; manifiestan: *“El plan que diseñe me sirvió porque fui realizando el problema lentamente y esto me permitió corregir algunas cosas”*

El estudiante E.5, expresa: *“después que terminé el problema me dediqué a revisar cada una de las operaciones para ver si estaban bien”*

El estudiantes E.6 manifiesta: *“menos mal que revise porque tenía un error en la división cundo halle el promedio”*

Todo lo anterior evidencia que los estudiantes realizan una evaluación del proceso llevado a cabo en la resolución del problema, reconocen algunas dificultades en algunas operaciones como la división, en el conteo de los datos y en algunas veces la mediana, y manifiestan sentirse mejor al resolver el problema porque entienden más el tema y

recordaron las fórmulas. Al respecto Sanz (2010) manifiesta que la evaluación implica comprobar los resultados de las propias acciones con los criterios previamente establecidos, bien sea por el docente, por el estudiante o por ambos a la vez.

Para la pregunta P.9 los estudiantes E.1, E.2, E.3, E.4, E.5, E.6, responden respectivamente: *“me siento bien, porque ya entiendo y recordé las fórmulas, además me demoro menos en resolver los problemas”*. Se evidencia que los estudiantes al saber más acerca del tema y recordar las fórmulas y los procedimientos que deben realizar, se sienten más motivados para la solución de problemas, lo que les permitió mejorar gradualmente en este proceso. Del mismo modo, los estudiantes manifiestan que demoran menos tiempo en la solución de problemas. En este sentido Schoenfeld (1992) manifiesta que “una de las dimensiones o categorías que explican el éxito o fracaso de los estudiantes en la resolución de problemas son los componentes afectivos que caracterizan la actitud y disposición a involucrarse en actividades matemáticas”.

La evaluación en este segundo momento permitió que los estudiantes identificaran errores, corregir operaciones, reflexionar sobre el proceso llevado a cabo, manifestar el grado de satisfacción de la tarea realizada y realizar una lectura general de los pasos.

### **4.3. MOMENTO DE REENFOQUE**

#### **4.3.1 ANÁLISIS DE LOS OBSTÁCULOS ONTOLÓGICOS Y PROCEDIMENTALES**

##### **4.3.1.1 OBSTÁCULOS ONTOLÓGICOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SOBRE MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL**

En este último momento, los obstáculos ontológicos que presentaban los estudiantes E.1 E.2; E.3; E.4; E.5, E.6, detectados en el primer momentos asociados a concepciones inducidas fueron superados satisfactoriamente a través de todo el proceso. Los estudiantes ya asocian los conceptos de las medidas de tendencia central al campo de la estadística, las definen correctamente y las diferencian.

A continuación se presenta algunas de las respuestas de los estudiantes referentes a la subcategoría el conocimiento, en la cual se refleja la superación de los obstáculos ontológicos.

##### **4.3.1.1.1 Subcategoría: El Conocimiento o Recursos**

Para la pregunta P.10: *¿Qué conocimientos tienes ahora que te permiten resolver los problemas sobre medidas de tendencia central? Explica.*

El estudiantes E.1, responde: *“ya diferencio entre las medidas de tendencia central, reconozco lo que debo hacer en cada caso, ordeno los datos para resolver los problemas, utilizo las fórmulas necesarias y realizo las operaciones correctamente, además voy revisando y corrigiendo cuando me equivoco.”*

El estudiante E.2, responde: *“Ya sé que en la moda no tengo que hacer operaciones sino contar el dato que más se repite, en la mediana si tengo que ordenar los datos y en el promedio tengo que sumar los datos y después dividir entre el total. Ya entiendo todo.”*

El estudiante E.3, responde: *“Ya recordé como hacer el promedio, se suman los datos y después se divide entre el total, en la moda tomo el dato con mayor frecuencia y en la mediana tengo que ordenar los datos siempre. Además ya no me equivoco en la división.”*

El estudiante E.4, responde: *“Ya sé que en la media tengo que sumar y después dividir, en la moda escojo el dato que más se repite y en la mediana escojo el dato del centro pero ordenando los datos de menor a mayor. En los diagramas tengo que organizar los datos siempre y además la moda es fácil porque es el rectángulo más grande.”*

El estudiante E.5, responde: *“Ya recordé que en la moda no tengo que hacer operación, simplemente contar el que más se repite, en la mediana tengo que ordenar los datos y escoger el del medio, y en el promedio tengo que sumar los datos y después dividir entre el total. También que cuando se organizan los datos todo es más fácil”*

El estudiante E.6, responde: *“Sé que en la mediana tengo que ordenar los datos siempre y coger el dato del centro si es impar, sino sumo los dos del centro y los divido entre dos. En el promedio tengo que sumar los datos y después dividir entre el total y en la moda escojo el dato que más se repite. En los diagramas tengo que sacar los datos aparte para organizarlos y sumarlos, y la moda es el rectángulo más alto.”*

Todo lo anterior evidencia el avance que los estudiantes han tenido en los procesos de resolución de problemas sobre medidas de tendencia central, debido a que ya reconocen y diferencian entre las medidas de tendencia central.

Otra de las subcategorías que hacen parte del aspecto ontológico es las Creencias, frente a estas, se evidencio que los estudiantes las fueron cambiando paulatinamente, debido a que en el primer momento se creía que estos problemas eran difíciles, y que todos se resolvían con operaciones largas, por lo cual se sentían desmotivados y desubicados. Ahora los estudiantes manifiestan lo siguiente:

El estudiante E.1 expresa: *“Me siento bien, porque ya entiendo y recordé las fórmulas, además los problemas son fáciles y las operaciones también”.*

El estudiante E.2 y E.3 expresan: *“Cuando uno entiende la matemática es fácil”*

El estudiante E.4 manifiesta: *“yo pensaba que era malo para las matemáticas, pero me di cuenta que soy bueno cuando me explican y presto atención”*

El estudiante E.5 expresa: *“Me siento muy bien porque ya recordé las fórmulas y los conceptos”*

El estudiante E.6 manifiesta: “yo pensaba que las matemáticas eran para los sabios, pero me di cuenta que si uno le pone empeño las puede aprender fácilmente”

Todo lo anterior evidencia que los estudiantes al saber más acerca del tema y recordar las fórmulas y los procedimientos que deben realizar, se sienten más motivados para la solución de problemas, lo que les permitió mejorar gradualmente en este proceso.

#### **4.3.1.2 OBSTÁCULOS PROCEDIMENTALES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL**

Los obstáculos procedimentales que presentaban los estudiantes E.1, E.2; E.3; E.4; E.5, E.6 detectados en el primer momento fueron superados satisfactoriamente a través de todo el proceso. Todo esto se evidencia en las acciones y pasos que realizaron para resolver los problemas. En este sentido, Monereo y otros (1995) señalan que:

Un procedimiento algorítmico es una sucesión de acciones que hay que realizar, completamente prefijada y su correcta ejecución lleva a una solución segura del problema como, por ejemplo, realizar una raíz cuadrada o coser un botón (p. 20).

Esto se refleja en cada una de las subcategorías que se describirán a continuación.

##### **4.3.1.2.1 Subcategoría: Media Aritmética o Promedio**

Algunas de las preguntas asociadas a la media aritmética se presentan en la tabla 14:

Tabla 14. Preguntas de media aritmética

PREGUNTA
P.11 ¿Cuál fue el promedio de helados vendidos en la semana?
P.12 ¿cuál fue la ganancia promedio en los 5 días?

Fuente: Elaboración propia basado en la unidad didáctica

Para las preguntas P.11 y P.14 los estudiantes E.1 E.2; E.3; E.4; E.5, E.6 respondieron respectivamente: “el promedio de helados fue de 90” y “la ganancia en los 5 días fue de \$ 21800”, lo cual evidencia un proceso correcto al hallar el promedio, que según Batanero y Godino, (2002), “la media aritmética es la principal medida de tendencia central. Es el número que se obtiene sumando todos los valores de la variable estadística (xi) y dividiendo por el número de valores (n). Ver figura 26

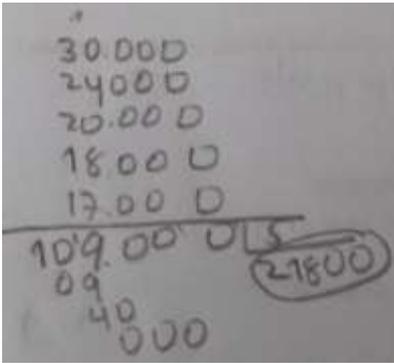


Figura 26. Respuesta de E.1 a P.14

Todo lo anterior evidencia que fueron superados los obstáculos procedimentales presentados en el primer momento asociados a media aritmética.

En lo que respecta al diagrama, los estudiantes presentan un proceso correcto al hallar la media, debido a que realizan una buena interpretación de los datos, al respecto Batanero y Godino (2002) distingue entre los niveles distintos de comprensión de los gráficos el de “interpretar los datos (Leer dentro de los datos), el cual incluye la interpretación e integración de los datos en el gráfico; requiere la habilidad para comparar cantidades y el uso de otros conceptos y destrezas matemáticas.”

#### 4.3.1.2.2 Subcategoría: Moda

Algunas de las preguntas asociadas a la medida de tendencia central moda se presentan a continuación:

Tabla 15. # de helados vendidos

Sabores	# de helados vendidos
Piña	170
Vainilla	55
Chocolate	79
Fresa	74
Coco	72

Fuente: Elaboración propia

P.12: ¿Cuál es la moda en los datos de la tabla de sabores?

Para la pregunta P.12 los estudiantes E.1 E.2; E.3; E.4; E.5, E.6 responden: “la moda es piña porque se vendieron 170 helados”, lo cual es correcto, en este sentido Batanero y Godino, (2002), plantean que “la moda es el valor de la variable que tiene mayor frecuencia”. (p.714). Todo esto evidencia que fueron superados los obstáculos procedimentales detectados en el primero momento frente a la subcategoría moda.

#### 4.3.1.2.3 Subcategoría: Mediana

La siguiente tabla muestra un problema referente a la medida de tendencia central mediana:

Tabla 16. # de galletas vendidas

Días	# de galletas vendidas
Lunes	40
Martes	43
Miércoles	41
Jueves	45
Viernes	194

Fuente: Elaboración propia

P.13: ¿Cuál es la mediana de los datos?

Los estudiantes E.1, E.2, E.3, E.4, E.5, y E.6 frente a P.13 respondieron: “*la mediana es 43.*”, lo cual es correcto, al respecto Batanero y Godino, (2002), plantean que “si suponemos ordenados de menor a mayor todos los valores de una variable estadística, se llama mediana al número tal que existen tantos valores de la variable superiores o iguales como inferiores o iguales a él. (p.714). Esto evidencia que los estudiantes E.1, E.2; E.3; E.4; E.5, E.6 superaron los obstáculos procedimentales detectados en el primer momento asociados a la subcategoría mediana.

En cuanto a la subcategoría estrategias cognitivas o heurísticas, la cual guarda relación con los procedimientos que llevan a cabo los estudiantes, se evidencia que E.1, E.2; E.3; E.4; E.5, E.6 encierran en círculos datos importantes, utilizar líneas para resaltar números, organizar los datos en forma ascendente, extraen datos del diagrama para después sumarlos. Del mismo modo cuando hallan el promedio organizan los datos en subgrupos de forma vertical para facilitar la suma de los datos.

#### 4.3.4 ANÁLISIS DE LA CATEGORÍA REGULACIÓN METACOGNITIVA

##### 4.3.4.1 Subcategoría: Planeación

En el tercer momento, los estudiantes E.1, E.2; E.3; E.4; frente a la subcategoría planeación manifiestan tener el siguiente plan para resolver los problemas sobre medidas de tendencia central: “*leer varias veces el problema hasta entenderlo, marcar los datos para el conteo, contar los datos y organizarlos de menor a mayor, aplicar la*

*formula teniendo en cuenta la medida de tendencia central, realizar la sumas y después la división y por ultimo revisar todas las operaciones”*

Por su parte los estudiantes E.5, E.6 expresan: *“Lo primero es leer el problema lentamente hasta entenderlo, después sacar los datos y ordenarlos de menor a mayor, si lo que tengo que hallar es el promedio hago la suma y después la división, si es la moda tomo el dato que más se repite, si es la mediana tomo el valor del centro, al final reviso las operaciones para corregir la que este mala.*

Del mismo cuando se les preguntó a los estudiantes *¿en qué te ayuda la planeación en la resolución de los problemas?*, responden:

El estudiante E.1 manifiesta: *“Cuando planeo lo que voy a hacer las cosas se me hacen más fácil porque organizo los datos y escribo los pasos que necesito”*

El estudiante E.2 expresa: *“La planeación me ayuda saber que tengo que ordenar los datos y a saber que operaciones debo aplicar”*

El estudiante E.3 manifiesta: *“Antes cuando no planeaba cometía muchos errores, por ejemplo nunca ordenaba los datos de menor a mayor”*

El estudiante E.4 dice: *“Cuando escribo los pasos para resolver el problema no se me olvida lo que debo hacer”*

El estudiante E.5 expresa: *“Si planeo se lo que debo hacer y como lo voy hacer”*

El estudiante E.6 manifiesta: *“Ahora que planeo todo organizo bien los pasos y sigo la secuencia, esto me ayuda a no equivocarme, además no me desespero para resolver el problema”*

Todo lo anterior evidencia que los estudiantes son más organizados en la planeación para resolver el problema, muestran una serie de pasos a seguir el cual les permite ir trabajando de acuerdo a lo que le pide el problema. Realizan minuciosamente el conteo de los datos, ubicando en columnas los números para sumarlos y resaltando aspectos relevantes del problema.

#### **4.3.4.2 Subcategoría: Monitoreo**

En el tercer momento, el estudiante E.1, frente a la subcategoría monitoreo manifiesta: *“es bueno ir revisando las operaciones y corregir lo que este malo,*

El estudiante E.2 expresa: *“tengo que devolverme a leer varias veces el problema para no perderme”*

El estudiante E.3 manifiesta: *” voy haciendo las operaciones lentamente para no equivocarme”*

El estudiante E.4 manifiesta: *“cuando reviso estoy más seguro de lo que hago”*

El estudiante E.5 manifiesta: *“cuando reviso, borro y corrijo siempre salgo bien”*

Por su parte el estudiante E.6 expresa: *“siempre trabajo con lápiz para poder corregir si tengo una operación mala”*

Todo lo anterior refleja que los estudiantes realizan de alguna manera un proceso de monitoreo en lo que hacen, lo cual les permite revisar las operaciones para ver si están bien, contar varias veces los datos, y algunas veces borrar para corregir operaciones. Se evidencia más comprensión del tema y verifican mejor lo que están haciendo.

#### **4.3.4.3 Subcategoría: Evaluación**

En el tercer momento, el estudiante E.1 frente a la subcategoría evaluación manifiesta: *“al final siempre reviso algunas operaciones y corrijo las que estén mal, antes no lo hacía y me equivocaba en el resultado”*

El estudiante E.2 expresa: *“siempre hay que realizar una última revisada a lo que se hace o sino algo sale malo”*

El estudiante E.3 manifiesta: *“es mejor ir revisando para al final no tener que corregir tanto”*

El estudiante E.4 manifiesta: *“siempre que me queda tiempo reviso todo lo que hago y corrijo si es necesario”*

El estudiante E.5 manifiesta: *“al final reviso si los pasos que hice están bien”*

El estudiante E.6 manifiesta: *“todo proceso debe evaluarse para ver si lo que se hizo está bien, yo siempre lo hago al final y rectifico todo.”*

En las respuestas dadas por los estudiantes se evidencia que realizan una evaluación del proceso que llevan a cabo en la resolución de los problemas, reconocen algunas dificultades, realizan anotaciones de lo que no entienden y manifiestan sentirse mejor al resolver los problemas porque entienden los conceptos y recordaron las fórmulas.

#### **4.3.4.4 Pregunta realizada al final del proceso**

¿Crees que la regulación metacognitiva te ayudo a mejorar los procesos de resolución de problemas sobre medidas de tendencia central. Explica

Estudiante E.1: *Si me ayudó ya que a través de la buena planeación que hice de los problemas organizando los datos y resaltando los números importantes se me facilitaba todo, además cuando hacia la revisión me daba cuenta de mis errores y los corregía, y al final verificaba las solución. También me ayudó porque me iba dando cuenta de lo que no sabía para preguntarle al profe y así resolver los problemas.*

Estudiante E.2: *La regulación metacognitiva me ayudó bastante en la resolución de los problemas porque pude darme cuenta en que estaba fallando y corregirlo con las explicaciones que me dio el profesor. Me ayudo porque ya organizo los datos antes de iniciar el problema, resaltos los números y voy revisando y corrigiendo en todo momento.*

Estudiante E.3: *Si me ayudó porque me di cuenta de lo que no sabía sobre las medidas de tendencia central, además ya soy más organizado cuando resuelvo los problemas, organizo los datos de menor a mayor y voy revisando lo que hago. También me sirvió para darme cuenta que cuando uno se propone algo lo logra ya que entiendo todo el tema y resuelvo los problemas más rápido.*

Estudiante E.4: *Me ayudó mucho porque me daba cuenta en que fallaba para estudiar más y poder corregir mis errores, también me ayudó para poder organizar los datos y saber qué operación iba a realizar. Pude ir revisando lo que hacía en todo momento y así las cosas me salían bien. Ya entiendo más y resuelvo los problemas más rápido que antes.*

Estudiante E.5: *Si me ayudó porque ya organizo los datos, planeo las operaciones y las resuelvo bien, además se en que me equivoco y le pregunto al profe para que me explique y no seguir cometiendo el mismo error. Al final reviso y corrijo lo que tengo malo, antes era muy desordenado para resolver los problemas.*

Estudiante E.6: *Si me ayudó porque ya planeo como voy a resolver el problema, organizo los datos y voy revisando lo que hago. También me doy cuenta de lo que no se para preguntar y trato de no cometer el mismo error. Al final reviso para ver en que me equivoqué y poder corregirlo. Ya hago todas las operaciones y entiendo todo sobre las medidas de tendencia central ya que el profe me fue explicando.*

Teniendo en cuenta los tres momentos enunciados anteriormente y las diferentes respuestas de los educandos en los procesos llevados a cabo, se puede realizar la siguiente caracterización de la forma como la regulación metacognitiva favoreció a cada uno de los estudiantes en la resolución de problemas sobre medidas de tendencia central y cómo fue su proceso:

Estudiante E.1: En el primer momento manifiesta obstáculos ontológicos y procedimentales en la resolución de problemas de medidas de tendencia central. Inicia el uso de la regulación metacognitiva desde el segundo momento de la unidad didáctica, en el cual persisten algunos obstáculos procedimentales en relación al promedio y la mediana. En el tercer momento es más autónomo y organizado donde se reflejan mejor sus procedimientos y capacidad para ejecutar las tareas, logrando la superación de los obstáculos.

Estudiante E.2: En el primer momento manifiesta obstáculos ontológicos y procedimentales en la resolución de problemas de medidas de tendencia central. Inicia el uso de la regulación metacognitiva desde el segundo momento de la unidad didáctica, en el cual persisten algunos obstáculos procedimentales en relación a la mediana y ontológicos respecto a la moda. En el tercer momento es más autónomo y organizado donde se reflejan mejor sus procedimientos y capacidad para ejecutar las tareas, logrando la superación de los obstáculos.

Estudiante E.3: En el primer momento manifiesta obstáculos ontológicos y procedimentales en la resolución de problemas de medidas de tendencia central. Inicia el uso de la regulación metacognitiva desde el segundo momento de la unidad didáctica, en el cual persisten algunos obstáculos procedimentales y ontológicos en relación a la mediana y a la moda. En el tercer momento es más organizado, detalla los pasos que

realiza, reconoce errores y realiza mejor sus procedimientos, logrando la superación de los obstáculos.

Estudiante E.4: En el primer momento manifiesta obstáculos ontológicos y procedimentales en la resolución de problemas de medidas de tendencia central. Inicia el uso de la regulación metacognitiva desde el segundo momento de la unidad didáctica, en el cual persisten algunos obstáculos procedimentales y ontológicos en relación a la mediana y a la moda. En el tercer momento es más organizado, detalla los pasos que realiza, reconoce errores, monitorea lo que hace y realiza mejor sus procedimientos, logrando la superación de los obstáculos.

Estudiante E.5: En el primer momento manifiesta obstáculos ontológicos y procedimentales en la resolución de problemas de medidas de tendencia central. Inicia el uso de la regulación metacognitiva desde el segundo momento de la unidad didáctica, en el cual persisten algunos obstáculos procedimentales en relación a la mediana y a la moda. En el tercer momento es más organizado, detalla los pasos que realiza, reconoce errores y realiza mejor sus procedimientos, logrando la superación de los obstáculos.

Estudiante E.6: En el primer momento manifiesta obstáculos ontológicos y procedimentales en la resolución de problemas de medidas de tendencia central. Inicia el uso de la regulación metacognitiva desde el segundo momento de la unidad didáctica, en el cual supera los obstáculos procedimentales y ontológicos detectados en el primer momento. En el tercer momento es más organizado, detalla los pasos que realiza, reconoce errores, realiza mejor sus procedimientos y está más motivados para realizar las actividades.

En términos generales, cada uno de los procesos de la regulación metacognitiva (planeación, monitoreo y evaluación) permitieron mejorar la capacidad de resolver problemas de medidas de tendencia central. A continuación se describe la manera:

En lo referente a la planeación como primer proceso que se lleva a cabo al resolver el problema, permitió que los estudiantes diseñaran una serie de pasos a través de los cuales iban a realizar cada una de las actividades del problema. En primer lugar realizaban la lectura comprensiva del problema, después de entenderlo y saber cuál era la pregunta se presentaba la organización de los datos, seguidamente se identificaban las fórmulas que se ajustaban a lo que preguntaban y posteriormente realizaban las operaciones pertinentes. El hecho de tener una ruta para resolver el problema permitió al estudiante ser organizado y saber con qué recursos contaba para la resolución del problema.

En cuanto al monitoreo, este permitió a los estudiantes saber si lo que estaban haciendo estaba bien, revisar operaciones, corregir errores, leer nuevamente el problema y replantear estrategias de cálculo. También se pudo reconocer los aciertos y dificultades durante el proceso.

En cuanto a la evaluación, permitió saber si se cumplió el objetivo propuesto, identificar algunas dificultades en el proceso llevado a cabo, además se pudo evaluar la efectividad de los pasos realizados.

En la tabla 18 se presenta un resumen de los procesos de resolución de problemas que se mejoraron a través de la regulación metacognitivas.

Tabla 17. procesos mejorados con la regulación metacognitiva

<b>SUBCATEGORÍA</b>	<b>PROCESO</b>
<b>PLANEACIÓN</b>	<p><b>Permitió:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Saber que se preguntaba</li> <li>Saber cuáles eran los datos</li> <li>Entender el problema</li> <li>Reconocimiento lingüístico y semántico del problema</li> <li>Comparar el problema con ejemplos anteriores</li> <li>Organizar los datos</li> <li>Utilizar líneas y círculos en el conteo</li> <li>Contar los datos</li> <li>Elegir valores especiales en los datos</li> <li>Presentar una plan</li> <li>Ser consciente de la necesidad de planificar</li> </ul>
<b>MONITOREO</b>	<p><b>Permitió:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Revisión del proceso realizado</li> <li>Detectar y corregir errores</li> <li>Realizar operaciones y porqué usarlas</li> <li>Revisar operaciones</li> <li>Replantear pasos</li> <li>Explicar resultados parciales</li> <li>Hacer un seguimiento de los progresos técnicas y estrategias utilizadas</li> <li>Argumentar procedimientos</li> <li>Usar fórmulas</li> </ul>
<b>EVALUACIÓN</b>	<p><b>Permitió:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Examinar la solución</li> <li>Revisar el plan</li> <li>Rectificar operaciones</li> <li>Identificar dificultades</li> <li>Verificar si la solución era razonable</li> <li>Analizar si se pudo llegar al resultado de otra manera</li> <li>Reconocer lo que se dejó de realizar</li> <li>Reconocer dificultades</li> <li>Verificación de procedimientos</li> <li>Reflexión sobre el proceso realizado</li> <li>Ser consciente de las estrategias con que se cuenta para saber cuándo y cómo usarlas.</li> <li>Evalúa el nivel de satisfacción</li> </ul>

Fuente: Elaboración propia basado en registro de estudiantes

En conclusión se puede decir que los estudiantes a través de la regulación metacognitiva fueron capaces de adaptar sus estrategias a la demandas de los problemas, aprovecharon al máximo sus recursos cognitivos, son conscientes de lo que hacen y porqué lo hacen, ahora son más reflexivos y organizados al planear, se muestran motivados por aprender y comprometidos con su proceso de aprendizaje.

## 5. CONCLUSIONES DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación realizada permitió construir y llegar a las siguientes conclusiones, en relación a la aplicación de la regulación metacognitiva en la resolución de problemas sobre medidas de tendencia central.

- La aplicación de la regulación metacognitiva permitió mejorar los procesos de resolución de problemas sobre medidas de tendencia central, debido a que se generaron espacios que favorecieron la toma de decisiones de los estudiantes y el desarrollo de habilidades para la regulación de sus propios procesos de aprendizaje; permitiendo saber por qué realizaban determinadas acciones y no limitarse a la repetición de algoritmos sin ninguna lógica. Además permitió a los educandos identificar los errores y aciertos para tenerlos presentes en otros problemas.
- La Planeación como actividad previa a la solución de los problemas, permitió el diseño de unas estrategias que incluían las acciones a seguir, en este proceso se tuvo en cuenta el conocimiento que tenía el estudiante acerca de las medidas de tendencia central, sus dificultades y los recursos cognitivos con que contaba para enfrentar los problemas y de esta manera realizar una serie de pasos organizados de lo que se iba a realizar para poder resolver el problema planteado.
- El Control como proceso que se realiza desde el instante en que se inicia la ejecución de las acciones, permitió la verificación de las actividades que se iban realizando, en este caso las operaciones y rectificación de las mismas. Esto implicaba la revisión de la estrategia empleada e identificar si se estaba llevando a cabo el plan que se diseñó. En algunos casos el estudiante pudo transformar el plan y sus estrategias, organizando nuevamente los datos y rectificando las operaciones de diferentes maneras. También permitió al estudiante mantener una actitud reflexiva constante.
- La Evaluación como actividad que permite contrastar los resultados con lo que se planeó al principio, permitió la valoración de los resultados de la estrategia utilizada, como también la rectificación de algunas de las operaciones que se llevaron a cabo en todo el proceso. Esto conllevó a corregir algunos pasos y replantear en algunas ocasiones lo que se hizo.
- Los diferentes instrumentos de lápiz y papel diseñados que incluían preguntas metacognitivas, permitieron conocer los procesos metacognitivos que llevan a cabo los estudiantes mientras resuelven problemas sobre medidas de tendencia central, lo cual facilitó identificar algunos obstáculos y las diferentes habilidades que intervienen en el aprendizaje de la estadística.

- En los procesos de resolución de problemas, es importante reconocer los obstáculos ontológicos y procedimentales que los estudiantes presentan, debido a que esto permite tener una visión clara y real del estado de los educandos y esto se puede lograr a través de preguntas metacognitivas, en este sentido, se confirma lo que manifiesta Tamayo *et al.* 2010 “la práctica de la metacognición facilita la identificación de obstáculos epistemológicos, lingüísticos y pedagógicos en los actores del proceso de enseñanza–aprendizaje.” (pág.119).
- Es importante tener en cuenta lo planteado por Schoenfeld (1992), en lo referente a la caracterización de las dimensiones que explican el éxito o fracaso de los estudiantes en la resolución de problemas. En cuanto a los recursos permitieron al docente saber cuáles son los conceptos, formulas y fundamentos con los que contaba el estudiante sobre medidas de tendencia central. En cuanto a las estrategias cognitivas permitieron al docente saber las formas en que los educandos representaban y exploraban los problemas, como comprendían los enunciados y como planteaban los caminos de solución y en cuanto a las creencias, permitieron al docente saber la conceptualización del estudiante acerca de las matemáticas y la resolución de problemas, y la actitud y disposición para involucrarse en las actividades planteadas.
- El principal obstáculo procedimental en el uso de la mediana es no ordenar los datos, en la media aritmética es no dividir por el total de los datos, y en la moda escoger el dato mayor y no el de mayor frecuencia, lo cual coincide con las investigaciones de Carvalho (1996), Cobo (2003) y Mayen (2006).
- Los obstáculos ontológicos más frecuente en los estudiantes frente a los conceptos sobre medidas de tendencia central fueron: Considerar la media aritmética solo como una suma de notas, la mediana como el dato más pequeño (estatura baja) y la moda como lo que se está usando en el momento. Todo lo anterior se manifiesta como concepciones inducidas influenciadas quizás por el entorno social y cultural inmediato que es el colegio o por los medios de comunicación donde se expone el término promedio, moda y mediana.
- La implementación de unidades didácticas en el campo de la matemática, permitió al docente planificar de forma ordenada una serie de contenidos y actividades en un tiempo determinado, posibilitando mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje y adaptar las acciones teniendo en cuenta el contexto y nivel de los educandos, evitando de esta manera la improvisación del maestro.

## 6. RECOMENDACIONES

- Incorporar la regulación metacognitiva en los procesos de resolución de problemas sobre medidas de tendencia central en el área de matemáticas, teniendo en cuenta los beneficios que esta puede ofrecer a los estudiantes para autorregularse, identificar errores y poder corregirlos.
- Ampliar el conocimiento respecto al papel que cumple la metacognición en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ciencias, específicamente en el campo de la estadística; del mismo modo, diseñar instrumentos para la indagación de procesos de regulación metacognitiva, en la cual los estudiantes puedan expresar, reflexionar y discutir respecto a su propio proceso de aprendizaje.
- Implementar unidades didácticas que enfatizan en la interpretación de información estadística proveniente de diferentes fuentes y que estas incluyan preguntas metacognitivas que permitan la regulación del estudiante en todo el proceso.
- Es necesario profundizar en los conceptos de las medidas de tendencia central, sus propiedades y que los estudiantes puedan reconocer cuándo es más apropiado usar cierta medida de tendencia central, debido a que el uso correcto de los algoritmos de cálculo por sí solo no es suficiente.
- La implementación de unidades didácticas en el campo de la estadística debe iniciarse con la indagación de los conocimientos previos de los educandos, estas deben estar bien estructuradas y contener la metodología de trabajo, además, las actividades deben favorecer la creatividad y se deben tener en cuenta los diferentes ritmos de aprendizaje para adaptar los contenidos de acuerdo a los intereses y necesidades de los estudiantes.
- Tener en cuenta las dimensiones planteadas por Schoenfeld (1992), “El conocimiento o recursos básicos, las estrategias cognitivas o heurísticas, las estrategias metacognitivas y las creencias”. Para comprender mejor lo que pasa con los estudiantes cuando resuelven problemas, y de esta manera poder tomar decisiones y mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje.

## 7. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Anguera, M. (1978). Metodología de la observación en las Ciencias Humanas. Editorial Cátedra, Madrid, España. Recuperado el 03 de mayo de 2015 de:  
<http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2514275.pdf>
- Armengol, L. (2007), Los protocolos de pensamiento en voz alta como instrumento para analizar el proceso de escritura. Universitat de Lleida.
- Bachelard, G. (2004). La formación del espíritu científico. 25 ed. México: Siglo Veintiuno, Editores, S.A.12. (1989). Epistemología. 2 ed. Barcelona. Anagrama
- Barrantes, H. (2006). Los obstáculos epistemológicos. Cuadernos De Investigación Y Formación En Educación Matemática. Centro de investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas, UCR. Escuela de Ciencias Exactas y Naturales, UNED
- Batanero, C. (2001) Didáctica de la Estadística. Departamento de didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España, pp.6
- Batanero, C. y Godino, J. (2002). Estocástica y su didáctica para maestros. Investigación en Didáctica de las Matemáticas (pp. 35, 713-714), Universidad de Granada, España.
- Bermeosolo, J. (2005). Cómo aprenden los seres humanos. Mecanismos psicológicos del aprendizaje. Universidad Católica de Chile.Santiago.2005. . (2006). La terminología en la didáctica de las ciencias. Conferencia Universidad Autónoma de Manizales.
- Carvalho, C. (2001). Interação entre pares. Contributos para a promoção do desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico no 7º ano de escolaridade. Tesis Doctoral. Universidad de Lisboa.
- Carrillo, J y Contreras, LC (2000) Resolución de Problemas en Matemáticas en los albores del siglo XXI.
- Cobo, B. (2003), Significados de las medidas de posición central para los estudiantes de Secundaria, Tesis Doctoral. Granada
- Chan, C. (2009). Una propuesta didáctica sobre la media aritmética, la mediana y su representatividad. Universidad del Valle. Santiago de Cali.  
Recuperado el 18 de enero de 2015 de:  
[http://www.uady.mx/~matemati/dme/docs/tesis/Tesis\\_CarlosChan.pdf](http://www.uady.mx/~matemati/dme/docs/tesis/Tesis_CarlosChan.pdf)

- Cubides, K. y Rosada, L. (2011). Dificultades que presentan los estudiantes de educación básica en la obtención e interpretación de las medidas de tendencia central. Universidad del Valle. Santiago de Cali.  
Recuperado el 16 de enero de 2015 de:  
<http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/3859/4/CB-0449566.pdf>
- Davidson, J.E. y Sternberg, R.J. (1998). Smart problem solving: how metacognition helps. En D.J. Hacker, J. Dunlosky y A.C. Graesser (Eds.), *Metacognition in educational theory and practice* (pp. 47-68) Mahwah, New Jersey: LEA.
- De La Rosa, J. (2007). Didáctica para la resolución de problemas. Educación primaria. Recuperado el 18 de enero de 2015 de:  
<http://www.juntadeandalucia.es/averroes/~cepc3/competencias/mates/primaria/Did%20ctica%20para%20la%20Resoluci%20n%20de%20Problemas%20Jose%20de%20la%20Rosa.pdf>
- Dewey, J. (1933). *How We Think*. D. C. Heath: Boston. (Traducción al castellano: 1989. *Cómo pensamos. Nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo*. Paidós: Barcelona).
- Domenech, M. (2004). El papel de la inteligencia y de la metacognición en la resolución de problemas. Departamento de Psicología, Universitat Rovira i Virgili (URV). Fichero de tesis. Recuperado el 2 de febrero de 2015 de:  
<http://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/8958/TesiintelimetacMontseDomenechp.pdf?sequence=1>
- Doorman, M., Drijvers, P., Dekker, T., Van den Heuvel-Panhuizen, M., de Lange, J. & Wijers, M. (2007). ZDM The International Journal on Mathematics Education, 39, 5-6, pp.405-418.
- Figuroa, R., Utria, C. & Colpas, R. (2006). Entendimiento conceptual de los estudiantes del nivel de básica secundaria sobre el concepto de ácido. *TEA*, 19, 22 – 31. Recuperado el 02 de mayo de 2016 de:  
[file:///C:/Users/AMAURY/Downloads/1040-3656-1-PB%20\(4\).pdf](file:///C:/Users/AMAURY/Downloads/1040-3656-1-PB%20(4).pdf)
- Flavell, J. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In: RESNICK, L. B. *The nature of intelligence*. Hillsdale, New Jersey. Lawrence Erlbaum.
- Flórez O. R. (2000). Metacognición y Evaluación. *Acción Pedagógica*. 9, (1 y 2), pp. 5.
- Forster, C. (2011). Eficacia En La Solución De Problemas Y Su Relación Con La Metacognición Y La Motivación En Estudiantes De 8° Año Básico. Facultad de educación. Programa de doctorado en ciencias de la educación. Pontificia

Universidad Católica De Chile. Santiago de Chile. Recuperado el 19 de Mayo de 2015 de: <http://dspace2.conicyt.cl/handle/10533/76660>

García, J., La Casa, P. (1990) Procesos Cognitivos Básicos. Años Escolares. En Palacios, J.

Garner, R. (1990). When children and adults do not use learning strategies: towards a Theory of setting. *Review of Educational Research*, 60, 517-529.

Garret, A. y García, J. A. (2005). Un cuestionario y estrategias sobre los promedios.

*Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, 7, 197-217.

Hartman, H. J. (1998). Metacognition in teaching and learning: an introduction. *Instructional Science*, 26, 1-3.

Hernández, R., Fernández, C. C., & Baptista, L. P. (2006). *Metodología de la investigación*. México: McGraw - Hill Interamericana

ICFES, Evaluaciones internacionales. Colombia en PISA 2012. Informe nacional de resultados. Resumen ejecutivo. Recuperado el 15 de enero de 2015 de: <http://repository.udistrital.edu.co/bitstream/11349/2304/2/BeltranCastroArietaCecilia2015.JPG.pdf>

Iriarte, A y Sierra, I. (2011). *Estrategias metacognitivas en la resolución de problemas matemáticos*. Primera edición, Montería-Colombia.

Recuperado el 15 enero de 2015 de:

[http://www3.edunexos.edu.co/components/com\\_booklibrary/ebooks/estrategias\\_metacognitivas\\_resoluci%C3%B3n\\_problemas\\_matematicos.pdf](http://www3.edunexos.edu.co/components/com_booklibrary/ebooks/estrategias_metacognitivas_resoluci%C3%B3n_problemas_matematicos.pdf)

Kinnear, T. & Taylor, J. (1998). *Investigación de Mercados: Un enfoque aplicado*. McGraw-Hill. V edición

Klingler, C. (2001). *Psicología Cognitiva. Estrategias en la Práctica Docente*. Editorial Mc Graw Hill. México.

Lesh, R. & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. K. Lester, Jr. (Ed.). *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 763-804). National Council of Teachers of Mathematics. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Llorens, J. A., De Jaime, M<sup>a</sup> C. Y Llopis, R. (1989). La función del lenguaje en un enfoque constructivista del aprendizaje de las ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(2), pp. 111-119.

- Martín, E., Marchesi, A. (1990). Desarrollo Metacognitivo y Problemas de Aprendizaje. En Marchesi, A., Coll, C., Palacios, J. (Comp). Desarrollo Psicológico y Educación. Tomo II: Necesidades Educativas Especiales y Aprendizaje Escolar. Madrid: Alianza Editorial, S.A. Capítulo 2. PP. 35-47
- Martínez, L. y Negrete, M. (2010). Estrategias Heurísticas En La Solución De Problemas Matemáticos Para El Desarrollo De Habilidades Metacognitivas En Niños. Universidad De Córdoba. SUE Caribe, Montería.  
Recuperado el 12 de febrero de 2015 de:  
file:///C:/Users/cliente/Downloads/MartinezL\_NegreteM.pdf
- Mayen, S. (2009) .Comprensión de las medidas de tendencia central en estudiantes mexicanos de educación secundaria y bachillerato. Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de granada. Recuperado el 16 de enero de 2015 de:  
<http://digibug.ugr.es/bitstream/10481/2418/1/18272113.pdf>
- Mayén, S., Batanero, C. y Díaz, C. (2009). Conflictos semióticos de estudiantes mexicanos en un problema de comparación de datos ordinales. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12 (2), 151-178. Recuperado el 16 de enero de 2015 de:  
[http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1665-24362009000200002](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362009000200002)
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de matemáticas y español en educación básica y media. La revolución educativa. Bogotá, D.C.
- Monereo, C., Castelló, M., Clariana, M., Palma, M. y Pérez, M.L. (1995). Estrategias de enseñanza y aprendizaje. Formación del profesorado y aplicación en la escuela. Barcelona: Graó.
- Mora, A. (2002). Obstáculos epistemológicos que afectan el proceso de construcción de conceptos del área de ciencias en niños de edad escolar. Recuperado el 3 de agosto de 2015, de [http:\[versión electrónica\] redalyc.uaemex.mx/pdf/666/66630507.pdf](http://redalyc.uaemex.mx/pdf/666/66630507.pdf).
- Moreno, A. y Daza, B. (2014). Incidencia de estrategias metacognitivas en la resolución de problemas en el área de la matemática. Pontificia universidad javeriana. Bogotá. Recuperado el 3 de junio de 2015 de:  
<http://repository.javeriana.edu.co/bitstream/10554/12363/1/MorenoCastiblancoAstridNatalia2014.pdf>
- Munarriz, B. (1992), Técnicas y métodos en Investigación Cualitativa. Universidad de la Coruña. España
- National Council Of Teachers Of Mathematics. Principios y estándares para la Educación Matemática. Traducción de M. Fernández (Traducción de la versión

del 2000 del NCTM). Reston, VA: NCTM, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2003.

Nortes, A. (2009), Resolución de problemas de matemáticas en las pruebas de acceso a la universidad. Errores significativos. Universidad de Murcia. Recuperado el 16 de enero de 2015 de: <http://revistas.um.es/educatio/article/viewFile/109851/104521>

Orton, A. (1990). Didáctica de las matemáticas. Madrid: MEC-Morata.

Poggioli, L. (1999). Estrategias de resolución de problemas. Serie enseñando a aprender. Caracas: Fundación Polar

Polya, G. (1945): How to solve it. Princenton, N. J., Princenton University Press.

Pozo, J.; Sanz, A.; Gómez, M. y Limón, M. (1988). Las ideas de los alumnos sobre las ciencias: Una interpretación desde la psicología cognitiva. Enseñanza de las ciencias. 83-94.

Pozo, J.I. (1990). Estrategias de aprendizaje. En Palacios, J., Marchesi, A. y Coll, C. (Comp.) Desarrollo Psicológico y Educación. Tomo I: Psicología Evolutiva. Madrid: Alianza Editorial, S A., Capítulo 12, PP. 199-221

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). Problemas aritméticos escolares. Ed. Síntesis: Madrid.

Pulido, L. (2014). Procesos Metacognitivos que llevan a cabo estudiantes de grado noveno con desempeños superior y bajo del colegio Agustín Fernández I.E.D. durante la resolución de problemas matemáticos. Pontificia Universidad Javeriana. Facultad de educación. Bogotá. Recuperado el 25 de enero de 2015 de: <http://repository.javeriana.edu.co/bitstream/10554/12366/1/PulidoGordilloLuzMery2014.pdf>

Rickey, D, & Stacy, M. A. (2000). The role of metacognition in learning chemistry. *Journal of Chemical Education*, 77, (7), pp.915-919. <http://repository.javeriana.edu.co/bitstream/10554/12366/1/PulidoGordilloLuzMery2014.pdf>

Rodríguez, E. (2005). Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico. Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Educación. Madrid. Recuperado el 16 de enero de 2015 de: <http://biblioteca.ucm.es/tesis/edu/ucm-t28687.pdf>

Rodríguez, G., Gil, J. y García, E. (1996). Metodología de la investigación cualitativa. Ediciones Aljibe. Granada (España).

- Rojas, R. (2003). Guía para realizar investigaciones sociales. Editorial Plaza y Valdez, 40ª edición, México
- Russell, S. J. y Mokros, J. R. (1991). What's typical?. Children's ideas about average. In: D. Vere-Jones (Ed.) *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute), 307-313.
- Sanz, María (2010). Competencias cognitivas en Educación Superior. Editorial: NARCEA, SA. Madrid, España.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press: New York.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Reston, VA: NCTM.
- Schraw, G. (1998). Promoting general metacognitive awareness. *Instructional Science*, 26, 113-125.
- Serradó, A., Cardeñoso, J. M., & Azcárate, P. (2005). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: su incidencia desde los libros de texto. *Eitorial board*, 59.
- Silva, M. (2009). Método y estrategias de resolución de problemas matemáticos utilizadas por alumnos de 6to. Grado de primaria. Universidad Iberoamericana. Ciudad de México. Recuperado el 5 de Mayo de 2015 de: [http://www.cimeac.com/images/2a\\_parte\\_reporte\\_final\\_inide.pdf](http://www.cimeac.com/images/2a_parte_reporte_final_inide.pdf)
- SOCAS, M. (1997) Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En RICO, L. CASTRO, E; CASTRO, E; CORIAT, M; MARÍN, A; PUIG, L; SIERRA, M; SOCAS, M (Eds.): *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona, España.
- Solano, S y Bedoya, E. (2013). La unidad didáctica y el análisis didáctico como instrumentos metodológicos de investigación en didáctica de la matemática y formación de profesores: el caso de la derivada. Universidad del Valle – Cali, Colombia.
- Tamayo, O. (2001). Evolución conceptual desde una perspectiva multidimensional. Aplicación al concepto de respiración. Universidad autónoma de Barcelona. Departamento de didáctica de las matemáticas y de las ciencias experimentales.
- Tamayo, O. (2006). "La metacognición en los modelos para la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias" *Los Bordes De La Pedagogía: Del Modelo A La Ruptura*. En: Colombia ISBN: 978-958-8316-20-8 ed: Universidad Pedagógica Nacional, V.3, P.275 – 306.

- Tamayo, O. Vasco, C., Suárez, M., Quiceno., C., García, V., Giraldo, A. (2010), La clase multimodal formación y evolución de conceptos científicos a través del uso de tecnologías de la información y la comunicación. Grupos de investigación: Cognición y educación Actores, escenarios y procesos del desarrollo Humano integral de la niñez y la juventud. Universidad Autónoma de Manizales. Recuperado el 5 de mayo de:  
<http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/bitstream/11182/368/1/Clase%20multimodal%20y%20la%20formaci%C3%B3n%20y%20evoluci%C3%B3n.pdf>
- Tobón, H. (2013). Diseño e implementación de un curso virtual como herramienta didáctica para la enseñanza aprendizaje de las medidas de tendencia central en el grado 6 en la I.E. Inmaculada Concepción del municipio de Guarne, utilizando Moodle. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de ciencias. Medellín. Recuperado el 7 de Mayo de 2015 de:  
<http://www.bdigital.unal.edu.co/9460/1/98493795.2013.pdf>
- Troncoso, O. (2013). Estrategias metacognitivas en el aprendizaje de las matemáticas: Una intervención en el aula para determinar las implicaciones de la implementación de estrategias metacognitivas en el aprendizaje de las matemáticas. Ibagué – Tolima. Recuperado el 15 enero de 2015 de:  
<http://www.cie.fundacionabrapalabra.org/ponencias/ESTRATEGIAS-METACOGNITIVAS-OSCAR-M-TRONCOSO.pdf>
- Villanueva, H. y Moreno, M. (2010). Aprendizaje basado en problemas y el uso de las tic para el mejoramiento de la competencia interpretativa en estadística descriptiva: el caso de las medidas de tendencia central. Universidad de la Amazonia. Facultad Ciencias de la Educación. Florencia  
Recuperado el 7 de Mayo de 2015 de:  
<http://www.elitv.org/documentos/tesis/tesis5TICparamejoramiento.pdf>

## **8. ANEXOS**

### **UNIDAD DIDÁCTICA**

#### **RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SOBRE MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL**

##### **1. INTRODUCCIÓN**

La siguiente unidad didáctica se basa en el diseño y ejecución de problemas auténticos sobre medidas de tendencia central, en la cual se implementa la reflexión metacognitiva en la resolución de los mismos, consta de tres momentos, los cuales son: Momento de ubicación, momento de desubicación y momento de reenfoque.

En el momento de ubicación se realizarán dos problemas auténticos con el objetivo de identificar los obstáculos ontológicos y epistemológicos que presentan los estudiantes cuando solucionan problemas sobre medidas de tendencia central. Se utilizan múltiples lenguajes (discurso oral, escrito, gestos, imágenes, diagramas, otros) para que el estudiante pueda representar las respuestas de los problemas planteados. En el desarrollo de dicha actividad se realizan preguntas de autorregulación metacognitiva para darle solución. Este análisis debe ser mostrado a los estudiantes, permitiendo que ellos identifiquen sus obstáculos iniciales.

En el momento de desubicación se tiene en cuenta el análisis obtenido en el primer momento de la unidad y se realiza la observación de dos videos y una lectura de texto referidos a los conceptos y propiedades de las medidas de tendencia central, así mismo, se plantean problemas auténticos diseñados por el investigador, sobre medidas de tendencia central. Las situaciones planteadas deben promover múltiples lenguajes para el proceso de elaboración del conocimiento y preguntas de autorreflexión metacognitiva que permitan identificar a los estudiantes y al docente lo que va sucediendo con los obstáculos caracterizados.

En el momento de reenfoque se realizarán unos problemas auténticos sobre medidas de tendencia central, estas tendrán mayor complejidad que las anteriores, involucrando los componentes anteriores (lo que sucede con los obstáculos, incorporar el uso de múltiples lenguajes, preguntas de autorregulación metacognitiva). Durante los tres momentos se podrá identificar qué va sucediendo con las categorías de análisis propuesta en la investigación. Dicha exploración permitirá hacer comparación directa con lo realizado en los dos momentos anteriores, con el propósito de identificar en cada uno de los estudiantes cómo van evolucionando conceptualmente.

##### **1. CRITERIOS CON QUE SE ABORDARA LA UNIDAD DIDÁCTICA**

Los criterios que se tendrán en cuenta para abordar la unidad didáctica son los siguientes: Obstáculos, Historia y epistemología, Reflexión metacognitiva y el uso de múltiples lenguajes. A continuación se describen estos criterios:

### **Obstáculos epistemológicos:**

La noción de obstáculo es tomada de Bachelard 1976 (citado en Mora, 2002), quien lo define como:

Las limitaciones o impedimentos que afectan la capacidad de los individuos para construir el conocimiento real o empírico. El individuo entonces se confunde por el efecto que ejercen sobre él algunos factores, lo que hace que los conocimientos científicos no se adquieran de una manera correcta, lo que obviamente afecta su aprendizaje (pág. 2).

El conocer los obstáculos epistemológicos que presentan los estudiantes cuando resuelven problemas sobre medidas de tendencia central permitirá tener una visión más amplia y real del estado de los estudiantes frente a la comprensión de los conceptos de moda, media y mediana, los errores procedimentales que cometen, la confusión en las formulas, los conocimientos previos que traen y que pueden dificultar el aprendizaje, el dominio del lenguaje, las experiencias cotidianas y los modelos mentales que tienen. Así mismo se podrá constatar las dificultades cuando resuelven problemas, los razonamientos que realizan, los pasos que llevan a cabo, sus fortalezas y debilidades.

### **Obstáculos Ontológicos:**

Pozo *et al.* (1988) realizan una caracterización de los obstáculos ontológicos más frecuentes en los estudiantes manifestados como concepciones espontáneas, inducidas o analógicas. A continuación se describen cada una de ellas:

**Concepciones Espontáneas:** Se forman por las percepciones sensoriales que tienen los niños acerca del mundo que les rodea y de hechos de la vida cotidiana.

**Concepciones Inducidas:** son creencias inducidas debido a procesos de socialización. Estas concepciones se originan en el entorno familiar, social y por la influencia de los medios de comunicación.

**Concepciones Analógicas:** Se derivan de las comparaciones que se realizan con hechos de la vida cotidiana, así la comprensión del concepto se basa en la formación de analogías generadas por los propios alumnos en su entorno familiar o en la escuela.

### **Historia y epistemología de la ciencia**

La historia de la ciencia estudia los diferentes cambios y evolución del pensamiento científico en una trayectoria espacio–temporalmente dinámica de las teorías científicas. De otra parte, la epistemología se entiende como el estudio del conocimiento científico frente al estudio del conocimiento común.

En primer lugar, podemos señalar que el estudio de la historia de la ciencia ofrece, tanto a los docentes como a los estudiantes, las siguientes ventajas:

- Ubicar la temática científica objeto de estudio en un contexto temporal, lo que permite relacionarla con otros acontecimientos de otras disciplinas y

hacer un entramado en el cual el hecho científico se observa como un elemento relacionado con otros sucesos.

- Comprender los desarrollos actuales de la disciplina en cuestión.
- Conocer los hitos históricos de la disciplina para comprender los distintos estilos de pensamiento desarrollados en la época.
- Identificar algunos de los obstáculos que impiden el desarrollo científico y algunos de los elementos externos a la ciencia misma que catalizan su propio desarrollo, tales como: políticas educativas, políticas de desarrollo científico, aperturas educativas a otras fronteras, entre otros.
- Observar el concepto científico desde la diacronía.
- Observar la influencia de la ciencia en el desarrollo social.
- Orientar posibles desarrollos para la didáctica de la ciencia.

### **La reflexión Metacognitiva**

En el modelo de la unidad didáctica presentada, la metacognición cobra importancia cuando los docentes y los estudiantes la explicitan en el aula de clase, mediante la comunicación (verbalizaciones, escritura de textos, expresión corporal, representaciones gráficas, etc.) y al transitar entre dichos modos.

Algunas de las ventajas que trae el conocimiento de los procesos cognitivos y la regulación del diseño y aplicación de la unidad didáctica según Tamayo *et al.* 2010, son:

- Es importante propiciar el análisis de los procesos empleados en sus actividades de aprendizaje entre los estudiantes, para identificar las operaciones mentales que conducen a lograr las expectativas de aprendizaje y diferenciarlas de las operaciones mentales que no producen resultados fructíferos.
- La metacognición permite una mejor adaptación al medio escolar, porque tanto el docente como el estudiante logran conocer, mediante esta práctica, las distintas maneras de pensar de la comunidad escolar de la cual hacen parte.
- La explicitación de la reflexión de los procesos cognitivos y sus diferentes estrategias de regulación permite a los estudiantes experimentar otras formas de expresión y desarrollar la creatividad con la ayuda de los múltiples lenguajes.
- La práctica de la actividad metacognitiva en el aula permite modificar la planificación de la enseñanza, porque el docente logra conocer las estrategias que utiliza el estudiante para aprender y, de este modo, adapta los contenidos de la enseñanza a las necesidades de aprendizaje del estudiante.
- La práctica de la metacognición facilita la identificación de obstáculos epistemológicos, lingüísticos y pedagógicos en los actores del proceso de enseñanza–aprendizaje. (pág.119)

Estos procesos metacognitivos le permitirán al estudiante mejorar sus estrategias de resolución de problemas, logrando una mayor profundidad y autonomía en el aprendizaje; en el que el educando tenga la posibilidad de explorar por si mismo los caminos que le ayuden a encontrar la solución del problema, y de esta manera poder ensayar, replantear, comparar, y verificar los pasos que realiza

### **Estudio de múltiples lenguajes**

Según Cabré, (2006) el lenguaje tiene una función simbólica, representa el pensamiento de una comunidad o un grupo social, una situación sociolingüística, socioeconómica, sociopolítica o sociocultural. Tiene una función representativa debido a que lo utilizamos para hablar de la realidad a partir de las imágenes mentales que se crean a través de él, y finalmente, tiene una función comunicativa; esto es, necesitamos el lenguaje, al lado de otros sistemas posibles, para expresarnos y dar a conocer la información a los demás.

Asumir el lenguaje desde un punto de vista funcional conduce a establecer estrategias de enseñanza en las cuales un tema o un concepto determinado puede presentarse a los estudiantes de múltiples maneras y, los estudiantes, por su parte, pueden asumir su comprensión desde diferentes perspectivas. El maestro debe partir de este supuesto, con el fin de evitar la homogeneidad en el proceso de enseñanza–aprendizaje. Lo anterior pretende sembrar en el maestro y en el estudiante la idea de que no hay una única forma de comprender el fenómeno, sino que podemos acercarnos a él mediante múltiples formas de expresión o de comunicación, es decir, mediante múltiples lenguajes.

## **3. OBJETIVOS**

### **3.1 OBJETIVOS DE ENSEÑANZA**

- Resolver problemas sobre medidas de tendencia central
- Implementar la reflexión metacognitiva en la resolución de problemas sobre medidas de tendencia central

### **3.2 OBJETIVOS DE APRENDIZAJE**

- Calcular la media para un conjunto de datos no agrupados
- Calcular la moda para un conjunto de datos no agrupados
- Calcular la mediana para un conjunto de datos no agrupados
- Calcular las medidas de tendencia central de datos presentados en un diagrama
- Resolver problemas auténticos sobre medidas de tendencia central
- Implementar la reflexión metacognitiva en la resolución de problemas sobre medidas de tendencia central

## **4. CONTENIDOS**

<b>Conceptuales</b>	<b>Procedimentales</b>	<b>Actitudinales</b>

<p>Media aritmética Moda Mediana</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Cálculo de la media aritmética para datos no agrupados</li> <li>● Cálculo la moda para datos no agrupados</li> <li>● Cálculo la mediana para datos no agrupados</li> <li>● Resolución de problemas auténticos sobre medidas de tendencia central</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● Valoración positiva de la estadística en distintos contextos de la vida cotidiana.</li> <li>● Aceptación de que los números por sí solos pueden no ser tan representativos como en relación con otros.</li> <li>● Aprecio de la media de un conjunto de datos como valor representativo del conjunto.</li> <li>● Reconocimiento de la reflexión metacognitiva para resolver problemas</li> <li>● Satisfacción y gusto por la presentación cuidadosa y ordenada de las actividades.</li> </ul>
--	--	--

### **Tiempo de ejecución de la unidad didáctica**

La unidad didáctica se ejecutara durante 5 semanas, cuatro horas semanales para cada grupo distribuidas así:

Momento de ubicación: Una semana

Momento de Desubicación: Una semana

Momento de Reenfoque: tres semanas

### **Unidad de trabajo**

La unidad de trabajo para la aplicación de la unidad didáctica son los estudiantes de grado 8°, Grupo Ay B, con un total de 83 estudiantes de género mixto, sus edades oscilan entre los 12 y 14 años.

### **Formas de trabajo en el aula**

En los dos primeros momentos las actividades son individuales, en el tercer momento hay algunas actividades individuales y otras grupales.

## **5. MOMENTOS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA Y ACTIVIDADES**

### **Momento de Ubicación:**

En el momento de ubicación se realizarán dos actividades individuales que son dos problemas auténticos sobre medidas de tendencia central con sus respectivas preguntas y la implementación de la reflexión metacognitiva para la solución de los mismos.

**Primera Actividad:** En forma individual lee y soluciona el siguiente problema

### OLIMPIADAS DE MATEMÁTICAS EN SINCELEJO

La secretaría de educación Municipal de Sincelejo realizará unas olimpiadas de conocimientos por curso en los grados 8°, para poder participar se deben cumplir al menos 3 de las siguientes condiciones:

1. Que el promedio de notas del curso en el área de matemática sea mayor a 4.0.
2. Que la mediana de las edades sea 13 años
3. Que el peso promedio del curso sea mayor a 42 Kg
4. Que la moda de la variable género sea masculino
5. Que la mediana de la variable # de hermanos sea 2

La Institución educativa Normal Superior de Sincelejo desea participar, por lo cual recolectó información en el grado 8° que tiene 30 estudiantes, teniendo en cuenta las siguientes variables: edad (en años cumplidos), el género (femenino, masculino), el peso en Kg, número de hermanos y notas de los estudiantes en el área de matemática. Los datos recolectados fueron los siguientes:

- a) Edades de los estudiantes:  
12, 15, 12,13, 13, 14, 13, 12, 14, 13, 15, 14, 14, 13, 15, 14, 14, 14, 14,13, 13, 15, 16,14, 15,13, 15, 16,14,15
- b) Género de los estudiantes:  
F,F,F,M,F,M,F,M,F,M,F,F,F,M,F,F,M,F,F,F,M,F,M,F,F,M,F,F
- c) Peso en Kg:  
35,40,35,41,35,38,40,38,41,38,40,38,42,38,40,38,41,46,47,38,43,42,38,41,38,41,42,43,45,39
- d) Notas de los estudiantes en el área de matemática: 3.5; 3.2; 4.4; 2.5; 3.6; 3.4; 4.2; 3.7; 2,8; 4,3; 3,9; 3,2; 4,1; 3,8; 3,2; 3,5; 5,0; 3,6; 4,1; 3,9; 3,4; 3,5; 3,1; 3,7; 4,7; 4,9; 3,1; 3,6; 3,7; 4,3.
- e) Número de hermanos:  
3, 1, 2, 4, 1, 0, 2, 1, 4, 2, 3, 3, 2, 1, 3, 5, 4, 5, 2, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 4, 2, 6, 3, 1

¿Puede el grado 8° de la Institución educativa Normal Superior de Sincelejo participar en las olimpiadas? \_\_\_\_\_

¿Por qué?

---

---

---

---

---

### **Preguntas Metacognitivas**

¿Entendiste el enunciado del problema?

---

---

---

¿Cuántas veces lo leíste? \_\_\_\_\_

¿Subrayaste la información importante? \_\_\_\_\_

¿Organizaste los datos? \_\_\_\_\_

¿Cuál es la pregunta del problema?

---

---

---

¿Qué debes hacer para resolver el problema? ¿Tienes algún plan? Descríbelo

---

---

---

---

---

¿Qué entiendes por promedio? ¿Cuál es el peso promedio del curso? \_\_\_\_\_

---

---

---

¿Qué entiendes por moda? ¿Cuál es la Moda de la variable peso?

---

---

---

¿Qué entiendes por mediana? ¿Cuál es la mediana de la variable edades?

---

---

---

¿Qué entiendes cuando se dice que la mediana de las edades debe ser 13 años?

---

---

---

¿Crees que lo estás haciendo bien?: ¿Te sirve el esquema que planteaste?

---

---

¿Verificaste la solución? \_\_\_\_\_

¿Qué dificultades encontraste para resolver el problema?

---

---

---

---

¿Qué fue lo que más le llamó la atención del proceso realizado?

---

---

---

¿Crees que puedes realizar problemas similares en menos tiempo?

---

---

---

---

¿Cómo te sentiste al resolver el problema?

---

---

---

¿Considera que el plan funcionó bien? Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

**Segunda Actividad:** En forma individual interpreta el siguiente diagrama y responde las preguntas planteadas

### CONSUMO DE LUZ ELÉCTRICA

La siguiente grafica muestra el consumo de energía en los últimos 6 meses de la casa de un estudiante de 8º, él manifiesta que el consumo promedio en los últimos 6 meses en su casa fue de 200 Kwh, ¿estás de acuerdo? ¿Por qué?

---

---

---

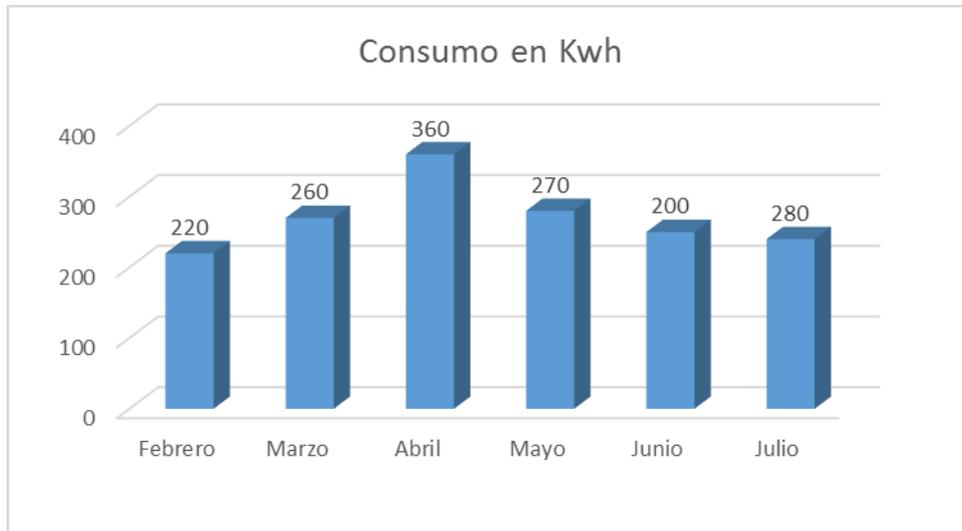
---

¿Cuál es la moda en el diagrama?

¿Cuál es la mediana en el diagrama?

¿Cuál fue el consumo promedio por día en el mes de abril?

Si el valor del Kwh es de \$390, ¿Cuánto pagó cada mes? ¿Cuánto ha pagado durante el último semestre?



### Preguntas Metacognitivas

¿Entendiste el diagrama? \_\_\_\_\_

¿Subrayaste la información importante? \_\_\_\_\_

¿Organizaste los datos? \_\_\_\_\_

¿Cuál es la pregunta del problema?  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

¿Qué debes hacer para resolver el problema? ¿Tienes algún plan? Descríbelo  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

¿Crees que lo estás haciendo bien?:¿Te sirve el esquema que planteaste?

---

---

---

¿Qué tendrías que hacer para hallar el promedio?

---

---

---

---

¿Qué tendrías que hacer para hallar la moda?

---

---

---

---

¿Qué tendrías que hacer para hallar la mediana?

---

---

---

¿Qué tendrías que hacer para saber cuánto pago cada mes?

---

---

---

---

¿Qué dificultades encontraste para resolver el problema?

---

---

---

---

¿Qué fue lo que más le llamó la atención del proceso realizado?

---

---

---

¿Crees que puedes realizar problemas similares en menos tiempo?

---

---

---

---

¿Cómo te sentiste al resolver el problema?

---

---

---

¿Considera que el plan funcionó bien? Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_

¿Por qué?

---

**Momento de Desubicación:**

En el momento de desubicación se realizaran tres actividades individuales que son: la observación de dos videos en la cual se explica el concepto de Media Aritmética, Mediana y Moda y sus fórmulas. Después de vistos los videos, los estudiantes deben responder un cuestionario relativo a los mismos, y realizar un conversatorio acerca de los conceptos tratados. De igual forma se realizará una lectura de texto:” propiedades de las medidas de tendencia central”, donde se encuentran la propiedades, ventajas y desventajas de las medidas de tendencia central. Se realiza un conversatorio de la lectura de texto y el docente realiza la retroalimentación y responde algunas de las preguntas planteadas por los estudiantes.

Se plantean dos problemas auténticos elaborados por el investigador sobre medidas de tendencia central con sus respectivas preguntas y la implementación de la reflexión metacognitiva para la solución de los mismos.

**Primera actividad:**

Observar los videos relativos a los conceptos de las medidas de tendencia central y después responde las siguientes preguntas:

¿Qué son para ti las medidas de tendencia central?

---

---

---

---

¿Qué entiendes por Media Aritmética?

---

---

---

---

¿Qué entiendes por Mediana?

---

---

---

---

¿Qué entiendes por Moda?

---

---

---

---

¿Para hallar la media aritmética es necesario ordenar los datos?

Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_

La media aritmética debe coincidir siempre con alguno de los datos? Sí \_\_\_\_\_

No \_\_\_\_\_

Explica \_\_\_\_\_

---

---

¿Si en un conjunto de datos se agrega otro dato, se altera la media aritmética?

Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_

Explica \_\_\_\_\_

---

Si en los datos hay un cero, se tiene en cuenta para el cálculo de la media aritmética

Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_

Explica \_\_\_\_\_

---

¿Para hallar la mediana es necesario ordenar los datos?

Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_

¿Al utilizar la fórmula de la mediana  $n+1/2$ , ese resultado de la división es la mediana?

Explica \_\_\_\_\_

---

---

¿Si en un conjunto de datos se agrega otro dato, siempre se altera la mediana?

Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_

Explica \_\_\_\_\_

---

---

¿Todo conjunto de datos tiene moda?

Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_

Explica \_\_\_\_\_

---

**Preguntas metacognitivas:**

Entendiste los videos \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Que hiciste para comprender el video \_\_\_\_\_

Entendiste que son las medidas de tendencia central y para qué sirven

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Las fórmulas son fácil de aplicar \_\_\_\_\_

Te gustaron los videos. Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_ ¿Por qué?

¿Cuál de las medidas de tendencia central es más difícil de comprender y cuál es la más fácil.

Explica \_\_\_\_\_

—

\_\_\_\_\_

**Segunda actividad:** En forma individual lee y soluciona el siguiente problema

### MOTOTAXISMO EN SINCELEJO

En Colombia y principalmente en Sincelejo hay un fenómeno que está creciendo cada vez más, el cual es el Mototaxismo, esto ha generado un aumento en el número de accidentes por día y el número de comparendos que se hacen debido al aumento de motos en la ciudad. Se preguntó en la oficina de tránsito el número de comparendos por día durante el mes de junio y estos fueron los resultados:

45, 36, 70, 38, 56, 72, 24, 63, 51, 74, 25, 64, 48, 68, 75, 24, 68, 64, 39, 40, 65, 120, 82, 96, 66, 80, 93, 84, 105, 63.

¿Cuáles es el número promedio de comparendos en el mes de junio?

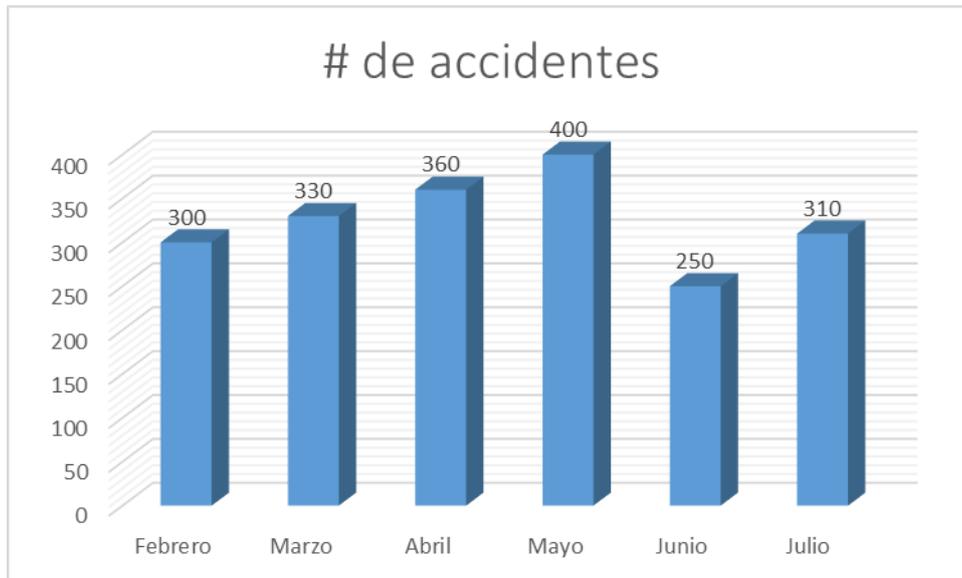
¿Cuál es la mediana de los datos reportados por el tránsito?

Como el número de motos sigue en aumento, una empresa realizó una encuesta a 25 mototaxistas para averiguar cuál es la marca de moto que más les gusta para trabajar entre: Auteco (A), Yamaha (Y), Suzuki (S) y Honda (H), estas fueron sus respuestas:

A, S, A, Y, A, S, A, H, A, A, S, Y, Y, A, A, S, S, Y, A, S, Y, A, A, S, A

¿Cuál es la moda en esta encuesta? ¿Por qué?

De igual manera, el número de accidentes ha aumentado durante los últimos meses, a continuación se muestra un diagrama del índice de accidentalidad durante los últimos 6 meses:



¿Cuál es el promedio de accidentes durante el último semestre?

¿Cuál es la moda en el diagrama?

¿Cuál es la mediana en el diagrama?

¿Cuál fue el promedio de accidentes por día durante el mes de abril?

### **Preguntas Metacognitivas**

¿Entendiste el enunciado del problema?

---

---

---

¿Cuántas veces lo leíste? \_\_\_\_\_

¿Subrayaste la información importante? \_\_\_\_\_

¿Organizaste los datos? \_\_\_\_\_

¿Cuál es la pregunta del problema?

---

---

---

¿Qué debes hacer para resolver el problema? ¿Tienes algún plan? Descríbelo

---

---

---

¿Qué tienes que hacer para hallar el promedio? ¿Lo necesitas en el problema? ¿Cómo se halla?

---

---

---

¿Qué tienes que hacer para hallar la moda?

---

---

---

¿Qué tienes que hacer para hallar la mediana?

---

---

---

¿Crees que lo estás haciendo bien?:¿Te sirve el esquema que planteaste?

---

---

---

¿Verificaste la solución?

---

---

---

¿Qué dificultades encontraste para resolver el problema?

---

---

---

¿Qué fue lo que más le llamó la atención del proceso realizado?

---

---

---

¿Crees que puedes realizar problemas similares en menos tiempo?

---

---

---

¿Cómo te sentiste al resolver el problema?

---

---

¿Considera que el plan funcionó bien? Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

**Tercera actividad:** En forma individual lee y soluciona el siguiente problema

### **CAMPEONATO DE MICROFÚTBOL EN LA INSTITUCIÓN**

En la institución todos los años se realiza el campeonato interno de microfútbol, este año han jugado 8 partidos cada equipo. A continuación se muestran los resultados de cada uno

Equipos	Goles marcados por Partido
Nacional	5,6,7,4,8,2,0,3
Junior	3,2,5,1,2,7,4,2
América	2,2,5,6,4,1,3,5
Millonarios	5,7,8,2,1,4,6,3
Real Madrid	3,4,6,8,7,1,2,4
Barcelona	2,0,6,0,3,5,1,2
Brasil	1,1,5,2,3,6,4,3
Argentina	3,5,4,0,3,4,2,5
Cali	2,2,3,2,8,1,6,3

¿Cuál es el promedio de goles por partido de los equipos de Barcelona hasta la fecha?

¿Cuál es la mediana de los goles marcados por Brasil?

¿Cuál es la moda de los goles marcado por el Junior?

### **Preguntas Metacognitivas**

¿Entendiste el enunciado del problema?

---

---

---

¿Cuántas veces lo leíste? \_\_\_\_\_

¿Subrayaste la información importante? \_\_\_\_\_

¿Organizaste los datos? \_\_\_\_\_

¿Cuál es la pregunta del problema?

---

---

---

¿Qué debes hacer para resolver el problema? ¿Tienes algún plan? Descríbelo

---

---

---

---

¿Qué tienes que hacer para hallar el promedio? ¿Lo necesitas en el problema? ¿Cómo se halla?

---

---

---

---

¿Qué tienes que hacer para hallar la moda?

---

---

---

¿Qué tienes que hacer para hallar la mediana?

---

---

---

¿Crees que lo estás haciendo bien?:¿Te sirve el esquema que planteaste?

---

---

---

¿Verificaste la solución? \_\_\_\_\_

¿Qué dificultades encontraste para resolver el problema?

---

---

---

---

---

¿Qué fue lo que más le llamó la atención del proceso realizado?

---

---

---

¿Crees que puedes realizar problemas similares en menos tiempo?

---

---

---

¿Cómo te sentiste al resolver el problema?

---

---

---

¿Considera que el plan funcionó bien? Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

### **Momento de Reenfoque:**

En el momento de reenfoque se realizaran dos actividades individuales y 2 grupales, las cuales son problemas auténticos sobre medidas de tendencia central con sus respectivas preguntas y la implementación de la reflexión metacognitiva para la solución de los mismos.

**Primera Actividad:** En forma individual lee y soluciona el siguiente problema

### **ACTIVIDADES PARA EXCURSIÓN**

El grado 8° quiere recolectar fondos para irse de excursión a fin de año, para esto ha decidido realizar actividades lucrativas para recolectar fondos. En la primera semana vende helados y las ventas fueron las siguientes:

Días	# de helados vendidos
Lunes	88
Martes	105
Miércoles	75
Jueves	84
Viernes	98

sabores	# de helados vendidos
Piña	170
Vainilla	55
Chocolate	79
Fresa	74
Coco	72

¿Cuál fue el promedio de helados vendidos en la semana?

¿Para qué le sirve esta información al curso?

---



---



---

¿Alrededor de cuantos helados deben traer para vender en la siguiente semana?

¿Cuál es la moda en los datos de la tabla de sabores?

¿Para qué le sirve esta información al curso?

---



---



---

¿De qué sabor deben traer más helados la siguiente semana? ¿Por qué?

---



---



---

Otro de los productos que vendió el curso durante la semana fue galletas, estos fueron los resultados:

Días	# de galletas vendidas
Lunes	40

Martes	43
Miércoles	41
Jueves	45
Viernes	194

¿Cuál es la mediana de los datos?

¿Es representativo el promedio en este caso? ¿Por qué?

---



---



---

Uno de los estudiantes hizo un balance de las ganancias por día en la venta de los productos, y realizó el siguiente diagrama:



¿Cuál fue la ganancia promedio en los 5 días?

**Preguntas Metacognitivas**

¿Entendiste el enunciado del problema?

---



---



---

¿Cuántas veces lo leíste? \_\_\_\_\_

¿Subrayaste la información importante? \_\_\_\_\_

¿Organizaste los datos? \_\_\_\_\_

¿Cuál es la pregunta del problema?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

¿Qué debes hacer para resolver el problema? ¿Tienes algún plan? Descríbelo

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

¿Qué tienes que hacer para hallar el promedio? ¿Lo necesitas en el problema? ¿Cómo se halla?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

¿Qué tienes que hacer para hallar la moda?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

¿Qué tienes que hacer para hallar la mediana?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

¿Crees que lo estás haciendo bien?:¿Te sirve el esquema que planteaste?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

¿Verificaste la solución? \_\_\_\_\_

¿Qué dificultades encontraste para resolver el problema?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

¿Qué fue lo que más le llamó la atención del proceso realizado?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

¿Crees que puedes realizar problemas similares en menos tiempo?

---

---

---

¿Cómo te sentiste al resolver el problema?

---

---

¿Considera que el plan funcionó bien? Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

**Segunda Actividad:** En grupo de 4 estudiantes lee y soluciona los siguientes problemas:

1. En una encuesta que se realizó en la institución acerca de las preferencias que tienen los estudiantes sobre ciertas asignaturas, estas fueron las respuestas:

Áreas	# de estudiantes
Matemática	640
Sociales	320
Castellano	485
Ingles	230
Ed. Física	1830
Religión	126
Biología	364

¿Cuál es la moda? ¿Por qué?

¿Tiene sentido calcular la media aritmética? ¿Por qué?

---

---

---

### Preguntas Metacognitivas

¿Entendiste el enunciado del problema?

---

---

---

¿Cuántas veces lo leíste? \_\_\_\_\_

¿Subrayaste la información importante? \_\_\_\_\_

¿En este caso te toca organizar los datos?  
\_\_\_\_\_

¿Cuál es la pregunta del problema?  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

¿Qué debes hacer para resolver el problema?  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

2. Si el profesor de matemáticas toma en el tercer periodo 6 notas, si sacas todas iguales las 6 notas, ¿qué sucede con el promedio?  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Si 5 de esas notas son altas y la sexta es muy baja, ¿Qué sucede con el promedio?  
Si fueran 10 notas las que tomara el profesor la nota baja ¿influirá de la misma manera?

**Preguntas Metacognitivas**

¿Entendiste el enunciado del problema?  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

¿Cuántas veces lo leíste? \_\_\_\_\_

¿Subrayaste la información importante? \_\_\_\_\_

¿Has probado tanteando con números? \_\_\_\_\_

¿Qué debes hacer para resolver el problema? ¿Tienes algún plan? Descríbelo  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

---

---

¿Crees que lo estás haciendo bien?:¿Te sirve el esquema que planteaste?

---

---

¿Considera que el plan funcionó bien? Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

3. Se realizó una encuesta en la institución a 120 estudiantes acerca de su deporte favorito, el 20% dijo que béisbol,  $\frac{1}{8}$  dijo que voleibol,  $\frac{2}{3}$  dijo que futbol y el resto le gusta la natación. ¿Cuál es la moda?

**Preguntas Metacognitivas**

¿Entendiste el enunciado del problema?

---

---

---

---

¿Cuántas veces lo leíste?

---

---

¿Subrayaste la información importante?

---

---

¿Qué debes hacer para resolver el problema? ¿Tienes algún plan? Descríbelo

---

---

---

---

---

¿Qué no entiendes del problema?

---

---

---

¿Crees que lo estás haciendo bien?:¿Te sirve el esquema que planteaste?

---

---

---

¿Considera que el plan funcionó bien? Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

4. El precio de una bolsa de arroz de la misma marca en diferentes tiendas de la ciudad de Sincelejo fue: \$1800, \$1700, \$2000, \$2100, \$1900, 1850, 2200, 1950 y 1750  
¿Cuál es el valor promedio de la bolsa de arroz?

### **Preguntas Metacognitivas**

¿Entendiste el enunciado del problema?

---

---

---

¿Cuántas veces lo leíste?

---

---

¿Subrayaste la información importante?

---

---

¿Qué debes hacer para resolver el problema? ¿Tienes algún plan? Descríbelo

---

---

---

---

¿Crees que lo estás haciendo bien?:¿Te sirve el esquema que planteaste?

---

---

---

¿Considera que el plan funcionó bien? Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

### **Tercera Actividad:**

Se le pide a los estudiantes que se organicen en grupos de cinco y a cada grupo se le entrega un sobre que contiene unas encuestas que tienen que realizar a 15 estudiantes, cada grupo realiza la encuesta en un grado y curso diferente de la institución, la encuesta tienen los siguientes Ítems:

- Edad
- Número de hermanos
- Número de días que haces deporte a la semana
- Número de horas que le dedicas al estudio por día
- Color favorito
- Área favorita

Responde en grupo las siguientes preguntas:

¿Cuál es el promedio de las edades de los estudiantes encuestados?

¿Es mayor o menor al promedio de edad de tu curso?

¿Cuál es la moda de las edades?

¿Cuál es la mediana de los datos de las edades?

¿Cuál es el promedio de hermanos de los estudiantes encuestados?

¿Cuántos días en promedio hacen deporte los estudiantes?

¿Crees que es suficiente? ¿Por qué?

¿Cuántas horas en promedio al día le dedican al estudio los estudiantes?

¿Crees que es suficiente?

¿Cuál es la moda del color favorito de los estudiantes?

¿Cuál es la moda del área favorita de los estudiantes? ¿Por qué?

### **Preguntas Metacognitivas**

¿Entendiste la actividad? \_\_\_\_\_

¿Sabes organizar los datos? \_\_\_\_\_

¿Qué conceptos tienes que saber para responder las preguntas?

---

---

---

¿Tienes algún plan para resolver los problemas planteados? Descríbelo.

---

---

---

¿Crees que lo estás haciendo bien? \_\_\_\_\_

¿Verificaste la solución? \_\_\_\_\_

¿Qué dificultades encontraste para resolver las preguntas?

---

---

---

---

¿Qué fue lo que más le llamó la atención del proceso realizado?

---

---

¿Cómo te sentiste al resolver los problemas planteados?

---

---

¿Considera que el plan funcionó bien? Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

#### **Cuarta actividad:**

Utilizando el programa Excel resuelve los siguientes problemas:

1. El profesor de Biología registro la masa en Kg de 15 estudiantes del grado 8°, estos fueron los resultados:  
45, 49, 50, 52, 43, 45, 41, 51, 45, 47, 56, 46, 48, 45, 48.  
¿Cuál es el peso promedio de los 15 estudiantes?  
¿Cuál es la mediana de los datos?  
¿Cuál es la moda de los datos?

#### **Preguntas metacognitivas**

¿Entendiste el enunciado del problema?

---

---

---

¿Cuántas veces lo leíste?

---

¿Subrayaste la información importante?

---

¿Qué debes hacer para resolver el problema? ¿Tienes algún plan? Descríbelo

---

---

---

---

¿Crees que lo estás haciendo bien? ¿Te sirve el esquema que planteaste?

---

---

¿Considera que el plan funcionó bien? Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

Te gustó trabajar con el programa Excel. Si \_\_\_\_\_ NO \_\_\_\_\_ ¿por qué? \_\_\_\_\_

¿Qué dificultades tuviste con el programa? \_\_\_\_\_

---

2. Si en la serie datos: 2,6, 5, 8, 2, 13, 4, 27, se cambia el 27 por 50, ¿cuál de las medidas de tendencia central (media, moda y mediana) se ve afectada?

### **Preguntas metacognitivas**

¿Entendiste el enunciado del problema?

---

---

¿Cuántas veces lo leíste?

---

¿Subrayaste la información importante?

---

¿Qué debes hacer para resolver el problema? ¿Tienes algún plan? Descríbelo

---

---

---

¿Crees que lo estás haciendo bien?:¿Te sirve el esquema que planteaste?

---

---

¿Considera que el plan funcionó bien? Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

Te gustó trabajar con el programa Excel. Si \_\_\_\_\_ NO \_\_\_\_\_ ¿por qué? \_\_\_\_\_

---

¿Qué dificultades tuviste con el programa? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

3. En una encuesta realizada en la institución se han recogido los siguientes datos acerca de las preferencias televisivas de los estudiantes:

Prefieren:	N° de Estudiantes
Películas	450
Programas Culturales	120
Musicales	230
Novelas	350
Deportes	300
Otro tipo	80

¿Cuál es la moda en la encuesta? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

¿Tiene sentido calcular la media aritmética? ¿Por qué? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Realiza un diagrama de barras con los datos

### **Preguntas metacognitivas**

¿Entendiste el enunciado del problema?

\_\_\_\_\_

¿Cuántas veces lo leíste?

\_\_\_\_\_

¿Subrayaste la información importante?

\_\_\_\_\_

¿Qué debes hacer para resolver el problema? ¿Tienes algún plan? Descríbelo

---

---

---

---

¿Crees que lo estás haciendo bien?:¿Te sirve el esquema que planteaste?

---

---

¿Considera que el plan funcionó bien? Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

Te gustó trabajar con el programa Excel. Si \_\_\_\_\_ NO \_\_\_\_\_ ¿por qué? \_\_\_\_\_

¿Qué dificultades tuviste con el programa? \_\_\_\_\_

---

---

4. En el campeonato de básquetbol que se realiza en la institución el equipo ganador obtuvo los siguientes puntos: 68, 72, 56, 76, 84, 50, 85, 72, 66, 69, 59  
¿Cuál es la media aritmética de sus puntos? ¿Cuál es la mediana?

**Preguntas metacognitivas**

¿Entendiste el enunciado del problema?

---

---

---

¿Cuántas veces lo leíste?

---

¿Subrayaste la información importante?

---

¿Qué debes hacer para resolver el problema? ¿Tienes algún plan? Descríbelo

---

---

---

---

¿Crees que lo estás haciendo bien?:¿Te sirve el esquema que planteaste?

---

---

---

¿Considera que el plan funcionó bien? Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

Te gustó trabajar con el programa Excel. Si \_\_\_\_\_ NO \_\_\_\_\_ ¿por qué? \_\_\_\_\_

¿Qué dificultades tuviste con el programa? \_\_\_\_\_

—

5. El docente de Educación Física registró los tiempos de sus estudiantes en una prueba de atletismo de 100 metros planos. Estos fueron los tiempos en segundos: 20.18, 23.74, 19.24, 20.65, 18.72, 21.33, 23.04, 22.95, 19.85, 21.78, 22.51, 19.76, 18.34, 21.22, 18.61, 20.81, 21.72, 28.16, 19.79, 24.48.

¿Cuál es el tiempo promedio del grupo? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

¿Cuál es la mediana? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

### **Preguntas metacognitivas**

¿Entendiste el enunciado del problema?

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

¿Cuántas veces lo leíste?

\_\_\_\_\_

¿Subrayaste la información importante?

\_\_\_\_\_

¿Qué debes hacer para resolver el problema? ¿Tienes algún plan? Descríbelo

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

¿Crees que lo estás haciendo bien?:¿Te sirve el esquema que planteaste?

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

¿Considera que el plan funcionó bien? Sí \_\_\_\_\_ No \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

Te gustó trabajar con el programa Excel. Si \_\_\_\_\_ NO \_\_\_\_\_ ¿por qué? \_\_\_\_\_

¿Qué dificultades tuviste con el programa? \_\_\_\_\_

## **6. Materiales y recursos**

Lápiz, Hojas, borrador, calculadora.

