



**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS A PARTIR DE LA MANIPULACIÓN DE
MATERIALES CONCRETOS APLICABLES AL CONCEPTO DE MEDIDA DE
FIGURAS PLANAS Y REGULARES EN LOS ESTUDIANTES DE GRADO
OCTAVO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA SAN FRANCISCO**

OMAR ELIECER ALFONSO UMAÑA

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES
FACULTAD DE ESTUDIOS SOCIALES Y EMPRESARIALES
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
MANIZALES**

2024

**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS A PARTIR DE LA MANIPULACIÓN DE
MATERIALES CONCRETOS APLICABLES AL CONCEPTO DE MEDIDA DE
FIGURAS PLANAS Y REGULARES EN LOS ESTUDIANTES DE GRADO
OCTAVO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA SAN FRANCISCO**

Autor

OMAR ELIECER ALFONSO UMAÑA

Proyecto de grado para optar por el título de Magister en Enseñanza de las Ciencias

Tutor

Dra. LIGIA INÉS GARCÍA CASTRO

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES
FACULTAD DE ESTUDIOS SOCIALES Y EMPRESARIALES
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
MANIZALES**

2024

RESUMEN

Objetivo: Reconocer el aporte de la manipulación de material concreto en la resolución de problemas aplicados al concepto de medida de figuras planas regulares de los estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa San Francisco del Municipio de Santa Rosa del Sur de Bolívar.

Metodología: El enfoque de la investigación es de tipo cualitativo y descriptivo. Se fundamenta en estudios sobre material concreto, vinculados a la idea central de la Educación Matemática Realista (EMR), donde la matemática debe estar conectada con la realidad, y se basa en principios como el de actividad, realidad, niveles e interacción según Freudenthal.

Resultados: El abordar la unidad didáctica en su forma estructurada, la de sus subcategorías tales como: percepción, medición, estimación, comparación y aritmetización en los estudiantes de grado octavo de la IESF, permitió una progresiva construcción del concepto de medida, iniciando por los conocimientos previos, utilizando el material concreto para la solución de problemas.

Conclusiones: Se concluye además que la construcción y uso de instrumentos de medida convencionales y no convencionales desarrollan las habilidades relacionadas con la medición. La actividad de cuadricular algunas superficies planas como cartulinas en dm o en “mi pie” aportó a la comprensión del concepto de medidas de área de figuras planas y a entender la razón de ser de sus fórmulas. La construcción de cuerpos geométricos tales como: prisma, pirámides, cono, cilindro, cubo, etc. iniciando desde su desarrollo, de gran relevancia para la comprensión de las fórmulas y la solución de problemas de sus áreas en los mencionados sólidos

Por último, es recomendable para el desarrollo del pensamiento métrico-espacial: la construcción y uso de medias convencionales y no convencionales como la cinta métrica; permite la comprensión y manejo de unidades de medida, fortalece las habilidades relacionadas con la medición

Palabra clave: Manipulación de material concreto.

ABSTRACT

Objective: To recognize the contribution of the manipulation of concrete materials in solving problems related to the concept of measuring regular flat figures among eighth-grade students at the San Francisco Educational Institution in the Municipality of Santa Rosa del Sur de Bolívar.

Methodology: The research approach is qualitative and descriptive. It is based on studies on concrete materials, linked to the central idea of Realistic Mathematics Education (RME), where mathematics should be connected to reality, and it is based on principles such as activity, reality, levels, and interaction according to Freudenthal.

Results: Addressing the didactic unit in its structured form, with its subcategories such as perception, measurement, estimation, comparison, and arithmetization among eighth-grade students at IESF, allowed for a progressive construction of the concept of measurement, starting from prior knowledge and using concrete materials for problem-solving.

Conclusion: It is further concluded that the construction and use of conventional and non-conventional measuring instruments develop measurement-related skills. The activity of gridding some flat surfaces like cardboard in dm or "my foot" contributed to understanding the concept of area measurements of flat figures and understanding the rationale behind their formulas.

The construction of geometric bodies such as prisms, pyramids, cones, cylinders, cubes, etc., starting from their development, is of great relevance for understanding formulas and solving area problems in these mentioned solids.

Finally, it is recommended for the development of metric-spatial thinking: the construction and use of conventional and non-conventional measures, such as the measuring tape, allows for the understanding and management of measurement units, strengthening measurement-related skills.

Keywords: Manipulation of concrete materials.

TABLA DE CONTENIDO

1	INTRODUCCIÓN.....	9
2	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	11
2.1	DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA	11
2.1.1	En Cuanto Al Área Y Perímetro	11
2.1.2	Sobre el uso de material concreto	13
2.1.3	Con respecto a la resolución de problemas	15
3	JUSTIFICACIÓN.....	21
4	OBJETIVOS.....	22
4.1	OBJETIVO GENERAL	22
4.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	22
5	MARCO CONCEPTUAL.....	23
5.1	COMPETENCIA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.....	23
5.1.1	Modelos de resolución de problemas.....	24
5.2	PROBLEMAS RELACIONADOS CON EL CONCEPTO DE MEDIDA DE FIGURAS PLANAS Y REGULARES	27
5.3	MANIPULACIÓN DE MATERIALES CONCRETOS.....	31
6	METODOLOGÍA.....	39
6.1	ENFOQUE Y ALCANCE.....	39
6.2	POBLACIÓN Y CONTEXTO.....	39
6.3	UNIDAD DE TRABAJO	40
6.4	CONSIDERACIONES ÉTICAS.....	40
6.5	UNIDAD DE ANÁLISIS.....	41
6.6	TÉCNICAS Y FUENTES DE RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN	41
6.7	UNIDAD DIDÁCTICA	43
6.8	DISEÑO METODOLÓGICO	43
6.9	PLAN DE ANÁLISIS	43
7	ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS	45

7.1	ANÁLISIS DEL MOMENTO DE UBICACIÓN.....	45
7.2	PERCEPCIÓN.....	45
7.2.1	Comparación	47
7.2.2	Estimación.....	48
7.3	Medición.....	49
7.3.1	Aritmetización.....	50
7.4	ANÁLISIS DEL MOMENTO DE DESUBICACIÓN	51
7.4.1	Percepción	51
7.4.2	Comparación	52
7.4.3	Medición.....	56
7.4.4	Aritmetización.....	57
7.5	MOMENTO DE REENFOQUE	60
7.5.1	Percepción	60
7.5.2	Comparación	61
7.5.3	Estimación.....	62
7.5.4	Medición.....	63
7.5.5	Aritmetización.....	64
7.6	ANÁLISIS DEL AVANCE DE LOS ESTUDIANTES EN CADA UNO DE LOS MOMENTOS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA.....	66
8	CONCLUSIONES.....	70
9	RECOMENDACIONES	72
10	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	73

LISTA DE TABLAS

Tabla 1 Operacionalización de categorías	41
Tabla 2 Cuadro comparativo del avance de los estudiantes en el aprendizaje del concepto de área.....	66

LISTA DE FIGURAS

Figuras 1 Porcentaje de estudiantes por niveles de desempeño en matemáticas según el grupo de referencia (Colombia, Latinoamérica, no OCEDE y OCEDE) Ices. 2018	17
Figuras 2 Resultados de promedio del Nivel de desempeño en las Pruebas Saber 11 calendario B 2017-2021.....	18
Figuras 3 Porcentaje promedio de respuestas incorrectas en cada aprendizaje evaluado en matemática históricos resultados ICFES de la IESF 2020-2022 DANE: 213688001874....	19
Figuras 4 Pruebas Avanzar IESF 2022.....	20
Figuras 5 Implementación de la unidad didáctica	43
Figuras 6 Técnicas e instrumentos de recolección de información	44
Figuras 7 Percepción	46
Figuras 8 Comparación	47
Figuras 9 Estimación	48
Figuras 10 Medición.....	49
Figuras 11 Aritmetización	50
Figuras 12 Percepción	52
Figuras 13 Comparación	53
Figuras 14 Estimación	55
Figuras 15 Medición.....	57
Figuras 16 Aritmetización.....	58
Figuras 17 Percepción	60
Figuras 18 Comparación	61
Figuras 19 Estimación	62
Figuras 20 Medición.....	63
Figuras 21 Aritmetización.....	64

1 INTRODUCCIÓN

La importancia de la geometría en la formación académica es considerada en todos los entes responsables de la educación; desarrolla habilidades y capacidades relacionados al pensamiento espacial, el pensamiento lógico, el razonamiento, el pensamiento crítico, la resolución de problemas etc. La geometría es parte las matemáticas, ciencia evaluada por las pruebas pisa, evaluación internacional por la OCDE (Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico) prueba que según registros muestran un resultado bajo a partir de 2009 OCDE, (2018).

Los resultados de Latinoamérica en matemática a partir del año 2006 ocupan en su mayoría los niveles más bajos (0 y 1) de manera general, los niveles de desempeño en matemáticas de Latinoamérica se ubican de últimos con relación a los no OCDE y OCDE.

Los resultados de Colombia en estas pruebas han sido muy similares al de Latinoamérica de 2006 a 2018, los cuales han sido bajos; Colombia en las últimas pruebas PISA se ha ubicado en el penúltimo lugar de los países de la OCDE.

Las pruebas saber ICFES (El Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación) en Colombia mide los estándares de calidad, en los últimos años no han sido satisfactorios y las matemáticas, los más bajos. En el departamento de Bolívar los resultados ICFES se ubican por debajo del promedio nacional en los años 2017- 2021

Situación similar acontece según relato de los antecedentes presentados en este trabajo y un bajo rendimiento académico en el área de matemáticas y de manera especial en la resolución de problemas de medida en la Institución Educativa San Francisco del Municipio de Santa Rosa del Sur del departamento de Bolívar

Por todas las consideraciones anteriores donde se abordada la problemática desde una perspectiva general a particular, surge el interrogante: ¿De qué manera la manipulación de materiales concretos aporta a la resolución de problemas aplicables al concepto de medida de figuras planas y regulares en los estudiantes del grado octavo de Institución Educativa San Francisco del Municipio de Santa Rosa del Sur Bolívar?

Se propone investigar los aportes del material concreto para la solución de problemas de medida en este mencionado contexto. El objetivo de esta investigación: Describir el aporte de la manipulación de material concreto en la resolución de problemas aplicables al concepto de medida de figuras planas y regulares en estudiantes del grado octavo de Institución Educativa San Francisco del Municipio de Santa Rosa del Sur.

El presente trabajo de investigación está estructurado en 3 capítulos que a continuación abordaremos:

Capítulo I: Planteamiento Del Problema. se describe el problema, se formulan el objetivo general y los objetivos específicos y se realiza la justificación.

Capítulo 2 marco conceptual. Inicialmente se describen algunos aportes teóricos a cerca de la importancia de la resolución de problemas desde el campo de las matemáticas y otros, seguido de algunos modelos para la resolución de problemas como: George Pólya, Miguel De Guzmán y Alan Schoenfeld, después aportes teóricos en la resolución de problemas de medida; los aportes de material concreto para la resolución de problemas y de la matemática realista.

Capítulo 3 metodología en este capítulo se describe el enfoque de la investigación, la población y contexto, la unidad de trabajo, se presentan las categorías de análisis, técnicas y fuentes de información etc.

Finalmente se presentan la referencia bibliográfica y los anexos que contienen el análisis de la investigación en 3 momentos: momento de ubicación, momento de reubicación y momento de reenfoque en los cuales se describe el avance a partir de las categorías de análisis: percepción, comparación, estimación, medición y aritmetización y termina con las conclusiones y recomendaciones.

2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

2.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

La geometría ésta presente de manera cotidiana en las actividades diarias de los seres humanos, tanto así que permite desarrollar acciones como: escribir un artículo en una hoja de texto donde se debe organizar las medidas de forma que no se salga de un perímetro establecido, subir escalones, usar objetos o herramientas de trabajo etc., donde necesariamente se involucran diferentes cuerpos geométricos. Ahora bien, a pesar de la multitud de ejemplos y de la relevancia de la geometría y de sus conceptos, a nivel de la escuela se presentan dificultades; he tenido la experiencia de compartir el tema en el aula y reconozco que el respectivo aprendizaje de los estudiantes es superficial o es olvidado muy pronto después de ser evaluado.

Al respecto se han realizado varios trabajos de investigación que a continuación se presentan como antecedentes del proyecto de investigación, debido a que permitieron obtener referentes en las categorías de resolución de problemas, materiales concretos o relacionadas con el concepto de medida. Por tal motivo se presentan de manera diferenciada cada una de las categorías:

2.1.1 En Cuanto Al Área Y Perímetro

Alvares y Escorcía (2017) en su proyecto para el grado de maestría “El efecto de la resolución de problemas sobre la conservación de perímetro y área en estudiantes de grado octavo, Universidad del Norte, Barranquilla Colombia que tenía como propósito demostrar la resolución de problemas como estrategia para el desarrollo de procesos cognitivos y metacognitivos esenciales para el aprendizaje de las ciencias y específicamente de las matemáticas; contó con una población y muestra de cincuenta estudiantes de grado octavo de la institución Educativa Técnica Agropecuaria José Antonio Galán; la metodología se sustenta en el enfoque cuantitativo – explicativo, recolección de datos para probar hipótesis, el diseño de investigación es cuasi experimental. Acorde a los objetivos trazados en esta investigación fueron los resultados con la implementación de la resolución de problemas en clase, los estudiantes lograron la conservación de área y perímetro y el desarrollo significativo de los procesos cognitivos y metacognitivos.

Bedoya (2020), quien en su investigación en la I.E Leonardo Da Vinci del municipio de Manizales con fin de Mostrar las ventajas que ofrece la vinculación de habilidades de regulación metacognitiva en la resolución de problemas hacia el aprendizaje del concepto de área y volumen, en alumnos de grado noveno, se aplicó una unidad didáctica a 9 estudiantes de 27 pertenecientes al grado, las técnicas en recolección de información: instrumento de indagación, instrumento final y la entrevista semiestructurada, todas estas a través de pruebas; se concluye que los estudiantes con la aplicación de la unidad didáctica, la manipulación de materiales concretos, la planeación de resolución de problemas, y los procesos de regulación metacognitiva lograron el aprendizaje de los conceptos de área y volumen, identificar y solucionar problemas, generar procesos de autoevaluación y mejora del rendimiento académico para quienes participaron en la investigación.

Gonzales (2018) informe final de la investigación para optar por el título de Magister en educación, énfasis en Educación Matemáticas, Modalidad Profundización, “El Aprendizaje del Concepto de Área: Una Experiencia de Aula con Estudiantes de Grado Séptimo”, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia. El objetivo de la investigación: posibilitar la conceptualización del área por parte de los estudiantes de grado séptimo en una institución oficial; El desarrollo de la presente investigación se enmarca en un enfoque cualitativo, de tipo descriptivo e interpretativo. Conclusiones: se requiere de mayor esfuerzo por parte del docente para que los estudiantes despierten el interés en las actividades iniciales, pero se logró, incluso también que se olvidaran de las calificaciones, las tareas propuestas generaron la conceptualización de la superficie, área y la deducción de las fórmulas.

Molano (2019) en su investigación llevada a cabo en IERD Cacicazgo Cundinamarca con el propósito de Fortalecer habilidades de visualización en el desarrollo del pensamiento espacial mediante el cálculo de volúmenes; la investigación se efectuó a una población de 24 estudiantes rurales de grado noveno; el enfoque de investigación cualitativo con perspectiva fenomenológico interpretativo. Los instrumentos aplicados. El cuestionario, el diario de campo y la observación directa. Las conclusiones aportadas del

presente trabajo: la visualización es un recurso que permite formar el pensamiento espacial, mejora la intuición y la comprensión de los contenidos matemáticos y de otras ciencias, espacial, se hace necesario implementar en el aula situaciones de contexto incluyendo trabajos manipulativos, físicos, herramientas virtuales en la construcción del concepto de volumen, los estudiantes mostraron una actitud positiva en el desarrollo de los retos propuestos, , se generó motivación con el uso de material concreto a los grupos de trabajo.

2.1.2 Sobre el uso de material concreto

Ángeles (2017) en su tesis de maestría “El uso de material concreto en la resolución de problemas en los estudiantes de tercer grado de básica primaria del Centro Educativo Parroquial Diocesano El Buen Pastor- UGEL 02 Los Olivos” Lima Perú; el objetivo consistía en demostrar la efectividad del material concreto en la resolución de problemas en estudiantes de tercer grado de la mencionada localidad. La población de 66 estudiantes, dividido en un grupo control y un grupo experimental de grado tercero. El método de investigación es hipotético-deductivo y la investigación corresponde al diseño experimental; concluyo en que el uso de material concreto tiene un efecto directo y significativo en la resolución de problemas en los estudiantes de tercer grado de la primaria del Centro Educativo Diocesano El Buen Pastor.

Arias (2018) presentó a la universidad César Vallejo la tesis titulada “Uso de material concreto en el desarrollo de las capacidades del área de matemática en la Institución Educativa “Nuevo Perú” los Olivos”, el objetivo de la investigación fue determinar la influencia del material concreto en el desarrollo de las capacidades del área de matemáticas en la institución educativa “Nuevo Perú” los Olivos. El enfoque de la investigación cuantitativo, tipo básico de nivel descriptivo, diseño no experimental y correlacional de corte transversal. La población estuvo conformada por 75 estudiantes de la institución educativa “Nuevo Perú. Las variables de la presente investigación son Material Concreto y Capacidades Matemáticas. Se concluye que el material concreto influye positivamente en el desarrollo de capacidades matemáticas. El aporte de esta investigación a este proyecto como referente de investigación de tipo cuantitativo, el cual permite

demostrar la pertinencia y utilidad del material concreto en el desarrollo del pensamiento matemático y en este caso particular, en el pensamiento geométrico.

Campos (2020) en su tesis de maestría, investigación realizada en el Instituto Zorrilla de Valladolid España, con el objetivo de diseñar una propuesta didáctica válida para el aprendizaje de los contenidos en el currículo de un curso de secundaria, en efecto el grado 2° de E.S.O., utilizando como herramienta principal material manipulativo, se aplicó una unidad didáctica a 20 estudiantes; la metodología radica en la aplicación de la unidad didáctica y la explicación de los contenidos a través del materia manipulativo; se concluye que la metodología usada supone desafío tremado de emisiones, por la forma se adentra a los trascendentales conceptos, se cumplió con el objetivo de dar una propuesta didáctica con un recurso innovador como lo es el material manipulativo.

Salinas (2021) en su tesis para alcanzar el Grado de Maestro en Educación con mención en Docencia Universitaria y Gestión Educativa: “Materiales didácticos concretos y su influencia en el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes de educación secundaria”, el objetivo de este trabajo determinar la relación entre el uso de materiales didácticos específicos para resolver problemas matemáticos de estudiantes de primer año en la Instituciones Educativa. “Manuel Scorza – Quilca, provincia de Sihuas, Región Ancash. El tipo de investigación por su propósito aplicada, diseño cuasiexperimental con control y experimental; población conformada con 42 estudiantes. Conclusiones: Al analizar el uso de materiales didácticos específicos, se ha demostrado que en la educación básica de la institución educativa "Manuel Scorza - Quilca" en resolución de problemas cambiantes los estudiantes han mejorado su aprendizaje; el uso de materiales didácticos específicos afecta para resolución de problemas cambiantes, combinados y de emparejamiento. Recomendaciones: al ministerio de educación de la región, implementar un plan de uso de materiales didácticos específicos para mejorar el aprendizaje en resolución de problemas matemáticos en estudiantes de secundaria; al jefe del departamento de gestión educativa, capacitación docente donde se propongan metodologías que usen materiales didácticos concretos para mejorar la resolución de problemas en matemáticas; a los docentes de la

institución donde se desarrolle investigación, motivar a los estudiantes y poner en práctica el uso de materiales concretos para la resolución de problemas.

2.1.3 Con respecto a la resolución de problemas

Echeverri (2019) en su investigación “Las estrategias de resolución de problemas relacionadas con operaciones básicas de matemáticas en estudiantes de grado sexto grado de la institución educativa El Placer, del municipio Ansermanuevo, norte del Valle del Cauca. El objetivo: Caracterizar las estrategias de resolución de problemas con operaciones básicas de Estructuras Aditivas (adición y sustracción) en estudiantes de grado 6°. Investigación de tipo Cualitativo Descriptivo. Las variables de estudio: la resolución de problemas y las operaciones básicas matemáticas. Se concluye en esta investigación que el aplicar procedimientos de resolución de problemas para análisis y reflexión de Niveles de resolución de problemas relacionados con operaciones básicas de matemáticas en estudiantes de sexto grado para mejorar los resultados de aprendizaje, teniendo en cuenta experiencias de autores como Schoenfeld; existen diferencias de aprendizaje entre estudiantes de grado sexto debido a muchos factores no demostrables ahora; a varios estudiantes no se les observó cambios notables en el buen desarrollo de problemas matemáticos. La población investigada fueron 9 estudiantes de grado sexto. Esta investigación aporta a este proyecto el tener en cuenta la resolución de problemas como una estrategia en la didáctica desde la perspectiva del modelo Schoenfeld.

Devia (2019) en su tesis de Maestría “Formulación y Resolución de problemas aritméticos desde una perspectiva de pensamiento “Universidad Externado de Colombia - Bogotá; el objetivo: describir los cambios en la Formulación y Resolución de Problemas Aritméticos de los estudiantes de sexto grado del Colegio Brasilia Bosa J.T. a partir del diseño e implementación de una secuencia didáctica que desarrolle las habilidades de pensamiento. El enfoque de investigación es de corte cualitativo, de tipo investigación-acción. La población de estudio fueron los estudiantes de grado sexto del CBBJT. El tamaño de esta población es de 160 estudiantes, organizados en cuatro cursos por cada grado. La investigación concluye que la mayor variación en la comprobación y fase de análisis de problemas; el tiempo en la intervención pedagógica es factor determinante en

niveles de acierto en los estudiantes. El aporte de esta investigación a este proyecto como referencia positiva y darle una mayor comprensión al proceso investigativo

Joseph (2019) en su trabajo de grado de maestro en educación “Estrategia metodológica para desarrollar la competencia de resolución de problemas matemáticos en los estudiantes de secundaria de una institución privada de Lima Perú” de la Universidad san Ignacio de Loyola, Escuela de Posgrado de Lima Perú.; la muestra la conformaban tres docentes y doce estudiantes seleccionados por muestreo no probabilístico, quienes después entrevista a los docentes y prueba a los estudiantes se confirmó el problema. El tipo y diseño metodológico aplicado se ubica en el paradigma socio-critico interpretativo con enfoque cualitativo. Los resultados obtenidos en esta investigación permitieron identificar las categorías que influyen sobre el problema estudiado facilitando la modelación de una estrategia metodológica basada en fundamentos científicas y didácticos.

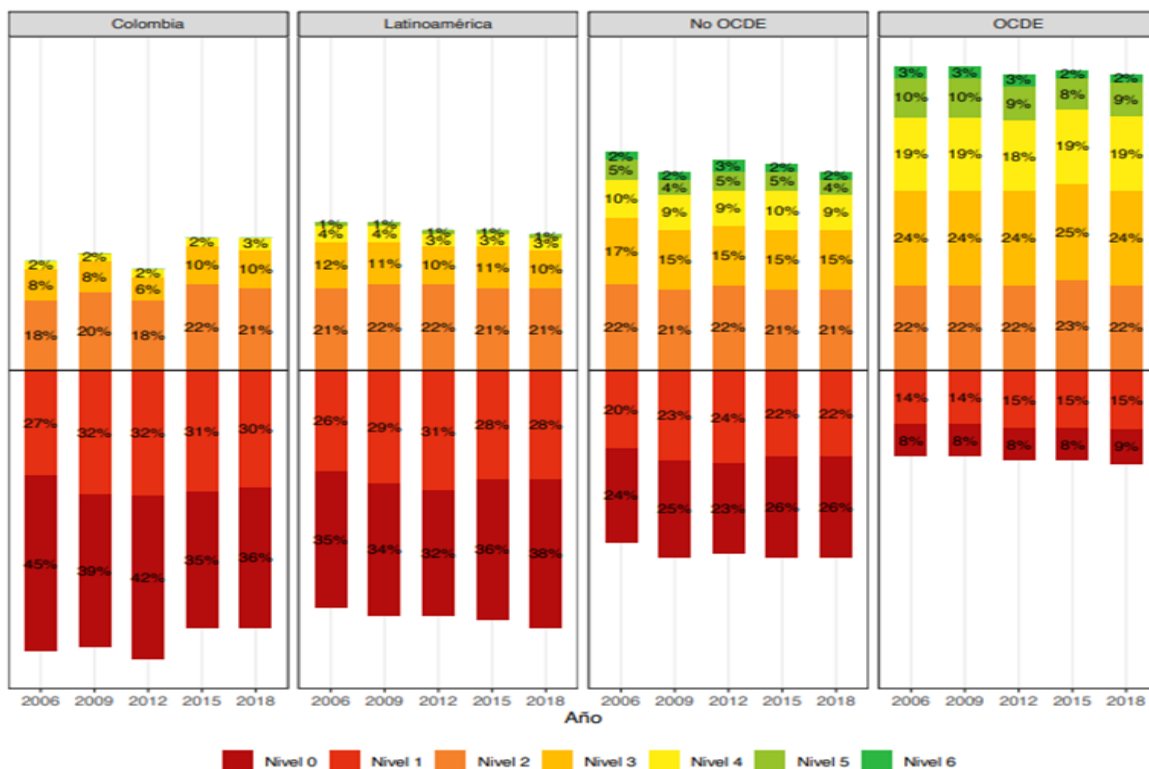
De acuerdo con la revisión de los antecedentes y al analizar las metodologías empleadas se puede reconocer que es necesario dinamizar los procesos de enseñanza del concepto de medida, el uso de materiales concretos y la resolución de problema relacionados con la matemática. Se hace necesario examinar los resultados de pruebas externas en el contexto internacional, nacional y local determinando la magnitud del problema.

En este sentido, la OCDE (organización para la cooperación y el desarrollo económico) la cual para promover políticas del bienestar económico y social a nivel internacional y mediante las pruebas PISA evalúan las competencias de lectura, matemáticas y ciencias. Los registros de los resultados de las pruebas PISA a partir del año 2009 se evidencia que un porcentaje bajo alcanza resultados significativos y la mayoría de estos se encuentra por debajo de la media o promedio general. OCDE (2010-2018)

En el contexto latinoamericano, los resultados de las pruebas PISA a partir del año 2006 en matemáticas corresponden en su mayoría a los niveles 0 y 1, siendo estos las más bajos y un porcentaje menor a los niveles 3 y 4 y, solo 1% se encuentra en el nivel 6 el cual es el más alto. (informe nacional de pruebas pisa 2018)

Los resultados particulares de Colombia desde el año 2006 de pruebas PISA se encuentran por debajo del promedio latinoamericano; para ilustrar resultados de los últimos años de las pruebas PISA de Colombia, Latinoamérica, países OCDE y no OCDE se presenta la siguiente gráfica: (informe nacional de pruebas pisa 2018).

Figuras 1 Porcentaje de estudiantes por niveles de desempeño en matemáticas según el grupo de referencia (Colombia, Latinoamérica, no OCDE y OCDE) Ices. 2018



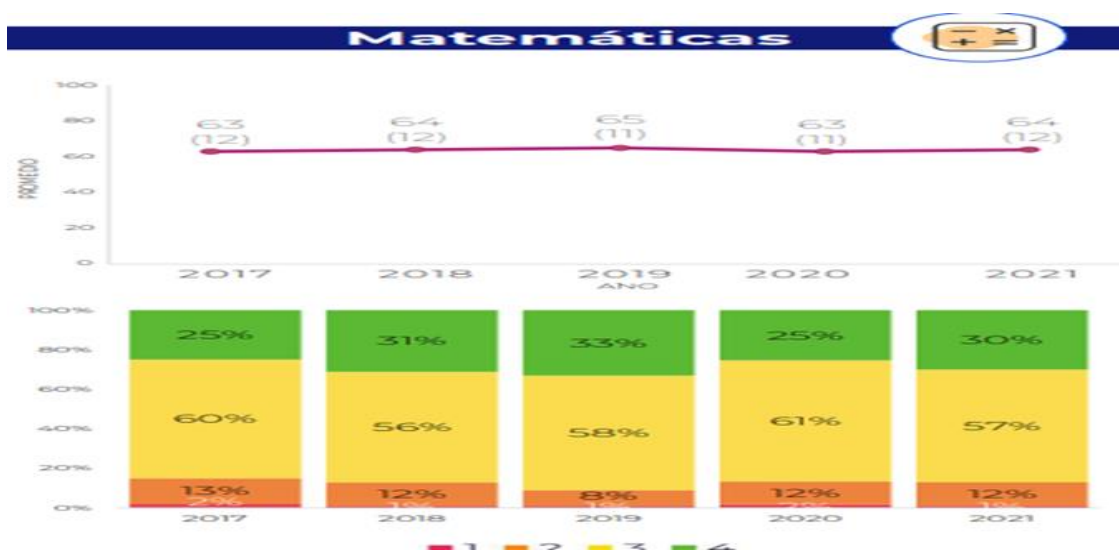
Fuente: Elaboración propia con la base de datos de PISA.

Fuente: Elaboración propia con la base de datos de PISA

Otras fuentes confirman estos resultados, por ejemplo: las Prueba Pisa en Colombia presenta secuencialmente bajos resultados, y mucho más en matemáticas (Forero, 2020). Revisando otro indicador, los resultados nacionales de las Pruebas Saber no presentan un índice satisfactorio, los resultados más bajos están en matemáticas para el Calendario A, en la zona rural para los años 2017 a 2019 según el Informe Nacional saber 11° 2019. Los datos en conjunto de los años 2017 a 2021 en el calendario B el 46,4 % se encuentran entre el nivel 1 y 2, en el calendario A estos niveles tienen una mínima cuantía porcentual (Informe Nacional Pruebas Saber 2021)

Los resultados del ICFES (El Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación) en el departamento de Bolívar se registran por debajo del promedio nacional en los años 2017-2021. Situación similar a los antecedentes aquí descritos como planteamiento del problema donde se menciona el bajo rendimiento académico en el área de matemáticas y de manera especial en la resolución de problemas de medida, desde una perspectiva global hasta en la IE San Francisco del municipio de Santa Rosa del Sur, tal como se presenta en los siguientes datos derivados de las pruebas estandarizadas:

Figuras 2 Resultados de promedio del Nivel de desempeño en las Pruebas Saber 11 calendario B 2017-2021



Fuente: Elaboración propia

Los resultados históricos de las pruebas ICFES en la IE Sn Francisco en los últimos años 2020-2022, muestran un gran porcentaje de respuestas incorrectas en los aprendizajes relacionados a solución de problemas, se representado en la siguiente gráfica los resultados 2020-2022

1

¹ Resultados históricos pruebas ICFES 11° IESF 2020-2022: https://drive.google.com/file/d/1yOxSP7PNzZhcdExNQHDYpvl28oHWrqMv/view?usp=share_link

Figuras 3 Porcentaje promedio de respuestas incorrectas en cada aprendizaje evaluado en matemática históricos resultados ICFES de la IESF 2020-2022 DANE: 213688001874

Aprendizaje	EE	Colombia	ETC
Frente a un problema que involucre información cuantitativa, plantea e implementa estrategias que lleven a soluciones adecuadas.	52%	52%	62%
Valida procedimientos y estrategias matemáticas utilizadas para dar solución a problemas.	51%	59%	68%
Comprende y transforma la información cuantitativa y esquemática presentada en distintos formatos	25%	39%	50%

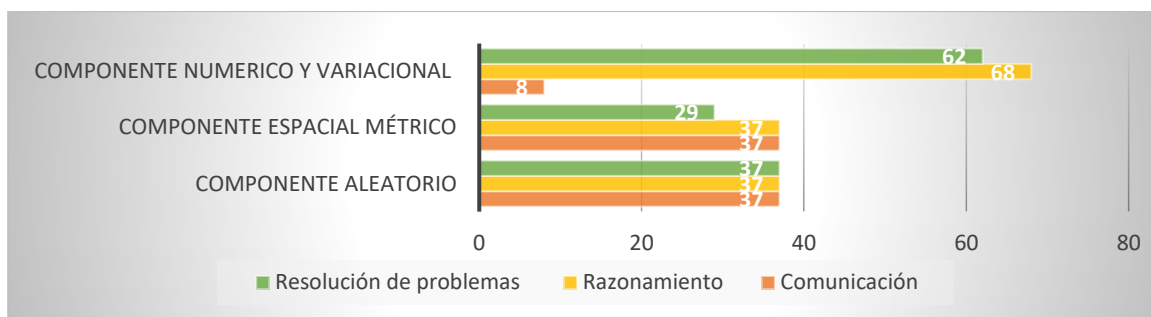
Fuente: Resultados históricos pruebas ICFES 11° IESF 2020-2022

Es recurrente que al evaluar conocimientos que el año anterior fueron “aprendidos” por los estudiantes, ellos manifiestan que no lo saben y muchas veces ni lo recuerdan haberlo visto; esto quiere decir que no lo aprendieron, tal vez lo entendieron y con esto fue suficiente para que el aprendizaje fuera evaluado positivamente; de igual manera suele suceder que estudiantes de grados superiores no resuelven situaciones de cálculo medidas área tiempo después de haber estudiado el tema en el aula.

En los Estándares Básicos de Competencias de matemáticas se involucran los pensamientos: métrico y sistemas de medidas y espacial y sistemas geométricos y en los DBA: “Conoce las fórmulas para calcular medidas áreas de superficie y volúmenes de cilindros y prismas. Usa representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales para solucionar problemas geométricos. Por ejemplo, calcula el volumen y el área superficial de un prisma triangular” (Ministerio de Educación Nacional República de Colombia, 2006). Teniendo en cuenta estos lineamientos, el plan de estudios en el área de matemática de la IESF contempla como objetivo el cálculo de área de figuras plana regulares y el cálculo de volúmenes de poliedros y cuerpos redondos involucrando así los procesos de medida.

Sumado a lo anterior, también en la Institución Educativa San Francisco del municipio de Santa Rosa del Sur de Bolívar, los estudiantes tienen dificultad con el manejo de medidas y procesos aritméticos relacionados con la misma según observación de actividades en el aula y fuera de ella. Los resultados recientes de las Pruebas Saber 2022 de grado octavo de la IESF en donde la competencia comunicación y resolución de problemas obtuvieron el indicador “muy difícil” siendo estos los más bajos en la escala de valores evaluativos y el componente métrico espacial con el promedio en porcentaje más bajo, información ilustrada en la siguiente figura²:

Figuras 4 Pruebas Avanzar IESF 2022



Fuente: *Resultados Pruebas Avanzar IESF 2022*

Identificada la situación problema, recogiendo los antecedentes, revisados los resultados de las pruebas en el ámbito internacional, nacional y local, lo que se evidencia en las actividades de aula, se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿De qué manera la manipulación de materiales concretos aporta a la resolución de problemas aplicables al concepto de medida de figuras planas y regulares en los estudiantes del grado octavo de Institución Educativa San Francisco del Municipio de Santa Rosa del Sur - Bolívar?

² Fuente: Resultados Pruebas Avanzar 2022

3 JUSTIFICACIÓN

La sociedad de hoy demanda la formación del pensamiento crítico, se considera necesario invertir en procesos educativos que aporten al desarrollo de habilidades para la resolución de problemas y atiendan necesidades del contexto, lo que esta investigación pretende desarrollar en los estudiantes, cobrando sentido la aplicación y transferencia de lo aprendido en el aula.

Además, aportar a la cualificación de los procesos de aprendizaje en el grupo o unidad de trabajo, al promover la resolución de problemas como estrategia didáctica en la matemática y en otros campos, alternativa que beneficia la comunidad docente de la IESF y por lo tanto mejorar los resultados de las diferentes pruebas entre ellas Avanzar e ICFES y para la sociedad educativa en general.

Adicional a lo anterior, es un estudio novedoso debido a que la resolución de problemas de medidas con la manipulación de material concreto, permite trabajar con situaciones auténticas, iniciando con los recursos que se cuenta en el entorno y contribuir a propuestas de carácter metodológico en el desarrollo del pensamiento métrico y de alguna manera contribuir en otras investigaciones en apoyo o fundamento, a estudios didácticos nacionales o internacionales, docentes y estudiantes que accedan a la información y apliquen la estrategia y a mejorar la actitud de los estudiantes frente al área de matemática dando apertura a la continuidad de esta investigación o de cualquiera de sus categorías.

Finalmente, para el proceso de formación como magíster, la realización de una investigación de aula resulta de gran utilidad en el contexto educativo por la posibilidad de reflexionar y monitorear nuevas posibilidades de abordar el aprendizaje con los estudiantes en contextos rurales y así acortar la brecha en los resultados de pruebas tanto nacionales como internacionales.

4 OBJETIVOS

4.1 OBJETIVO GENERAL

Describir el proceso de aprendizaje del concepto de medida de figuras planas y regulares en la resolución de problemas con la manipulación de material concreto, en estudiantes del grado octavo de Institución Educativa San Francisco del Municipio de Santa Rosa del Sur- Bolívar.

4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

- Reconocer los procesos asociados a la medida de figuras planas y regulares que poseen los estudiantes del grado octavo de Institución Educativa San Francisco del Municipio de Santa Rosa del Sur - Bolívar.
- Diseñar una unidad didáctica que involucre la resolución de problemas aplicables al concepto de medida de figuras planas y regulares mediante la manipulación de material concreto.
- Explorar el avance que alcanzan los estudiantes en el proceso de aprendizaje del concepto de medida de figuras planas y regulares en la resolución de problemas mediante la manipulación de material concreto, en estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa san Francisco del Municipio de Santa Rosa del Sur - Bolívar.

5 MARCO CONCEPTUAL

5.1 COMPETENCIA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La resolución de problemas es un concepto utilizado desde muchos campos de las ciencias y muy en especial en el educativo; a continuación, exponemos su definición, consideraciones de importancia dentro de la didáctica y algunos modelos en resolución de problemas.

Cuando se menciona resolución de problemas, generalmente llega a la mente la idea de matemáticas, una definición en este sentido que vale la pena considerar es: “resolver problemas es cuestionarse, encontrar, investigar y explorar soluciones, comprender que puede haber varias maneras de encontrar una respuesta y aplicar las matemáticas con éxito a las situaciones de la vida cotidiana” (Romero & Cano, 2010, p. 19).

La resolución de problemas ha sido de interés desde épocas remotas, en 320 Pappus de Alejandría publicó la famosa *colección matemática* con objetivo de adiestrar en resolución de problemas (Blanco, 1996); se considera de gran importancia en la didáctica actual, como estrategia didáctica no solo en matemáticas, también en otros campos de la ciencia; escenario para el desarrollo del pensamiento crítico, son muchos sus estudios realizados al respecto (Zona & Giraldo, 2017) y (Guzmán, 2007). En consecuencia, con las consideraciones anteriores. desarrollar la capacidad de resolver problemas se fortalece pensamiento crítico, uno de los objetivos de la Didáctica de las Ciencias, entre otras apreciaciones como: se reconoce el pensamiento crítico una habilidad (Laskey y Gibson, 1997), de los buenos pensadores, actitud (Paul, Elder y Bartell, 2003), una cualidad del pensamiento crítico (Tamayo, Zona y Loaiza, 2014, citados por Zona & Giraldo, 2017).

Otros aportes: la heurística en la enseñanza de las matemáticas por Miguel de Guzmán considera la resolución de problemas el “*poner en práctica el principio del aprendizaje activo y la inculturación*” (De Guzmán, 2007, p. 34), la resolución de problemas, una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas (Santos, 1992), el resolver problemas en el punto central de las matemáticas (Halamos, 1980), el desarrollo

de conceptos y teorías , se originan con el esfuerzo de resolver problemas (Kleiner, 1986, citados por (Santos, 1992).

El proceso general de formulación, tratamiento y resolución de problemas, proceso presente a lo largo del currículo matemático para Colombia, puede convertirse en el principal eje organizador del currículo institucional, donde se da sentido al quehacer matemático, es clave para el desarrollo del pensamiento matemático (Ministerio de Educación Nacional República de Colombia, 2006).

Los estándares básicos de competencias constituyen los parámetros de lo que todo niño, niña y joven debe saber y saber hacer para lograr el nivel de calidad esperado a su paso por el sistema educativo. Los cinco tipos de pensamientos descritos en los estándares: el pensamiento numérico, espacial, métrico o de medida, aleatorio o probabilístico y el variacional (Ministerio de Educación Nacional República de Colombia, 2006) y en el marco de este proyecto abordaremos el pensamiento métrico, espacial y numérico. Los cinco procesos generales de la actividad matemáticas: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar; y formular comparar y ejercitar procedimientos algorítmicos (Ministerio de Educación Nacional República de Colombia, 2006).

Se deduce por los aportes teóricos lo relevante e imprescindible de la resolución de problemas en el ámbito de las matemáticas, para el desarrollo del pensamiento crítico y por ende en las aplicaciones de la didáctica de las ciencias.

Modelos de resolución de problemas

El interés por plantear métodos o estrategias para la resolución de problemas como es el caso de Descartes en el siglo XVII en “Rulers for the Direction of Mind” y en el Discurso del Método 1888 Dewey propone un modelo en resolución de problemas con proceso secuencial:

1. Identificación de la situación problemática.
2. Definición precisa del problema.
3. Análisis medios-fines. Plan de solución.

4. Ejecución del plan.
5. Asunción de las consecuencias.
6. Evaluación de la solución. Supervisión. Generalización (Blanco, 1996)

El método de George Pólya, para la resolución de problemas consiste a *grosso modo* en cuatro pasos:

- Comprender el problema: donde se consideran los datos, la pregunta del problema, surgen en este momento interrogantes por parte del docente y de los estudiantes.
- Concebir un plan: se relaciona el problema con otros ya solucionados o busca una ruta de solución.
- Ejecutar el plan: después de haber estructurado el plan se ejecuta.
- Examinar la solución obtenida: se verifica el resultado y se reflexiona sobre la lógica llevada a cabo.

Sugiere también ayudar al alumno, hacerle preguntas en cada uno de los pasos y proponerles indicios del camino a seguir (Pólya, 1965).

El método para la resolución de problemas de Alan Schoenfeld (1985) descubre más que la necesidad de las heurísticas, conocer otros factores o dimensiones como son: dimensión cognitiva : conocimientos previos del estudiante, los que usa en el contexto y su relación con la matemática, conocimiento informal o inductivo acerca del problema, hechos, definiciones, conceptos que son evocados al enfrentar el problema, conocimientos relacionado con las percepciones de los estudiantes sobre reglas para resolver el problema. Dimensión metacognitiva: de monitoreo y control, permite al estudiante ser consciente del proceso de resolución de problemas; Schoenfeld identifica tres categorías metacognitivas.

- a. Al conocimiento del propio proceso de pensar el proceso para la solución del problema
- b. El control y la regulación: como el estudiante tiene en cuenta el proceso y las observaciones al resolver un problema.

- c. Creencias (estado) emociones (reacciones) Ideas matemáticas relacionadas a la resolución del problema.

Heurísticas: estrategias en relación al problema. A diferencia de la heurística de Pólya, Schoenfeld (1985) propone que para cada tipo de problema se hace necesaria una particular heurística.

Control, se refiere que cada estudiante controla su trabajo, permite tomar la opción o camino que considere correcto, cada una de las heurísticas posibles tienen su propio camino, se tenga la capacidad de monitorear y evaluar su propio proceso.

Sistema de creencias: la creencia matemáticas incide en la forma como docentes y estudiantes enfrenten la resolución de problemas, cuando el estudiante toma un problema si lo abandona o no, definen el comportamiento frente al problema, la creencia condiciona aspectos del aprendizaje de las matemáticas, hacen parte de la forma como conciben la matemática; algunas creencias que plantea Schoenfeld (1992): solo hay una respuesta correcta en los problemas matemáticos, solo hay una forma correcta en la resolución del problema es aquella que el profesor propone, los estudiantes memorizan y aplican sin esperar a entender matemáticas, la matemática es una actividad solitaria y no se da en grupos, los estudiantes si han estudiado resuelven problemas en corto tiempo. Lo que se aprende en la escuela de matemáticas no tiene que ver con la realidad; las creencias de los profesores para Schoenfeld están condicionadas a la forma como ellos fueron enseñados; se agrupan en tres categorías: lo que es posible aprender según la edad; lo que es deseable aprender, lo que deben aprender se pregunta por el mejor método para enseñar matemáticas.

El modelo en resolución de problemas de Miguel de Guzmán (De Guzmán, 2007), menciona la existencia de una fuerte corriente en educación matemática la cual afirma que el aprendizaje de esta ciencia explorando construcciones en sí mismas, sino con el contacto de situaciones reales; esto está en consonancia con lo anteriormente referido; en su esquema concreto a trabajar plantea de forma general:

- Familiarización con el problema.

- Búsqueda de estrategias posibles.
- Selección y ejecución de la estrategia.
- Reflexión sobre el proceso llevado a cabo.

Es evidente que el método de Guzmán tiene cierta afinidad con el de Pólya en relación al proceso; en su primera fase refiere a la comprensión de los datos o enunciado y adaptarlo a su propio lenguaje y luego analizar lo que pide el problema. La segunda fase, búsqueda de estrategias, se exige acciones o estrategias heurísticas como.: exploraciones, ensayo y error, analogías, esquemas, diagramas, organización y codificación, razonamientos, reducción al absurdo, técnicas. La tercera, desarrollo de estrategias, se decide por el camino a seguir, revisamos lo que hemos obtenido. Por último, evaluamos el proceso, reflexionamos sobre el mismo y se analizará qué otros posibles resultados tienen el problema.

Después de revisar los diferentes modelos de resolución de problemas se considera que el modelo de De Guzmán (1990) es el apropiado para abordar problemas relacionados con el concepto medida dada las posibilidades que ofrece el material concreto en el primer aspecto relacionado con la familiarización del problema que favorecerá la búsqueda de estrategias para resolver los problemas que se les planteen.

5.2 PROBLEMAS RELACIONADOS CON EL CONCEPTO DE MEDIDA DE FIGURAS PLANAS Y REGULARES

El concepto de medida es tan antiguo ya que los primeros conocimientos geométricos surgen por necesidad de supervivencia en la época nómada en cuanto se identifican o se ubican zonas que abundan de alimentos, construcción de cavernas, ubicación espacial de zonas de cultivo o teniendo como punto de referencia el Sol o las estrellas (Pinasco et al 2009). Se demuestran los usos en la remota cultura mesopotámica en donde se desenterraron tablillas procedentes de Susa (cerca de Babilonia), los hallazgos revelaban la comparación, el área y cuadrados de los lados de los polígonos regulares. En antiguo Egipto, viejos manuscritos como el “Papiro de Rhind” al parecer escrito en el siglo XVI. contiene reglas y problemas como el área de figuras planas, el triángulo isósceles; conocían el “Teorema de Pitágoras” desde mucho antes de Pitágoras, entre muchas otras

dentro de la historia de la geometría. En la cultura griega, Euclides escribe sobre área y figuras planas en los libros I a V y en el Libro XIII contiene aportes de la geometría bidimensional y tridimensional (Cortez, 2012).

El astrónomo y matemático griego Eudoxo de Cnido (408- 335 a. C) comprobó que el volumen de la pirámide es la tercera parte del volumen de un prisma de la misma base y altura y que el volumen del cono a tercera parte del volumen del cilindro. EL notable matemático Arquímedes (287-212 a. C.) con descubrimientos de cálculo integral, estudios de áreas de figuras planas y volúmenes, demostró que el volumen de una esfera es dos tercios el volumen del cilindro con el mismo radio, demostró que el área del círculo es igual a π multiplicado por el cuadrado del radio del círculo, propuso fórmulas para volúmenes.

Es evidente la existencia de dificultad en el aprendizaje del concepto de medida en figuras planas y regulares cuando después de haber aprobado logros o competencias referentes a la temática, tiempo después muchos estudiantes no logran dar solución a situaciones que involucran este aprendizaje; muchas investigaciones han demostrado tal dificultad incluso en colegios de gran prestigio, estas también persisten en algunos casos en estudiantes universitarios e incluso en docentes Fandiño y D'Amore (2009). En investigaciones consultadas para obtener el título de doctor en “Ciencias Matemáticas” Salvador, (1997), se revelan inconsistencias en el manejo del concepto de medidas y otras, desde la primaria a la universidad donde todos ellas coinciden en que los alumnos desarrollan de la medida del área una concepción numérica; en otras se reduce a la fórmula del ancho por largo, como un número que se puede calcular, no se aplica el concepto de o areaa para indicar el tamaño de una región. En el aprendizaje del concepto de superficie prevalecen obstáculos cognitivos como lo relativo al cambio de dimensiones, la transición de lo unidimensional a lo bidimensional con el manejo conceptual de sus respectivas unidades (Rogalski 1979 citado por Fandiño y D'Amore 2009. Se evidencia contraste de medidas directas de superficie como el geoplano y la cuadrícula con las medidas indirectas aquellas que usan formulas o medidas longitudinales expuestas en el discurso de Esperanza (1987) Fandiño y D'Amore (2009).

En este sentido Olmo (1993) hace aportes sobre la adquisición del concepto de medida, entendida como cualidad de los objetos, para el caso del área es la medida de la superficie de los objetos. Algunas indicaciones del mismo autor que considera la bidimensionalidad del área como un proceso largo y complejo que requiere un especial tratamiento didáctico que incluye la percepción, comparación, estimación, medida y aritmetización.

La percepción. El percibir una cualidad es aislarla de otras cualidades del objeto, acción previa a la medición de magnitudes, propone para el desarrollo de la percepción del área, recubrir objetos Del Olmo (1993). Considerar la percepción dentro de la proyección didáctica implica proponer actividades que estimulen el alcance perceptivo para fin de la medición e incluso de la estimación.

La comparación. Comparar medidas incluye determinar la diferencia o semejanza en relación con la magnitud; esta implica también lo dimensional o longitudinal de los objetos a comparar. Se puede comparar a través de la medición o de la estimación.

La medida. Se concibe en Del Olmo (1993) como una necesidad para determinar la comparación, contribuye a la fluidez de la comunicación con el uso de términos cuantitativos, de gran importancia en muchas actividades de la vida cotidiana y en muchas profesiones. Propone al respecto de la medición del área, “recubrir el plano”, pavimentar con polígonos regulares, teselaciones; es posible este pavimento del plano con triángulos, cuadrados, hexágono, octágono y decágono como también con figuras irregulares incluyendo polígonos curvilíneos; el grado de precisión de la medida en cuanto al manejo adecuado del instrumento de medida, iniciar la enseñanza con unidades de medidas no estándar, recurrir a aquellas que el medio nos proporciona como piezas de papel o madera etc. después el uso de medidas legales como el S.I. (Sistema internacional). Zapata y Cano, (2008) consideran para la construcción, el manejo y comprensión de magnitudes el proceso de medir como eje regulador. El “cubrir” o “pavimentar” con polígonos debe ser una actividad de estimular el interés en el estudiante, pero sobre todo para la construcción del concepto de área.

La aritmetización del área. En áreas de superficies planas expresadas como el producto de dos longitudes “ $S = L \times L$ ”, tratamiento bidimensional, pasar de longitudes a superficies con la aplicación de fórmulas en Del Olmo, (1993). La comprensión y manejo del concepto de área en los estudiantes posibilita manejo hábil de fórmulas, sin ser memorizadas solo quizás por deducción de las mismas.

La estimación. Proceso en que se obtiene la medida in instrumento de medida, se da un juicio subjetivo de la dimensión de los objetos, magnitud realizada a ojo, debe ser una capacidad entrenada a los estudiantes, esta actividad generalmente se omite en el aula por diferentes causas, se propone la estimación del área y la estimación de longitudes Del Olmo, (1993). Otra consideración al respecto: el estimar es de gran importancia para acceder al a complejas técnicas de medición y a ser conscientes del tamaño de las unidades (Zapata y Cano, (2008). La estimación además de ser parte de un proceso de enseñanza base para el aprendizaje y manejo de dimensiones, se necesita para tener una idea del tamaño de los objetos dentro del conocimiento personal, permite acercarnos a la puntualidad de la información que se suministra en la comunicación con respecto a la dimensionalidad.

En este mismo sentido, el análisis de los antecedentes revisados coinciden en considerar tres etapas fundamentales para el aprendizaje de medidas, en especial medidas de área : *conservación del área*, el área de una figura se conserva en cuanto sea desplace; *unidad de medida*, los estudiantes deben desarrollar el concepto de unidad de medida de forma individual utilizando variadas manera, iniciando con medidas no estándar o no convenciones, estas últimas se deben usar cuando el estudiante haya tenido suficiente experiencia con variedad de medidas incluso después del manejo de fórmulas; cálculo del área, método que según las investigaciones ha sido el más enseñado a los alumnos, el cual va acompañado de errores, limita la comprensión, debe ser utilizado después que lo estudiante tenga construido el concepto de área.

El reconocimiento de las indicaciones para la enseñanza y las supuestas causas en la dificultad del manejo del concepto de medida, aporta a la orientación para la construcción de unidades didácticas, no solamente en el campo geométrico espacial sino también en

otros campos de las matemáticas, además de ser parte teórica en la construcción y desenlace de este proyecto.

En los lineamientos curriculares para Colombia se declara la necesidad ineludible de recuperar el sentido especial inductivo en toda la matemática, no solo en geometría, agrega además que, según Gardner en la teoría de Inteligencias Múltiples, la inteligencia espacial, plantea que el pensamiento espacial es esencial para el pensamiento científico, su uso para representar y manipular la información, en el aprendizaje y la resolución de problemas de diferentes índoles y disciplinas. El texto menciona las afirmaciones de Lappan y Winter (1998) cuando afirman que la mayor parte de experiencias matemáticas que se brindan a los estudiantes son bidimensionales a pesar de que vivimos en un mundo tridimensional, refiere a libros y figuras bidimensionales para la representación de la matemática y a los objetos tridimensionales e incluye a la televisión que presenta bidimensionalmente la realidad en matemáticas (1998).

La historia revela el uso del cálculo geométrico desde la antigüedad; en la actualidad este conocimiento es necesidad humana y de uso cotidiano, es componente del currículo colombiano. En los estándares básicos de competencia, el pensamiento espacial es tenido en cuenta desde el grado primero a noveno, un proceso de aprendizaje desde un nivel mínimo a mayor complejidad, desde la apreciación de atributos de los objetos bidimensionales y tridimensionales hasta la aplicación de técnicas e instrumentos para solución de situaciones en las mismas mencionadas magnitudes. A pesar de lo expuesto en los estándares con la idea de guiar los procesos pedagógicos y didácticos, la realidad en gran parte revela inconsistencias.

5.3 MANIPULACIÓN DE MATERIALES CONCRETOS

La manipulación de material concreto como elemento que aporta a la resolución de problemas de medida, acción que se vincularía en lo conocido en educación como la corriente Educación Matemática Realista (EMR), concepto que tiene sus inicios en Holanda, surge por la necesidad de reformar la enseñanza de la matemática, acción a fin de superar al enfoque mecanicista de la enseñanza de la aritmética, su fundador Hans Freudenthal, matemático y especialista en didáctica (Bressan et al, 2016).

La idea central de la EMR es que la matemática debe estar conectada con la realidad, de acuerdo con lo propuesto por Freudenthal (1991, citado por Bressan et al, 2016) cuando afirma que “la imagen de la matemática se enmarca en la imagen de mundo, la imagen del matemático dentro de la del hombre y la imagen de la enseñanza de las matemáticas dentro de la sociedad” (p.32). Para Freudenthal es importante el contacto del alumno con el saber matemático, lo considera como actividad estructurante y organizadora de matematización, “matematizar es organizar la realidad con medios matemáticos... incluida la matemática misma”(Freudenthal, 1973.p. 44); el proceso de matematizar incluye acciones como :reconocer e identificar características comunes y especiales, abreviar, buscar atajos, reflexionar acerca de la actividad matemática son algunas de las acciones a las que Freudenthal define como matematizar (Bressan A, et al., 2016). Desde estas percepciones matematizar es operar matemáticamente en el aula con objetos reales y cercanos a la propia realidad del estudiante.

La Educación Matemática Realista EMR se fundamenta en principios: *principio de actividad*, al pensar la matemática como un acto humano en que todas las personas puedan apropiarse de ella y acceder mediante el hacer matemática, se hace un proceso contrario cuando se enseñan resultados de una actividad en vez de enseñar la actividad misma (hecho que caracteriza como inversión anti didáctica)” (Freudenthal, 1991, citado por Bressan et al, 2005). Freudenthal como matemático-investigador reconoce que el énfasis no está en los aprendizajes como: algoritmos, algebra, abstracciones, no en las formas y estructuras, sino en los procesos de logaritmación, actividades de algebrizar, acciones de abstraer, en el formalizar y estructurar (Freudenthal, 1991, citado por Bressan et al, 2005). A partir de este principio se concreta la enseñanza de la matemática como un acto de proponer actividades y el aprendizaje el resultado de crear del hacer matemáticas, requiere del desarrollo de destrezas a través de acción.

Principio de realidad, en el proceso de matematización, partir de contextos reales, de situaciones problemáticas realistas, dando sentido, dentro de una concepción manejable para el estudiante, real desde sus experiencias de sentido común y no solo en el campo tangible sino también en el mental o abstracto. La realidad en este sentido refiere de lo

perceptible a los sentidos, pero también de los manejable, comprensible e intangible por los estudiantes. (Bressan et al. 2005)

Principio de reinención guiada, requiere de modelos que surgen o emergen de las situaciones o problemas que el docente en su rol de guía plantea, el estudiante en su matematización descubre y da solución. En consideración de Freudenthal, la matemática es forma de sentido común pero más organizada. Para transformarlo en matemática genuina y para progresar, el sentido común debe ser sistematizado y organizado. Las experiencias del sentido común cristalizan en reglas (por ejemplo, la conmutatividad de la suma) y estas reglas se transforman de nuevo en sentido común, pero a un nivel más alto, constituyendo así la base para una matemática de orden aún mayor, una jerarquía tremenda, construida gracias a un notable Inter juego de fuerzas (Bressan et al, 2005). Bajo este principio de la EMR el docente debe diseñar y guiar las actividades con el fin de que los estudiantes descubran, reinventen los conocimientos matemáticos, abriendo la posibilidad ser protagonistas de su aprendizaje y con esto despertar interés por avanzar.

Principio de niveles, la matemática como acto social permite avanzar en niveles de aprendizaje, producto de la interacción y reflexión colectiva maestro-alumno, alumno-alumno; el nivel situacional, donde el estudiante usa conocimientos informales, experiencias, sentido común, conocimientos previos. “Nivel referencial”, el estudiante elabora representaciones o modelos concretos, descripciones, procedimientos, emergen modelos para atender situaciones. “Nivel general”, se enfatiza en la reflexión de modelos, estrategias utilizadas superando el contexto original y establecer modelos para aplicación en situaciones análogas. “Nivel formal”, se focaliza en el uso comprensivo de conceptos procedimientos entre otras nociones matemáticas (Docentes de Matemática la Libertad, 2020). En este principio de niveles se comprende el avance trascendente del conocimiento matemático desde lo que el estudiante puede saber cómo conocimiento previo, seguido de una evolución paulatina, es recomendable el papel del profesor activo en el sentido de cuestionar, provocar al grupo la reflexión, el debate y la participación.

Principio de interacción, se considera una actividad social el aprendizaje de las matemáticas en la EMR, abundan las discusiones sobre interpretaciones, formas de

procedimientos y adecuación en la solución de problemas o de deficiencias en la solución de los mismos, la interacción propende a la reflexión y al ascenso de capacidades más elevadas. La interacción tiende a mantener unidad en la clase, la organización, el trabajo cooperativo en grupos heterogéneos por sus diferentes niveles de comprensión, motivados a dar solución a situaciones problemáticas seleccionadas (Freudenthal, 1991, citado por Bressan, 2005). Desde este principio se reconoce del aprendizaje por interacción como una forma natural de aprender, de aprender con el otro, donde se activan voluntariamente las potencialidades del estudiante, situación alejada a una simple y real transmisión de información.

Principio de interconexión, la EMR no hace referencia de distinción de ejes curriculares, lo cual abre la posibilidad a diferentes modos de matematizar. “Lo que realmente importa es saber cómo encaja el tema en todo el cuerpo de la enseñanza matemática, si se puede o no integrar con todo, o si es tan estafalario o aislado que, finalmente, no dejaría ninguna huella en la educación” (Freudenthal, 1982, citado por Bressan, 2005). La interconexión como la relación con otras áreas donde el profesor propone, busca e investiga distintos contextos ricos, evitando el uso aislado de temas y proponiendo un amplio rango de comprensiones y herramientas matemáticas; la interconexión de esta disciplina con otra exige buenos problemas, aquellos que son accesibles al conjunto de estudiantes, ofrecen variados niveles de desafío, permiten diferentes estrategias de solución y estimular la creatividad de los estudiantes (Docentes de Matemática la Libertad, 2020). Al tener en cuenta este principio se abre la posibilidad de transversalidad de áreas, por ejemplo, geometría con artística en la construcción de figuras planas o construcción de poliedros para la aplicación del conocimiento geométrico de área y volumen.

Las herramientas conceptuales de la ERM. La primera herramienta es partir de contextos y situaciones problemáticas realistas, este concepto no es el de realismo común, es el que está en concordancia con las ideas previas del estudiante y su capacidad de comprender este contexto, definido como:

Un contexto es un evento, una proposición o situación derivada de la realidad, la cual es significativa para los alumnos o la pueden imaginar y conduce a usar métodos matemáticos desde su propia experiencia. Provee significado concreto y apoyo para las relaciones y operaciones relevantes de la matemática. Las situaciones podrían ser tomadas desde experiencias cotidianas como los recorridos del colectivo o las compras y el manejo del dinero. Además de los contextos derivados de la vida experiencia diaria, los contextos pueden encontrarse en la matemática misma – el mundo de problemas con números puros y las relaciones numéricas, tales como el contexto de los números primos (Van den Heuvel-Panhuizen, 1994, citado por Bressan, 2016, p.243).

Algunas de las características de contextos realista desde la concepción freudenthaliana

Son puntos de partida del proceso de enseñanza aprendizaje; promueven el uso de sentido común y movilizan los conocimientos informales de los alumnos y la creación de modelos (matematización horizontal) resultan interesantes para el estudiante; son abiertos (admiten estrategias variadas y/o varias soluciones) se constituyen en objetos de trabajo; se usan en profundidad (Docentes de Matemática la Libertad, 2020). En consecuencia el proceso de enseñanza parte de lo que el estudiante posee para el desarrollo de sus potencialidades, correspondiente con lo que algunos teóricos denominan evolución conceptual y difiere de modelos educativos tradicionales basados en transmisión o depósito información.

Se propone como segunda herramienta; hacer uso de modelos que surjan de actividad matemática de los alumnos; un modelo es el medio de idealizar una realidad para ser tratada matemáticamente; los modelos deben estar situados dentro de un contexto realista, flexibles para aplicación en avanzados niveles en general teniendo en cuenta la característica del grupo de estudiantes.” La fenomenología didáctica” para Freudenthal (1983) es un método que investiga primero el uso de las diversas manifestaciones de objetos matemáticos en la realidad, como fenómeno de la vida real referidos en un lenguaje cotidiano como pueden ser: fracciones, proporciones, ángulos; al exponer ejemplos de modelos tenemos: esquemas, diagramas, algoritmos o materiales manipulables (Docentes

de Matemática la Libertad, 2020). El hacer uso de modelos que surjan de la actividad matemática de los estudiantes implica, reinventar o reconstruir modelos conjuntamente en el aula, tiende a un aprendizaje por descubrimiento, opuesto a transmitir o copiar productos acabados.

Otra herramienta conceptual: reconocer el papel docente como guía y organizador de la interacción, con el fin de que los estudiantes sigan los mismos pasos que han utilizado los matemáticos en la producción del conocimiento y se reinventen dicho saber. Se concluye el rol de docente mediador entre alumno-alumno, entre el alumno y el conocimiento formal (Docentes de Matemática la Libertad, 2020). En esta herramienta conceptual de la EMR responsabiliza al docente del diseño y construcción de actividades que simulen al grupo de científicos en la construcción del conocimiento.

Como ultima herramienta: el aprendizaje de las matemáticas es considerado actividad social; las interacciones sociales verticales docente-estudiante y las interacciones horizontales que dan lugar a la reflexión y por ende al avance de niveles de conocimiento; se debe tener en cuenta la formación de grupos heterogéneos donde cada individuo siga sus propios senderos en continuidad con los saberes previos. (Docentes de Matemática la Libertad, 2020).

La actividad matemática considerada como una actividad social requiere que sea un espacio de interacción, el debate, exposición de los puntos de vista, se hace real el aprender con otros, la posibilidad de desarrollar las capacidades la argumentación, del disfrute y la satisfacción de participar; corresponde con la definición etimológica de educar como el sacar de, conducir.

Desde una EMR se promueve reemplazar la visión del alumno como receptor pasivo de una matemática prefabricada, asumir la actividad primordial de matematizar y la del docente establecer la acción didáctica, lo cual en este sentido es de organizar en vertical (maestro-alumno) y horizontal (alumno-alumno).

Otros aportes que fortalecen los planteamientos anteriores: Considerar la matemática como acto humano, lo cual debe tener relación con la realidad, se trata

de resolver problemas, de proponerlos dentro de los mismos contextos (Riveros, et al, 2020); Como una necesidad de los educadores matemáticos, nueva propuesta, la posibilidad de utilizar conocimientos matemáticos escolares en contextos reales para la solución de problemas (Henaó & Vanegas, 2012); empoderan a los estudiantes en el uso y comprensión para resolver problemas Godino, (2012), la importancia de usar modelos dentro de esta teoría, triplican los aprendizajes Van de Heuvel-Panhuizen & Drijckers (2014), se va progresando en los niveles de comprensión hasta el de formación matemática (Freudenthal, 1973 citados en Riveros, et al,2020)

Los materiales didácticos concretos, definidos como “aquel que apoya el aprendizaje, promoviendo la creación, imaginación, manipulación y construcción”. Ministerio de educación del Perú (2014). Al reflexionar acerca de lo mucho que hemos aprendido con el contacto directo, con la vivencia, con el vivir la realidad, aprendizajes de toda índole, calcular, aproximar, medir etc. aprendizajes sin que se sienta tanto esfuerzo, de forma natural; en este sentido, la construcción y manipulación de materiales concretos en los entornos educacionales están lógicamente en coherencia con las teorías del aprendizaje como la “teoría contextual” de Lev Vygotsky, destacando la influencia del contexto como determinante en el desarrollo del niño Sepúlveda y cornejo, (2013). En referencia a los materiales didácticos se clasifican en material didáctico estructurado y material didáctico no estructurado (Ogalde 2008 citado por Vásquez 2019), expresa que los materiales didácticos educativos se clasifican en: material educativo estructurado y material educativo no estructurado, siendo los primeros manipulables, pensados y fabricados para la enseñanza y aprendizaje, por ejemplo, los bloques lógicos, ábacos etc. Los segundos corresponde a todo elemento u objeto del medio natural con carácter tangible como: cartones, botellas etc. que se puede utilizar en actividades educativas previamente adecuadas y diseñadas con el uso del material.

Al consultar distintas fuentes sobre el tema, se evidencia que no existe unanimidad en el término, se le consideran medios o instrumentos, materiales curriculares, artefactos, pero con la convergencia en su fin, mejorar la construcción del conocimiento (Moreno, 2004).

Una de las características comunes del material concreto es lo manipulable, permitiendo el contacto directo con el objeto material y hacerlo instrumento de aprendizaje, es transferir lo abstracto de la matemática al campo real, lo cual debe tener relación con la realidad, se trata de resolver problemas, de proponerlos dentro de los mismos contextos (Riveros, et al, 2020). Para darle sentido a las matemáticas lo cual los estudiantes muchas veces protestan: “eso para que” de algunos procesos matemáticos dados en el aula. Como una necesidad de los educadores matemáticos, nueva propuesta, la posibilidad de trabajar los contenidos matemáticos escolares en contextos reales para la solución de problemas (Henaó y Vanegas, 2012).

Otros teóricos destacan la importancia de la EMR ya que empodera a los estudiantes en el uso y comprensión para resolver problemas Godino, (2012), la importancia de usar modelos dentro de esta teoría, triplican los aprendizajes Van de Heuvel-Panhuizen & Drijckers (2014), se va progresando en los niveles de comprensión hasta el de formación matemática (Freudenthal, 1973 citados en Riveros, et al,2020).

6 METODOLOGÍA

6.1 ENFOQUE Y ALCANCE

El enfoque en la propuesta de investigación es de tipo cualitativo por que predominan características tales como: La investigación desde la ruta cualitativa se enfoca en comprender los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en su ambiente natural y en relación con el contexto. Seleccionas el enfoque cualitativo cuando tu propósito es examinar la forma en que ciertos individuos perciben y experimentan fenómenos que los rodean, profundizando en sus puntos de vista, interpretaciones y significados (Lindlof y Taylor, 2018; Punch, 2014; Lichtman, 2013; Morse, 2012, Encyclopedia of Educational Psychology, 2008 citado por Hernández Sampieri, 2018). Desde otra perspectiva: “En sentido amplio, puede definirse la metodología cualitativa como la investigación que produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas, y la conducta observable” (Castaño & Quecedo, 2002, p.7).

Esta investigación presenta las características anteriores, por lo tanto, describe la manera como los estudiantes resuelven problemas de medición, aplicados a figuras planas regulares con el uso de material concreto en diversas actividades. Este trabajo investigativo no busca probar una tesis, por el contrario, describe la forma natural cómo los estudiantes resuelven situaciones. El alcance de esta investigación es descriptivo, producto de la observación del fenómeno; lo descrito se deriva del seguimiento al proceso de cada una de actividades matemáticas desarrollada por los estudiantes en la resolución de problemas con la manipulación de material concreto desde la exploración de los saberes previos hasta la aplicación de los aprendizajes.

6.2 POBLACIÓN Y CONTEXTO

El presente proyecto de investigación se lleva a cabo en la Institución Educativa de San Francisco de carácter oficial, zona rural del municipio de Santa Rosa del Sur del departamento de Bolívar; la institución la conforman 9 sedes con jornada de la mañana y atención a los niveles de preescolar a la media vocacional; su nivel socioeconómico corresponde a los estratos 1 y 2, la población es de 308 estudiantes. La sede principal cuenta con 186 estudiantes de los cuales 84 estudiantes pertenecen a una residencia

estudiantil administrada por los directivos de la institución y cofinanciada por la Secretaría de Educación de Bolívar. Los estudiantes de la residencia estudiantil provienen de diferentes lugares del departamento y gran parte de la zona minera de oro de la Serranía de San Lucas, población con característica particular de “población flotante” procedente de muchos lugares del país, los demás estudiantes de esta sede viven en los alrededores de la sede.

6.3 UNIDAD DE TRABAJO

La unidad de trabajo corresponde a estudiantes de grado 8° la cual esa formada en su totalidad por 17 estudiantes, sus edades oscilan entre 12 y 16 años pertenecientes a la Institución Educativa San Francisco; se decide aplicar el análisis a 11 estudiantes 3 hombres y ocho mujeres, Algunas de sus características particulares son: la mayoría se desplazan varios kilómetros desde casa diariamente, 6 estudiantes viven en la residencia estudiantil, sus familias viven en otros municipios muy distantes a la Institución Educativa por tanto estos no tiene frecuente comunicación con ellos, los desplazamientos para llegar a sus hogares por carreteras destapadas, a pie por zonas selváticas o por vía fluvial, la actividad económica del núcleo familiar es la extracción del oro con una característica común de estas regiones, el conflicto armado de grupos al margen de la ley que disputan estos territorios

6.4 CONSIDERACIONES ÉTICAS

La población focalizada en esta propuesta pertenece en su mayoría a familias vulnerables, menores de edad, el uso de datos personales de los estudiantes se da bajo el debido consentimiento informado de sus padres y firmado en el formato adjunta a la carpeta de la documentación del estudiante y la socialización inicial del proyecto de investigación a los participantes. Se registra a aceptación voluntaria al proceso y se garantiza el buen uso de datos y la protección de identidad de los estudiantes.

6.5 UNIDAD DE ANÁLISIS

Teniendo en cuenta el concepto de medida que se intenta construir en la escuela, se hace necesario partir de los procesos básicos que implican la medición y en este caso magnitudes de medida, por lo tanto, para este estudio se asume en el aprendizaje del concepto de área y los procesos asociados a la misma:

Tabla 1 Operacionalización de categorías

Categorías de análisis	Subcategorías	Definición
Procesos asociados al concepto de medida	Percepción	Implica partir de impresiones sensoriales teniendo en cuenta las propiedades del objeto a medir.
	Comparación	Sin recurrir a ninguna unidad de medida se hace una comparación perceptiva directa entre dos objetos.
	Estimación	Significa superar la percepción del tamaño o del área de determinado objeto o superficie hacia una mirada analítica del objeto.
	Medición	Indica adoptar un instrumento de medida que permita determinar con cierto grado de exactitud la magnitud de un objeto.
	Aritmetización	Consiste en acceder a la medida a través de instrumentos que permiten reemplazar las magnitudes por los números.

Fuente: Elaboración propia

6.6 TÉCNICAS Y FUENTES DE RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

Para la recolección de la información se emplearon como técnicas: la entrevista no estructurada considerada de carácter flexible y abierta, busca determinar la perspectiva del entrevistado sin la influencia del entrevistador, el cuestionario de esta entrevista es construido y guiado por el problema de investigación, objetivos, variables, en este caso particular la resolución de problemas de área, se aplicaron entrevistas en el inicio final de las actividades con la unidad de trabajo; el instrumento fue un cuestionario que permite la

previa planeación que lo caracterice con preguntas redactadas de forma coherente, organizadas, puntuales y cortas.

La entrevista no estructurada se empleó en el momento inicial para indagar como conciben los estudiantes de la unidad de trabajo el concepto de medida, las experiencias y conceptos de percepción, medición, estimación, comparación y aritmetización; al terminar la aplicación de la unidad didáctica se valora como conciben los estudiantes estos evolucionados conceptos y como los aplican en la resolución de problemas. Es por eso que después de explorar las ideas previas de los estudiantes en torno a los problemas aplicables a la medida de figuras planas y regulares, se les pidió que respondieran a las siguientes interrogantes:

- ¿De qué manera resolvió las situaciones propuestas?
- ¿Qué instrumentos de medición utilizó?

De allí que por cada una de las respuestas de los estudiantes pueden generar otras preguntas según la dinámica de la entrevista no estructurada.

Otra técnica a usar apropiada para las investigaciones de tipo cualitativo es la observación, se busca con esta indagar sobre el comportamiento y las experiencias de las personas, se observa y se registra la información sin la inferencia del investigador otra de sus características es la integración del investigador entre investigador y participante Álvarez, (2011); el instrumento para esta técnica, el “diario de campo” permite la interpretación de la percepción de lo observado por tratarse de indagar en este caso como los estudiantes resuelven problemas de medida con la manipulación de materiales concretos, eficaz e imprescindible en cada uno de los momentos estructurados en esta investigación.

La observación de las actividades de clase estuvo acompañada de un diario de campo en donde se fueron registrando todas las acciones desplegadas por el estudiante para dar respuesta a los problemas que se le proponen y su interacción con el material concreto. Para ello el diario de campo se sustenta en fotografías y vídeos que se tomaron durante el desarrollo de la unidad didáctica.

6.7 UNIDAD DIDÁCTICA

La unidad didáctica permite en los estudiantes un avance en el proceso de enseñanza aprendizaje en la resolución de problemas de medida con manipulación de materiales concretos; se toma como base los saberes previos de los estudiantes y se va construyendo a partir de actividades activas y creativas conceptos y procesos simulando a las comunidades científicas en construcción de conocimiento. Los conocimientos previos de los estudiantes evocados en la actividad inicial, con interrogantes en cada uno de sus ítems que hacen parte de las actividades de un segundo y tercer momento con un carácter complejo y profundo. El diseño de la unidad didáctica brinda un espacio para la construcción del conocimiento, el debate y la participación desarrollando el pensamiento crítico en los estudiantes de grado octavo.

6.8 DISEÑO METODOLÓGICO

Figuras 5 Implementación de la unidad didáctica

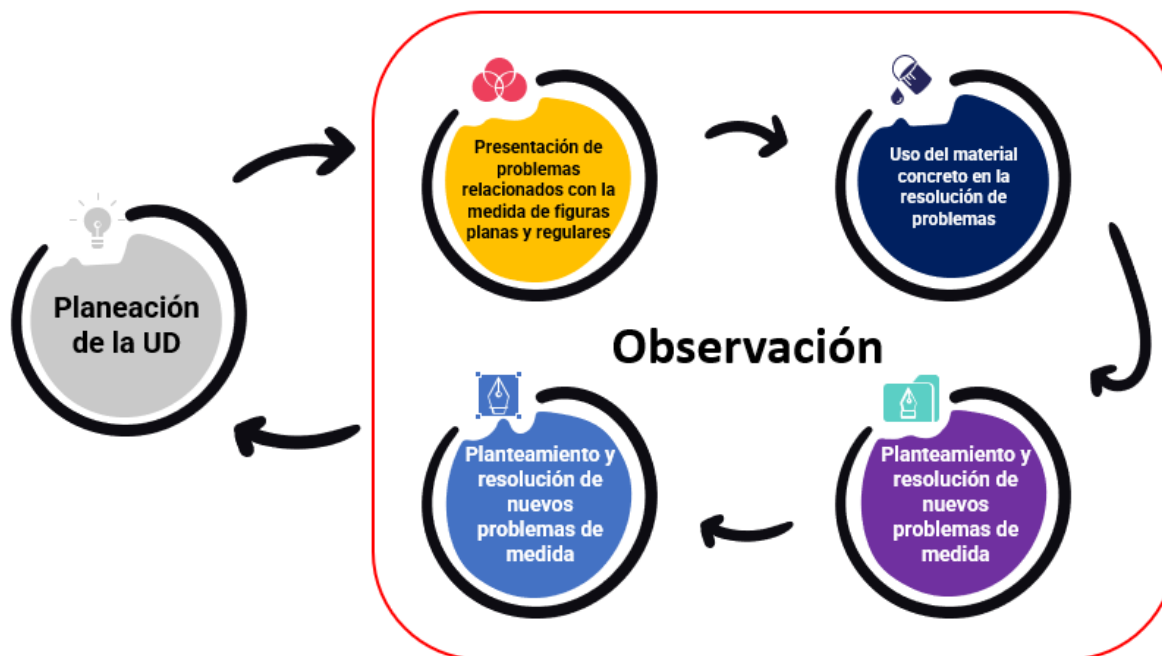


Fuente: Elaboración propia

6.9 PLAN DE ANÁLISIS

Luego de haber sido aplicados los instrumentos de recolección de datos, la información obtenida será transcrita y codificada. De acuerdo con las técnicas e instrumentos de recolección de información, el análisis de la información, tal como se expresa en la siguiente gráfica:

Figuras 6 Técnicas e instrumentos de recolección de información



Fuente: Elaboración propia

7 ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Con el fin de dar respuesta al objetivo general de la investigación en torno a *describir el proceso de aprendizaje del concepto de medida de figuras planas y regulares en la resolución de problemas con la manipulación de material concreto, en estudiantes del grado octavo de Institución Educativa San Francisco del Municipio de Santa Rosa del Sur- Bolívar*, el análisis se centró en indagar en los tres momentos de la UD, el concepto de medida con sus subcategorías: la percepción, comparación, estimación, medición y aritmetización, las cuales son observables desde la manipulación de materiales concretos como recurso didáctico empleado de manera intencional en el proceso de aprendizaje.

7.1 ANÁLISIS DEL MOMENTO DE UBICACIÓN

Con respecto al primer objetivo específico: *Reconocer los procesos asociados la medida de figuras planas y regulares que poseen los estudiantes del grado octavo de Institución Educativa San Francisco del Municipio de Santa Rosa del Sur – Bolívar* se presentan a continuación y de manera detallada los resultados en cada uno de los procesos:

7.2 PERCEPCIÓN

Se presenta a continuación uno de los ejercicios realizado por un estudiante, cuando se le presenta esta imagen:

Figuras 7 Percepción



Fuente: <https://www.metalocus.es/es/noticias/ladrillos-piedra-y-muros-casa-aa-por-alventosa-morell-arquitectes>

La imagen representa un muro el cual tiene pintado círculos y triángulos.

6. ¿Para pintar cada figura (triángulos y círculos), usando el mismo método, tipo de pintura y homogeneidad se requiere de la misma cantidad de pintura? ¿Por qué se requiere la misma cantidad de pintura?

Porque tienen las mismas figuras iguales

De acuerdo con lo anterior describa coincidencias y diferencias entre las imágenes

La coincidencia es que tiene la misma figura y la diferencia es que una está más cerca a la puerta y la otra no

Si por que utilizo el mismo método y tipo, por que tienen el mismo largo y ancho.

Fuente: Elaboración propia

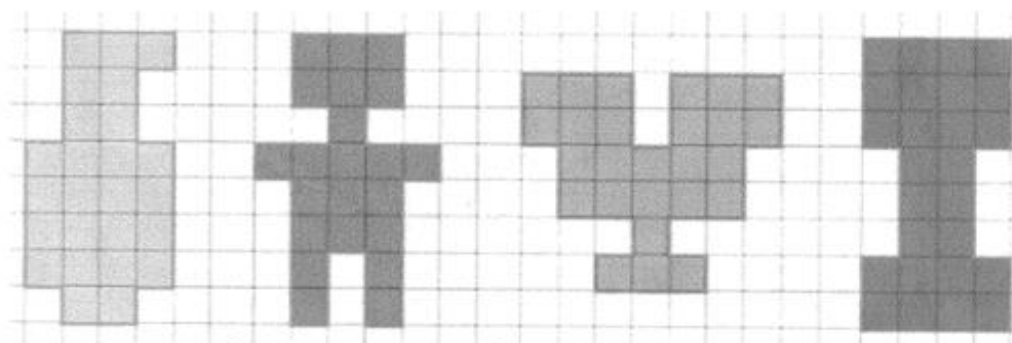
De acuerdo con el proceso, al observar a imagen, los estudiantes coinciden en identificar igualdades de medidas de área en las figuras al afirmar que tiene el *mismo tamaño o son iguales de forma*, y características longitudinales: cerca, lejos, largo, alto. Según esta información el concepto de medida de área es asociado a forma, tamaño, orientación y longitud. Esta perspectiva permite identificar parte del desarrollo del pensamiento espacial encaminado a la resolución de problemas referentes a la ubicación y orientación como lo refiere Alonso (2011).

De acuerdo con Chamorro (2003) hay que reconocer que la cantidad de superficie puede ser la misma en dos figuras no es un asunto trivial y para la mayoría de los

estudiantes cuando se acerca a los conceptos asociados a medida de área lo hacen desde la forma del objeto ya que lo consideran un elemento constitutivo de la superficie hasta el punto de no poder disociarlas.

7.2.1 Comparación

Figuras 8 Comparación



7. ¿Cuántas unidades cuadradas (cuadrícula □) mide cada una de ellas? ¿Cuál es la diferencia entre la de mayor extensión con la de menor extensión con respecto a sus medidas?

126 Cuadros 222 Cuadros 226 Cuadros 26 Cuadros

la Mayor Extensión de altura es de 8 Cuadritos
la Menor Extensión de altura es de 6 Cuadritos

Fuente: Elaboración propia

Al comparar las figuras de la imagen, los estudiantes identifican diferencias de forma, de tamaño desde el número de unidades cuadradas que *ocupan* en el espacio. Relaciona tamaño con la altura o la ocupación del espacio; la comparación se establece a partir de la percepción de la medida del área desde aspectos unidimensionales para expresar aspectos bidimensionales, lo que sucede cuando el estudiante cree medir el área como medida longitudinal (D'Amore y Fandiño Pinilla, 2007).

Desde los estadios propuestos por Piaget, la comparación inicia con una percepción directa entre dos objetos sin recurrir a ningún patrón de medida, solo se hace desde la mirada del objeto; un segundo estadio hace referencia al desplazamiento de objetos que se refiere a la transposición de un objeto sobre otro para establecer su comparación, lo cual no es utilizado por los estudiantes.

7.2.2 Estimación

Figuras 9 Estimación

4. Si se necesitara cubrir con tela la parte superior del escritorio del docente y el frente del tablero, pertenecientes al salón de clases de grado octavo ¿Cuál de estos dos objetos necesitaría más tela? Si tuvieras que realizar los recortes ¿Cómo lo harías para que no te sobre tela? Argumente su respuesta

El tablero Gasta mas tela, Yo mediria Bien Para dar buen uso a la Tela y que no sobre

Asume la estimación desde el uso de algún instrumento de medida

pongo la tela por encima de la mesa y con un lapiz voy marcando donde quiero recortarlo si no lo hago con la palma de las manos midiendo la mesa

Propone la estimación desde el uso de medidas no

Fuente: Elaboración propia

Estima un área mayor que otra y expresa la necesidad de medir con un patrón de medida no convencional. La tendencia al uso de medidas no convencionales es muy común en las comunidades rurales, en la gran mayoría de familias rurales se carece de una cinta métrica para medir longitudes o de instrumentos de medir el peso entre otros, pero eso no significa que no realicen medidas, por el contrario, se les aprecia creatividad para improvisar cualquier elemento del medio y solucionar situaciones comunes y reiterativas con relación a la medida. Este uso de medidas no estandarizadas es costumbre de las comunidades rurales como se afirma en la investigación sobre el uso de medidas no convencionales a una población afro rural, Carabalí (2012).

En la estimación si se observa que el estudiante acude a la aproximación de dos objetos cuando dice que “pongo la tela por encima de la mesa” o en un segundo caso: “lo hago con las palmas de las manos midiendo la mesa” que para Chamorro (2003) indica

que el estudiante se vale de un término medio, cuando empieza a comparar y a estimar la medida de los dos objetos utilizando partes de su propio cuerpo.

7.3 Medición

Figuras 10 Medición

1. Nombra una lista de estos patrones de medida como los anteriores que hayas usado o hayas visto usar.

Con lapiz, Con libros, Con cabeza, con los brazos
Con los Pies

2. Si tuvieras que medir el ancho de la puerta con uno de estos patrones de medida como las que propusisteis en el punto anterior ¿Con que la medirías? Y ¿cómo lo harías? Argumente su respuesta.

Lo mediría con la mano contando cuantos Palmos
se iban Para medirlo

Fuente: Elaboración propia

Nombra patrones de medida no convencionales (antropométricos), nombran las que han usado y el cómo realizaría una determinada medida. Concibe el medir como la repetición de un patrón de medida o contar las veces que se repite ese patrón de medida en la distancia a medir. El uso de medida no estándar es reconocido en el trabajo de investigación de Gonzales (2014) quien afirma que hacen parte de los principios asociados con la medición y están al alcance de los estudiantes permitiendo establecer la necesidad de una unidad de medida.

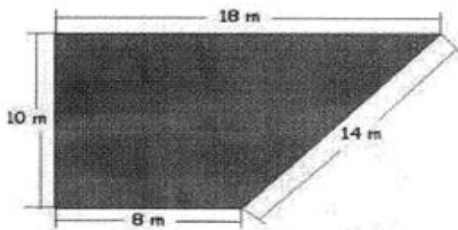
El estudiante continúa empleando partes de su cuerpo como instrumento de medida y lo asocia a la cantidad de veces, que en este caso debe poner la *palma de la mano* para

saber la medida del ancho de la puerta, lo que demuestra que aún no reconoce un patrón de medida.

7.3.1 Aritmetización

Figuras 11 Aritmetización

Observa la imagen.



Fuente: http://nuevoleon.inea.gob.mx/mevyt/Disco3/cursos/numhogar/nch02_47.html

9. La imagen representa un terreno que debe ser cercado con cuatro hebras de "alambre de púas"
¿Cuántos metros de alambre como mínimo se deben conseguir para cercar el área mencionada?

Desarrolla paso a paso el proceso de operaciones para probar su respuesta.

The student's work is written on a grid. On the left side, the dimensions are listed vertically and summed:

18 m
14 m
8 m
10 m
<hr/>
50 m

Handwritten notes include: "A/ se deben utilizar minimo 50 m de alambre." and "Debo utilizar los metros de alambre de lo largo y ancho y corto de cada lado".

Fuente: Elaboración propia

Realiza la suma de varias distancias para determinar la distancia total que limita un terreno e identifica las dimensiones de una figura: largo, ancho. Expresa la noción de dimensión desde la perspectiva euclidiana establecida por las propiedades de largo y ancho para objetos planos. Garbin y Mireles (2009) proponen evolucionar a lo largo de la escolaridad del estudiante a otros niveles conceptuales más avanzados a la perspectiva euclidiana.

La aritmetización supone el reconocimiento de la figura y su unidad de medida, en este caso el estudiante va uniendo diferentes lados que para la situación mencionada corresponden a un cerco de alambre cortado en metros.

7.4 ANÁLISIS DEL MOMENTO DE DESUBICACIÓN

Atendiendo al segundo objetivo que tuvo como propósito *Diseñar una unidad didáctica que involucre la resolución de problemas aplicables al concepto de medida de figuras planas y regulares mediante la manipulación de material concreto*; se abordaron situaciones que buscaban que los estudiantes a partir de la manipulación de material concreto en situaciones prácticas y asociadas a su contexto, de tal manera que pudieran desarrollar habilidades en los procesos asociados a la medida.

El material concreto no estructurado fue construido por los estudiantes a medida que se iban proponiendo las actividades del momento de desubicación con el fin de que pudieran manipular, medir al tiempo que construyen el material. El material no estructurado aporta información de calidad desde un punto de vista sensorial a través de su manipulación, observación y exploración minuciosa, siendo una herramienta que permite desarrollar la capacidad de abstracción al no tener un fin concreto de uso.

7.4.1 Percepción

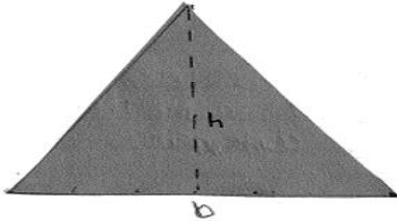
A partir de este segundo momento de la Unidad Didáctica, el proceso perceptivo se evidencia en los estudiantes cuando son capaces de valerse de su propio cuerpo o de un objeto externo que les permita hacer una medición de los objetos a comparar, inicialmente buscando que sean del mismo tamaño, para luego, usar objetos más grandes o pequeños realizando transposiciones de este, con lo cual puedan llegar a construir la idea de unidad de medida.

Retomando las etapas propuestas desde los estadios piagetianos en torno al desarrollo evolutivo del concepto de medida, los estudiantes utilizan como recurso la comparación perceptiva, cuando acuden y confían en lo que perciben con los sentidos antes de emitir un juicio de comparación, después acuden a un recurso comparativo que puede ser la aproximación entre objetos que se consideran semejantes perceptualmente.

Figuras 12 Percepción

31. Construye un triángulo en papel block de color, pégalo, mida las dimensiones necesarias para el cálculo requerido, calcula su área con el debido uso de su fórmula y describe el paso a paso que usted levó.

Pega la figura aquí



Calcule su área aquí

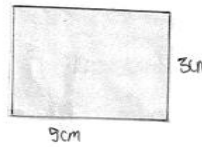
$A_{\Delta} = \frac{b \cdot h}{2}$
$A_{\Delta} = \frac{6\text{cm} \cdot 4\text{cm}}{2}$
$A_{\Delta} = \frac{24\text{cm}^2}{2}$
$A_{\Delta} = 12\text{cm}^2$

Describe el proceso realizado.

Multiplicamos la base por la altura, luego la dividimos entre dos obteniendo así el área del triángulo

26. Dibuja un nuevo rectángulo de papel block de color, pégalo, mide su base y altura y calcula su área.

Pega el rectángulo aquí



$A = b \cdot h$
 $A = 3\text{cm} \cdot 5\text{cm}$
 $A = 15\text{cm}^2$

Fuente: Elaboración propia

Como se observa en la imagen +

7.4.2 Comparación

La comparación, en este segundo momento de la UD se realiza superando los aspectos perceptuales de las figuras de tal manera que los estudiantes establezcan semejanzas frente al tamaño de los objetos bien sea de forma directa, con procesos de medición o de forma indirecta por estimación o por el uso de fórmulas.

En la actividad a resolver se les propone comparar objetos del aula de clase con diferentes dimensiones y propiedades, bien sea de forma rectangular en una de sus dimensiones (largo o ancho) y la respuesta que generalmente dan como mayor que... o menor que... con otra figura rectangular. El estudiante responde teniendo en cuenta una figura real, elementos ubicados generalmente dentro del colegio; estos ejemplos de figuras reales son los “que impactan más en los estudiantes y los que producen un efecto mental más duradero y profundo” (Gutiérrez y Jaime, 1996, p. 145 citado por Barrantes y Zapata, 2008).

Figuras 13 Comparación

19. Completa la tabla realizando la respectiva comparación entre longitudes de los objetos c medio.

Objeto	Es menor que...	Es mayor que...
El ancho del tablero	El ancho de la ventana El ancho del salón	El ancho de la ventana
El largo de la cancha de basquetbol	El largo de la cancha de voleibol	El largo del Restaurante
El alto de la puerta del salón de clases	El alto del poste de luz	Mi estatura
El ancho del portón del colegio	El largo del salón	El largo de la ventana
El grosor del lápiz	El grosor de un libro	El grosor de una hoja
El grosor de un cuaderno	Un tronco	El grosor de un barrido

Fuente: Elaboración propia

Las actividades de comparación que involucran la longitud (largo y ancho) de diferentes objetos, son analizadas por los estudiantes a partir de la percepción y comparación de tamaños, además se les solicitaba a los estudiantes que percibieran y compararan los objetos sobre los cuales se propuso la actividad, tal como se presenta en la evidencia de la actividad de un estudiante.

De acuerdo con la visión piagetiana en torno a la construcción del concepto de medida de longitud, se pueden reconocer los siguientes aspectos que hacen alusión a la respuesta dada por el estudiante:

- Las longitudes se expresan mediante parejas de adjetivos como largo-ancho, grueso – delgado siendo una habilidad, la capacidad de distinguir estas propiedades, en este caso por la posibilidad de observar, manipular y hacer comparaciones.

- La relación entre la longitud y la rigidez como propiedad de los objetos a medir, hace que los estudiantes asocien el largo de un objeto con el largo de otro, como por ejemplo cuando afirman que “*el ancho del tablero es menor que el ancho del salón y mayor que el ancho de la ventana*”; aspecto que no se evidencia al comparar el largo con el

ancho entre dos objetos, tal vez porque intuitivamente consideran que el ancho es más pequeño que el largo.

4.2.3 Estimación

Las actividades de estimación permiten el acceso a diferentes técnicas de medición, lo que conlleva a los estudiantes a la adquisición de conciencia frente al tamaño de las unidades de medida y su relación con la longitud o la superficie, como también a la validación de los sistemas de medición.

Durante el desarrollo de la unidad didáctica en el momento de desubicación se tuvieron en cuenta acciones como: La provocación de comparaciones directas de objetos que llevan posteriormente a comparaciones indirectas y el uso de unidades de medida y la posibilidad de dar medidas aproximadas sin utilizar instrumentos de medida para ser confirmadas posteriormente.

De igual manera el uso de material concreto construido por los estudiantes facilitó el proceso de estimación y medición ya que debían utilizar instrumentos de medida como regla, cinta métrica entre otros.

En la actividad de estimación y medida propuesta, los estudiantes realizaban una actividad de estimación y registraron en el cuaderno, los valores estimados. Posteriormente debían medir para comparar si el valor estimado coincidía o se aproxima al valor obtenido después de medir.

Figuras 14 Estimación

Actividad de estimación y medida.

18. Completa la tabla: En primer lugar, estime cada una de las siguientes longitudes y luego mida con su respectiva unidad de medida construida y coloque el dato real.

Objeto	Estimación	Medida
Su estatura	150m	152m
El codo	50cm	37cm
La palma de la mano	15cm	16cm
Largo del tablero	1m	122m
Alto de la puerta	2m	191m
Ancho del salón de clases	5m	600m
Largo de la cancha de microfútbol	10m	26,59m
Largo de una ventana del salón de clase	1m	230m

Objeto	Estimación	Medida
Su estatura	1,50 cm	1,48 cm
El codo	20 cm	18 cm
La palma de la mano	7 cm	6 cm
Largo del tablero	1,5 m	2,70 m
Alto de la puerta	2,1 m	1,95 m
Ancho del salón de clases	10 m	10 m
Largo de la cancha de microfútbol	18 m	26,9 m
Largo de una ventana del salón de clase	2 m	2,50 m

Fuente: Elaboración propia

Inicialmente la mayoría de los estudiantes manifestaban saber medir desde el momento de ubicación, que puede deberse a las prácticas previas de medida que han realizado en años anteriores ya que predomina en la enseñanza de la medida una mirada reduccionista en el que se destaca la ausencia de un tratamiento matemático de la magnitud y los problemas de conservación.

Esto se hizo evidente al entregarles una cinta métrica de 7,5 m, en donde presentaron dificultades para medir ya que solo habían manejado instrumentos de medida que solo alcanzan un metro o 150 cm como la cinta utilizada en modistería. Tal es el caso de algunos objetos que para algunos de los estudiantes median 150 cm, pero ellos le asignaban un valor de 150 m desconociendo la unidad de medida, que en este caso era el cm; esto también se presentó en los resultados de estimación, aclarando que la estimación

en *cm* lograban hacerlo con gran habilidad, más no cuando se trataba de dar una estimación en metros, lo que demuestra que los estudiantes no manejan o no conocen la unidad de medida y sin este conocimiento se dificulta las actividades de estimación.

Con relación a lo anterior Porta y Costa (1996) aclara que para estimar se necesita conocer o manipular la unidad de medida o el patrón de medida u objeto usando como referente algunos objetos (tasas, baldosas etc.) o las partes del cuerpo (palmo, brazo etc.). Por lo tanto, el estudiante debe reconocer la necesidad de contar con criterios específicos para tomar decisiones sobre la comparación de superficies (decidir si una superficie es mayor, menor o igual que otra), reconociendo la necesidad de cuantificar la longitud o la superficie, para lo cual requiere de una unidad de medida.

7.4.3 Medición

Con el fin de introducir materiales no estructurados y así mismo proponer la construcción de instrumentos de medida, se incorporaron en estas actividades diferentes construcciones propuestos como el eje del concepto de medida para el manejo y comprensión de las magnitudes.

Dada la dificultad presentada en la estimación, se permitió la construcción individual de una cinta métrica de un *metro* de largo en cartulina, en donde midieron el largo de la cancha de microfútbol entre otras que no estaban como actividad, manipulando con gran interés la nueva cinta métrica, pues los desaciertos en las medidas se originaron por la falta de comprensión de la unidad de medida.

La construcción de un metro en cartulina permitió mejorar los datos de medición y despertó el interés por medir muchos objetos del contexto del aula como la altura de la puerta, el largo y ancho de la ventana, volvieron a medir su estatura, el palmo de la mano etc. Para que los estudiantes midan con exactitud y manejen los datos de las magnitudes en este caso la longitud debe conocer o manejar la unidad de medida (Rojas, 2001).

El proceso de medición de diferentes formas y objetos facilitó la manipulación del instrumento de medida y por consiguiente aportó a la construcción del concepto, tal como se observa en las siguientes imágenes:

Figuras 15 Medición



Fuente: Elaboración propia

7.4.4 Aritmetización

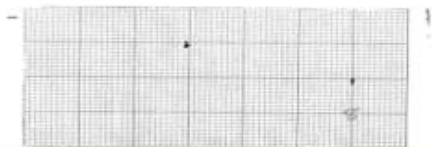
Consiste en el acceso a la medida a través de instrumentos numerados en donde se reemplazan las magnitudes por los números (Chamorro. 2003) y además se realizan operaciones matemáticas que ya son conocidas por los estudiantes desde la básica primaria.

A continuación, se presentan evidencias del proceso de aritmetización realizado con los estudiantes:

Figuras 16 Aritmetización

23. Recorta y pega un rectángulo con las mismas unidades cuadradas en papel block milimetrado ¿Cuántos cuadrados hay en el rectángulo? Usa la multiplicación para resolver teniendo en cuenta las unidades del largo y el ancho; luego describe como lo hizo y ¿por qué? Y si hay otras formas de llegar a la respuesta, explique.

Pega el rectángulo aquí.



28. Calcula el área del triángulo realiza el área de este triángulo es la mitad

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{5 \cdot 4}{2}$$

$$A = \frac{20}{2}$$

$$A = 10 \text{ cm}^2$$

De Cuadros grandes son 18 Por que multiplicado $7 \times 4 = 28$
 Y contando los Cuadros pequeños da 2.800
 lo hice multiplicando y esta la otra forma que seria sumar

25. Dibuja y recorta un rectángulo en papel block de color y pégalo en el siguiente espacio, mida la base y altura, calcula su área en cm^2 tenga en cuenta la formula del área del rectángulo expuesta en el punto anterior.

Pega el rectángulo aquí



$$5 \times 7 = 35 \text{ cm}^2$$

$$A = bh$$

$$A = 5 \cdot 7 \text{ cm}$$

$$A = 35 \text{ cm}^2$$

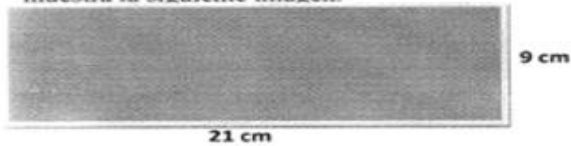
Fuente: Elaboración propia

En el momento de ubicación varias actividades se exigía calcular el área de figuras planas y para esto el estudiante debía dibujar la figura en block de color, recortarla, medirla y calcular su área apoyado en la formula, algunos en determinados casos no usaron la formula y argumentaban por ejemplo para el caso del rectángulo, del cuadrado e incluso el triángulo bastaba con multiplicar los datos horizontales por los verticales o sumar las columnas o las filas, aclaro que anterior a esto se había trabajado en cuadrícula cartulina en dm o recortes de cartulina en “decipiés” (medida de un pie de estudiante construida en cartulina). La comprensión de las unidades de medida cuadrada y el manejo de cálculos, aun sin el uso de la formula del área.

Al respecto Amaya y Alfaro (2010) señala que la geometría se ha dado de sistema o forma tradicional donde el docente expone la teoría, propone los ejercicios que enfatizan

en la aplicación de fórmulas que se deben manejar de memoria, dejando de lado la visualización, la argumentación y la justificación.

24. A un grupo de estudiantes de grado octavo se les planteo calcular el área de un rectángulo c muestra la siguiente imagen.



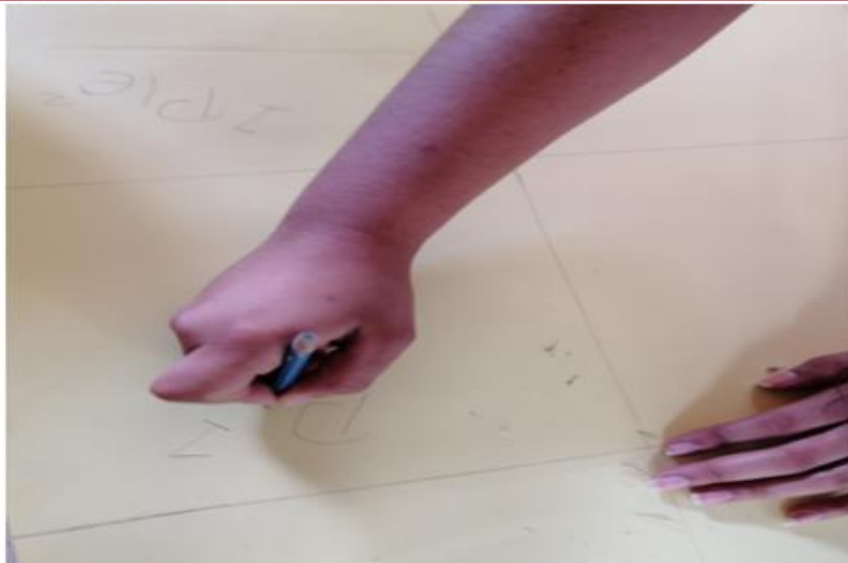
22. El proceso que la mayoría de estudiantes realizó fue el siguiente:

$$A = bh \quad A = bh$$
$$A = 21 \text{ cm} \cdot 9 \text{ cm} \quad A = 21 \text{ cm} \cdot 9 \text{ cm}$$
$$A = 252 \text{ cm}^2 \quad A = 189 \text{ cm}^2$$

En la fórmula A= área, b= base y h= altura

Describe paso a paso el proceso de solución a la situación anterior el porqué de cada uno de ellos.

La forma para hallar el área de una rectángulo es bh o sea cogemos su medida de base y la multiplicamos por su medida de altura y así obtenemos su área



En la parte superior de la imagen los estudiantes perciben incoherencia entre los datos de la imagen y los datos en la solución del problema planteado y en paralelo realizan el proceso de solución, luego lo describen paso a paso determinando que es la medida de la base y altura los datos a utilizar; la parte inferior de la imagen donde se divide una cartulina con la medida “Mi Pie”(medida longitudinal de un pie del estudiante construida con cinta de cartulina) y realizando trazos horizontales y verticales originando cuadrados de un “mi pie” de lado, cuadrados que denominaron y marcaron con “1 pie²” . en esta actividad los

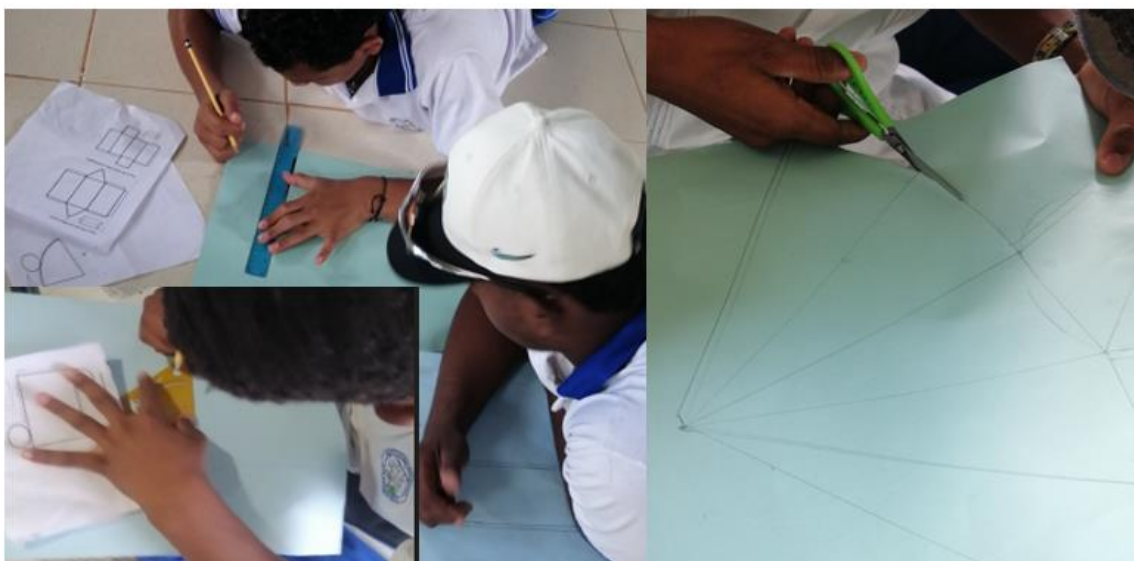
estudiantes lograron descubrir cual es la base y la altura, medirlas y por ende comprender la razón de la formula. Es de gran importancia el establecer de forma clara que los símbolos de las fórmulas geométricas representan la medida, como lo aclara la presentación anterior (la medida de la altura y de la base, bh), términos usados en la “tradición escolar” regularmente de forma incorrecta Fandiño y D’Amore (2009).

7.5 MOMENTO DE REENFOQUE

Para el momento de reenfoque se realizan actividades tendientes a continuar afianzando los procesos asociados a la medida, pero con la construcción de materiales no estructurados que facilitan la comprensión de los estudiantes a partir de la manipulación de material, la observación, el uso de instrumentos de medida y manipulación de estos en diferentes escenarios.

7.5.1 Percepción

Figuras 17 Percepción



Fuente: Elaboración propia

El momento de reenfoque inicia con la construcción de los cuerpos geométricos (prismas, pirámides, cono, cilindro y cubo) guiados por cada uno de sus modelos con el fin de calcular sus áreas; en ocasiones se hizo necesario la descripción del solido desde la perspectiva de sus elementos como caras, formas, vértices y aristas. Para esta sección del

cálculo del área de los sólidos no se les proporcionó fórmulas, algunos estudiantes lograron mediante la intuición proporcionarlas, otros optaban por buscarlas en internet o recurrir al compañero (en el contenido de desubicación se suministró fórmula de áreas de figuras planas). Este hecho demuestra que el concepto de área ha sido interiorizado, hace parte de la conciencia de los participantes; la acción es contraria a lo que tradicionalmente se hace, partir del concepto de área y de la forma para hallar la fórmula y no partir de la fórmula: *hallar el área*. Con relación a lo argumentado Medici (1999) propone si fuera conveniente el uso de un lenguaje menos preciso y más accesible ante el uso exagerado de fórmulas.

7.5.2 Comparación

Figuras 18 Comparación



Fuente: Elaboración propia

Las imágenes muestran capturas de los videos de entrevistas momentos en que los estudiantes comparaban cuerpos solidos como: cilindro y cono, cono y pirámide pentagonal, prisma triangular y tetraedro; identificando diferencias de forma entre caras, bases y áreas laterales; indicaban cuál de los dos cuerpos geométricos tenían la mayor área. el por qué, relacionando el área en sus caras o bases para justificar el argumento de comparación. Las comparaciones de poliedros y los llamados cuerpos en revolución (cono, esfera y cilindro) se lograron por parte de los estudiantes sin complicaciones y de manera acertada, sus apreciaciones se efectúan desde un campo real.

En concordancia a los anterior Gutiérrez (1998) manifiesto sobre los resultados de investigación actuales en didáctica sobre la enseñanza y el aprendizaje, son más fáciles cuando se evitan las abstracciones innecesarias y se apoyan en representaciones que permitan la construcción, manipulación, observación, transformación etc. sin desconocer la importancia y la necesidad de las representaciones en el plano para las enseñanzas que aborden objetos tridimensionales.

7.5.3 Estimación

Figuras 19 Estimación

Situación	Unidad de medida	Situación	Unidad de medida
Área del departamento de Bolívar	km ²	Área del departamento de Bolívar	km ²
Área de la cuadrícula de un cuaderno cuadrículado	cm ²	Área de la cuadrícula de un cuaderno cuadrículado	cm ²
Área de la cancha de microfútbol	m ²	Área de la cancha de microfútbol	m ²
Área de la cara de un cuaderno	cm ²	Área de la cara de un cuaderno	mm ²
Área de una de las fincas ubicada en san francisco	m ²	Área de una de las fincas ubicada en san francisco	km ²
Área de la zona de cultivo del colegio de San Francisco	m ²	Área de la zona de cultivo del colegio de San Francisco	dm ²
Área superior de una mesa plástica normal	m ²	Área superior de una mesa plástica normal	dam ²

Fuente: Elaboración propia

La tabla representa las estimaciones que los estudiantes hacen de la unidad de medida adecuada para medir algunas áreas de grandes a pequeñas extensiones, en su gran mayoría muy acertadas, aunque no faltó quien olvidó señalar en unidades cuadradas a pesar de tener claro el concepto de unidad cuadrada; la imagen seguidas son capturas de videos donde los estudiantes realizaron algunas estimaciones indicando y explicando la unidad de estimación como m^2 , cm^2 y dm^2 ; por nombrar algunas estimaciones, explicaban la razón (realizaban cálculos mentales de área): el área de un salón de clase ($36 m^2$), las veces que es mayor la longitud del largo y ancho de la cancha de futbol que la de microfútbol (cinco veces). El área de una ventana del salón de clases ($2 m^2$), el área de una mesa

pequeña (18 dm^2 , al área de la mesa de trabajo que se adecuó para la construcción de figuras planas y cuerpos geométricos situada en el salón de grado octavo ($1,5 \text{ m}^2$) etc.

Las estimaciones fueron muy acertadas y dentro de la lógica, concebían correctamente la unidad cuadrada a la que hicieron mención, algunos estudiantes olvidaban indicar la unidad como unidad cuadrada. Con respecto a la dificultad de estudiantes en señalar la unidad como unidad cuadrada (Rogalski, 1979 citado por D'Amore y Fandiño, 2007) lo reconoce como uno de los problemas en el aprendizaje de área, como obstáculo, el cambio de medidas de longitud a medidas de unidades de área.

7.5.4 Medición

Figuras 20 Medición



Fuente: Elaboración propia

Es este el momento de reenfoque los estudiantes realizan medidas para realizar el desarrollo de los cuerpos geométricos (cilindro y cono, cono y pirámide pentagonal, prisma triangular y tetraedro); realizan un trabajo colaborativo donde unos guían a otros cuando lo consideraron necesario, construyeron en total 23 sólidos en cartulina; miden las longitudes necesarias para determinar los datos para calcular el área de los mencionados cuerpos, para resolver la última parte del taller (lados, altura, diámetros etc.) no se observó obstáculo en esta sección con respecto a medir. La construcción de los diferentes cuerpos geométricos, las mediciones y los procesos se realizaron con el surgir de trabajo colaborativo, el cual fue aumentado considerablemente en el acontecer desde el momento de desubicación, permitiendo el desenlace de la propuesta de la unidad didáctica.

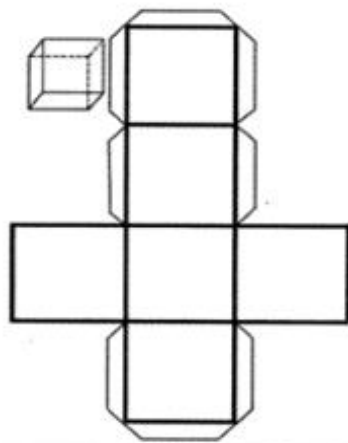
El trabajo colaborativo mejora la atención, promueve la participación y el interés a los estudiantes, permite la sana convivencia, los estudiantes aprenden mucho más con esta estrategia didáctica (Suarez, 2020).

7.5.5 Aritmetización

Figuras 21 Aritmetización

3. Realice el desarrollo del hexaedro en cartulina u otro material que estime conveniente, forme el cuerpo geométrico esperado y calcule su área, describe el proceso realizado y el porqué del mismo: esera el oportuno momento para exponer su trabajo

Desarrollo del hexaedro o cubo



$$A = b \cdot h$$

$$A = 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm}$$

$$A = 100 \text{ cm} \cdot 10$$

$$A = 1000 \text{ cm}$$

$$A_D = L^2$$

$$A_D = 6(10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm})$$

$$A_D = 600 \text{ cm}^2$$

Fuente: Elaboración propia

En el momento de reenfoque, la aritmetización consistió en calcular el área de los cuerpos geométricos: prismas, pirámides, cono, cilindro y cubo; no se les proporcionó fórmula alguna para estos cálculos de los cuerpos geométricos, las fórmulas de figuras planas hacían parte del contenido del momento de reubicación; las imágenes muestran el proceso aritmético de un cubo y un prisma rectangular donde usan la fórmula de la figura plana $A = bh$ el área de la cuadrado de una de las caras del cubo y finalmente lo multiplican por 6; en el cálculo del área del prisma rectangular la fórmula es más técnica al parecer consultaron en otras fuentes; en las conversaciones individuales o grupales los estudiantes explicaban el cómo calcular el área al cuerpo geométrico partiendo de la fórmula o simplemente relataban lo que debían multiplicar, por intuición realizaban o explicaban el proceso deduciendo el cálculo de área del sólido sin hacer mención a la fórmula.

Por lo anterior se afirma que tienen claro el concepto de área, comprenden el porqué de las fórmulas, estas tienen sentido en los procesos geométricos, reconociendo la importancia del material concreto, se logra despertar mayor interés en el estudiante; didáctica muy diferente a lo que normalmente se hace en el aula donde estos procesos empiezan por suministrar una fórmula, explicándola y exigiendo su memorización.

En esta misma perspectiva García, (2015) lo cataloga el enseñar una geometría más lúdica y práctica:

Por ello, es importante ofrecer herramientas y crear situaciones a partir de las cuales los estudiantes sean capaces de intuir las fórmulas de cálculo de área y volumen de determinadas figuras y cuerpos geométricos. Gracias a los materiales no estructurados presentados en este TFG, conseguiremos captar el interés de nuestros alumnos y, de este modo, buscamos que vean la parte interactiva, divertida y manipulativa de la geometría. (García. 2015)

7.6 ANÁLISIS DEL AVANCE DE LOS ESTUDIANTES EN CADA UNO DE LOS MOMENTOS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Para dar cumplimiento con el tercer objetivo que tuvo como *propósito explorar el avance que alcanzan los estudiantes en el proceso de aprendizaje del concepto de medida de figuras planas y regulares mediante la manipulación de material concreto, en estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa san Francisco del Municipio de Santa Rosa del Sur – Bolívar*, se realizaron nuevamente actividades relacionadas con los procesos referidos a la medida que propone Freudenthal.

Tabla 2 Cuadro comparativo del avance de los estudiantes en el aprendizaje del concepto de área

Categoría	Ubicación	Desubicación	reenfoque
Percepción	Relacionan longitud y área con tamaño y/o con las dimensiones de largo y ancho	Los estudiantes utilizan medidas no convencionales de longitud de un “pie” y realizan trazos horizontales y verticales reconociendo el pie cuadrado e identifican base y altura y explican la razón lógica de la fórmula del rectángulo	En esta sección, para calcular el área de poliedros y cuerpos redondos, a los estudiantes no se suministró fórmulas, algunos por intuición o deducción lograron construirla, otros la consultaron por sus propios medios, en definitiva, calcularon el área de los mencionados solidos con o sin formula y explicaron acertadamente el proceso realizado.
Comparación	Relacionan extensión o área con la altura y con ocupación de	Los estudiantes comparan longitudes del largo o ancho de	Los estudiantes compararon cuerpos solidos como: cilindro,

	espacio. De igual manera relacionan largo y ancho en contorno.	elementos u objetos del medio(colegio) el tamaño y comparando varios objetos	cono y pirámides, prismas y tetraedro; identificando diferencias de forma entre caras, bases y áreas laterales; indicaron cuál de los dos cuerpos geométricos tenían la mayor área, el por qué relacionando el área en sus caras o bases para justificar el argumento de comparación
Estimación	Estiman áreas indicando una mayor que otra y expresa la necesidad de medir con patrones de medida no convencionales	Los estudiantes estiman inicialmente con medidas menores al metro acertadamente. Después de la construcción de la cinta métrica logran estimaciones mayores al metro	Los estudiantes realizaron algunas estimaciones indicando y explicando la unidad de estimación apropiada en m^2 , cm^2 y dm^2 ; por nombrar algunas estimaciones, explicaban la razón (realizaban cálculos mentales de área): el área de un salón de clase ($36 m^2$), las veces que es mayor la longitud del largo y ancho de la cancha de futbol a la de

			<p>microfútbol (cinco veces). El área de una ventana del salón de clases (2 m^2), el área de una mesa pequeña (18 dm^2, al área de la mesa de trabajo que se adecuó para la construcción de figuras planas y cuerpos geométricos situada en el salón de grado octavo ($1,5 \text{ m}^2$))</p>
Medición	<p>Los estudiantes reconocen patrones de medida no convencionales y argumentan haber medido con algunos de ellos, la mayoría con el palmo</p>	<p>Al inicio del momento de desubicación, los estudiantes presentaban dificultad en el manejo del metro, al construir una cinta métrica de longitud de 1 m en cartulina, logran medir diferentes dimensiones, mayor y menores al metro, demostraron gran interés por medir diferentes dimensiones dentro y fuera del aula</p>	<p>Los estudiantes realizan medidas para realizar el desarrollo de los cuerpos geométricos (cilindro, cono, pirámides, prismas y tetraedro); realizan un trabajo colaborativo donde unos guían a otros cuando lo consideraron necesario, construyeron en total 23 sólidos en cartulina; miden las longitudes necesarias para determinar los datos y</p>

			calcular el área de los mencionados sólidos.
Aritmetización	Realiza la suma de varias distancias para determinar la distancia total que limita un terreno e identifica las dimensiones de una figura: largo, ancho.	Mediante las actividades de dibujar, recortar, medir y pegar figuras planas, los estudiantes calculan el área de figuras planas en ocasiones sin depender de la fórmula o dependiendo de ella explicando el porqué de la misma y comprendiendo la unidad cuadrada	Los estudiantes realizaron el proceso aritmético para calcular el área de poliedros y cuerpos redondos, algunos construyeron la fórmula por deducción, otros en algunos casos no usaron formula, pero en definitiva explicaron como resolvieron el área

Fuente: Elaboración propia

8 CONCLUSIONES

En esta investigación se describió el proceso de aprendizaje del concepto de medida de figuras planas y regulares en la resolución de problemas, con la manipulación de material concreto, en estudiantes del grado octavo de Institución Educativa San Francisco del Municipio de Santa Rosa del Sur- Bolívar; estos han comprendido el concepto de medida en cada una de sus sub categorías, es decir: percepción, estimación, comparación, medición y aritmetización. El manejo del material concreto permitió que los estudiantes se involucraran de forma plena e interesada en las actividades que corresponden a una Matemática Realista según sus principios, como lo considera Freudenthal (1991, citado por Bressan et al, 2016).

Se reconoció el avance de los procesos asociados a la medida de figuras planas regulares que tuvieron los estudiantes del grado octavo con la manipulación del “material concreto”, donde se dio la posibilidad de aplicar los principios de la Educación Matemáticas Realista como: de actividad: se da con respecto al aprender haciendo; de realidad: las situaciones geométricas a solucionar fueron absolutamente reales, de niveles y de interacción: una visible interacción, trabajo colaborativo y progresivo. Estos principios se dan por las propiedades de los materiales que posibilitaron medir, dibujar, comparar, estimar, recortar, pagar, debatir entre otros.

El abordar la unidad didáctica en su forma estructurada, la de sus subcategorías tales como: percepción, medición, estimación, comparación y aritmetización en los estudiantes de grado octavo de la IESF, permitió una progresiva construcción del concepto de medida, iniciando por los conocimientos previos, utilizando el material concreto para la solución de problemas.

Se concluye además que la construcción y uso de instrumentos de medida convencionales y no convencionales desarrollan las habilidades relacionadas con la medición. La actividad de cuadrar algunas superficies planas como cartulinas en dm o en “mi pie” aportó a la comprensión del concepto de medidas de área de figuras planas y a entender la razón de ser de sus fórmulas.

La construcción de cuerpos geométricos con material concreto tales como: prismas, pirámides, cono, cilindro, cubo, etc. iniciando desde su desarrollo, orientó el proceso de aritmetización del cálculo de superficie de figuras planas; los casos que no usaron como guía la fórmula permitió determinar que esta no es un componente básico y fundamental en la solución de problemas de área de los mencionados sólidos.

Se construyó una unidad didáctica que involucró la resolución de problemas aplicables al concepto de medida de figuras planas regulares, mediado por la manipulación de material concreto, estructurada en tres momentos: ubicación, desubicación y reenfoque, logrando en los estudiantes de grado octavo de la IESF un aprendizaje gradual desde los conocimientos previos del estudiante relacionados hasta la aplicación del conocimiento en la resolución de problemas de área con poliedros y cuerpos redondos.

9 RECOMENDACIONES

Según lo expresado y demostrado en párrafos anteriores, un impacto positivo se da con el material concreto para la resolución de problemas y construcción del concepto de medida; las actividades de la unidad didáctica son realizadas en un campo real; por su naturaleza y aplicación de la geometría es conveniente y necesario agregar a las unidades didácticas acciones que involucren imágenes con sus medidas para la solución de situaciones de este tipo en el plano abstracto.

Se recomienda la manipulación del material concreto vinculado a una matemática realista o acorde a sus principios: principio de actividad, realidad, niveles e interacción, desde el punto de vista de Freudenthal (1991, citado por Bressan et al, 2016), todo esto hace que el estudiante se involucre de forma plena en las actividades y por ende la comprensión y aprendizaje del concepto de área desde un contexto real.

Con respecto a la didáctica para el aprendizaje del concepto de medida, muy conveniente la estructuración en sus momentos: ubicación, desubicación y reenfoque, incluidas en cada uno de estos momentos las subcategorías del área: percepción, medición, estimación, comparación y aritmetización; se logra con esta estructura un aprendizaje gradual, partiendo de los conocimientos previos. También cobra sentido cuadricular áreas como: cartulinas, hojas de block, figuras como el rectángulo, etc. ayuda a construir el concepto de área y de la unidad cuadrada.

Otra recomendación: la construcción de cuerpos geométricos tales como: prisma, pirámides, cono, cilindro, cubo, etc. iniciando desde su desarrollo, de gran relevancia para la comprensión de las fórmulas y la solución de problemas de sus áreas en los mencionados sólidos.

Por último, es recomendable para el desarrollo del pensamiento métrico-espacial: la construcción y uso de medias convencionales y no convencionales como la cinta métrica; permite la comprensión y manejo de unidades de medida, fortalece las habilidades relacionadas con la medición.

10 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Álvarez, C. A. M. (2011). Cuantitativa y cualitativa Guía didáctica. *Recuperado de:* <https://www.uv.mx/rmipe/files/2017/02/Guia-didactica-metodologia-de-lainvestigacion.pdf>.
- Alonso, A. (2011). Desarrollo del pensamiento espacial y sistema geométrico en el aprendizaje de los sólidos regulares mediante el modelo de Van Hiele, con los estudiantes de 6 grado del colegio San José de la comunidad marista. <http://funes.uniandes.edu.co/2620/1/AlonsoDesarrolloAsocolme2011.pdf>
- Araya, R. G., & Alfaro, E. B. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista electrónica educare*, 14(2), 125-142. [file:///C:/Users/janus/Downloads/Dialnet-LaEnsenanzaYaprendizajeDeLaGeometriaEnSecundariaLa-5414933%20\(1\).pdf](file:///C:/Users/janus/Downloads/Dialnet-LaEnsenanzaYaprendizajeDeLaGeometriaEnSecundariaLa-5414933%20(1).pdf)
- Arias, I. J. (2018). Uso de material concreto en el desarrollo de las capacidades del área de las matemáticas en la institución Educativa "Nuevo Perú" los Olivos-2018. *repositorio ucv. Maestría en Educación con Mención en Docencia y Gestión Educativa*. Escuela de Posgrado, Universidad César Vallejo, Lima. Perú. https://repositorio.ucv.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12692/24883/Sol%C3%B3rzano_AIJ.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- Barrantes López, M., & Zapata Esteves, M. A. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. https://dehesa.unex.es/flexpaper/template.html?path=https://dehesa.unex.es/bitstream/10662/4576/1/0213-9529_27_1_55.pdf#page=1
- Barrios, L., Rivas, M., & Triviño, L. (2016). Área en cuadros: propuesta de orientación didáctica. <http://funes.uniandes.edu.co/19012/>
- Bedoya Gutiérrez, C. M. (2020). *Habilidades de Regulación Metacognitiva en la Resolución de Problemas para el Aprendizaje de Área y Volumen* [Tesis de Maestría] Universidad Autónoma de Manizales. <https://www.lareferencia.info/vufind/Search/Results?join=AND&lookfor0%5B%5>

D=regulacion+&type0%5B%5D=AllFields&lookfor0%5B%5D=resolucion+de+problemas+&type0%5B%5D=AllFields&lookfor0%5B%5D=area+y+volumen+&type0%5B%5D=AllFields&bool0%5B%5D=AND&daterange%5B%5

Blanco, J. (1996). La Resolución de problemas. Una Revisión Teórica. *Suma*(21), 11-20.
Obtenido de <http://hdl.handle.net/11162/12909>

Bressan, A., Maria F, G., & Zolkower, B. (2005). Los Principios de la Educación Matemática Realista. *Reflexion Teórica para la Educaión Matemática*, 69-98.
Obtenido de <https://isfdajullon-lrj.infed.edu.ar/aula/archivos/repositorio/750/923/DOC1-principios-de-educacion-matematica-realista.pdf>

Camargo, L. (2011). El legado de Piaget a la didáctica de la geometría. *Revista colombiana de educación*, (60), 41-60.

Carabalí, J. S. (2012). Patrones de medida no convencionales: el caso de la longitud en el barrio Desepaz del municipio de Santiago de Cali, Colombia.
<http://funes.uniandes.edu.co/10757/1/Carabal%C3%AD2012Patrones.pdf>

Castaño, G., & Quecedo, L. (2002). introduccion a la metodologa de Investigacion Cualitativa. *Revista de Psicodidactica*(14), 5-39.
<https://www.redalyc.org/pdf/175/17501402.pdf>

Castro, J. J. (2019). Las estrategias de resolucion de problemas relacionadas con operaciones basicas de matematicas en estudiantes de sexto grado. *Maestría en Enseñanza de las Ciencias*. Universidad Autónoma de Manizales, Maanizales.
https://repositorio.autonoma.edu.co/bitstream/11182/863/1/Estrategias_resoluci%C3%B3n_problemas_relacionadas_operaciones_b%C3%A1sicas_matem%C3%A1ticas_estudiantes_sexto_grado.pdf

Chamorro, M., (1995). Aproximación a la medida de magnitudes en la enseñanza primaria. *UNO Revista de didáctica de las matemáticas*, (3), 31-53.

Cortez, R. (2012). Historia de la Geometría Euclidiana.

https://scholar.google.es/scholar?hl=es&as_sdt=0%2C5&q=Cort%3%A9s%2C+R.+%282012%29.+Historia+de+la+Geometr%3%ADa+Euclidiana+y+sus+aplicaciones+para+la+ense%3%Blanza.+Tesis+Maestr%3%ADa%2C+Universidad+de+Valladolid.+Escuela+Universitaria+de+Educaci%3%

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007). Relaciones entre área y perímetro:

convicciones de maestros y de estudiantes1. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 10(1), 39-68.

https://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362007000100003&script=sci_arttext

Del Olmo, M., Moreno, M., y Gil, F. (1993). Superficie y volumen ¿algo más que el trabajo con fórmulas? *Matemáticas: cultura y aprendizaje*, N° 19, Editorial síntesis, Madrid 1993.

Díaz, H. R. (2019). Formulación y Resolución de problemas aritméticos desde una

perspectiva de pensamiento. *Maestría en Educación*. Universidad Externado de Colombia, Bogotá.

<https://bdigital.uexternado.edu.co/server/api/core/bitstreams/d52889c3-6276-4bf1-aa28-5e99edaa0659/content>

Docentes de Matemática la Libertad. (23 de Noviembre de 2020). Educación matemática realista [video]. Youtube. <https://www.youtube.com/watch?v=kFJtSIsHN9I>

Estudiantes de Bolívar., con bajo rendimiento en pruebas icfes. (4 de Noviembre de 2021).

El Universal. <https://www.eluniversal.com.co/regional/bolivar/estudiantes-de-bolivar-con-bajo-rendimiento-en-pruebas-icfes-HY4427786>

Fandiño, M., & D'Amore, B. (2009). Área y perímetro. *Aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: Magisterio.

- Flores, P., Lupiáñez, J., Berenguer, L., Mrín, A., & Molina, M. (2011). *Materiales y Recursos en el Aula de de Matemáticas*.
http://funes.uniandes.edu.co/1946/1/libro_MATREC_2011.pdf.
- Garbin, S., Mireles, M. (2009). Un estudio sobre la noción de dimensión en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, 27(2), 223-240. <file:///C:/Users/janus/Downloads/3733-Texto%20del%20art%C3%ADculo-20757-1-10-20210415.pdf>
- González Prado, M. R. (2014). Estrategias Metodológicas para el aprendizaje de medida en los estudiantes del 10mo “D” de Educación Básica del colegio Daniel Córdova Toral. <http://dspace.ucuenca.edu.ec/bitstream/123456789/20846/1/TESIS.pdf>
- Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista Ema*, 3(3), 193-220.
http://funes.uniandes.edu.co/1079/1/41_Guti%C3%A9rrez1998Las_RevEMA.pdf
- Guzmán, M. (2007). La Enseñanza de las Ciencias y la Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, 43(1), 19-58.
<https://rieoei.org/historico/documentos/rie43a02.pdf>
- Henao, S. M., & Vanegas, J. (2012). La modelación matemática en la educación realista: un ejemplo a través de la producción y uso de modelos cuadráticos. Obtenido de Repositorio Digital de documetos en educaion matemática. Univerisdad de los Andes.
<http://funes.uniandes.edu.co/2518/1/Lamodelaci%C3%B3nHenaoAsocolme2012.pdf>
- Ministerio de Educación Nacional República de Colombia. (2006). *Estandáres Básicos por Competencias*. https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf.
- Molano, C. C. (2019). *Visualizacion del Pesamiento Espacial [tesis de maestria]* Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Repositorio LA Referencia.
https://repositorio.uptc.edu.co/bitstream/001/2993/1/TGT_1614.pdf

Moreno, I. (2004). *Merecur. Medios y Recursos en el AUA*. Recuperado el 1 de Octubre de 2022, de Departamento de Didáctica y Organización Escolar. Universidad Complutense de Madrid: <https://webs.ucm.es/info/doe/profe/isidro/merecur.pdf>

OECD* (2010), Resultados PISA 2009: Resumen Ejecutivo

Icfes, I. C. (2018). Informe nacional de resultados para Colombia-PISA 2018. *Bogota DC*. https://www.icfes.gov.co/documents/39286/1125661/Informe_nacional_resultados_PISA_2018

Pólya, G. (1965). *Cómo palantear y resolver problemas*. <https://cienciaymatematicas.files.wordpress.com/2012/09/como-resolver.pdf>

Porta, A. y Costa, B. (1996). La estimación, una forma importante de pensar en matemática. Consejo Provincial de Educación. <https://n9.cl/0z6i1>

Riveros, F., Vargas, J., & Lina, P. (2020). Educación matemática realista y entornos interactivos para determinar el nivel cognitivo de estudiantes universitarios a partir del concepto de la integral definida sus aplicaciones en ingeniería. *Espacios*, 357-370.

Rojas, P. J. (2001). Pensamiento Métrico: Construcción del concepto de medida. <http://funes.uniandes.edu.co/2418/1/Rojas2001Pensamiento.pdf>

Romero, & Cano. (mayo de 2010). La Resolución de Problemas: Una Experiencia Práctica. *La Gaveta: Revista Digital del CEP de Sant Cruz de Tenerife*(16), 10-21. https://redined.educacion.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/105343/resolucion_de_problemas_16.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Salinas Domínguez J. O. *Materiales didácticos concretos y su influencia en el aprendizaje de la matemática en estudiantes de educación secundaria* [Tesis de Maestría, Universidad San Pedro] Repositorio Institucional - USP. http://repositorio.usanpedro.edu.pe/bitstream/handle/20.500.129076/16254/Tesis_67515.pdf?sequence=1&isAllowed=y

- Salvador, R. C. (1997). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad* (Doctoral dissertation, Universitat de València).
<https://www.uv.es/aprenggeom/archivos2/Corberan96.pdf>
- Santos, L. (1992). La Resolución de Problemas; El Trabajo de Alan Schoenfeld: Una Prpuesta a Considerar en El Aprendizaje de las Matemáticas. *Educaión Matemáticas*, 4(2), 16-24.
- Suárez Silva, i. c. (2020). *Trabajo colaborativo en el aprendizaje de matemática, de estudiantes del tercer grado de educación general básica, de la Unidad Educativa "Gonzalo Zaldumbide", de la provincia de Imbabura, Cantón Ibarra, Parroquia Lita, año lectivo 2019-2020* (bachelor's thesis, Universidad Tecnológica Indoamérica).
- Tamayo, O. (2014). *Pensamiento Crítico Dominio Específico en la Didáctica de las Ciencias*. Universidad de Caldas, Universidad Autónoma de Manizales. Archivó
- Tobón, S. (2005). *Formación Basada en competencias*.
- Vásquez A. de C. (2019). *El material estructurado y no estructurado y el desarrollo de la competencia actúa y piensa matemáticamente en los estudiantes de 4 años de la IEI "Yerba Buena" distrito de Oxamarca-2016*".
https://repositorio.unc.edu.pe/bitstream/handle/20.500.14074/3448/T016_44230779_T.pdf?sequence=1
- Zapata, F., & Cano, N. (2008). La enseñanza de la magnitud área. Encuentro colombiano de Matemática Educativa. <https://core.ac.uk/reader/12341430>
- Zona, J., & Giraldo, J. (217). Resolución de Problemas: Escenario del Pensamiento Crítico en la Didáctica de las Ciencias. *Revista Lalinoamericana de Estudios Educativos*, 13(2), 120-150.