



**MÉTODO COPISI: SECUENCIA DIDÁCTICA QUE APORTA A LA
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA:
ISOMORFISMO DE MEDIDAS**

Rodrigo Herrera Marín

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES
FACULTAD DE ESTUDIOS SOCIALES Y EMPRESARIALES
MAESTRÍA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
MANIZALES
2024**

**MÉTODO COPISI: SECUENCIA DIDÁCTICA QUE APORTA A LA
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA:
ISOMORFISMO DE MEDIDAS**

Autor

RODRIGO HERRERA MARÍN

Proyecto de grado para optar al título de Magister en Enseñanza de las Ciencias

Tutor

LINCOLN EDUARDO RUIZ RUA

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES
FACULTAD DE ESTUDIOS SOCIALES Y EMPRESARIALES
MAESTRÍA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
MANIZALES**

2024

RESUMEN

El estudio tuvo el propósito de describir el aporte del método de COPISI en la resolución de problemas de estructuras multiplicativas: Isomorfismo de medidas en estudiantes de quinto grado de básica primaria de la Institución Educativa Técnica Alberto Castilla de la ciudad de Ibagué. Se planteó una investigación de enfoque cualitativo y de tipo descriptivo, la unidad de trabajo fue de cinco estudiantes con edades de 9 a 12 años de edad con: actitud asertiva hacia el trabajo, consentimiento de padres o acudientes, y compromiso de participación en todo el proceso. La recolección de información se ejecutó por dos evaluaciones una inicial y otra final, una entrevista semiestructurada, y las preguntas abiertas durante la intervención con las secuencias didácticas. La técnica de análisis de la información fue cualitativa, desde la narrativas y análisis de contenido. Se encontró que los estudiantes tuvieron un cambio positivo en el aprendizaje de la aplicación de las estructuras multiplicativas para la resolución de problemas. Asimismo, señalaron que los materiales concretos y los dibujos, fueron las herramientas que les ayudó a aprender más rápidamente. Los docentes deben conscientes de la necesidad de implementar secuencias didácticas en donde constantemente se retroalimenten de las narrativas y percepciones de los estudiantes para hacer ajustes y garantizar que estos adquieran competencias adecuadas.

Palabras Claves: Matemáticas, COPISI, enseñanza, estructura multiplicativa.

ABSTRACT

Describe the contribution of the COPISI method in solving problems of Multiplicative Structures: Isomorphism of measurements in fifth grade primary school students at the Alberto Castilla Technical Educational Institution in the city of Ibagué.

Methodology: A qualitative research with a descriptive approach was proposed, the work unit was five students aged 9 to 12 years with: assertive attitude towards work, consent of parents or guardians, and commitment to participation in everything. the process.

Information collection was carried out through two evaluations, one initial and one final, a semi-structured interview, and open questions during the intervention with the didactic sequences. The data analysis technique was qualitative, from narratives and content analysis.

Results: It was found that students had a positive change in learning the application of multiplicative structures to solve problems. Likewise, they pointed out that concrete materials and drawings were the tools that helped them learn more quickly.

Conclusions: Teachers must be much more open to the implementation of didactic sequences where they constantly receive feedback from students' narratives and perceptions to make adjustments and guarantee that they acquire appropriate competencies.

Keywords: Mathematics, COPISI, teaching, multiplicative structure.

CONTENIDO

	Pág.
1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	11
1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA	11
2 JUSTIFICACIÓN	21
3 OBJETIVOS	25
3.1 OBJETIVO GENERAL	25
3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	25
4 MARCO CONCEPTUAL.....	26
4.1 EL MÉTODO COPISI EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS: HISTORIA, DEFINICIÓN Y PERSPECTIVAS	26
4.1.1 El Método COPISI Como Estrategia Didáctica En La Enseñanza De Las Matemáticas.....	26
4.2 LOS PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA EN LOS PROCESOS DE ENSEÑANZA – APRENDIZAJE.....	31
4.2.1 Estructura isomorfismo de medidas	33
4.2.2 Los problemas de estructura multiplicativa como competencia en el área de matemáticas	34
4.3 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	37
4.3.1 Método de resolución de problemas desde George Pólya.....	38
4.3.2 Pasos para la resolución de problemas según Pólya.....	39
4.3.3 La resolución de problemas según Allan Schoenfeld.....	40
5 METODOLOGÍA	45
5.1 ENFOQUE Y ALCANCE.....	45
5.2 POBLACIÓN Y CONTEXTO.....	46
5.3 UNIDAD DE TRABAJO.....	47
5.4 CONSIDERACIONES ÉTICAS.....	47
5.5 UNIDAD DE ANÁLISIS.....	48
5.6 TÉCNICAS Y FUENTES PARA LA RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN	49

5.6.1 Instrumentos de lápiz y papel	49
5.6.2 Entrevista semiestructurada.....	50
5.7 UNIDAD DIDÁCTICA	51
5.7.1 Plan De Acción	52
5.8 DISEÑO METODOLÓGICO	53
5.9 PLAN DE ANÁLISIS	53
6ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS	54
6.1 ANÁLISIS INICIAL.....	54
6.1.1 Instrumento de lápiz y papel.....	54
6.2 SECUENCIAS DIDÁCTICAS. MÉTODO COPISI	63
6.2.1 Secuencia Didáctica 1. Multiplicación	64
6.2.2 Secuencia Didáctica 2. División.....	77
6.3 ANÁLISIS FINAL.....	90
6.4 ENTREVISTA	96
7CONCLUSIONES	100
8RECOMENDACIONES	102
9REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	103
10 ANEXOS.....	110

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Evaluar para avanzar 2022 - Institución Educativa Alberto Castilla	18
Tabla 2. Saber 5° - Institución Educativa Alberto Castilla.....	19
Tabla 3. Matriz de análisis categorial.....	48
Tabla 4. Plan de acción.....	52

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Diseño metodológico	53
Figura 2. Problema 1. Instrumento de lápiz y papel.....	55
Figura 3. P1. EJB1	56
Figura 4. P1. ELQ4.....	57
Figura 5. P1. ESP2.....	57
Figura 6. P1. EJO5.....	58
Figura 7. P1. ESG3	58
Figura 8. Problema 2	59
Figura 9. Problema 3	61
Figura 10. Ilustración inicial del Naipe Multiplicativo	65
Figura 11. Ejemplo 2 de la secuencia didáctica 1.....	66
Figura 12. Ejemplos 3 y 4 de Naipes Multiplicativos en blanco.....	68
Figura 13. Resolución de los ejemplos de los estudiantes.....	68
Figura 14. Estudiantes trabajando en grupo según la secuencia didáctica 1	70
Figura 15. Problema de ejemplo.....	72
Figura 16. Problema de Naipe multiplicativo, procedimiento y solución	73
Figura 17. Ejercicios abiertos	73
Figura 18. Naipes Multiplicativos con imágenes y números.....	75
Figura 19. Problema para resolver por método de esquema.....	76
Figura 20. Ejemplo de esquema desarrollado por los estudiantes	76
Figura 21. Ejemplo de problema para resolver por división	77
Figura 22. Ejemplo 2 de problema para resolver con división.....	78
Figura 23. Ejemplo de Naipe Multiplicativo por división.....	80
Figura 24. Evidencia del trabajo en equipo en el desafío matemático	81
Figura 25. Ejemplos para resolver proporcionalidad directa en división	84
Figura 26. Respuesta de los estudiantes	84
Figura 27. Ejercicios para resolver dibujando el Naipe Multiplicativo.....	86
Figura 28. Ejercicios abiertos de división con Naipes Multiplicativos	87

Figura 29. Ejemplos de problemas redactados por los estudiantes	87
Figura 30. Naipe Multiplicativo con números.....	89
Figura 31. Ejercicios para resolver con el método del esquema	90
Figura 32. Ejercicio 1 de la prueba final	91
Figura 33. Esquemas usados por los estudiantes	92
Figura 34. Ejercicio 2 de la prueba final	93
Figura 35. Ejemplos de respuestas dadas por los estudiantes	94
Figura 36. Ejercicio 3 de la prueba final	95
Figura 37. Ejemplos de respuestas dadas por los estudiantes	96
Figura 38. Red semántica para análisis de la entrevista	97

LISTA DE ANEXOS

	Pág.
Anexo A. Consentimientos informados.....	110
Anexo B. Formato de entrevista.....	111
Anexo C. Instrumento de resolución de problemas.....	112
Anexo D. Unidades didácticas	116
Anexo E. Transcripción de las entrevistas.....	135

1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

El presente trabajo de investigación surge desde la observación de las prácticas en el aula relacionadas con la resolución de problemas con estructura multiplicativa, las cuales han sido insuficientes para alcanzar los objetivos de aprendizaje. Se encontró que la memorización, la repetición y la presentación de contenidos descontextualizados generan en los estudiantes dificultades para construir aprendizajes significativos que representen un valor vital para la existencia colectiva e individual del estudiante.

La realidad en el campo de la enseñanza de las matemáticas en Colombia privilegia modelos de enseñanza-aprendizaje donde el proceso educativo se centra en la transmisión pasiva de contenidos, dejando a un lado la construcción, la investigación y la manipulación efectiva de los contenidos de aprendizaje. Desde lo anterior, los aprendizajes en matemáticas se reducen a la reiteración memorística de fórmulas para resolver situaciones u operaciones, lo que resulta en saberes descontextualizados que carecen de toda relación con la realidad vital de los estudiantes. Como afirma Conde (2019) es necesario realizar una revisión sustancial a las directrices gubernamentales que orientan la praxis docente, en referencia a la enseñanza de las matemáticas en general, y la enseñanza de los procesos de resolución de problemas de estructura multiplicativa en particular.

En este contexto, la enseñanza de las matemáticas en las aulas de clase es sinónimo de experiencias mecánicas que generan angustia y la construcción de obstáculos epistemológicos (Bachelard, 2000) que se traducen en bajo rendimiento académico, y, sobre todo en la concretización de procesos de desarrollo deficientes en lo relativo a las diferentes manifestaciones del razonamiento matemático.

La educación en matemáticas en Colombia no se distancia de lo descrito en líneas anteriores. Estudiantes que ven en las matemáticas una asignatura del plan de estudios con mínima o nula relación con su realidad fáctica, donde el error y el cuestionamiento son excluidos por ser impertinentes para la memorización de fórmulas y procedimientos, panaceas últimas del aprendizaje matemático. En concomitancia con lo referido, se identifica a su vez, oportunidades de mejora desde las metodologías aplicadas por los

docentes del área de matemáticas, para superar las metodologías tradicionalistas imperantes, desde aportaciones didáctico-metodológicas innovadoras. Lo anterior como vía para genera un cambio radical en el panorama histórico de la enseñanza de las matemáticas. Los problemas en el aprendizaje de las matemáticas como afirma Ortega (2021): “no son debidas a una única causa, o un único tipo de dificultad. Existen diversos factores que pueden dar lugar a diferentes dificultades en el aprendizaje de las matemáticas” (p. 13).

En términos concretos se pueden reconocer tres constantes en el rendimiento de los estudiantes en el área de matemáticas con referencia a la resolución de problemas de estructura multiplicativa, isomorfismo de medidas: Selección inadecuada de algoritmos y procesos operacionales de resolución; dificultades de comprensión lectora; memorización de fórmulas para solucionar problemas de estructura multiplicativa, sin llegar a una comprensión real de los mismos.

Las constantes mencionadas contribuyen a que, si bien los estudiantes puedan resolver efectivamente un problema determinado, no comprenden cómo resolver problemas diversos, errando tanto en la elección del algoritmo, como en la identificación del objetivo a resolver. Por ejemplo, la automatización que ejecutan los estudiantes en problemas cuyo enunciado comprende dos números; esto es, asocian esta estructura a hallar un producto sin identificar previamente el contexto del ejercicio o la intención del mismo, donde lo que se solicita es escribir un número que está explícito en el problema, sin necesidad de calcular un producto.

Paralelamente, los estudiantes presentan dificultades en la identificación del significado de los componentes de las operaciones; a la vez que, establecen estrategias para resolver problemas de manera incoherente y descontextualizada a la realidad que la situación plantea. Efectivamente, lo referido conduce directamente a que los estudiantes asocien la competencia de resolución de problemas con fórmulas y reglas preestablecidas que se tienen que aplicar para dar resolución a cualquier tipo de problema, desconociendo la lógica inherente a este tipo de actividades. En tal dirección, es notorio que los estudiantes presentan serias dificultades en sus procesos de comprensión textual, resultando en la desconexión arbitraria de los datos, la jerarquización errónea de la información, y, la identificación global del objetivo que la situación plantea desarrollar.

Ahora bien, para sustentar el problema se realizó una búsqueda de antecedentes relacionados con la resolución de problemas, el método COPISI y los obstáculos en el aprendizaje de estructuras multiplicativas, los cuales citamos a continuación.

Según Zapatera (2020) en su artículo *El método Singapur para el aprendizaje de las matemáticas. Enfoque y concreción de un estilo de aprendizaje*, evidencia que la aplicación didáctica del método Singapur representa una mejoría significativa en el desarrollo de los procesos de pensamiento relacionados a la resolución de problemas de estructura multiplicativa. La citada investigación fue adelantada en España bajo una metodología cualitativa de tipo hermenéutica, en donde la técnica de recolección de información fue por revisión documental sistemática de fuentes teóricas y empíricas.

Dentro del estudio, se parte de un análisis de los componentes teórico-didácticos que están correlacionados a la propuesta del método Singapur como son: los fundamentos teórico-conceptuales de Jerome Bruner, Zoltan Dienes y Richard Skemp; así como la explicación del concepto de currículo en espiral que se relaciona a las categorías de variación sistemática y perceptual y comprensión relacional. El estudio de Zapatera (2020) continúa planteando ideas que posibilitan pensar la adaptabilidad del método Singapur a contextos socio-educativos como el iberoamericano, reconociendo, en esta dirección, los antecedentes históricos que evidencian una incidencia positiva del método Singapur en los países cuya adaptación se ha sabido implementar de manera sistemática con el aparato curricular educativo.

Por otro lado, el trabajo en el fortalecimiento de las estructuras multiplicativas, término desarrollado por el pensador francés Vergnaud (2013), se identifica como crucial, ya que es base fundamental para operaciones más complejas en el proceso de aprendizaje del estudiante. En tal dirección, Ivars y Fernández (2016) afirman que el trabajo de fortalecimiento en estudiantes de 6 a 12 años en relación a problemas de estructura multiplicativa representa una mejoría notoria frente a estudiantes cuyo proceso no ha sido fortalecido o acompañado en este tipo de situaciones.

En adición, el desarrollo de situaciones problema implica para el estudiante un reto cognitivo y metacognitivo, puesto que a la par que exige la puesta en marcha de diversos

procesos de racionalización, comprensión y abstracción; éstos también implican que el estudiante debe ser consciente de sus procedimientos y procesos mentales, para hallar un algoritmo que sea coherente con lo que la situación problema exige. Por tanto, los autores recalcan la relevancia de los aportes de Vergnaud y su valor organizativo y sintético frente al tema de las situaciones de estructura aditiva y multiplicativa.

La categorización que realiza Vergnaud (1990) sobre los tipos de problemas multiplicativos es fundamental en términos conceptuales y didácticos para el desarrollo del presente proyecto de investigación. Las conclusiones de Ivars y Fernández (2016) permiten corroborar que un método eficiente para promover la comprensión de problemas con estructura multiplicativa, es el método COPISI; puesto que dicho método se erige sobre estructuras teóricas propias del constructivismo psicológico y pedagógico, donde el axioma principal es la noción de transformación de las estructuras cognitivas a partir de una mediación exitosa y de la interacción empírico-intelectual con el objeto de conocimiento.

En tal sentido, y en contraste con la realidad educativa colombiana, la evidencia empírica de investigaciones como la de Sanaguano (2022), Rambao y Lara (2019), y, Posso (2020), quienes manifiestan que la aplicación continua y sistémica del método COPISI (enmarcado dentro del enfoque Singapur) aporta al estudiante una experiencia coherente con su desarrollo cognitivo y con el desenvolvimiento biológico de sus funciones psíquicas superiores, aportando un proceso coherente de formación donde el estudiante constantemente confronta sus estructuras cognitivas con los nuevos insumos, experiencias y contenidos, resultando en una transformación sustancial de la psique del estudiante (Temporetti, 2018).

Correlativamente, puede afirmarse siguiendo los resultados de Ruíz y Lagos (2020) en su trabajo de investigación *Comprensión de la estructura multiplicativa en los estudiantes de grado sexto*. El estudio se llevó a cabo desde el enfoque metodológico cualitativo, de tipo hermenéutico, en donde se ejecutó una revisión bibliográfica que arrojó información de calidad para la construcción de secuencias didácticas necesarias para la enseñanza de las estructuras multiplicativas. Las autoras encontraron que la adecuada interpretación, análisis y resolución de estructuras multiplicativas en grados tempranos permite una mejor disposición cognitiva del estudiante para afrontar saberes y

competencias de mayor complejidad. Las estrategias de fortalecimiento (refuerzos, recuperaciones actividades online, ejercicios con material didáctico) evidencian una mejora significativa en la población objeto de estudio, que en su situación inicial encontraba una mortandad del 70% y el 80% en el área de matemáticas. Este trabajo de investigación, es un testimonio de la eficiencia de la aplicación de material concreto (digital) para fortalecer los procesos de aprendizaje de los estudiantes en relación al desarrollo de la competencia resolución de situaciones de estructura multiplicativa.

De igual manera, el trabajo de Ojeda (2019) *Un análisis de las estrategias empleadas por un grupo de sexto grado en la resolución de problemas de estructura multiplicativa*. La investigación se llevó a cabo desde el enfoque cualitativo y de tipo descriptivo, en donde participaron 28 estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa Jorge Issacs del Cerrito Valle, con edades de 10 a 15 años. Los instrumentos de recolección de información fueron las pruebas con explicación libre de los procedimientos, a fin de conocer las narrativas, perspectivas y toma de decisiones de los estudiantes.

Desde los hallazgos de posibilidad evidenciar la resolución de problemas de estructura multiplicativa como uno de los factores que inciden de mayor manera en estudiantes de básica primaria para su transición a grados de secundaria. La investigación se soporta sobre las teorías de Vergnaud, Puig y Cerdán y Obando relativas a la morfología de las estructuras multiplicativas. En las disertaciones de Ojeda (2019) se obtienen hallazgos que arrojan que es necesario enfatizar estrategias significativas que permitan al estudiante la comprensión de problemas de estructura multiplicativa, teniendo en cuenta que es una de las competencias fundamentales para saberes ulteriores. Lo anterior, posibilita reconocer la organicidad y secuencialidad del objeto matemático en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

En torno a los antecedentes investigativos relativos al empleo de la metodología COPISI el trabajo de Becerra (2021) titulado *El uso de material concreto como estrategia didáctica para favorecer el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes de 4-2 del Instituto Técnico Alfonso López, sede IV Centenario, de Ocaña*. Se planteó desde el enfoque metodológico cualitativo, exploratorio y deductivo, en donde participaron estudiantes grado cuarto de básica primaria. En el trabajo de campo se desarrolló una

propuesta pedagógica en la que el uso de material concreto permite la puesta en marcha de procesos y procedimientos que se adecuan coherentemente con las necesidades de aprendizaje de estudiantes de básica primaria en el área de matemáticas. La investigación arrojó que tras la aplicación de las estrategias didácticas basadas en el método COPISI, potencian en los estudiantes procesos de autorregulación cognitiva (metacognición) que mejoraron la comprensión de los estudiantes frente a diferentes operaciones matemáticas relacionadas a la resolución de problemas.

En este mismo marco de reflexiones, la investigación, ya mencionada, de Rambao y Lara (2019) *Efecto del método Singapur como una estrategia para el fortalecimiento de la resolución de problemas matemáticos*. La investigación se llevó a cabo desde el enfoque cuantitativo y casi experimental cuya población de estudio estaba constituida por 29 estudiantes de tercero de básica primaria de la ciudad de Barranquilla. La investigación parte del reconocimiento del componente de resolución de problemas como factor clave en el aprendizaje de las matemáticas y en las competencias fundamentales para la vida fuera de la escuela.

En otra dirección, la investigación analizada propone el método Singapur (COPISI) como opción metodológica que permite mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje en matemáticas, concretamente en la resolución de problemas. Los resultados, técnicas e instrumentos aplicados en este estudio sirven como antecedente para el desarrollo del presente proyecto de investigación. A su vez, en el estrato conceptual de la investigación se evidencian valiosos aportes en torno a términos claves como método COPISI, secuencia didáctica, resolución de problemas.

Atendiendo a lo anterior, las investigaciones referidas se vinculan con el presente proyecto de investigación en dos direcciones fundamentales: Las dificultades que presentan los estudiantes de básica primaria en la resolución de problemas con estructura multiplicativa; y el método COPISI como estrategia de fortalecimiento de las competencias relacionadas a la resolución de problemas con estructura multiplicativa.

En la primera dirección, los estudios precedentes ayudan a establecer un marco de referencia en relación a las dificultades constantes que presentan los estudiantes al momento de enfrentarse con situaciones problema, permitiendo reconocer la falta de

comprensión textual y el empleo de algoritmos erróneos como principales dificultades al momento de resolver una situación problema.

En la segunda dirección, los estudios evidenciaron que la eficiencia del método COPISI en el fortalecimiento de los aprendizajes matemáticos, en general, y de la competencia resolución de problemas, en específico, es sólida en la medida que la adaptación de este modelo didáctico ha implicado procesos de mejoramiento de los estudiantes en diferentes pruebas internacionales (PISA y TIMMS). Lo anterior, sustenta la propuesta de este proyecto de investigación de aplicar el método COPISI como estrategia para fortalecer la resolución de problemas de estructura multiplicativa.

En este orden de ideas, los antecedentes expuestos posibilitan contemplar experiencias metodológicas y teóricas que orientan la presente investigación hacia una propuesta pedagógica-didáctica que involucra el uso sistémico del método COPISI (Concreto – Pictórico – Simbólico, que consolida un proceso gradual y continuo de comprensión de las entidades y relaciones cuantitativas en la esfera de la matemática), como estrategia de fortalecimiento de las competencias relacionadas a la resolución de problemas de estructura multiplicativa.

Para lograr un vínculo orgánico entre los conocimientos algorítmicos y el desarrollo adecuado de operaciones en situaciones multiplicativas, es necesario exponer ante el estudiante un proceso que parta desde la dimensión concreta del objeto matemático hasta su simbolización abstracta, pasando por su representación pictórica. Lo cual permite que el estudiante reconozca, a través de su experiencia empírica e intelectual, la lógica misma del problema matemático.

Desde un enfoque institucional, puede evidenciarse que los bajos resultados de los estudiantes de básica primaria obtienen al presentar pruebas tipo ICFES son consecuencia de diversas situaciones emparentadas al desajuste entre estrategias de enseñanza anacrónicas y aprendizajes mal contruidos donde el estudiante, generalmente, se sumerge en un mar de dudas e incógnitas. En este tipo de pruebas valorativas es notoria la incomprensión que presentan los estudiantes, frente a problemas de estructura multiplicativa, lo que se debe, entre otros factores, a la falta de interiorización de los métodos y algoritmos adecuados para comprender y resolver un problema.

La población objeto de estudio son estudiantes de grado 5 de primaria de rango etario oscila entre los 9 – 11 años. El plantel educativo en el que se localiza esta población pertenece a la Institución Educativa Alberto Castilla de la ciudad de Ibagué, que ha ostentado en su consolidado histórico de las pruebas de estado resultados bajos y básicos en los componentes asociados al área de matemáticas.

A partir de este contexto, se evidencia la necesidad de fortalecer en una edad temprana las capacidades para comprender, operar y resolver con eficiencia problemas con estructura multiplicativa, puesto que es un saber fundamental para los aprendizajes matemáticos más complejos.

En tal dirección, las pruebas que sustentan la necesidad del presente cuestionamiento se encuentran en los bajos resultados que presentan los estudiantes de grado quinto en los exámenes de competencias que se aplican al interior de la vida escolar en el aula de clase y en las pruebas de estado saber 5 y evaluar para avanzar.

En este espectro, el informe del cuatrienio 2014-2017 de carácter histórico-comparativo publicado en el año 2018, identifica aprendizajes a fortalecer en el campo de resolución de problemas del componente numérico variacional. Los siguientes datos evidencian lo anterior mencionado en la Institución Educativa Alberto Castilla de la Ciudad de Ibagué Tolima:

Tabla 1. Evaluar para avanzar 2022 - Institución Educativa Alberto Castilla

Grado	5
Instrumento	Matemáticas
Cuadernillo	1

Componente	Competencia	Promedio de % de respuestas			
		5°1	5°2	5°3	5°4
Numérico Variacional	Resolución de problemas	33,82	25,0	20,31	47,5
Promedio IE Alberto Castilla		31,66			

Nota: (ICFES, 2022).

Tabla 2. Saber 5° - Institución Educativa Alberto Castilla

Competencia	Resolución de problemas
Componente	Número variacional
Aprendizaje	Resolver y formular problemas multiplicativos de adición repetida, factor multiplicante, razón y producto cartesiano.

Prueba Saber	% Respuestas incorrectas		
	IE Alberto castilla	Ibagué	Colombia
2014	40,5	37,4	43,4
2015	39,9	37,3	44,3
2016	39,0	37,0	40,0
2017	54,3	47,7	51,1

Nota: (ICFES, 2022).

Partiendo de la información precedente se propone que el fortalecimiento en la competencia de resolución de situaciones problema que involucran la multiplicación implica una reestructuración sustancial de los paradigmas mismos que orientan los procesos de enseñanza-aprendizaje en el interior de las aulas del país. Para esto, investigaciones como la de Posso (2020) señalan que propuestas metodológicas como Singapur-COPISI son estrategias efectivas para incentivar en el estudiantado un aprendizaje autónomo donde se privilegie la construcción autónoma y crítica del conocimiento, reconociendo el valor fundamental que tiene éste para la existencia individual y colectiva del sujeto humano.

En consecuencia, se evidencia que si bien la academia colombiana, y en menor medida las entidades que regulan la educación en el país, han avanzado en el reconocimiento de opciones pedagógicas y metodológicas alternas como el método COPISI, la aplicación de éstas a la realidad escolar aún dista mucho de ser eficiente. Por ejemplo, para los docentes y estudiantes de quinto de primaria de la Institución Alberto Castilla de Ibagué, la aplicación concreta de dicho método es una posibilidad distante, debido a factores sociales, educativos y didácticos que influyen en la perpetuación de prácticas anacrónicas de enseñanza que desdibujan la necesidad perentoria de un cambio en el paradigma educativo de las matemáticas.

Para ello, la construcción de estrategias de enseñanza-aprendizaje que vinculen el método COPISI puede representar un paso decisivo en el cambio de paradigma de la enseñanza de la matemática. Desde la descripción realizada al problema objeto de estudio aquí planteado, puede exponerse la pregunta de investigación que coordinará el desarrollo del análisis a realizar:

¿Cuál es el aporte del método COPISI como estrategia metodológica en la resolución de problemas con estructuras multiplicativas: Isomorfismo de medidas, en los estudiantes de quinto grado de la Institución Educativa Técnica Alberto Castilla de la ciudad de Ibagué?

2 JUSTIFICACIÓN

Las metodologías de enseñanza vinculadas a los aprendizajes de las matemáticas son usualmente relacionadas a actividades memorísticas y repetitivas que generan en los educandos una actitud de rechazo, o, en casos menos extremos, de tensión y miedo hacía las clases de esta área del plan de estudios. Sin embargo, las matemáticas manifiestan un conjunto de saberes y competencias que trascienden lo memorístico y se vinculan a la vida práctica, al entendimiento de la realidad y a la comprensión del conocimiento científico.

En tal dirección, la presente investigación se propone fortalecer las estrategias de enseñanza y las actividades de aprendizaje a través de la implementación de una unidad didácticas construidas desde los principios del método COPISI para la resolución de situaciones de estructura multiplicativa. Teniendo en cuenta que el método COPISI se estructura desde los principios teóricos del constructivismo, se sostiene la validez de su axioma fundamental, el cual expresa que la consolidación de los aprendizajes en el área de matemáticas obedece a un proceso de transformación continua y progresiva de las estructuras cognitivas, mediante la interacción eficiente de estímulos experienciales y de mediación cultural. Esto es, la progresión desde lo concreto, pasando por lo pictórico y llegando a lo simbólico, como forma de comprender las realidades matemáticas en sus tres modalidades de manifestación.

Lo anterior, buscando una mejoría significativa en los aprendizajes de los estudiantes de grado quinto de básica primaria relacionados a la resolución de problemas de estructuras multiplicativas; y atendiendo, a los bajos resultados que obtienen los estudiantes en las pruebas saber y Evaluar para avanzar 311. En este tipo de pruebas los estudiantes manifiestan dificultades para identificar el algoritmo adecuado para resolver algún tipo de problema, además de comprender de manera poco acertada el planteamiento mismo del problema.

En torno a esta situación, se evidencian serias dificultades en los procesos de aprendizaje relacionados a la resolución de situaciones multiplicativas, componente sustancial en las competencias del área de matemáticas. Esto, a razón de las prácticas descontextualizadas de las exigencias sociales, culturales e históricas que imperan en las instituciones educativas de la ciudad Ibagué en relación a la enseñanza de las matemáticas.

Esto es, la falta de relación que los contenidos curriculares, y las estrategias de enseñanza que se emplean para desarrollarlos, tienen frente a las necesidades y expectativas que los estudiantes presentan en relación a su contexto familiar, personal y social.

Por otro lado, la presente investigación posee un valor innovador en la medida que se propone implementar estrategias didácticas fundamentadas desde la metodología COPISI para fortalecer y mejorar los aprendizajes vinculados a la resolución de problemas de estructura multiplicativa; atendiendo, desde estos términos, a las dificultades de aprendizaje que se evidencian en los estudiantes de quinto de básica primaria para resolver este tipo de actividades: comprender el planteamiento de la situación y determinar los algoritmos correctos para dar respuesta a este tipo de ejercicios.

En tal sentido, la propuesta aquí planteada posibilita una nueva forma de asumir la enseñanza de los problemas de estructura multiplicativa dentro del aula, proponiendo el uso de estrategias didácticas que permitan un aprendizaje significativo que se construya de manera progresiva a partir del análisis de situaciones desde lo concreto, pasando por lo pictórico y llegando a lo simbólico; donde el estudiante postule, analice y compruebe la validez o no validez de los algoritmos empelados para la solución del problema. Esto, tomando en cuenta la importancia cognitiva que representan los materiales físicos para la comprensión lógica, contextualizada y metacognitiva de las matemáticas.

Desde lo expuesto, el ejercicio investigativo objeto de desarrollo proyecta ofrecer al sector educativo colombiano una opción didáctica concreta (material físico y digital) para mejorar los procesos de enseñanza – aprendizaje en relación a situaciones multiplicativas. Correlativamente, esta investigación permitirá fomentar nuevas perspectivas de aprendizaje dirigidas a la construcción de conocimientos significativos relacionados a la resolución de problemas de estructura multiplicativa, aportando una nueva forma de concebir y asumir la forma de enseñar y aprender en el área de matemáticas, teniendo en cuenta la propia maduración cognitiva del estudiante y el progreso mismo del pensamiento matemático en la humanidad.

Las estrategias que se plantean implementar para fortalecer los procesos de aprendizaje en estudiantes de edad escolar de 9 – 11 años, permitirán orientar las matemáticas desde su dimensión lógica y vinculada con la comprensión de la realidad; es

decir, desde su valor concreto, relacionando con su manifestación pictórica para que, posteriormente, el estudiante construya su existencia simbólica en sus esquemas cognitivos.

En tal contexto, la investigación plantea significar un nuevo espectro de prácticas de enseñanza y aprendizaje para la resolución de problemas de estructura multiplicativa, implementando de manera concreta secuencias didácticas elaboradas desde los principios fundamentales del método COPISI, lo que posibilitará a los docentes de matemáticas tener en su disposición un recurso didáctico que dé apertura a un proceso de aprendizaje significativo que permita comprender de manera contextualizada la lógica implícita en las situaciones de estructura multiplicativa.

Por tanto, frente a esta situación se plantea una orientación fundamentada en el paradigma constructivista que asume el conocimiento como un saber que se fabrica de manera procesual en una interacción directa con el entorno social. Desde esta perspectiva, se adoptan propuestas pedagógicas y didácticas como el método COPISI como alternativa que puede generar mejorías significativas en relación a los procesos de aprendizaje en el área de matemáticas.

De igual manera, el impacto de la investigación radica en identificar las dificultades que presentan los estudiantes de grado quinto de básica primaria, en torno a la resolución de problemas de estructura multiplicativa. A la vez que, aportar recursos y estrategias didácticas que fortalezcan los aprendizajes en relación a la competencia resolución de problemas. Además, aporta un análisis teórico-didáctico sobre la adaptabilidad del método COPISI en el ámbito educativo colombiano, con el fin de promover una implementación de éste en las prácticas de enseñanza de las matemáticas en el país.

Bajo las anteriores consideraciones, el estudio conlleva un análisis de las necesidades de aprendizaje, obstáculos epistemológicos, falencias didácticas, que permitirá tener un antecedente que posibilite ejecutar acciones de mejoramiento desde perspectivas ya señaladas y estructuradas desde un análisis teórico-metodológico riguroso. Asimismo, el estudio se sustenta en la idea que expresa que el aprendizaje de los estudiantes se potencia a partir de la interacción con herramientas didácticas que permiten una interacción directa con los contenidos de aprendizaje, posibilitando la manipulación, experimentación y significación del conocimiento desde la labor activa del estudiante y la mediación

inteligente y eficiente del maestro, generando un espacio dinámico de construcción y transformación del conocimiento. Finalmente, se propone la creación de recursos de aprendizaje que fortalezca la resolución de problemas de estructura multiplicativa en la dimensión isomorfismo de medidas. Aportando experiencias de aprendizaje significativo que ayuden a vincular las matemáticas a escenarios reales y situaciones concretas de la vida cotidiana.

3 OBJETIVOS

3.1 OBJETIVO GENERAL

Describir la apropiación del método de COPISI (concreto, pictórico simbólico) como aporte en la resolución de problemas de estructuras multiplicativas: isomorfismo de medidas desde las narrativas de los estudiantes de quinto grado de básica primaria de la Institución Educativa Técnica Alberto Castilla de la ciudad de Ibagué.

3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Reseñar los diferentes procesos y estratos cognitivos y procedimentales empleados por los estudiantes para la resolución de problemas de estructuras multiplicativas: isomorfismo de medidas desde un instrumento lápiz y papel.

Analizar el aporte de la unidad didáctica basada en el método COPISI sobre las estrategias que aplican los estudiantes para resolver problemas de estructuras multiplicativas: isomorfismo de medidas.

4 MARCO CONCEPTUAL

En las siguientes líneas se expone el sustrato conceptual sobre el que se erige teóricamente la presente investigación, en el apartado se abordan las diferentes perspectivas científicas sobre las categorías que articulan el estudio. Se inicia con la dimensión conceptual de la investigación dando desarrollo a la primera categoría de trabajo: método COPISI. La categoría del método COPISI se apoya en la propuesta de fortalecimiento en la competencia resolución de problemas de estructura multiplicativa, analizando cómo el trabajo continuo desde material concreto, pasando luego a la asociación pictórica y a la simbolización de los contenidos, posibilita al estudiante una comprensión efectiva del funcionamiento lógico de los problemas de estructura multiplicativa.

Posteriormente, se expone el concepto de estructura multiplicativa, teniendo como referente teórico los aportes que sobre el tema presenta Vergnaud (1990). De igual manera, se expone el concepto de estructura multiplicativa desde su naturaleza teórica y desde su dimensión como competencia en el área de matemáticas.

4.1 EL MÉTODO COPISI EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS: HISTORIA, DEFINICIÓN Y PERSPECTIVAS

4.1.1 El Método COPISI Como Estrategia Didáctica En La Enseñanza De Las Matemáticas.

El método COPISI, acrónimo de Concreto – Pictórico - Simbólico, se inscribe dentro del conjunto de estrategias que el gobierno de Singapur implementó a inicios de los años 90 con el fin de mejorar los aprendizajes en el área de matemáticas para así contar con excelentes profesionales en diferentes áreas. Históricamente, Singapur presentaba, como en varios países del hemisferio americano, dificultades en los aprendizajes del área de matemáticas por parte de los estudiantes, en la década del 80 del siglo pasado el gobierno de Singapur se propone reevaluar y redirigir su enfoque en la enseñanza de las matemáticas, originando la revolución, una década más tarde, del método COPISI.

En este sentido, la estrategia buscó aplicarse desde la infancia de manera secuencial y propiciando la constitución de espacios de experimentación directa con los contenidos del área (Millar, 2019). Del éxito obtenido por esta estrategia en el país asiático el mundo centró su atención en ella y empezó a exportarse a diferentes latitudes del globo, obteniendo resultados positivos en los sistemas educativos que pensaron su inclusión dentro de las estrategias de enseñanza.

Por otro lado, en correlación con la secuenciación de aprendizajes la estructuración del currículo en espiral potencia el desarrollo significativo de las competencias matemáticas, haciendo a un lado la memorización y mecanización de aprendizajes (Millar, 2019). El método COPISI es una forma de aprendizaje de las matemáticas, pero a su vez, es también una forma de enseñanza en la que se establece una conexión con el mundo real, la vida y la historia a través de didácticas que se focalizan en el manejo de recursos concretos y en visualización y comprensión de problemas matemáticos (Delgado et al., 2018).

El método COPISI para la enseñanza de las matemáticas establece el aprendizaje como un fenómeno progresivo, que parte de la manipulación concreta de recursos que posibilitan una experiencia directa con algoritmos y objetos matemáticos, pasando luego a su semi-simbolización a través de material pictórico que posibilita el desarrollo de nociones y representaciones mentales; finalizando en la simbolización que es el estadio en el cual ya se domina y comprende el objeto matemático, posibilitando resolver diversos tipos de operaciones.

4.1.1.1 Lo concreto: manipulación, experimentación y realidad.

Como se pudo evidenciar en la presentación de los referentes teóricos del método COPISI, éste toma ideas como la teoría del aprendizaje por descubrimiento de Jerome Bruner, o la perspectiva piagetiana acerca del desarrollo por etapas en el niño (Delgado et al., 2018), estructurando una propuesta pedagógico-didáctica en la cual se organizan los aprendizajes y sus respectivas experiencias de manera tal que se dé apertura a un conocimiento significativo y coherente.

En tal sentido, la secuencia Concreto – Pictórico – Simbólico, se describe como una estrategia que desarrolla el pensamiento matemático desde la manipulación de objetos concretos, que le dan al niño la capacidad de comprender las operaciones matemáticas o resolver problemas, a través de la modelización de conceptos y la visualización de procesos cuantitativos (Gajardo et al., 2018). Lo anterior, priorizando la significación real que los estudiantes adjudican al trabajo que realiza.

La etapa concreta toma en cuenta que el niño, siguiendo a Piaget y a Ausubel, es un investigador de la realidad, que la manipulación física de los materiales le permite a sus estructuras cognitivas establecer modelos de comprensión y orientación, que, posteriormente, se establecerán como esquemas ideológicos que determinarán la relación del ser con el mundo.

En efecto, la progresión que propone el método COPISI posibilita una experiencia que lleva al estudiante de lo simple a lo complejo, de lo concreto a lo abstracto, en un devenir progresivo de experimentación, manipulación, transformación y comprensión de los objetos matemáticos (Gajardo et al., 2018).

Sin embargo, esta etapa no solo consiste en el empleo de materiales concretos en las clases, sino, antes bien, en el uso estratégico y planificado de recursos que estén dispuestos inteligentemente para predisponer al estudiante a una experimentación efectiva con el contenido que es objeto de estudio (Carmona-González, 2021).

En esta etapa de la progresión el docente debe propiciar un espacio en el cual el estudiante sea el agente activo durante todo el proceso. Esto es, el estudiante estará en constante experimentación con los objetivos y recursos que el docente a dispuesto para su aprendizaje. Aquí, el docente es un orientador que potenciará las experiencias de los estudiantes, permitiendo identificar fortalezas y oportunidades de mejora en la formación cognitiva del estudiante.

Desde este marco, Carmona-González (2021) define el material concreto como todo aquel objeto físico de carácter didáctico que posee tres categorías o especies de clasificación: 1. Según su funcionalidad. 2. Virtual. 3. De acuerdo al tipo de tarea (Carmona-González, 2021). En sus tres especies, el material concreto coadyuva a establecer

dentro del aula experiencias significativas con la cotidianidad, poniendo en relieve el vínculo necesario entre los saberes y la vida misma.

4.1.1.2 Lo pictórico: interiorización y representación.

El estadio pictórico se denomina como una fase de la progresión en la cual el estudiante inicia el proceso de interiorización y representación del objeto estudio; es decir, en esta etapa de aprendizaje la representación de las ideas posibilita que el estudiante inicie procesos de codificación y decodificación de signos, imágenes o representaciones que, de manera secuencial, va fortaleciendo la apropiación de los saberes y operaciones.

El manejo de material pictórico posibilita la constitución de procesos de interpretación y de asociación en los que se empieza a encontrar una lógica interna en los objetos que se perciben, además de intuir sus posibilidades y relaciones. En términos de Ramírez (2020) la progresión hacia lo abstracto implica un contacto con representaciones concretas que permitan al niño establecer relaciones, calcular, operar, desde el uso de construcciones icónicas que faciliten su paso hacia el manejo de nociones abstractas.

Los recursos pictóricos que se manejen deben ser llamativos, con contornos bien limitados, deben estar relacionados al contexto vital del estudiante, y emplear colores vistosos que llamen la atención perceptiva-sensorial del estudiante. En este orden de ideas, al igual que con el manejo de material tangible, el material pictórico está estructurado a conseguir objetivos determinados, atendiendo a la situación en la que se desarrolla la unidad de contenidos que se piensa desarrollar.

La experimentación con recursos pictóricos potencia en el estudiante el desarrollo de procesos cognitivos donde se da apertura a la comprensión de situaciones, problemas y nociones fundamentalmente abstractas, constituyendo así el paso de lo simple a lo complejo. En efecto, como afirman Moreno y Ortega (2018), lo pictórico ayuda al estudiante a progresar en su desarrollo cognitivo puesto que facilita la interacción con la realidad desde otro tipo de experiencia, generando un proceso activo de asociación y representación.

Lo pictórico constituye otra modalidad de experimentación con la realidad; una forma de experimentación en la que se interiorizan los estímulos sensoriales y se potencia

la constitución de esquemas más complejos de decodificación en el cuales se da apertura al establecimiento de leyes, esto es, a la comprensión de normas universales para la resolución de diversos problemas (Moreno y Ortega, 2018).

4.1.1.3 Lo simbólico y lo abstracto en el pensamiento del niño.

En la secuencia propuesta por el método COPISI la última instancia es el estadio simbólico en el que se inicia con el trabajo de entidades y relaciones abstractas, configurando las bases de toda forma de cognición superior. En este estadio se propende por la generación de representaciones mentales en las cuales se comprende la naturaleza de entidades numéricas, relacionales; esto es, manifestaciones que trascienden la realidad inmediata, la temporalidad misma del sujeto (Álvarez y Acuña, 2018).

En el método COPISI lo simbólico implica la experimentación previa del estudiante con material que lo vincula a experiencias reales, concretas, de manera tal que al acercarse a conceptos simbólicos pueda llevar a cabo procesos de abstracción, donde pueda identificar la lógica interna de cada objeto o realidad.

Además de codificar y decodificar íconos o signos, el estudiante funda procesos de comprensión en los que establece relaciones con realidades no contiguas; esto es, como mencionan De Barros y Hernández (2016), se comprenden representaciones por medio de significantes abstractos que, se encuentran ausentes de la situación de enunciación del problema.

Lo simbólico es el momento en el cual se pueden aplicar diferentes estrategias y saberes a operaciones o problemas. Los fenómenos ya no se comprenden solamente a través del material sensorial y de las experiencias perceptivas; sino, a través de la reconstrucción cognitivo-racional del fenómeno y de sus rasgos sustanciales, por medio de un proceso de abstracción que forma en la mente una idea del mismo. Por tanto, la simbolización facilita mayor maleabilidad del fenómeno por parte de la mente del sujeto porque el fenómeno no está fuera de él, está en su interior para poder ser analizado y transformado según los límites cognitivos del sujeto.

En términos piagetianos, lo simbólico implica representaciones de objetos que no están propiamente en el campo perceptivo del sujeto, son huellas de esquemas de

comprensión que expanden el pensamiento y brindan mayor dinámica a las estructuras cognitivas para adaptarse a cualquier tipo de situación real (De Barros y Hernández, 2016).

En el método COPISI lo simbólico implica el manejo de un lenguaje claro (tanto verbal como numérico) a la vez que el planteamiento de situaciones que sean cercanas al contexto del educando. Por tanto, en la simbolización el estudiante pone en práctica lo interiorizado en las dos etapas previas, complejizando, a la vez, sus procesos de comprensión y sus procedimientos de resolución. El niño siempre ha estado rodeado de símbolos, su mundo a la par de biológico es cultural y también histórico, y, a partir de esta interacción con su entorno su experiencia va expandiéndose y sus esquemas de referencia se especifican otorgando significado a su realidad (De Barros y Hernández, 2016).

En síntesis, el método COPISI puede ser sinónimo de un cambio tangencial en la historia de la enseñanza de las matemáticas en Colombia. En consecuencia, la aplicación estratégica de éste pueda superar graves óbices que se han mantenido como constantes en la realidad educativa colombiana. Por ejemplo, la mecanización de los aprendizajes por medio de clases monótonas y descontextualizadas; el desinterés de los jóvenes por el aprendizaje de las matemáticas; y, por último, pero no menos relevante, el temor que el área de matemáticas representa para algunos estudiantes.

4.2 LOS PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA EN LOS PROCESOS DE ENSEÑANZA – APRENDIZAJE.

El concepto de problema de estructura multiplicativa es un término de gran relevancia en la enseñanza de las matemáticas desde las últimas décadas del siglo pasado. El vocablo empieza a tomar relevancia en la década del 80 del siglo pasado, consolidándose en el año 1983 con la introducción por parte de Vergnaud de la idea de campo conceptual (Ivars y Fernández, 2016). Vergnaud definió en toda operación que requiere el empleo de procedimientos, conceptos y representaciones, estos se vinculan estrechamente, y las situaciones o planteamientos problemáticas hacen que dicho vínculo pueda ser diferente (Ivars y Fernández, 2016).

Por otro lado, y como se señaló líneas arriba, los aportes de Ivars y Fernández (2016), permiten reconocer y comprender el sustrato teórico que soporta el concepto de

problema de estructura multiplicativa desde su origen en los planteamientos del psicólogo francés Vergnaud (1990) quien concibe esta acepción como un conjunto de situaciones que implican a su vez un conjunto de operaciones de orden aditivo o multiplicativo que permitan la resolución de las situaciones planteadas.

De igual manera, dentro de estos argumentos se señala con marcado énfasis que las situaciones deben poseer un valor real; esto es, estar contextualizados a posibles circunstancias reales, de la vida diaria. En la teoría de Vergnaud (1990) el objetivo de proponer el término de campo conceptual es el de brindar un marco de referencia a las investigaciones que indagan sobre la conceptualización de lo real; esto es, sobre el conjunto de actividades cognitivas complejas relacionadas al desarrollo del pensamiento científico, abstracto y técnico (Vergnaud, 1990).

En este sentido, los citados aportes pueden categorizarse como un sistema teórico cognitivista que comprende que la resolución de un problema matemático (estructura aditiva o estructura multiplicativa) implica la interrelación de diferentes conceptos, procedimientos, reglas y operaciones, generando esquemas que funcionarán como principios para la resolución de este tipo de situaciones. Además, Vergnaud (1990) identifica dos tipos de situaciones: 1. Las situaciones en las cuales el sujeto posee todo el marco de competencias necesarias para el desarrollo del planteamiento; 2. Las situaciones en las que el sujeto no posee todas las competencias necesarias para iniciar el proceso de resolución (Vergnaud, 1990). En este contexto, se propone el concepto de esquema como una organización que no sufre variación en ninguna situación, y que representa el sustrato cognitivo fundamental para la aplicación de procedimientos de resolución.

En coherencia con lo anterior, las situaciones de estructura multiplicativa implican un complejo de elementos interrelacionados que comprenden operaciones multiplicativas, divisivas, aditivas y sustractivas para resolver un planteamiento que se enuncia generalmente de forma verbal. Para Vergnaud (1990), la secuencia de aprendizaje progresa desde la consolidación de las situaciones de estructura aditiva, para, posteriormente, desarrollar las situaciones de estructura multiplicativa, que implican el resto de operaciones.

Finalmente, el planteamiento de problemas posibilita al estudiante relacionar diferentes elementos en situaciones cercanas a la realidad cotidiana de cada uno. Es decir, los problemas de estructura multiplicativa generan estímulos cognitivos que fortalecen en el estudiante el establecimiento de relaciones con diferentes componentes generando conocimiento asociativo, relacional y operativo (Alzate et al., 2012). Asimismo, los problemas de estructura multiplicativa configuran una estrategia para generar esquemas que posibilitan al estudiante poner en práctica los saberes y competencias desarrolladas, generando un dominio en la resolución de este tipo situaciones. Lo anterior, implica la construcción de modelos controlados y estratégicos que establece plasticidad a las estructuras cognitivas para adaptarse y significar desde sus experiencias y referentes previos la realidad a la que se enfrenta (Echeverry y Cumbal, 2016).

4.2.1 Estructura isomorfismo de medidas

En la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990, 2013) se identifican tres tipos de estructuras multiplicativas:

I) Isomorfismo de medidas, problemas cuya estructura consiste en una proporción entre dos espacios de medidas M_1 y M_2 ; II) Un solo espacio de medidas, problemas en los que se establece una correspondencia entre dos cantidades y un operador escalar designado por la palabra veces, y III) Producto de medidas, problemas cuya estructura consiste en la composición cartesiana de dos espacios de medidas M_1 y M_2 en un tercero, M_3 . (Ivars y Fernández, 2016, p. 11)

El presente proyecto de investigación se centró en la primera tipología, isomorfismo de medidas; puesto que, en el ámbito escolar la estructura isomorfismo de medidas presenta una amplia presencia al ser la más utilizada en los procesos de formación en el área de matemáticas (Polo-Blanco et al., 2020). Ahora bien, los problemas de isomorfismo de medidas consisten en identificar una cantidad dentro de una relación de cuatro cantidades (Ivars y Fernández, 2016). A su vez en la estructura de isomorfismo de medidas se presentan cuatro tipologías: multiplicación, división partitiva, división medida y regla de tres (Ivars y Fernández, 2016).

En cuanto a los problemas de isomorfismo de medidas estos Se caracterizan porque aparecen dos magnitudes extensivas y una intensiva siguiendo la relación: (Extensiva 1) x Intensiva= Extensiva 2. Existen tres categorías en función de la incógnita: (1) multiplicación: la cantidad desconocida es la cantidad Extensiva 2 (“Tengo 4 estantes y 5 libros en cada estante, ¿cuántos libros tengo en total?”); (2) división-reparto: la cantidad desconocida es la cantidad Intensiva (“Tengo 4 estantes y 20 libros repartidos por igual en cada estante. ¿Cuántos libros hay en cada estante?”); (3) división- agrupamiento: la cantidad desconocida es la cantidad Extensiva 1 (“Si en la clase hay 20 libros en total, y en cada estante de la clase hay 4 libros, ¿cuántos estantes hay?”). (Polo-Blanco et al., 2020, p. 347)

Se concluye que el grado dificultad de los problemas de isomorfismo de medidas depende de variables tales como el tipo de números que se emplean y las particularidades en la formulación de los problemas. Según Ivars y Fernández (2016) en una escala de dificultad los problemas de isomorfismo de medidas ocuparían el nivel más bajo, siendo los más sencillos; los problemas de producto cartesiano el más alto, siendo los de mayor complejidad; ocupando un nivel intermedio los problemas de comparación multiplicativa. En coherencia con lo anterior, Polo-Blanco et al., (2020) manifiestan que en los problemas de isomorfismo de medidas para los estudiantes de 11 a 16 años es más fácil identificar problemas de división que problemas de multiplicación, siendo las estrategias dominantes para la resolución de los problemas las de conteo y modelización, y, en menor medida, el empleo de algoritmos.

4.2.2 Los problemas de estructura multiplicativa como competencia en el área de matemáticas

En Colombia la educación por competencias hace eco de transformaciones sustanciales de los sujetos como entes activos en la toma de decisiones. En consecuencia, este modelo de educación empieza a establecerse en el país en la década de los 90 cuando el país surcaba por un periodo de profundos cambios socio-económicos y políticos (Alzate, 2021).

La adopción de la educación por competencias en Colombia (con sus tres enfoques el saber, el hacer y el ser) inicia en los últimos decenios del siglo XX (Alzate, 2021) implicando un reto educativo para un país que había permanecido fiel a un paradigma tradicionalista desde los tiempos de la colonia. Lo anterior, con el objetivo de modernizar las prácticas de enseñanza que empezaban, ya en las últimas décadas de este siglo, a manifestar un cansancio radical y una pérdida de eficiencia dramática frente a un mundo cada vez más exigente de sujetos capaces de actuar y transformar.

Consecuentemente, la educación por competencias busca ser un enfoque propositivo en el cual más que acumular conocimientos, se potencie el desarrollo de posibilidades cognitivas que sean sinónimo de transformaciones sociales, culturales y económicas (García, 2011). En tal sentido, la educación por competencias se centra en el desarrollo de capacidades adaptativas (García, 2011) que permitan al sujeto humano responder de manera asertiva ante las exigencias de su entorno social. Lo anterior, implica el dominio del sujeto sobre instrumentos y prácticas que le permitan interrelacionar conocimientos y situaciones reales en función de soluciones constructivas de naturaleza holística y ligadas de manera estrecha al contexto (García, 2011).

De igual manera, las competencias vinculan diferentes saberes y prácticas en unidades que posibilitan la comprensión de diversos problemas reales de manera dinámica y multifacética. Aquí, no se enseña para memorizar una fórmula, sino para encontrar el procedimiento adecuado que dé solución a un problema que se ha planteado o identificado. Las competencias no se desarrollan de manera abstracta, sino siempre vinculadas a situaciones específicas, fenómenos concretos, que permitan poner de relieve el valor de la situación y del conocimiento que se emplea para su desarrollo (García, 2011).

Por su parte, la resolución de problemas de estructura multiplicativa se constituye como competencia que debe ser desarrollada por los estudiantes en su curso de educación formal por su importancia en el valor concreto de las matemáticas para la vida fáctica de los sujetos (Bados y García, 2014). En tal sentido, este tipo de problemas son pensados en el marco de un sistema educativo por competencias que se puede definir como un sistema pensado para desarrollar saberes, actitudes, técnicas pensadas para ser aplicadas en contextos reales.

Como competencia la resolución de problemas se plantea para que el estudiante desarrolle las capacidades idóneas para resolver cualquier tipo de situación en su contexto vital. Es decir, la competencia resolución de problemas no se plantea para que el estudiante memorice un procedimiento, sino para que resuelva una situación concreta aplicando, desde un proceso de comprensión-interpretación, un conjunto de operaciones que pueden dar solución al problema en cuestión.

El concepto de competencia en el campo educativo posee una naturaleza plurisémica que puede rastrearse en tres enfoques que lo estructuran desde una perspectiva diferente: enfoque conductista, enfoque genérico, enfoque cognitivo (Mulder et al., 2008). Para los fines de esta investigación nos centraremos en el tercer enfoque (cognitivo), en el que se entiende por competencia las estrategias mentales de las cuales dispone un sujeto para resolver determinada actividad. En términos de Mulder et al. (2008) son los recursos mentales que los individuos emplean para realizar las tareas importantes, para adquirir conocimientos y para conseguir un buen desempeño.

En el ámbito educativo colombiano el concepto de competencia se engloba dentro de una categoría más amplia estándar básico de competencia que comprende una pauta de lo que debe saberse y hacerse en un contexto de evaluación y mejoramiento de habilidades y conocimientos. Desde el MEN (2006) los estándares básicos de competencia se comprenden como:

Los parámetros de lo que todo niño, niña y joven debe saber y saber hacer para lograr el nivel de calidad esperado a su paso por el sistema educativo y la evaluación externa e interna es el instrumento por excelencia para saber qué tan lejos o tan cerca se está de alcanzar la calidad establecida con los estándares. (p. 9)

Las competencias en matemáticas están pensadas para desarrollar procesos cognitivos relacionados al razonamiento, la modelación, la comunicación matemática, la formulación y resolución de problemas (Iriarte, 2011). La resolución de problemas toma relevancia en las últimas décadas al ser objeto de numerosas investigaciones en el campo cognitivo y curricular (Iriarte, 2011) que buscan fortalecer estos procesos (razonamiento,

comprensión de problemas, modelación) y posibilitar alternativas didácticas. Entonces, la resolución de problemas, de manera específica, como refiere Iriarte (2011) citando a Schoenfeld (1985), Alferi (1993) y Pozo (1994) se define como una situación que precisa de una solución, sin tener una hoja de ruta clara y preestablecida para ello. En este sentido, la resolución de problemas combina una gran diversidad de elementos, capacidades, reglas y conceptos que deben ser ubicados de manera lógica según las exigencias intrínsecas de cada problema en específico. Por último, la competencia resolución de problemas es una reflexión y valoración continua que permite tomar decisiones para alcanzar una resolución (Iriarte, 2011).

4.3 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La resolución de problemas es un componente fundamental en el desarrollo del pensamiento matemático y cuantitativo, puesto que permite vincular operaciones matemáticas a situaciones contextualizadas dotándolas de un valor vital y de significado real. Esto se plantea con el objetivo de que el estudiante desarrolle conocimientos matemáticos desde una perspectiva transversal que abarque todas las áreas del conocimiento, a la vez que, fortalezca sus competencias de interpretación y comprensión de textos y realidades (Patiño et al., 2021).

De igual manera, la resolución de problemas se constituye como núcleo esencial en los esquemas curriculares, puesto que implica transformar la percepción abstracta de las matemáticas por un conocimiento relacionado con experiencias familiares para los estudiantes que permitan madurar sus estructuras cognitivas y habilidades analíticas. Lo anterior, con el objetivo de formar a los estudiantes para los retos que exige una sociedad compleja y heterogénea como la contemporánea (Espinoza, 2017).

Históricamente el concepto de resolución de problemas empieza a desarrollarse en la literatura pedagógica y científica relativa a las matemáticas a desde inicios de la segunda mitad del siglo XX con el trabajo de Polya (2015) *How to solve it*. En esta obra el matemático húngaro propone una línea de investigación que relaciona las matemáticas a la resolución de situaciones cotidianas que los conduzca a estar dispuestos a asumir retos que a su vez los dirija al conocimiento y comprensión de su entorno de vida (Espinoza, 2017).

Schoenfeld (1981) en su obra *Episodes and executive decisions in mathematical problem solving* define la resolución de problemas como el empleo de situaciones o proyectos que conlleven una resolución compleja para que el estudiante pueda formar y fortalecer su pensamiento matemático. En tal dirección, en los aportes de Schoenfeld se plantea que la esencia de la resolución de problemas radica en que los algoritmos para la resolución del problema no se identifiquen directa y simplemente en la formulación del problema; sino, antes bien, tras un proceso de análisis y comprensión.

A finales de la década del 80 del siglo pasado, Stanic y Kilpatric (1989) en su obra *Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum* se propone la resolución de problemas como un saber que permite el desarrollo de conocimientos matemáticos avanzados. La resolución de problemas, en tal formulación, implica una estructura fundamental en el aprendizaje de las matemáticas y una competencia trascendental en el desarrollo cognitivo del estudiante en su comprensión de la realidad (Espinoza, 2017).

4.3.1 Método de resolución de problemas desde George Pólya

En el pensamiento del matemático húngaro George Pólya la resolución de problemas es una forma que posibilita al pensamiento matemático vincularse a situaciones contextualizadas, a la vez que, permite que se constituya como una herramienta para la comprensión de la realidad. El objetivo de un problema es retar las funciones cognitivas a plantear métodos y estrategias que permitan resolver la situación inicial. Meneses y Peñaloza (2022) afirman que la resolución de un problema implica:

Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto; pero, si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo. (p. 14)

Como puede evidenciarse en los planteamientos anteriores, para Pólya la resolución de problemas trasciende la idea de las matemáticas como un saber mecánico y predecible; asumiéndola, como un conocimiento dinámico y creativo de carácter racional que se adapta a para dar explicaciones y soluciones coherentes a diferentes aspectos de la realidad. Identificar procedimientos y estrategias dentro de la resolución de problemas implica la puesta en marcha de procesos de cognitivos complejos, creatividad y potencialización del pensamiento crítico con el fin de analizar las diferentes variables y sentidos que una determinada situación problémica requiere.

4.3.2 Pasos para la resolución de problemas según Pólya

Para el pensador húngaro la resolución de problemas puede sistematizarse en 4 pasos secuenciales que permiten el análisis, comprensión y resolución de los problemas. Estos pasos son:

- A. Entender el problema: El primer paso consiste en comprender el enunciado del problema, esto es, entender el objetivo y lo que exige el problema para su solución.
- B. Configurar un plan: En esta instancia el estudiante debe plantear estrategias que puedan brindar una solución al problema, para ello, se debe hacer uso de los conocimientos, creatividad y lógica (Peñaloza y Meneses, 2022). En tal sentido, se pueden ejecutar las siguientes acciones: ensayo y error, resolver un problema semejante, hacer un diagrama, hacer una lista (Peñaloza y Meneses, 2022).
- C. Ejecutar el plan: Este paso consiste en que el estudiante debe efectuar el plan diseñado, aplicar las estrategias elaboradas, guardando total coherencia con la metodología previamente seleccionada.
- D. Mirar atrás: En este momento el estudiante debe revisar las decisiones y acciones tomadas, poniendo en marcha u proceso de autovaloración de las estrategias y su coherencia y eficiencia para el desarrollo del problema.

4.3.3 La resolución de problemas según Allan Schoenfeld

Dentro del espectro conceptual-teórico de la resolución de problemas un referente fundamental es el matemático norteamericano Allan Schoenfeld que en su revolucionaria obra desarrolla una visión estratégica y sistémica de abordar los problemas matemáticos. Heredero de Pólya en la intuición genésica, su pregunta sobre la ausencia de reflexiones que asuman estrategias cognitivas y procedimentales que permitan comprender un problema matemático como una formulación coherente y lógica (Barrantes, 2006). La génesis de las ideas del norteamericano se concretiza en el año 1985 con la publicación de la obra *Mathematical Problems*:

Realizó experiencias con estudiantes y profesores en las que les proponía problemas a resolver; los estudiantes ya tenían los conocimientos previos necesarios para poder afrontar su solución; los profesores tenían la formación previa para hacerlo. Los problemas eran suficientemente difíciles (siguiendo las ideas de Pólya). Schoenfeld veía cómo actuaba cada uno de ambos grupos durante la resolución de problemas; por ejemplo, ponía a trabajar a los estudiantes en parejas, grababa, filmaba y pedía apuntes, y además iba anotando todo lo que hacían durante el proceso de trabajo. (Barrantes, 2006, p. 2)

Lo crucial para Schoenfeld es la identificación y construcción de estrategias eficientes que posibiliten afrontar problemas que representen un reto cognitivo e intelectual cuya solución implique la comprensión de la situación planteada y la aplicación adecuada recursos y métodos. En efecto, Schoenfeld afirma que la resolución de problemas debe ser una dimensión transversal en la estructura misma de la enseñanza de las matemáticas, proponiendo que el aprendizaje de los estudiantes debe partir y garantizarse desde las condiciones que permean el ambiente escolar como un espacio de construcción de conocimiento, investigación y autorregulación (Santos, 1992).

Schoenfeld ubica como núcleo conceptual de su propuesta la acepción de microcosmo matemático (Santos, 1992) que mienta el establecimiento de un lugar de experiencias, aprendizaje, discusión y construcción de conocimiento matemático. El

estudiante, debe desarrollar su razonamiento matemático en dinámicas con carácter científico, que potencien sus capacidades analíticas y abstractivas. En la resolución de problemas según Schoenfeld se deben promover:

Condiciones similares a las condiciones que los matemáticos (gente que produce matemáticas) experimentan en el proceso del desarrollo de las matemáticas. Schoenfeld reconoce en su propuesta que la actividad de resolver problemas es de suma importancia en el proceso de aprendizaje de esta disciplina. (Santos, 1992, p. 17)

Dentro de la amplia esfera de posibilidades que ofrece el método de resolución de problemas de Schoenfeld se encuentra el énfasis en el desarrollo del pensamiento crítico que se vincula a la propuesta del autor estadounidense como consecuencia de centrar la resolución de problemas en el momento de resolución, es decir, en el conjunto de procedimientos cognitivos y metodológicos que el estudiante aplica para el desarrollo del problema.

La resolución de problemas ayuda a desarrollar procesos cognitivos que ponen en juicio el conocimiento científico, la realidad y los procesos intelectuales que usan los sujetos para su orientación en la realidad. Así pues, la resolución de problemas es un componente sustancial en el modelo de pensamiento crítico, Zona-López y Giraldo-Márquez (2017) señalan que “el desarrollo del pensamiento crítico, en primera instancia, debe enfatizar el reconocimiento y el desarrollo de habilidades, actitudes y criterios frente al conocimiento científico con miras a la potenciación de soluciones diferentes problemáticas” (p. 124).

En efecto, la focalización en el momento de resolución fortalece procesos metacognitivos y autorregulativos fundamentales en la construcción de pensamiento crítico. En este contexto cuando el estudiante se encuentra resolviendo la situación “debe monitorizar el proceso y darse cuenta cuando un camino no es exitoso y abandonarlo para tomar uno nuevo, es decir, llevar a cabo el diseño de resolución y estar dispuesto a modificarlo si cabe” (Zamora, 2017, p. 9).

Correlativamente, la propuesta de Schoenfeld (1981) complementa los postulados de Polya (2015) en la medida que contempla además de la preocupación vertebral en los procedimientos de control en el momento de resolución, en las condiciones externas que circunscriben el evento resolutivo en cuanto acontecer cognitivo, formativo y socio-educativo.

4.3.3.1 Elementos constitutivos en el modelo resolución de problemas según Schoenfeld.

La propuesta planteada por Schoenfeld (1981) evidencia su mayor fortaleza teórica en la focalización del control durante la resolución, así como la consideración de una serie articulada de elementos entre los cuales destacan las condiciones contextuales que permean la resolución. Otros puntos a considerar son:

1. Recursos: Son las herramientas, conocimientos y habilidades previas que posee el estudiante al momento de relacionarse con el problema. Dentro de este concepto se introduce el concepto de inventario de recursos como la capacidad de identificar los mecanismos para llegar a los conceptos o procedimientos relacionados a determinada formulación problemática (Zamora, 2017).
2. Heurísticos: Para Schoenfeld a cada problema compete un conjunto específico de características que lo diferencian de otras formulaciones. Este planteamiento distancia radicalmente la propuesta de Schoenfeld de la propuesta de Pólya, a la vez que, supera el pensamiento de este mismo al concebir la importancia del ajuste cognitivo-procedimental que implica la resolución de un problema (Zamora, 2017).
3. Control: Se refiere a la autorregulación que un estudiante establece sobre sus procesos cognitivos, habilidades y procedimientos al momento de resolver un problema., se implica aquí la capacidad de reconocer errores, de redirigir las estrategias de ejecutar nuevos planes (Zamora, 2017).
4. Sistema de creencias: Se conceptualiza como el conjunto de imaginarios y constructos ideológicos y teóricos que tienen los sujetos sociales, el docente y el

estudiante sobre el campo científico de las matemáticas y cómo este corpus de ideas influye en la mente del estudiante al momento efectuar la resolución de un problema (Zamora, 2017).

Paralelamente, Schoenfeld (1981) articula a este conjunto de elementos una serie de etapas que, en base a las planteadas por Polya (2015), posibilitan la resolución del problema (Zamora, 2017):

1. **Análisis:** Implica la revisión preliminar del problema y puede comprender acciones subordinadas como: elaborar un esquema, descomponer en elementos simples, etc. Lo anterior, con el fin comprender la naturaleza del problema y sus componentes y variables.
2. **Exploración:** Implica un estudio más singularizado del problema donde se intente examinar de manera particular sus variables, intentando, reducirlas a lo mínimo conservando la lógica y sentido del problema.
3. **Ejecución:** Consiste en la aplicación metódica y coherente de las estrategias planeadas después de las dos etapas anteriores. En este momento, se puede iniciar una verificación de los ejecutados para contemplar posibles modificaciones.
4. **Comprobación de datos:** Es una etapa en el que el estudiante debe corroborar por medio de interrogantes que ha dado resolución cabal, coherente y satisfactoria al problema formulado.

De acuerdo con los dos modelos presentados, se pueden extraer dos aspectos fundamentales sobre la resolución de problemas en el contexto educativo. En primer lugar, el modelo propuesto por Polya (2015) establece líneas generales para abordar esta tarea, pero es importante reconocer que los estudiantes no siempre pueden seguir procesos estandarizados debido a que sus estrategias pueden estar fundamentadas en diversos conocimientos y enfoques al enfrentar un problema en particular. Por ejemplo, Polya (2015) sugiere el uso de representaciones gráficas como medida, pero es evidente que

algunos estudiantes pueden carecer de habilidades para el dibujo, lo que podría complicar esta fase de resolución para aquellos que no posean esta destreza artística.

Este aspecto nos lleva a reflexionar sobre la necesidad de fomentar un enfoque más inclusivo en la enseñanza de la resolución de problemas. La diversidad de estilos de aprendizaje y habilidades en el aula demanda estrategias flexibles que se ajustan a las necesidades individuales de los estudiantes. Algunas alternativas podrían proporcionar diferentes formas de representación del problema, como el uso de diagramas, tablas o descripciones verbales, para que cada estudiante pueda utilizar la que mejor se adapte a su estilo de aprendizaje y capacidad expresiva.

En segundo lugar, el modelo de solución propuesto por Schoenfeld (1981) introduce un término metacognitivo esencial para el proceso de resolución de problemas: la reflexión. Esta habilidad implica monitoreo y control de las acciones mentales mientras se aborda un problema, identificándose obstáculos y contradicciones que pueden surgir en el camino hacia la solución. Sin embargo, esta dimensión no será abordada en el presente proyecto de investigación; antes bien, éste se encauza a los recursos que fortalecen la comprensión de situaciones problema.

5 METODOLOGÍA

5.1 ENFOQUE Y ALCANCE

El presente apartado aborda la metodología que direcciona el desarrollo de la investigación. Ésta tendrá un enfoque cualitativo y un alcance descriptivo que permita comprender la realidad objeto de estudio. En efecto, se intenta caracterizar el tipo de aportes que el método COPISI puede generar en las habilidades y competencias relacionadas a la resolución de problemas de estructura multiplicativa. A su vez, este enfoque permitirá reflexionar en torno a este objeto de estudio desde su realidad concreta; esto es, analizar el problema planteado como una realidad de aula; un espacio real de interacción sujetos, objetos de aprendizaje y un contexto socio-histórico.

Desde lo anterior, puede afirmarse que la selección de un enfoque cualitativo obedece directamente a que la investigación está orientada a conocer las variables subjetivas de la población objetos de estudio, a la vez que, empela sus enunciados y juicios como materia para el análisis de datos. Consecuentemente, se parte del axioma epistemológico de la investigación cualitativa que expresa que los actores son subjetividades que significan su realidad, la construyen, dimensionan y comprenden a partir de sus propias idiosincrasias y esquemas cognitivos y afectivos (Monje, 2011).

De esta manera, se entiende que los estudiantes son sujetos pensantes y propositivos con un esquema de realidad definido y un sistema de creencias consolidado que es la puerta de entrada a todo conocimiento de la realidad. Se establece un enfoque cualitativo de investigación puesto que se opta por un acercamiento que explora las dificultades que presentan los estudiantes en relación a la resolución de problemas de estructura multiplicativa, analizando el tipo de aportes del método COPISI en los procedimientos, competencias y saberes relacionados al desarrollo de este tipo de problemas. Por tanto, al emplear el enfoque cualitativo la investigación se sustenta.

En evidencias que se orientan más hacia la descripción profunda del fenómeno con la finalidad de comprenderlo y explicarlo a través de la aplicación de métodos y técnicas derivadas de sus concepciones y fundamentos epistémicos,

como la hermenéutica, la fenomenología y el método inductivo. (Sánchez, 2019, p. 104)

El alcance descriptivo de la investigación se sustenta en el intento por establecer un acercamiento interpretativo que articulan los fundamentos teórico-metodológicos del trabajo investigativo y los fenómenos que componen la realidad objeto de estudio. En estos términos, se busca describir el tipo de aportes que genera la aplicación del método COPISI en estudiantes de quinto de primaria al momento de dar resolución a problemas de estructura multiplicativa con isomorfismo de medidas, alcanzando una comprensión de la realidad objeto de estudio que no se relacionan a información estadística o probabilística (Aguirre y Jaramillo, 2015).

5.2 POBLACIÓN Y CONTEXTO

La presente investigación tendrá como su espacio de actuación la Institución Educativa Alberto Castilla sede 3 que se ubica en el barrio Topacio, comuna 8 noroccidente de la ciudad de Ibagué. La realidad socioeconómica de esta localidad presenta estratos de nivel 1, 2 y 3, manifestando alta actividad económica y comercial.

De igual manera, esta localidad es una de las más habitadas en la ciudad de Ibagué, a la vez que, una zona concéntrica cercana a los grandes nichos comerciales, laborales, educativos y gubernamentales de la ciudad. La Comuna No. 8 de la ciudad de Ibagué se ubica en el extremo oriental de la ciudad e inicia su desarrollo urbanístico y socio-económico desde el año 1968 en las haciendas conocidas como Valparaíso y Argentina. Tiene centros neurálgicos en la vida de los ibaguereños como el aeropuerto Perales y el Parque de la Salud.

La comunidad educativa de la Institución Alberto Castilla sede 3, primaria, se conforma por una población estudiantil que pertenece a los estratos socio-económicos 1 - 2, y que ronda un rango etario que va desde los 5 hasta los 14 años de edad.

5.3 UNIDAD DE TRABAJO

El presente ejercicio investigativo se aplicará a estudiantes de grado quinto de primaria de la sede 3-primaria del Instituto Educativo Alberto Castillo. La intervención se realizará con 30 de estudiantes de 9 a 12 años. La distribución por género de los estudiantes es la siguiente 9 estudiantes de género femenino, y 21 estudiantes de género masculino. La unidad de trabajo para la realización del análisis se efectuará con 5 estudiantes que se ajustan a los siguientes requerimientos: a. Actitud asertiva hacia el trabajo; b. Consentimiento de padres y/o acudientes; c. Participación permanente de los estudiantes durante la intervención.

5.4 CONSIDERACIONES ÉTICAS

En el marco del desarrollo y aplicación de la presente investigación se estipulan como directrices éticas dos instrumentos que permitirán el desarrollo de las actividades en el marco de parámetros éticos que contemplen ante toda posible eventualidad los derechos, dignidad y principios de la persona humana. Lo anterior, atendiendo a que el trabajo investigativo se desarrollará en una población cuyos sujetos son menores de edad y que ameritan una mayor protección por parte de la ley y de la sociedad en general. Los instrumentos propuestos son:

1. Acta de consentimiento de participación para padres y/o acudientes y estudiantes. En este instrumento se manifiesta que tantos padres y/o acudientes y estudiantes conocen los objetivos de la investigación, y atendiendo a éstos participan libre y voluntariamente durante la intervención investigativa, comprendiendo, a su vez, que los resultados de la misma reposarán en el repositorio de archivos de la Universidad Autónoma de Manizales.
2. Acta de consentimiento de intervención investigativa para el rector (Anexo A). El segundo instrumento certifica la autorización que el rector de la institución educativa en la que se realizará la intervención conoce y acepta el desarrollo de la investigación.

5.5 UNIDAD DE ANÁLISIS

La unidad de análisis de la presente investigación se articula a través de la vinculación categorial de método COPISI con el mejoramiento de la competencia resolución de problemas de estructuras multiplicativas en estudiantes de quinto de primaria. A continuación, se describe en la *tabla 3*. Las categorías, subcategorías, dimensiones e indicadores.

Tabla 3. Matriz de análisis categorial

Categorías	Subcategorías	Dimensiones	Indicadores
Resolución de Problemas de Estructura Multiplicativa (Alan Henry Schoenfeld)	Resolución de problemas	Recursos	Todo tipo de conocimiento
	Isomorfismo de medidas	Heurísticas	Estrategias
	Multiplicación	Control	Monitorear y vigilar el proceso
	División	Creencias	Concepción personal
Método COPISI	Aplicación de estrategias método COPISI	Exploración de saberes previos	<ol style="list-style-type: none"> 1. Representa los datos que se mencionan en la situación problema. 2. Modela sus esquemas posibilitando una matematización de los elementos del enunciado del problema
		Experimentación con la realidad	<ol style="list-style-type: none"> 1. Relaciona el problema con objetos concretos. 2. Manipula materiales concretos que le permiten visualizar y comprender de manera más eficiente el sentido del problema. 3. Diseña diversas estrategias para comprender el problema desde la manipulación de material concreto.
		Representación icónica	<ol style="list-style-type: none"> 1. Representa por medio de diferentes medios sígnicos elementos relacionados al problema. 2. Establece relaciones icónicas que le permiten comprender el sentido del problema. 3. Elabora representaciones que ilustran su método para la resolución del problema.
		Abstracción	<ol style="list-style-type: none"> 1. Conceptualiza el sentido del problema entendiendo su estructura lógica. 2. Abstrae de la comprensión del problema los métodos pertinentes

	para su resolución.
Evaluación	<ol style="list-style-type: none"> 1. Analiza la coherencia entre los elementos del problema, su contexto y sus métodos. 2. Evalúa sus resultados.

Nota: Elaboración propia.

5.6 TÉCNICAS Y FUENTES PARA LA RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

Se proponen tres instrumentos para la realización del proceso de recolección de información: lápiz y papel, asimismo la entrevista semiestructurada atendiendo a la naturaleza del objeto de estudio y las condiciones contextuales e inherentes de la población analizada.

5.6.1 Instrumentos de lápiz y papel

Se comprende como una herramienta eficiente en la recolección de datos investigativos (Gil et al., 1988) en el marco de la didáctica de las ciencias, a razón de la crucial relevancia de las competencias asociadas a la resolución de problemas en el aprendizaje de los estudiantes. Teóricamente, existen dos orientaciones; la primera, asociada a la observación de procedimientos científicos por parte de expertos; la segunda, denominada orientación algorítmica, hace alusión a los procesos mentales, etapa por etapa, estandarizando la comprensión de problemas por medio de operaciones regulares (Gil et al., 1988).

En la presente investigación este instrumento posibilita establecer de manera controlada y coherente los diferentes procesos y estratos cognitivos y procedimentales que el estudiante emplea para resolver los problemas planteados durante la intervención. De igual manera, el instrumento lápiz y papel se empleará como momento de inicio del ejercicio investigativo, como estrategia para identificar la realidad inicial de los estudiantes; con la misma intención, se aplica al final de la intervención para describir la morfología del proceso de transformación del estudiante.

En este orden de ideas, el instrumento de lápiz y papel, en el momento exploración inicial, se diseña a través de problemas de estructura multiplicativa de isomorfismo de medidas, y preguntas abiertas en las que se invita al estudiante a definir algunos conceptos fundamentales relacionados a la multiplicación y a la resolución de problemas. Se plantean, en tal dirección, tres problemas de estructura multiplicativa que presentan situaciones contextualizadas a situaciones reales que señalan a posibles circunstancias reales. De manera complementaria, se formulan cinco preguntas que cuestionan al estudiante sobre los métodos que aplica, el nivel de comprensión que presenta sobre cada problema y preguntas que exploran sus imaginarios sobre operaciones matemáticas y el concepto de matemáticas en general.

El instrumento de lápiz y papel se aplica en el primer momento de exploración (en la unidad didáctica momento de ubicación) para explorar el estado inicial de la unidad de trabajo en referencia a sus conceptos, imaginarios, habilidades y estrategias que poseen para la resolución de problemas. Se aplica en el momento de cierre de la intervención para establecer una valoración comparativa entre los resultados finales y los del primer instrumento aplicado. La estructura del segundo instrumento de lápiz y papel será homologa a la del primer instrumento con el fin de que la comparación entre ambos instrumentos parta de un marco homogéneo.

5.6.2 Entrevista semiestructurada

La entrevista es uno de los instrumentos más empleados en investigaciones de enfoque cualitativo por su flexibilidad, adaptabilidad y efectividad para conocer las representaciones, sistemas axiológicos y de creencias de diversos tipos de población. La entrevista semiestructurada es un conjunto de preguntas cerradas dirigidas a recolectar información determinada. Este tipo de entrevista es óptimo cuando el entrevistador conoce algo sobre el tema de la entrevista (Lázaro, 2021).

La entrevista semiestructurada se emplea en la presente propuesta de investigación para explorar las representaciones mentales, conceptos, imaginarios y sistemas de valores que tienen los estudiantes en relación a la resolución de problemas de estructura multiplicativa dentro de las prácticas de enseñanza aprendizaje.

La entrevista semiestructurada se emplea, de igual manera, para establecer un referente que permita analizar las transformaciones del estudiante frente al ejercicio investigativo. Por tanto, se aplica antes y después de la intervención investigativa y consta de una serie de ocho preguntas cerradas donde se exploran los conceptos y habilidades de los estudiantes acerca de la competencia resolución de problemas (Anexo B).

De manera correlativa, la entrevista funcionará como una técnica para efectuar un acercamiento a los conocimientos de los estudiantes frente a la multiplicación y la resolución de problemas. De igual manera, se plantearán preguntas en las cuales se cuestiona al estudiante sobre su opinión acerca de la secuencia concreta – pictórico – simbólico en el aprendizaje de las matemáticas. Por último, la entrevista semiestructurada se aplicará en los momentos de ubicación y reenfoque durante la intervención investigativa.

5.7 UNIDAD DIDÁCTICA

La unidad didáctica está orientada a desarrollar la competencia de resolución de problemas a través de la aplicación de una serie de actividades fundamentadas en la serie que sustenta el método COPISI (concreto – pictórico – simbólico), evidenciando que la aplicación estratégica del método COPISI ayudará a mejorar los procesos de aprendizaje relacionados a la resolución de problemas.

Por otro lado, la unidad didáctica busca identificar dificultades, oportunidades y fortalezas de aprendizaje en torno a la resolución de problemas. Lo cual está encaminado a la propuesta de formular estrategias que posibiliten el fortalecimiento de los procedimientos y saberes relacionados a esta competencia del área de matemáticas. La estructura de la unidad didáctica es la siguiente:

- *Momento de ubicación:* En esta primera instancia se aplican los instrumentos de lápiz y papel y entrevista semiestructurada (diagnóstico) que posibilitaron reconocer las dificultades que tienen los estudiantes al inicio de la intervención. Lo cual permitió el diseño de estrategias, actividades y recursos coherentes con las necesidades de los estudiantes que hacen parte de la unidad de trabajo.

- *Momento de desubicación:* En este momento se inicia con la etapa concreta del método COPISI para enseñar de manera significativa la resolución de problemas de estructura multiplicativa a través de la secuencia concreto – pictórico – simbólico que promulga el método Singapur (COPISI) como estrategia de enseñanza de las matemáticas.
- *Momento de reenfoque:* En esta última instancia se aplican los instrumentos de lápiz y papel y entrevista semiestructurada, al igual que al inicio de la intervención, pero con el objetivo de evaluar las repercusiones que la intervención generó en los estudiantes de 5 de primaria de la Institución Educativa Alberto Castilla de la ciudad de Ibagué.

5.7.1 Plan De Acción

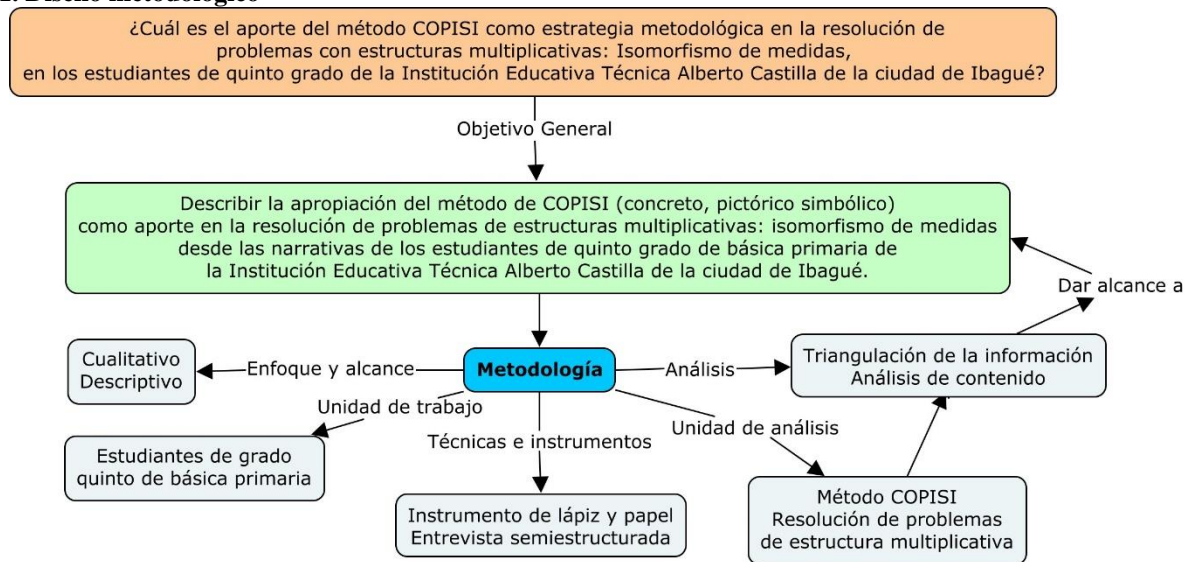
Tabla 4. Plan de acción

Acciones	Descripción
1. Presentación de la intervención y objetivos de la investigación	Se presenta a la población y a los directivos y padres de familia los objetivos de la investigación.
2. Presentación y desarrollo de los formularios	Se diligencia los formatos de aceptación de la propuesta por parte de los directivos y padres de familia de los estudiantes participantes en la intervención.
3. Primer encuentro con la población objeto de estudio	Se hace el primer contacto con la población. Se aplica el primero instrumento de lápiz y papel y la primera entrevista.
4. Aplicación de la unidad didáctica	Se aplica la unidad didáctica en sus momentos de ubicación, desubicación y reenfoque.
5. Recolección de información	Se establece la recolección de la información obtenida tras la aplicación de la unidad didáctica.
6. Análisis de datos	Se analizan y estudian los datos obtenidos a través del manejo de las categorías formuladas.
7. Proposición de estrategias	Se proponen estrategias que pueden fortalecer los procesos cognitivos y destrezas en relación a la resolución de problemas de estructuras multiplicativas desde la aplicación del método COPISI.

Nota: Elaboración propia.

5.8 DISEÑO METODOLÓGICO

Figura 1. Diseño metodológico



Nota: Elaboración propia.

5.9 PLAN DE ANÁLISIS

La información se procesará utilizando una matriz de análisis que permitirá emplear el método de análisis del contenido. Este método consistirá en identificar, a la luz de las categorías establecidas, marcadores discursivos empleados por los estudiantes en sus declaraciones escritas relativas a los procesos de resolución de problemas de estructura multiplicativa.

Para la entrevista semiestructurada, se empleará como técnica el análisis del discurso. A través de esta técnica, se buscará revelar el significado de las declaraciones orales presentadas por los estudiantes.

En cuanto a la triangulación de datos, se realizará en primera instancia un cruce de los datos obtenidos antes y después de la intervención didáctica para las dos categorías de análisis. Posteriormente, se empleará la triangulación teórica, utilizando las referencias de los autores mencionados en los antecedentes y el marco conceptual como apoyo para la interpretación de los datos. Esto será fundamental para garantizar la confiabilidad y validez del análisis realizado.

6 ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En coherencia con el objetivo general que orienta el desarrollo de la presente propuesta de investigación, que es describir la apropiación del método de COPISI (concreto, pictórico simbólico) como aporte en la resolución de problemas de estructuras multiplicativas: isomorfismo de medidas desde las narrativas de los estudiantes de quinto grado de básica primaria de la Institución Educativa Técnica Alberto Castilla de la ciudad de Ibagué; para lo cual, se diseña una matriz de análisis donde se vinculan las respuestas de los estudiantes a los indicadores propuestos en la referida matriz de análisis. De igual manera, se establece un diálogo crítico con los referentes teóricos para establecer la validación de los resultados.

Se establece una codificación para efectuar el análisis a la información obtenida tras la aplicación de los instrumentos de los estudiantes: estudiante 1 EJB1 (niño), estudiante 2 ESP2 (niña), estudiante 3 ESG3 (niña), estudiante 4 ELQ4 (niña), estudiante 5 EJO5 (niño). Se representa con la letra R y un número las respuestas a las preguntas y con la letra P y un número la respuesta a las situaciones problema. Lo anterior, en relación al momento inicial de la intervención (instrumento de lápiz y papel), en relación al momento final (secuencia didáctica 1 y secuencia didáctica 2) se conserva el mismo sistema de codificación.

6.1 ANÁLISIS INICIAL

6.1.1 Instrumento de lápiz y papel

El problema 1 se categoriza dentro de la estructura multiplicativa, isomorfismo de medidas como problema de multiplicación (Ivars y Fernández, 2016). Éste plantea dos preguntas preliminares que indagan sobre el método que se ejecuta para organizar la información del problema (pregunta 1) y sobre las operaciones que se aplican para la resolución del mismo (pregunta 2).

Figura 2. Problema 1. Instrumento de lápiz y papel.

INICIA DESDE AQUI

- 1) En el colegio Alberto Castilla, el personero estudiantil 2024 está comprometido con promover prácticas amigables con el medio ambiente. Para lograrlo, el personero quiere entregar 4 plantas a cada uno de los 25 salones del colegio. ¿Cuántas plantas en total necesita el personero para llevar a cabo su iniciativa?



Fuente: <https://pt.pngtree.com>

Nota: Elaboración propia.

En torno a la pregunta 1 (¿Cómo puedes organizar la información para resolver el problema?) que cuestiona al estudiante sobre el método que emplea para resolver un problema evidencia que la mayor parte de los estudiantes (ESG3, ESP2, ELQ4) no posee una estrategia eficiente para identificar las magnitudes y variables que conforman el problema. Dos estudiantes (EJB1 y EJO5) aplican un método eficiente para identificar las magnitudes en el problema de isomorfismo de medidas. Se evidencia la carencia de una herramienta eficiente que permita encontrar la relación entre las diferentes unidades que se encuentran en la formulación del problema, lo que puede conllevar a una complejización del procedimiento a seguir para la resolución del problema e incluso organizar de manera errónea la información aumentando el margen de error en la resolución del problema.

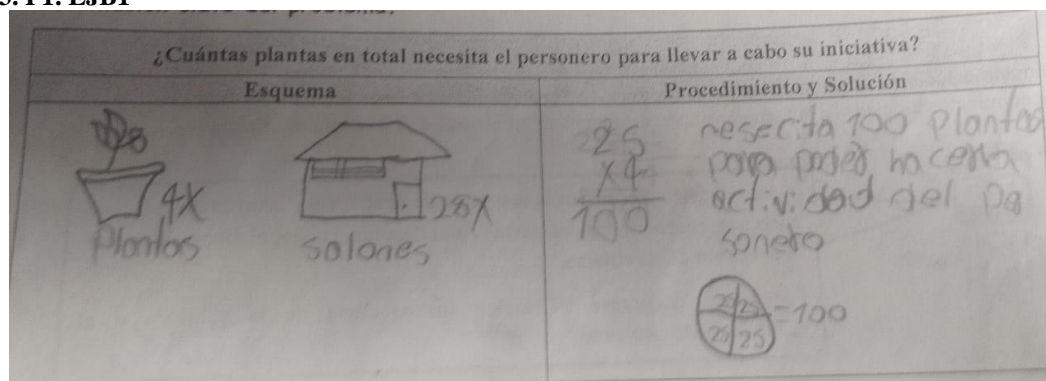
En relación a la pregunta 2 (¿Qué operaciones matemáticas o cálculos necesitas hacer para encontrar la respuesta del problema?) indaga en el estudiante sobre la operación u operaciones que aplicaría para la resolución del problema las respuestas de 3 de ellos (EJB1, ESP2, y EJO5) identificaron la multiplicación como la operación para dar resolución al problema; un estudiante (ELQ4) reconoció en la división la operación adecuada para la resolución del problema; otro estudiante (ESG3) identifica la multiplicación y la división, sin referir en qué sentido o de qué manera pueden aplicarse las dos operaciones. Aquí, se evidencia que los estudiantes comprenden que el problema 1 implica las operaciones de multiplicación y división, que son las operaciones fundamentales en los problemas de estructura multiplicativa (Ivars y Fernández, 2016).

Con base en a las respuestas obtenidas puede afirmarse que, de manera intuitiva, sin existir una aprehensión conceptual y metódica de la estructura organizativa de las magnitudes en el problema, los estudiantes comprenden que para resolver el problema 1 es necesario el manejo de la multiplicación y la división.

En cuanto a la resolución del problema se solicitó al estudiante elaborar un esquema que organice la información relevante del problema, para esto, la totalidad de los estudiantes emplearon representaciones gráficas (dibujos) apoyadas con el manejo de código lingüístico y numérico, para organizar las magnitudes que conforman el problema, lo que permite destacar el rasgo esencialmente semiótico de las nociones matemáticas (Iori, 2014). Esto sustenta la funcionalidad del sentido de la progresión COPISI (concreto, pictórico y simbólico) en el sentido que la trasposición de diferentes diversos códigos o formas de representación coadyuva a la adquisición de saberes matemáticos (Molina y Barraza, 2022).

Sin embargo, la organización de los datos por parte de los estudiantes no evidencia, en un estado inicial, un manejo claro de la información por parte de los mismos. Se manifiesta, en este sentido, que estudiantes como EJB1 y ELQ4 tienen un manejo más acertado de los datos, acercándose a una organización pictórica de los datos que guarda coherencia con lo planteado en el problema:

Figura 3. P1. EJB1



Nota: En la figura se observa el primer acercamiento que hizo el estudiante, tratando de plasmar con elementos pictóricos la posible solución del ejercicio. Esto podría definirse como las herramientas propias del estudiante con sus presaberes.

Figura 4. P1. ELQ4

¿Cuántas plantas en total necesita el personero para llevar a cabo su iniciativa?	
Esquema	Procedimiento y Solución
<p>$4 \times 10 = 40$ $4 \times 10 = 40$ $4 \times 5 = 20$ $40 + 40 + 20 = 100$</p>	<p>$4 \times 10 = 40$, $4 \times 10 = 40$ ahora $4 \times 5 = 20$ ahora sumemos $40 + 40 + 20 = 100$</p> <p>R: en total de lo que tiene que entregar el personero de plantas es 100.</p>

Nota: En la figura se observa que el estudiante cuenta, una a una las plantas, con la limitante del espacio para visualizar todos los elementos para el cálculo.

El resto de los estudiantes plantean representaciones esquemáticas que no guardan coherencia con el valor de las magnitudes planteadas en el problema y que evidencian que más que un valor metodológico ostenta un valor ilustrativo:

Figura 5. P1. ESP2

Recuerda hacer un esquema, puede ser un dibujo o un escrito, donde organices la información clave del problema.	
¿Cuántas plantas en total necesita el personero para llevar a cabo su iniciativa?	
Esquema	Procedimiento y Solución
	<p>con 5 plantas serían suficientes plantas en los salones</p>

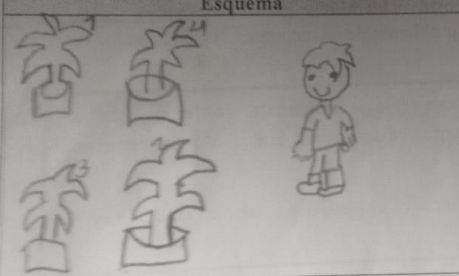
Nota: Aunque el estudiante hace un acercamiento pictórico a los elementos del problema planteado, es evidente que la interpretación es inadecuada e insuficiente para dar respuesta a la incógnita planteada en el ejercicio.

Figura 6. P1. EJO5

AHORA, RESUELVE PROBLEMA.

Recuerda hacer un esquema, puede ser un dibujo o un escrito, donde organices la información clave del problema.

¿Cuántas plantas en total necesita el personero para llevar a cabo su iniciativa?

Esquema	Procedimiento y Solución
	$\begin{array}{r} 25 \\ \times 4 \\ \hline 100 \end{array}$ <p>R+A: las plantas que necesita el personero son 100 plantas para que tengan que 4 cada uno de los 25 sables.</p>


Nota: El estudiante presenta de manera desordenada las plantas y una representación del personero, lo cual se acerca al planteamiento del ejercicio, pero se aleja de ser la vía para desarrollar el ejercicio. Al lado derecho muestra la operación, correctamente y con una explicación escrita.

Figura 7. P1. ESG3

AHORA, RESUELVE PROBLEMA.

Recuerda hacer un esquema, puede ser un dibujo o un escrito, donde organices la información clave del problema.

¿Cuántas plantas en total necesita el personero para llevar a cabo su iniciativa?

Esquema	Procedimiento y Solución
	$\begin{array}{r} 25 \\ \times 4 \\ \hline 100 \end{array}$ $\begin{array}{r} 25 \\ - 4 \\ \hline 21 \end{array}$ <p>Rl-faltan 21</p>

Nota: La estudiante trató de organizar la información como se solicitó, al lado izquierdo presenta lo que serían estudiantes y las plantas, luego al lado derecho hizo las operaciones que consideró acertadas, no obstante, resultaron ser incorrectas.

La anterior observación es un índice de la necesidad de fortalecer en los estudiantes la adquisición de una herramienta que permita adquirir la comprensión del funcionamiento de la estructura que vertebra el sentido de los problemas de estructura multiplicativa cuya morfología representa, en esencia, una proporción de magnitudes en dos espacios de

medidas (Ivars y Fernández, 2016). Según Puig (1994) la evolución del aprendizaje de las matemáticas ha incluido el hecho de utilizar herramientas para resolver los problemas, como lo es los elementos pictóricos, estos como un vía para representar la realidad de los objetos concretos y comunicar ideas completas. No obstante, aunque sirven de guía y ayuda, pueden resultar insuficientes sin los conocimientos simbólicos más elaborados.

El problema 2 plantea un problema de división partitiva (Ivars y Fernández, 2016) en el cual se busca que el estudiante encuentre una magnitud entre dos datos conocidos.

Figura 8. Problema 2

2) En una fábrica, hicieron tantas galletas que sobraron 256. Por eso, los dueños decidieron compartirlas entre los 8 empleados para evitar que se pierdan. Quieren que cada empleado reciba la misma cantidad como agradecimiento por su buen trabajo. ¿Cuántas galletas debe recibir cada empleado?



Fuente: <https://c8.alamy.com/compes>

Nota: Elaboración propia.

A la pregunta 1 del problema 2 (¿Cómo crees que hicieron los dueños para que todos los empleados recibieran la misma cantidad de galletas?) dos estudiantes (EJB1 y ESP2) identificaron la división como la operación que debía realizarse para dar solución al problema 1. De otro lado, el estudiante (EJO5) manifiesta que contaría las galletas y las distribuiría a cada empleado; otro estudiante (ELQ4) identifica como operación a ejecutar una multiplicación. Finalmente, el estudiante (ESG3) establece una respuesta arbitraria donde afirma que daría una cantidad mayor a 10 galletas.

Estas respuestas fortalecen el hecho de que en la situación inicial de la intervención los estudiantes presentan gran dificultad en reconocer la operación que deben realizar para resolver un problema, lo cual puede obedecer a dos factores: falencia en la comprensión del problema o falta de motivación (Patiño et al., 2021). La segunda pregunta del problema 2

(¿Crees que, si fueran más empelados en la fábrica, cada uno recibiría más o menos galletas? ¿Por qué?) En esta pregunta se trata de observar si los estudiantes son conscientes del cambio de la proporcionalidad de las variables con la modificación de las condiciones planteadas inicialmente.

Ante esto, 3 de los estudiantes (EJB1, ESG3 y ELQ4) no evidencian comprender el cambio de las proporciones en el problema plateado, siendo la constante no reconocer que entre mayor número de personas el número de galletas a recibir siendo menor; y, en un caso específico interpretando la situación desde un enfoque moral y profesional (EJB1). Dos estudiantes (ESP2 y EJO5) dieron respuestas coherentes con las variables aplicadas al problema inicial ya que en ambos cambios se identificó que la cantidad de galletas recibidas sería menor si mayor era el número de empleados en que debían repartirse: ESP2: *“menos galletas porque si hay más empleados no alcanzaría las galletas”*; EJO5: *“yo creo que recibiría menos galletas cada uno de los 8 empleados por que si fueron más empleos las galletas serian menos”*.

Los estudiantes hacen un acercamiento a las vías para resolver los problemas propuestos, para ello utilizan sus herramientas cognitivas, que sería el entendimiento de la realidad desde el sentido común, materializando con símbolos la realidad, sin comprender a fondo los fundamentos matemáticos (Iori, 2014). En este orden de ideas, el estudiante cuenta con elementos desde sus presaberes, pero que resultan insuficientes para los fines esperados, es decir, la obtención lógica y correcta que resuelva el problema propuesto.

En cuanto a la resolución del problema 4 estudiantes desarrollaron adecuadamente el problema (EJB1, ESG3, ELQ4 y EJO5) y solamente 1 estudiante no logra desarrollar el problema con eficiencia (ESP2). Al igual que en el problema 1 se solicita al estudiante que organice la información mediante un esquema. Aquí, también las representaciones elaboradas por los estudiantes son figuras pictóricas que representan las galletas y los estudiantes, siendo estas representaciones un poco más detalladas y coherentes con los datos proporcionados por el problema.

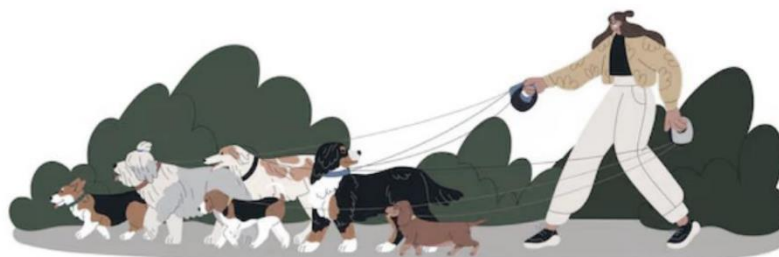
Nuevamente se hace evidente que la naturaleza semiótica de la matemática posibilita su representación a través de diversos códigos que conducen al sujeto a procesos de comprensión diferentes, siguiendo lo que plantea Puig (1994): “los textos matemáticos

se producen mediante sistemas matemáticos de signos estratificados y con materias de la expresión heterogéneas” (p. 12). En efecto, la posibilidad de ‘traducir’ entidades matemáticas a diversos tipos de representación es una puerta abierta para el diseño de herramientas didácticas que manejen esta dinamicidad semiótica como forma de fortalecimiento de los procesos de aprendizaje en el área (León y Calderón, 2008).

En el tercer problema (Imagen 8. Problema 2) que conformaba el instrumento de lápiz y papel se cuestiona al estudiante sobre un problema que pertenece en la clasificación de los problemas de estructura multiplicativa, isomorfismo de medidas, a la categoría de división partitiva (Ivars y Fernández, 2016), que se entiende como una relación entre cuatro cantidades donde se conocen el número de elementos y los elementos por grupo, siendo el número grupos el resultado que debe hallarse.

Figura 9. Problema 3

- 3) Juan y Sofía son veterinarios que rescatan perritos abandonados. El lunes pasado, adoptaron 36 perritos. Ahora, quieren acomodarlos en su refugio. Desean poner 3 perritos en cada cunita o cama. ¿Alcanzarán 10 camitas para todos los perritos?



Tomado de: <https://img.freepik.com>

Nota: Elaboración propia.

Al igual que en los problemas 1 y 2, la resolución del problema 3 está precedida por dos preguntas. La pregunta 1 del problema tres (¿Cómo te imaginas que Juan y Sofía organizaron la distribución de los 36 perritos? ¿Por qué piensas eso?). La pregunta se dirige a indagar en el estudiante la determinación del proceso que deben seguir Juan y Sofía para organizar los perritos de manera equitativa en x número de grupos. La operación que debe realizarse es una división ya que es la que permite resolver el problema que se plantea.

En consecuencia, 3 estudiantes identificaron que la operación indicada para la resolución del problema era la división (EJB1, ESG3, ELQ4); mientras que dos de ellos (ESP2 y EJO5) identifican procedimientos diferentes: ESP2, interpreta el problema en términos económicos, en cuanto relaciona la distribución de los perritos a la capacidad económica de adquirir las cunas por parte de Juan y Sofía: *“Pues cuentan el dinero para comprar las camas si tienen el dinero suficiente para comprar las cunas y las camas para los perritos”* (ESP2). EJO5 por su parte identifica que la operación indicada para la resolución del problema es una suma.

A la segunda pregunta (¿Crees que Juan y Sofía necesitarán más de 10 cunas para acomodar a los 36 perritos? ¿Por qué? Plantea que el estudiante establezca una relación entre las cantidades y establezca una cantidad aproximada a la cantidad de cunas, conociendo el total de elementos y la cantidad de elementos por grupos. A esta pregunta los estudiantes respondieron teniendo en cuenta un factor no contemplado en los datos del problema (la comodidad de los perros y los recursos de Juan y Sofía como personas que adoptan perritos callejeros). ESP2 responde, al respecto: *“No porque los perritos incomodos en 10 camas y cunas”*. ESG3 afirma, a su vez: *“De pronto sí o no por que como rescatan perritos abandonados pues deben tener suficientes cunas”*.

Por otro lado, 3 estudiantes establecen una relación entre las cantidades en donde se determina una proporción entre las magnitudes 36 y 3 y la condición de la pregunta (10). En este sentido, el estudiante EJO5 establece una relación coherente entre las magnitudes relacionadas, afirmando: *“No, porque son 36 perritos y no cabrían en 10 cuna 3 perritos en cada cuna”*. Si bien la respuesta evidencia una contradicción entre los términos, existe un reconocimiento eficiente del manejo de las proporciones. ELQ4, en manera semejante, manifiesta una comprensión adecuada a la relación entre las cantidades, evidenciando en su respuesta, un nivel de coherencia mayor que EJO5. En efecto: *“Si necesitan más 10 cunitas para los perritos porque son 36 perros en una cunita”*. EJB1, por su parte, elabora una respuesta que no es precisa, su interpretación ambigua en la medida que, si bien identifica la relación numérica, esta relación no se desarrolla y se complementa con información que no se relaciona a los datos del problema: *“Por el número es posible pero no hubieron en los refugios puede ser peques”*.

Frente a la resolución del problema, al igual que en los problemas anteriores se establece un cuadro de doble entrada donde el estudiante debe plantear un esquema que represente las magnitudes que componen el problema y establecer la resolución del problema. Frente al primer ítem la elaboración de un esquema que represente la resolución del problema la totalidad de los estudiantes (EJB1, ESP2, ESG3, ELQ4, EJO5) emplearon representaciones pictóricas que señalaban las magnitudes del problema. Se elaboraron representaciones de perros, casas, cunas, que manifiestan una comprensión básica del campo semántico que estructura el problema.

Sin embargo, en términos matemáticos las representaciones no tienen un valor eficiente a la hora de organizar la información, de establecer las relaciones de magnitud entre los diferentes datos que conforman el problema. Las representaciones no superan una función meramente ilustrativa; no poseen un valor organizativo o procedimental ya que no establecen una relación coherente entre las representaciones y las magnitudes (Ivars y Fernández, 2016). Lo anterior, evidencia que los estudiantes no tienen claridad en la riqueza semiótica de las matemáticas, lo que permite la trasposición de elementos matemáticos a diversos tipos de lenguaje (Iori, 2014; Puig, 1994). Aquí, es importante anotar la relevancia del método COPISI en cuanto estrategia que se fundamenta en la progresión lógica de lo concreto, lo pictórico a lo simbólico empleando diversas formas de lenguaje para fortalecer la comprensión del estudiante frente al saber matemático.

Frente al desarrollo del problema la mayoría de los estudiantes identificaron en la división la operación adecuada para dar solución al problema (EJB1, ESG3, ELQ4). Mientras que uno de ellos (EJO5) identifica la suma como la operación apropiada para la resolución del problema. Otro estudiante (ESP2) elabora una narrativa sin identificar una operación que diera respuesta al planteamiento del problema, evidenciando una baja comprensión del planteamiento del mismo.

6.2 SECUENCIAS DIDÁCTICAS. MÉTODO COPISI

La secuencia didáctica 1 implementa la progresión COPISI como estrategia que permite fortalecer la resolución de problemas de estructura multiplicativa, isomorfismo de medidas. Lo anterior, atendiendo a los resultados históricos exitosos que la implementación

del método COPISI ha presentado en diferentes países (Delgado et al., 2018). En conjunción con la secuencia didáctica 2 dedicada a Isomorfismo por división partitiva, se estructura el momento vertebral de la investigación. Ambas secuencias están fundamentadas en los sustratos didácticos y epistemológicos del método COPISI y tratan de conducir al estudiante a través de la manipulación de diversos tipos de lenguaje, por tanto, de diversos órdenes de pensamiento, a una comprensión holística de los fenómenos matemáticos, en este caso la resolución de problemas de estructura multiplicativa, isomorfismo de medidas (multiplicación, división partitiva).

El objetivo principal de las secuencias didácticas es posibilitar al estudiante la comprensión de la estructura multiplicativa (Vergnaud, 1990) como un campo conceptual que permite la relación de magnitudes. En tal sentido, la aprehensión de la lógica funcional de la estructura multiplicativa fortalece en el estudiante la capacidad para entender el sentido mismo de este tipo de problemas. Aunado a esto, la adopción del método COPISI como herramienta para fortalecer la competencia resolución de problemas posibilita la apertura de un amplio espectro de experiencias significativas en torno al aprendizaje de las matemáticas.

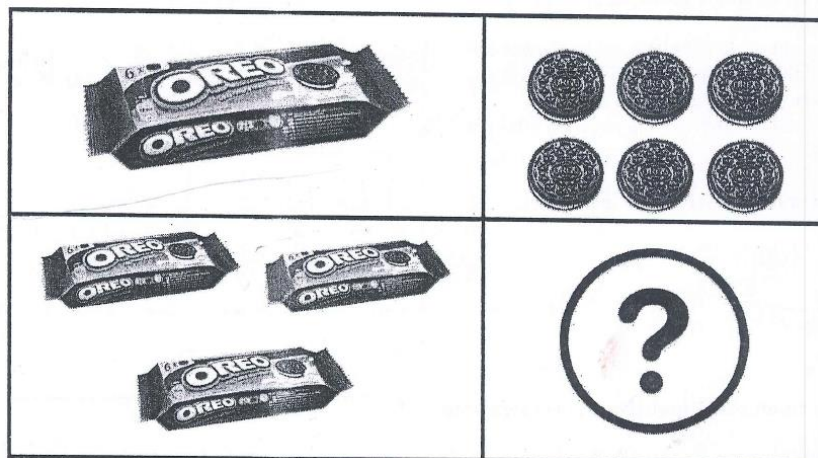
La organización de las secuencias didácticas está configurada en tres momentos: exploración, estructuración, práctica. Donde se introduce a la población objeto de estudio en la metodología COPISI, a través de una herramienta denominada Naipe Multiplicativo que posibilita la concretización de experiencias con material concreto (primer momento del método COPISI) y con material pictórico (segundo momento del método COPISI), posibilitando el manejo de lenguaje simbólico (tercer momento del método COPISI).

6.2.1 Secuencia Didáctica 1. Multiplicación

En el momento de exploración se inició con la sesión uno de explicación del Naipe Multiplicativo, en donde se mostró una serie de figuras ilustrativas. En este caso concreto, ha sido una operación de multiplicación directa con galletas (figura 10). De un lado, prima la motivación e interés despertados con un objeto que es del agrado de los niños. Y de otro lado es la operación fundamental sencilla que se requiere enseñar inicialmente a los estudiantes. Bajo estos parámetros, Marulanda (2021) señala la importancia de atender a las

necesidades educativas de los estudiantes de primaria desde la integración didáctica que despierte su motivación. Esto es porque la matemática es abstracta, pero puede materializarse fácilmente con la simulación de situaciones ilustrativas que llaman la atención del educando.

Figura 10. Ilustración inicial del Naipe Multiplicativo



Nota: Elaboración propia.

En las instrucciones de exploración se explicó a los estudiantes como debería ser analizado el naipe multiplicativo, paso a paso. En la primera fila se indica que un paquete de galletas es igual a seis galletas. Mientras que, en la segunda fila, tres paquetes de galletas es igual a incógnita. Es decir que se requiere averiguar, cuántas galletas se tendría en total al comprar tres paquetes de galletas. Aunque se dejó planteada la preguntas en estos términos: “has notado que hay paquetes de contienen 6 galletas. Si tienes suficiente dinero para comprar 3 paquetes, ¿cuántas galletas tendrás en total?” Los estudiantes no estaban obligados a responderla, pero cuatro estudiantes si lo hicieron, señalando la operación y la respuesta correcta (ESP2, ESG3, ELQ4, EJO5).

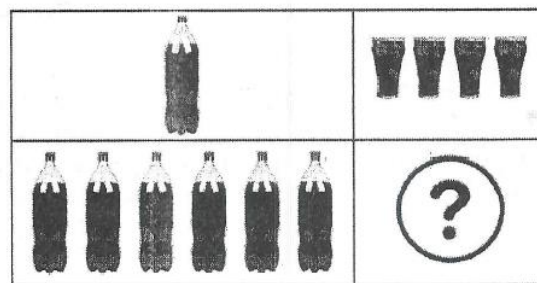
Posteriormente, en el ejemplo dos (figura 11), se expone una nueva situación, ahora con gaseosas, en donde una gaseosa de un litro es suficiente para llenar cuatro vasos grandes. Entonces se pregunta a los estudiantes por cuántos vasos se podrían llenar con seis litros de gaseosa. Ahora bien, no es únicamente realizar la operación, sino que se indagó más allá en los siguientes términos:

1. ¿Qué relación crees que existe entre la cantidad de gaseosa y la cantidad de vasos que se pueden llenar?
2. ¿Qué estrategias podríamos usar para resolver este problema?
3. ¿Cómo podríamos calcular cuántos vasos se pueden llenar con 6 litros de gaseosa?
4. ¿Qué pasaría si tuviéramos más o menos litros de gaseosa? ¿Cómo afectaría eso a la cantidad de vasos llenos?
5. ¿Puedes pensar en otras situaciones en las que se aplique esta misma regla?

Figura 11. Ejemplo 2 de la secuencia didáctica 1

Ejemplo 2

Con este calor es mejor comprar gaseosa por litros para compartir en el salón. Si un litro de gaseosa llena 4 vasos grandes, ¿cuántos de estos vasos se podrán llenar con 6 litros?



Nota: Elaboración propia.

La primera pregunta fue resuelta por dos estudiantes con una afirmación evidente sobre la ilustración, señalando que lo único que tienen seguro es que “*un litro de gaseosa alcanza para llenar cuatro vasos*” (EJB1, ESG3). De otro lado, los otros tres estudiantes resolvieron la operación directamente, manifestando, de manera correcta, que “*seis gaseosas alcanzan para 24 vasos*” (ESP2, ELQ4, EJO5).

En la segunda pregunta, sobre las estrategias a implementar, dos estudiantes manifestaron directamente que “*la estrategia sería multiplicar 6×4* ” (EJB1); “*una multiplicación*” (ESP2). Otros dos estudiantes señalaron que deberían analizar, ordenadamente, la imagen, es decir, observar la fila superior como guía, y luego la fila inferior, para de allí tomar una decisión (ESG3); “*haría una operación para saber la respuesta*” (EJO5). Esta última, puede ser cercana a la realidad, pero no es concreta con la vía para llegar a la solución de ese ejercicio en particular. Por último, la estudiante ELQ4 manifestó que su estrategia sería “*puedo contar con los dedos o con los colores*”, destacando su espíritu orientado a la solución y la creatividad. No obstante, el objetivo

sigue siendo la adquisición de las competencias sobre estructura multiplicativa, con lo cual, no es acertada.

Cuando los estudiantes se enfrentan a una nueva manera de abordar los ejercicios y problemas planteados desde el uso del método COPISI, estos adquieren herramientas para la toma de decisiones, entonces sus inferencias sobre las vías de solución adquieren mayor claridad para enfrentar el desafío (Sanaguano, 2022). Como se puede evidenciar, desde la implementación de los naipes multiplicativos, los estudiantes adquieren una nueva comprensión de la realidad la cual se encamina a las vías de resolución de problemas con herramientas más sofisticadas que los materiales concretos, es decir, los elementos pictóricos y los símbolos (abstractos) (Millar, 2019).

En la tercera pregunta se indagó directamente, por la operación a aplicar para saber cuántos vasos podrían llenarse con las seis gaseosas, para lo cual la totalidad de los participantes señaló que sería con una multiplicación. Posteriormente, en la pregunta cuatro se indagó por situaciones en donde hubiera menos o más litros de gaseosa. Un estudiante señala que “*según si baja o sube la cantidad, daría otra cantidad*” (EJB1), su apreciación es coherente con su percepción de cambio, lo cual es cierto, pero impreciso. De otro lado, los otros cuatro estudiantes si manifestaron que en caso de haber menor litros de gaseosa se llenaría menos vasos y caso de haber más litros de gaseosa, se llenaría más vasos (ESP2, ESG3, ELQ4, EJO5).

Por último, se preguntó en que otras situaciones similares se podría aplicar la misma regla. Dos estudiantes respondieron correctamente, con ejemplos prácticos: “*si una jaca tiene 4 lápices, cuantos lápices hay en 6 cajas*” (EJB1); “*Pepito fue a la plaza y compró un paquete de dulces y tiene 13. Si compra 3 paquetes, ¿cuántos dulces tiene?*” (ESG3). Otro estudiante señala que compraría gaseosa para toda la familia (EJO5). Otra señala que haría una resta y una división (ESP2), lo cual no es coherente con la pregunta planteada. Finalmente, un solo estudiante dejó el espacio en blanco.

Posteriormente, se solicitó a los estudiantes que resolvieran los ejemplos 3 y 4, en donde se presentó los espacios en blanco para que ellos mismos resolvieran los Naipes Multiplicativos (figura 12). En todos los casos, los estudiantes resolvieron correctamente

los ejercicios, cada uno con su metodología. Por ejemplos los estudiantes ESG3 y ESP2, hicieron los dibujos en los espacios, y fuera de los naipes explicaron, textualmente, el resultado del interrogante. Los estudiantes. De otro lado, los estudiantes EJB1 y EJO5 presentaron los dibujos dentro de los Naipes Multiplicativos y a un lado únicamente la operación, sin explicación alguna, pero con las operaciones bien ejecutadas. Finalmente, la estudiante ELQ4 realizó los dibujos, las operaciones y la explicación, toda dentro de los Naipes Multiplicativos, igualmente, como el resto, quedó bien desarrollado. En la figura 13 se muestran los tres casos.

Figura 12. Ejemplos 3 y 4 de Naipes Multiplicativos en blanco

Ejemplo 3
 Representa en un naipe multiplicativo el siguiente problema:
 Supongamos que en la papelería del barrio venden lápices a \$1.000 cada uno. Si decides comprar 6 lápices de una vez para asegurarte de tener suficientes, ¿cuánto tendrías que pagar en total por esos lápices?
 Ahora realiza la operación que te daría el resultado

Ejemplo 4
 Representa en un naipe multiplicativo el siguiente problema:
 Para una reunión, necesitas 10 botellas de agua. En la tienda, las botellas de agua se venden a \$ 1500 cada una. ¿Cuánto tendrías que pagar en total por esas 10 botellas?
 Ahora realiza la operación que te daría el resultado

Nota: Elaboración propia.

Figura 13. Resolución de los ejemplos de los estudiantes

	1000 pesos
	$6 \times 10 = 600$ o sea que en total de los lápices del precio serían \$6000

	\$7.000
	(?)

$$\begin{array}{r} \times 1000 \\ 6 \\ \hline 6.000 \end{array}$$

Nota: Las representaciones muestran como los estudiantes son capaces de representar pictóricamente un lápiz, luego seis. Asimismo, con el dinero. Este nuevo abordaje aprendido desde la secuencia didáctica permitió identificar la operación a aplicar.

Ahora bien, estos resultados preliminares en la aplicación de la secuencia didáctica uno, están en coherencia con lo planteado por Benavides (2008), quien manifiesta que el aprendizaje de las matemáticas contiene implicaciones personales y de estilos de aprendizaje. Es decir, aunque la didáctica sea la misma para todos los estudiantes, cada uno de ellos va a utilizar el método que más se les facilite y les parezca claro para obtener el resultado correcto. Esto incluye el detalle de las ilustraciones y la redacción o no de la explicación de las operaciones aritméticas utilizadas.

Posteriormente, se abordó la actividad en clase, el cual se desarrolló con el trabajo en grupos, cada grupo recibió Naipes Multiplicativos, tarjetas de preguntas y hojas con imágenes (figura 14). Luego del desarrollo de la actividad, los estudiantes resolvieron algunas preguntas de reflexión:

1. ¿Qué te parece importante recordar?
2. ¿Cuál es la operación matemática que podemos utilizar para resolver los problemas que trabajamos? Y ¿por qué?
3. ¿Cómo se deben organizar los datos utilizando el Naipe Multiplicativo para resolver los problemas?
4. ¿Qué valor debe identificar para poder calcular otros valores?
5. ¿Cómo organizar la información que trae cada problema para poder resolverlo?

Figura 14. Estudiantes trabajando en grupo según la secuencia didáctica 1



Nota: Los estudiantes están realizando las actividades con el material concreto que representa los objetos del ejercicio propuesto.

En la primera pregunta los estudiantes respondieron que es importante recordar el “*cómo organizar el Naipe Multiplicativo*” (EJB1). Además, fueron más allá en la explicación para señalar que desde la herramienta se debe analizar profundamente el problema para saber cómo abordarlo, manifestando que la primera fila es importante para comprender si el problema es fácil o difícil de organizar (ESP2, ESG3). “*Saber analizar el problema para resolverlo*” (EJO5). Por último, una estudiante manifestó que “*con lo que hicimos puede ayudarnos en algunas cosas como la multiplicación porque nuestra mente está recordando y pensando*” (ELQ4). Con lo cual son conscientes de la importancia de los procesos mentales en el aprendizaje de las estructuras multiplicativas.

En la segunda pregunta, los estudiantes manifestaron, en su totalidad, que la operación a realizar fue la multiplicación, lo cual es correcto. En la justificación de su respuesta, una estudiante manifestó que con el análisis del Naipe Multiplicativo es más fácil de responder al problema (ESP2). De otro lado, los estudiantes EJB1, ELQ4 y ESG3, señalaron que la vía más sencilla era la multiplicación comparada con la suma, debido a que la suma sería más lento y difícil.

Con respecto a la tercera pregunta, dos estudiantes señalaron que todo inicia analizando el Naipe Multiplicativo y “*después haremos una operación*” (ESP2); “*primero antes de hacer el Naipe, hay que leer el problema, luego poner el dato de la unidad y poner*

la pregunta” (EJO5). Los otros tres estudiantes (EJB1, ELQ4, ESG3), manifestaron que la organización de los datos fue realizada recurriendo a los ejemplos anteriores, como el de las galletas, los cuales les sirvieron de guía para abordar este nuevo problema.

La cuarta pregunta, sobre el valor a identificar para calcular el resto, tres estudiantes coincidieron que “*el valor más importante es el conocer el precio de la unidad*” (EJO5, ELQ4 y ESG3). Un estudiante manifestó, que es “*saber trabajar en equipo*” (EJB1), respuesta que no es coherente con la pregunta.

En cuanto a la última pregunta, sobre la organización de la información, un estudiante señaló que es solamente “*ordenar los datos del problema y luego resolverlo*” (EJO5); de forma similar, “*primero el dibujo, después la operación, luego coloco la respuesta*” (ESG3). El estudiante EJB1, explicó también el proceso para resolver el Naipe Multiplicativo, desde un ejemplo, lo cual, es igualmente válido.

Los hallazgos de esta actividad en clase, deja en evidencia la importancia del trabajo en equipo para el aprendizaje de las estructuras multiplicativas. Tal como lo señala Álvarez (2017), el trabajo cooperativo va más allá de la ayuda entre pares, sino que incide significativamente en el desarrollo cognitivo necesario para entender el concepto. Posteriormente se continuó con la sesión dos (momento de estructuración), esta inició con una activación de saberes previos. Según Díaz-Barriga y Hernández (2003), en las sesiones formativas para los estudiantes se requiere iniciar con preguntas de activación, dirigidas a traer al presente los presaberes de los estudiantes, quienes contarán con herramientas suficientes para la adquisición de los nuevos conocimientos. Las preguntas fueron:

1. ¿Qué fue lo más importante de la clase pasada?
2. ¿Recuerdas cómo eran los problemas que trabajamos en la clase anterior?
3. ¿Qué aprendiste durante la clase pasada?, ¿crees que será útil para resolver problemas en el futuro?

En la primera pregunta, dos estudiantes fueron muy concretos y manifestaron que el aprendizaje de la clase pasada fue el de “*el valor multiplicativo*” (ELQ4); “*la multiplicación*” (EJB1). Otras dos estudiantes fueron más amplias en sus respuestas al señalar que lo más importante fue “*leer y responder los problemas matemáticos*” (ESP2);

“como leer y resolver el problema para realizar el esquema y tener el resultado” (ESG3).

Por último, el estudiante EJO5 se enfocó en el valor del trabajo en equipo.

Sobre la segunda pregunta, una estudiante señaló que en la clase anterior se aprendió sobre el “*Naípe Multiplicativo y teníamos que hacer una multiplicación*” (ESP2). Esta respuesta, fue realmente la más acertada, ya que se orientó al nombre de la herramienta y la competencia desarrollada en clase. Luego, los otros cuatro estudiantes (ELQ4, EJB1, ESG3, EJO5), se limitaron a describir de que trataban algunos ejemplos de actividades que resolvieron como: galletas, botellas de agua, huevos.

La última pregunta fue en relación con la utilidad del aprendizaje de la sesión anterior para la resolución de problemas en el futuro. El estudiante EJB1 señaló que el aprendizaje fue el de “*la multiplicación y los Naipes*” (EJB1), aunque es una respuesta cierta, no llena los criterios sobre lo que se preguntó. La estudiante ESP2 manifestó que “*si es útil resolver problemas del futuros matemático*”. Es decir, que si considera que el aprendizaje de la sesión anterior le va a ser útil en futuros problemas matemáticos. En coherencia, otra estudiante señaló que “*si nos servirán para el futuro porque para saber cuánto tenemos que dar y nos tienen que devolver*” (ESG3). Según Díaz-Hernández y Ruiz-Ortega (2019) las estructuras multiplicativas son aprendidas con mayor facilidad en situaciones contextualizadas de los estudiantes en su vida personal y entorno natural, tal como lo planteó la estudiante en un caso de ir a una tienda. Por último, el estudiante EJO5, nuevamente se centró en el valor del trabajo en equipo.

Posteriormente, de dio inicio a la sesión con la intención de que aprendieran a estructurar, de manera simplificada los problemas (figura 15).

Figura 15. Problema de ejemplo

En el campamento al que asisten Mario y Liliana reparten un litro de leche entre cinco niños. ¿Cuántos niños pueden desayunar con 5 litros?

Organizamos los datos

1 Litro de leche	→	5 Niños desayunan
5 Litros de Leche	→	¿Cuántos niños?



Imagen: Matemáticas Se 5ª. Edición especial

Nota: Elaboración propia.

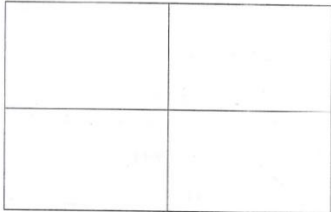

Luego de la explicación paso a paso, de cómo abordar el anterior problema, se solicitó a los estudiantes que realizaran los problemas con Naipes Multiplicativos vacíos y que además presentaran el procedimiento y solución (figura 16). Ahora bien, al observar las respuestas de todos los ejercicios elaborados por los estudiantes, se encontró que fueron resueltos correctamente en su totalidad por los estudiantes. En total, tres problemas que evocaron ejercicios de la clase anterior.

Figura 16. Problema de Naipe multiplicativo, procedimiento y solución

Momento de práctica. Ejercicios contextualizados

Dibuja en el Naipe multiplicativo y resuelve cada uno de los siguientes ejercicios:

1) Un estudiante está preparando su cartuchera para el nuevo año escolar. Él tiene cinco cajas de colores diferentes. Cada caja tiene muchos colores dentro. Si cada caja contiene 12 colores diferentes, ¿cuántos colores tendrá en total en su cartuchera?

Naipes Multiplicativo	Procedimiento y Solución
	

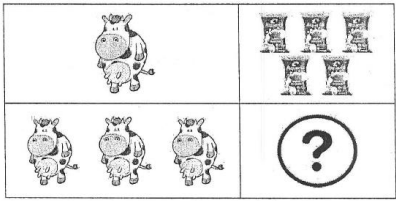
Nota: Elaboración propia.

Posteriormente, se propuso el abordaje de problemas en donde los estudiantes reciben el Naip multiplicativo diligenciado y deben proponer un problema y su respectiva solución (figura 17).

Figura 17. Ejercicios abiertos

Momento de práctica y transferencia. Ejercicios Abiertos

Crea un problema con cada uno de los Naipes Multiplicativos.
Presenta tu problema a un compañero o compañera y verifica su solución.

Naipes Multiplicativo	Problema
	<p>en una granja, de vacas el granjero quiere hacer paquetes de leche. Si una vaca hace 5 paquetes de leche, ¿cuántos litros daría 3 vacas?</p> <p>$\times 5$ rta: 15 paquetes $\frac{3}{15}$ de leche llenan 3 vacas</p>

Nota: En el momento de recibir el desarrollo claro del naipe multiplicativo, los estudiantes solo han dado la explicación del desarrollo del problema, acercándolos al entendimiento consciente de las operaciones para resolver la incógnita.

En los ejercicios abiertos, se pudo evidenciar aspectos más particulares de los estudiantes, como su creatividad a la hora de proponer contextos para resolver el Naipe Multiplicativo. Los estudiantes ELQ4, ESG3 y EJO5, desarrollaron los ejercicios con una redacción más imaginativa y creativa, en donde las situaciones involucraron nombres de personas, lugares específicos e interacciones. De otro lado, los estudiantes, ESP2 y EJB1, fueron más pragmáticos y se centraron directamente en la resolución del problema en los términos estrictamente necesarios; es decir, describieron la operación directamente con la estructura matemática.

Desde esta perspectiva, en la investigación de Giraldo y Montoya (2024) se evidenció que el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes se puede mejorar en la medida que se implementen estrategias didácticas en donde problemáticas situacionales se conviertan en oportunidades para implementar las competencias a ser aprendidas. Para efectos de las estructuras matemáticas, existen diversas situaciones que pueden ser adaptadas a las necesidades formativas de los estudiantes, resultando en la aplicación real de sus conocimientos.

Posteriormente, se propuso ejercicios a los estudiantes para desarrollar el Naipe Multiplicativo con número, en lugar de utilizar dibujos. Esto como paso lógico al desarrollo de problemas cada vez más complejos. Como se puede observar en la figura 18, se entregó a los estudiantes un primer ejemplo en donde deben comprender el Naipe Multiplicativo en su distribución con imágenes y en su derecha, como sería su estructura en un Naipe Multiplicativo de números. En este primer ejemplo, se pidió a los estudiantes que lo resolvieran. De este ejercicio, cuatro estudiantes lo resolvieron correctamente, únicamente cometió un error en su resolución la estudiante ESG3. Aunque lo planteó correctamente, al desarrollar la multiplicación el resultado fue erróneo. Además, la misma estudiante en el ejercicio tres, también ejecutó mal la multiplicación, aunque planteó correctamente la estructura multiplicativa. Asimismo, en los otros ejercicios, otros estudiantes tuvieron

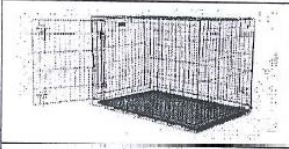

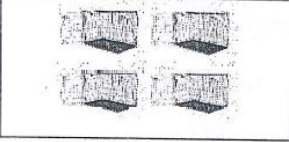

dificultades, lo cual se puede considerar que sucedió por el aumento de la dificultad, asociado a las cifras mucho más altas de cuatro y cinco dígitos (ESP2, ESG3).

Figura 18. Naipes Multiplicativos con imágenes y números

Momento de práctica y transferencia. Ejercicios Numéricos

A partir de los naipes multiplicativos, reemplaza las imágenes por números o cantidades y resuelve el problema.

- 1) En el patio de la casa de Mario, sus papás crían pollitos en jaulas puede contener hasta 18 pollitos. Ahora, tienen 4 jaulas llenas de pollitos. ¿Puedes ayudar a los padres de Mario a descubrir cuántos pollitos tienen en total en su patio?

Naipes Multiplicativo (Dibujos)		Naipes Multiplicativo (Números)					
		<table border="1" data-bbox="943 751 1325 863"> <tr> <td>1</td> <td>18</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>?</td> </tr> </table>	1	18	4	?	
1	18						
4	?						
			<p>Solución y respuesta:</p> <p>$\begin{array}{r} 18 \\ \times 4 \\ \hline 72 \end{array}$ <p>72 pollitos cabe en 4 jaulas</p> </p>				

Nota: Con la presentación del naipes multiplicativo en imágenes y en símbolos, los estudiantes pueden ir directamente a la resolución del ejercicio sin necesidad de ahondar en explicaciones extensas y confusas.

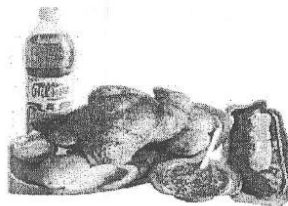
Seguidamente, en la figura 19 se observa cómo se implementó el paso definitivo de aprendizaje, es decir, que los estudiantes aprendieran a hacer esquemas para representar las estructuras multiplicativas y así plantear el procedimiento y solución de los problemas planteados. Se observa que es similar al Naipes Multiplicativo con número de la actividad anterior, con el cambio de que son formadas las relaciones con flechas entre los valores. Este método sistemático y paso a paso para el aprendizaje de las estructuras multiplicativas es coherente con lo planteado por Marulanda (2021), quien manifiesta que los docentes deben buscar estrategias en donde se propongan experiencias motivantes y llamativas que despierten el interés de los estudiantes, es decir, la didáctica, debe ser enriquecida para que el estudiante avance en su desarrollo cognitivo, guiado por la metodología intencionada del docente.

Figura 19. Problema para resolver por método de esquema

Momento de práctica y transferencia. Ejercicios Numéricos

Organiza los datos de cada problema sin ayuda de la cuadrícula del naipes multiplicativo y resuélvelo.

- 1) En la entrada del barrio El Topacio se encuentra el famoso asadero de pollos. Cada día, se venden en promedio 35 pollos completos que se sirven con papas saladas, arepas y maduro asado, acompañados de una gaseosa de 1.5 litros, todo por tan solo \$25.000. ¿Cuánto dinero recauda el asadero en un día?



Esquema		Procedimiento y Solución
1	→ 25000	$ \begin{array}{r} 2.5000 \\ \times 35 \\ \hline 125000 \\ 75000 \\ \hline 875000 \end{array} $ R/El asadero recauda: 87.5000
35	→ ?	

Nota: El estudiantes ha desarrollado el naipes multiplicativo únicamente con los símbolos numéricos necesarios, lo cual lo llevó a obtener la respuesta correcta.

Nuevamente, en este tipo de esquema se presentaron dificultades, con la cantidad de las cifras. Tres de los cinco estudiantes resolvieron correctamente el primer ejercicio (ESG3, EJB1 y EJO5), los dos ejercicios siguientes si fueron resueltos correctamente por los estudiantes. Incluso, se eliminó las flechas y los cuadros para que ellos mismos los dibujaran, tal como se muestra en el último ejercicio (figura 20).

Figura 20. Ejemplo de esquema desarrollado por los estudiantes

- 3) Para planear las actividades de la celebración del Día del Hombre, las niñas de 5° 3 y 5° 4 necesitan saber cuántos niños hay en total en los 12 grupos de la tarde. Con un promedio de 22 niños por salón, ¿cuántos niños participarán en las actividades del día del hombre?

Esquema	Procedimiento y Solución
12 → ? 1 → 22	$ \begin{array}{r} 12 \\ \times 22 \\ \hline 24 \\ 24 \\ \hline 264 \end{array} $ 264 niñas hay en los 12 salones de la tarde

Nota: Como resultado final, ya el estudiante puede prescindir del material concreto y los elementos pictóricos para ir directamente a los símbolos que representan los elementos del problema planteado.

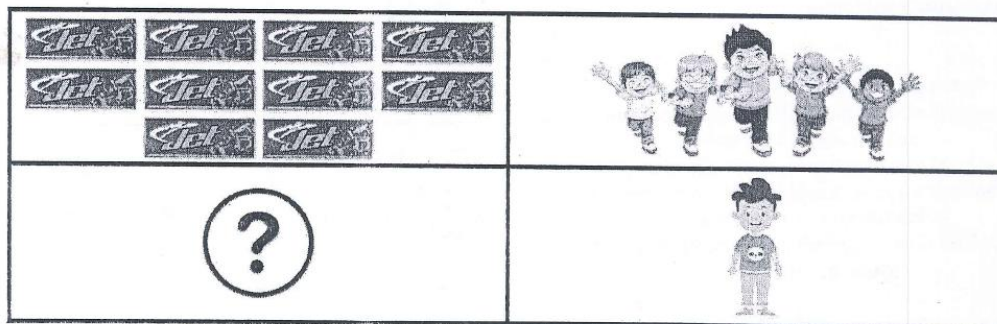
6.2.2 Secuencia Didáctica 2. División

En el presente apartado se muestra el desarrollo de la segunda secuencia didáctica, la cual fue construida para el aprendizaje de la estructura multiplicativa orientada a la resolución de problemas por división. Nuevamente, se utilizan problemas que sean fácilmente asimilados por los estudiantes por la familiaridad del contexto en que se desarrollan. En este caso, el de repartir chokolatinas entre amigos.

Figura 21. Ejemplo de problema para resolver por división

Ejemplo 1

Si tienes 10 chokolatinas y quieres repartirlos entre 5 amigos de manera equitativa, ¿cuántas chokolatinas recibirá cada amigo?



<ul style="list-style-type: none"> En la primera fila, se indica la relación: "10 chokolatinas para 5 estudiantes", es decir: 	10 Chokolatinas = 5 niños
<ul style="list-style-type: none"> En la segunda fila del naipe, se busca el valor de la unidad, es decir, "¿cuántas chokolatinas recibe un niño?", es decir: 	¿Cuántas chokolatinas? = 1

Lo que se resolvería por medio de la división $10 \div 5 = 2$

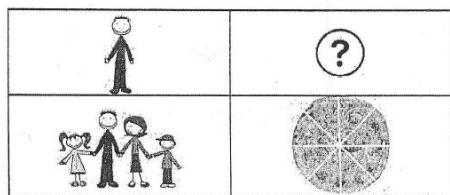
Nota: Elaboración propia.

Asimismo, se continua con la metodología similar a la utilizada en la primera secuencia didáctica, es decir, con el uso del Naipe Multiplicativo. Luego de explicar el ejemplo, a los estudiantes se solicita que resuelvan en segundo ejemplo, en el cual se les entrega el problema y Naipe Multiplicativo construido, para que ellos hagan el procedimiento y la solución (figura 22). Al finalizar este ejemplo, todos los estudiantes han resuelto efectivamente la operación.

Figura 22. Ejemplo 2 de problema para resolver con división

Ejemplo 2

El papá invita a su esposa y a sus dos hijos a comer pizza. ¿Cuántas porciones podrá recibir cada uno si compraron una pizza y se pidió que la dividieran en 8 porciones iguales?



Solución Y respuesta:

$$\begin{array}{r} 8 \overline{) 4} \\ 0 \ 2 \end{array}$$

2 pizzas come cada uno

Nota: Ahora los estudiantes, según las indicaciones de la segunda secuencia didáctica, lograron identificar el uso de la división para este tipo de problemas.

Posteriormente se indagó a cada uno de los estudiantes por su percepción sobre estos nuevos problemas, con las siguientes cuestiones:

1. ¿Crees que es importante trabajar con material real, como las porciones de pizza?
Explica tu respuesta
2. ¿Si se utilizan dibujos, es más fácil de resolver? Explica tu respuesta
3. ¿Cómo podríamos calcular el número de pizzas sin necesidad de imágenes o dibujos?
4. ¿Crees que el Naipe Multiplicativo es útil para resolver problemas de matemáticas como el de la pizza?

Frente a la primera pregunta, los estudiantes, en su totalidad, señalaron que es importante trabajar con material real. Según el estudiante ESP2, es más sencillo porque se evita cometer errores a la hora de escribir. Por su parte los estudiantes EJB1 y ESG3 señalan que “sirve de guía para resolver más rápidamente el problema matemático”, incluso para saber exactamente el tamaño por individuo. El estudiante ELQ4 señala que “vamos aprendiendo más como dividir, multiplicar y nos preparamos para los esquemas”. Sobre esto último, el estudiante es consciente de que la metodología debe ser progresiva y tendrá una mayor complejidad en el futuro.

La segunda pregunta trata sobre el uso de los dibujos, según señalan los estudiantes EJO5 y ELQ4, el uso de dibujos no es mejor *“porque nos demoraríamos un poquito más”* (EJO5). Además, que *“también se puede utilizar los números, da lo mismo”*. Esto indica que los estudiantes, a la medida que van aprendiendo el uso de los esquemas, aparentemente, se dan cuenta de su facilidad para ser aplicados. Otro estudiante señala que hacer dibujos *“para un niño pequeño es mejor”* (EJB1). Las otras dos estudiantes señalaron que para las multiplicaciones y para las divisiones los dibujos sirven para hallar las respuestas (ESP2 y ESG3).

Los estudiantes dieron respuesta a la tercera pregunta señalando que pueden calcular el número de pizzas *“por medio de números, porque es una forma de hacer el Naipe”* (EJO5), lo cual también lo dijo la estudiante ELQ4, señalando: *“con esquemas, o sea, con números”*. Otra estudiante señaló que *“gracias al problema sabemos la cantidad de pizzas, así nos confundimos”* (ESG3). Finalmente, los dos últimos estudiantes manifestaron que se pueden obtener sin necesidad de figuras realizando directamente las operaciones de multiplicación o división (ESP2 y EJB1).

En cuanto a la última pregunta sobre la utilidad del Naipe Multiplicativo para resolver problemas de matemáticas, la totalidad de los estudiantes estuvieron de acuerdo que el Naipe Multiplicativo es útil para resolver problemas matemáticos, con el uso de la multiplicación o la división. Según Giraldo y Montoya (2024) el aprendizaje de las matemáticas requiere que los estudiantes también desarrollen la comprensión lectora, ya que el éxito en la resolución de problemas radica en el entendimiento del mismo, para decidir cómo resolverlo. En el caso del presente estudio, en algunas respuestas dadas por los estudiantes manifestaron que únicamente leyendo el problema pueden resolverlo, o tomar la decisión de que operación realizar. Este tipo de aprendizaje es más cercano al desarrollo cognitivo abstracto que se requiere en la formación integral del educando.

Luego de indicó un último ejemplo para ejercitar el nuevo aprendizaje en donde deben aplicar la operación de división para resolver el problema. Al aplicarlo se encontró que cuatro de los cinco estudiantes resolvieron acertadamente el problema con los pasos necesario dentro del Naipe Multiplicativo (EJO5, ESG3, ESP2 y EJB1). Únicamente, una

estudiante presentó mal el ejercicio, debido a que, en lugar de aplicar una división, aplicó una multiplicación.

De estos hallazgos se pudo determinar que los estudiantes están enfrentados a situaciones desafiantes de aprendizaje, específicamente las de partir de los objetos concretos hacia la representación simbólica de la realidad, lo cual requiere de que adquieran la consciencia del fundamento para la elección de la operación matemática correcta (Zapatera, 2020). No obstante, la apropiación del naípe multiplicativo en situaciones de división es una nueva dificultad para el estudiante, quien necesita una nueva visión sobre las operaciones y entendimiento sobre el procedimiento más adecuado. Según Iori (2014) es esta evolución la que garantiza que el estudiante adquiera un nuevo cambio cognitivo significativo para comprender la realidad y asumir las acciones lógicas para solucionar los problemas.

Figura 23. Ejemplo de Naípe Multiplicativo por división

Ejemplo 3

Intenta representar en el naípe multiplicativo el siguiente problema:

Antes de salir a vacaciones, el profesor Jhonatan se encontró \$10,000 y no consiguió saber quién era el dueño.

Ahora, con ese dinero quiere premiar a 4 estudiantes que se quedaron voluntariamente a colaborar con el aseo del salón.

¿Cuánto dinero recibirá cada estudiante por su ayuda desinteresada?

Ahora realiza la operación que te daría la respuesta

Nota: Elaboración propia.

Posteriormente se desarrolló una actividad en clase, la cual se llevó a cabo en grupos, la actividad se denominó “Desafío Matemático: Rotando entre Mesas de Problemas”. Esto inspirado en un programa de televisión que actualmente goza de popularidad. En la figura 24 se muestra la evidencia fotográfica de la actividad.

Figura 24. Evidencia del trabajo en equipo en el desafío matemático



Nota: Los estudiantes están trabajando con material concreto que representa los ejercicios para resolver mediante la división.

Posteriormente a la actividad del desafío se plantearon cinco preguntas de reflexión:

1. ¿Usar materiales que puedas tocar y ver te ayuda a entender mejor los problemas?
Por favor, explica tu respuesta.
2. ¿Qué información es muy importante para resolver estos problemas?
3. ¿Cómo se deben organizar los datos utilizando el Naipe Multiplicativo para resolver los problemas?
4. ¿Cuál es la operación matemática que podemos utilizar para resolver los problemas que trabajamos? Y ¿por qué?
5. ¿Qué aprendiste?

Según los estudiantes EJO5, ESG3 y EJB1, señalan que los materiales utilizados sirven para resolver los problemas: “*nos ayudan a resolver las operaciones*”; “*nos ayuda a entender mejor y así poder resolver los problemas*”. Según Revelo y Yánes (2023) encontró que la enseñanza de las matemáticas es más efectiva cuando los estudiantes son expuestos a materiales concretos que les permite aprender los conceptos abstractos desde la manipulación de objetos y la realidad. De acuerdo a lo anterior, este tipo de actividades en clase resultaron efectivas en el objetivo de aprendizaje de los estudiantes.

En cuanto a la segunda pregunta, un estudiante señaló que es importante *“la información de los datos porque nos ayudan a acomodarlos”* (EJO5). De otro lado, los otros dos estudiantes señalaron que la información más importante es el dato del valor de la unidad. Luego en la tercera pregunta se indagó por la organización de los datos en el Naipe Multiplicativo. Un estudiante señaló que *“primero hacer el valor de la unidad y lo segundo es poner el valor de varios”* (EJO5). Otra estudiante manifestó que *“primero la pregunta [signo de interrogación] y después los datos”* (ESG3). De otro lado, otro estudiante lo explicó con un ejemplo: *“galletas con galletas y niños con el signo de interrogación”* (EJB1).

En la cuarta pregunta se indagó por la operación a utilizar en los ejercicios que trabajaron. Una estudiante respondió acertadamente, señalando: *“la división porque no nos dicen el valor de unidad”* (EJB1). Mientras que otra estudiante dijo que se utiliza: *“la multiplicación y la división, así encontramos la solución”* (ESG3). Por último, el estudiante EJO5 respondió erróneamente, al señalar que: *“la multiplicación porque nos ayudan a conocer el valor de varios”* (EJO5). En otros estudios de la formación en matemáticas para estudiantes de primaria, se ha encontrado que presentan cierta confusión al momento de aprender la multiplicación y división, sobreponiendo conceptos y generando errores operacionales para la resolución de problemas (Stauffer et al., 2020).

Luego se llevó a cabo la segunda sesión, en donde se comenzó con preguntas de indagación para la activación de presaberes:

1. ¿Qué fue lo más importante de la clase pasada?
2. ¿Recuerdas cómo eran los problemas que trabajamos en la clase anterior?
3. ¿Qué aprendiste durante la clase pasada, que crees que será útil para resolver problemas en el futuro?

De cara a la primera pregunta, tres estudiantes fueron enfáticos que lo más importante fue *“la división”* (EJB1); *“como dividir”* (ESG3); *“las divisiones, porque las multiplicaciones son diferentes a las divisiones”* (ESP2). Los otros dos estudiantes hicieron un mayor énfasis en la importancia del manejo de Naipe Multiplicativo para la

organización de los datos en los problemas (EJO5 y ELQ4), sin embargo, en ningún momento, estos dos últimos estudiantes, hicieron referencia a las operaciones de la división.

Sobre la segunda pregunta, un estudiante manifestó que “*no nos decían el valor de la unidad*” (EJB1). Mientras que los otros cuatro estudiantes trajeron a colación los recuerdos sobre qué tipo de problemas enfrentaron, con lo cual listaron los productos utilizados: regalos, manzanas, leche y huevos (ESG3, ESP2, EJO5 y ELQ4).

Sobre la última pregunta de presaberes, los estudiantes EJB1, ESG3 y ELQ4 manifestaron directamente que el aprendizaje que les sirve para el futuro es el de las divisiones, que lo pueden aplicar en diferentes contextos o problemas para resolver. El estudiante EJO5, señaló que “*la operación, porque nos ayuda con la respuesta*”, es decir, que se ha centrado en como el procedimiento de resolución de problemas lo ha considerados especialmente útil. Finalmente, la estudiante ESP2 explicó un ejemplo que le servirá para el futuro, en estos términos: “*de los paquetes de galletas que un paquete lleva 5 galletas cada paquete con división*”.

El método de los naipes multiplicativos resulta adecuado según lo demuestra las respuestas de los estudiantes, quienes asumen un análisis más específico sobre las operaciones a elegir y los resultados que se desean obtener. Bajo esta perspectiva, el docente al aplicar metodologías coherentes con el desarrollo cognitivo del estudiante y las herramientas disponibles para su aprovechamiento, logra resultados positivos hacia la resolución de problemas (Gajardo et al., 2018). Asimismo, la recolección de información que da cuenta de sus percepciones permite corroborar que el avance es coherente con la intencionalidad de la unidad didáctica.

En seguida, se continuó con la proporcionalidad directa, explicado con ejemplos con el fin de que los estudiantes logren realizar operaciones cognitivas más complejas. Se empezó con dos ejemplos que se desglosaron hasta llegar al resultado (figura 25).

Figura 25. Ejemplos para resolver proporcionalidad directa en división

Después de jugar, la abuela de Natalia nos sirvió galletas.
En el plato había 15 galletas que sacó de tres paquetes.
¿Cuántas galletas vienen en cada paquete?

Organizamos los datos

3 Paquetes \longrightarrow 15 Galletas
1 Paquete \longrightarrow ¿Cuántas galletas?



Imagen: <https://www.freepik.es/fotos-premium/plato-galletas>

Resolvamos otro:

La mamá de Nikoll compra sus lápices en la papelería del Topacio.
Allí, cada lápiz le cuesta \$2500. Sin embargo, una vecina le aconseja
comprar una cajita de 6 lápices por \$9000.

¿Cuál opción sería mejor para la mamá de Nikoll:
comprar individualmente o la cajita?

Organizamos los datos

1 Lápiz \longrightarrow ¿Cuánto Cuesta?
6 Lápices \longrightarrow \$ 9.000

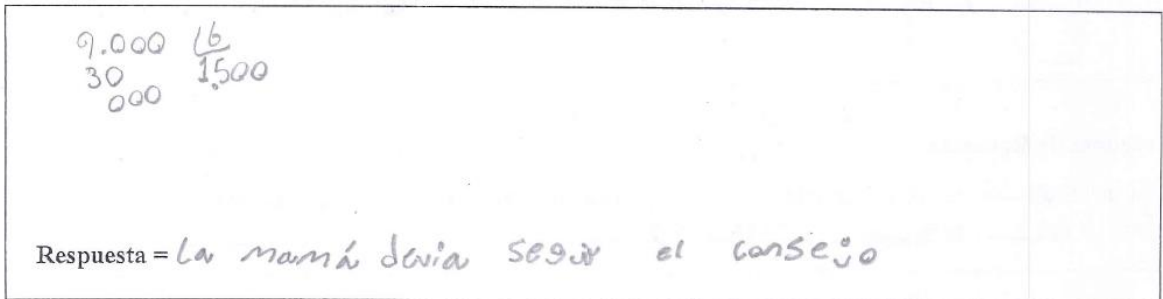


Imagen: https://es.123rf.com/photo_95429605_colegiala-con-madre-comprando-1%C3%A1piz-de-color-marcadores-diferentes-color-

Nota: Elaboración propia.

El segundo ejemplo, del lápiz, fue resuelto por los estudiantes, demostrando que entendieron completamente la actividad. De un lado, lograron utilizar el Naipe Multiplicativo adecuadamente, decidir cual operación usar, la división, y posteriormente aconsejar cuál es la mejor opción a la hora de comprar lápices. En la siguiente figura se muestran algunas de las respuestas de los estudiantes:

Figura 26. Respuesta de los estudiantes



$$\begin{array}{r} 9000 \text{ LG} \\ 30 \overline{) 27000} \\ \underline{15000} \\ 12000 \\ \underline{9000} \\ 3000 \end{array}$$

Respuesta = LA mejor opción es el consejo de la vecina para la compra de la casa.

Que la tía mamá le vale más caro si compra una casa por una casa la casa le vale 15000 pero si compra una por una le costara 15000 pero la operación es la multiplicación

$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 6 \\ \hline 15000 \end{array}$$

Respuesta = lo mejor es seguir el consejo de la vecina.

Nota: Con el desarrollo del problema, han sido consientes del resultado de la división y la toma de decisiones sobre la compra que mejor los beneficie.

En la medida en que se avanzó con los ejemplos propuestos, los estudiantes tomaron mejores decisiones en la resolución de los problemas. Dichas decisiones se materializaron en operaciones adecuadas para encontrar la solución. Asimismo, no fue necesario, en esta ocasión el uso de elementos pictóricos sino únicamente simbólicos. Esto corrobora el hecho de que la adquisición de conocimientos y desarrollo cognitivo se convierten en las herramientas adecuadas para garantizar el éxito formativo de los estudiantes (Delgado et al., 2018; Iori, 2014).

Posteriormente se propuso tres ejercicios para resolver con el Naipe Multiplicativo, los cuales debían ser abordados con la división. Como se observa en la figura 27 se proponen los ejercicios y los estudiantes deben dibujar los elementos necesarios dentro del Naipe Multiplicativo, además de realizar la operación para dar solución al problema. Al finalizar estas actividades, se encontró que todos los estudiantes resolvieron correctamente los ejercicios, demostrando que aprendieron a utilizar el Naipe Multiplicativo para desarrollar divisiones.

Figura 27. Ejercicios para resolver dibujando el Naipe Multiplicativo

Dibuja en el Naipe multiplicativo y resuelve cada uno de los siguientes ejercicios:

- 1) El día de los niños, Hellen Gisell consiguió un montón de dulces: ¡24 dulces en total! Ahora, quiere compartirlos con sus dos mejores amigas del salón. ¿Cuántos dulces debería darle a cada una?

Naipe Multiplicativo	Operación y Solución

Nota: Elaboración propia.



Luego los estudiantes recibieron una pregunta de reflexión:

1. ¿Hacer los dibujos te ayuda a entender mejor los problemas? Por favor, explica tu respuesta.

Frente a esta pregunta, los estudiantes EJB1, ESG3 y EJO5, manifestaron que: “*si me ha servido mucho*”; “*si me puedo guiar gracias a los dibujos y responder más rápido*”; “*sí porque nos ayudan a resolver el problema*”. En este sentido, los estudiantes valoran positivamente el uso de los dibujos para la resolución de los diferentes problemas propuestos. Ahora bien, los estudiantes han demostrado que han avanzado en la resolución de problemas gracias al uso del Naipe Multiplicativo. Según Marulanda (2021) la implementación de material didáctico que involucra imágenes en donde los estudiantes puedan interactuar, sirven para mediar los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, desde las competencias para la resolución de problemas multiplicativos.

Figura 28. Ejercicios abiertos de división con Naipes Multiplicativos

Crea un problema con cada uno de los Naipes Multiplicativos.
Presenta tu problema a un compañero o compañera y verifica su solución.

Naip Multiplicativo		Problema
	\$23.400	
	?	

Nota: Elaboración propia.

En el desarrollo de estos ejercicios, se vio nuevamente la creatividad de los estudiantes, cuatro de ellos (EJB1, EJO5, ESG3, y ELQ4), decidieron contar historias adaptadas a la realidad, y demostraron su imaginación al proponer problemas en donde utilizaron los Naipes Multiplicativos propuestos (figura 29). Mientras que el estudiante ESP2, fue un poco más directo y sencillamente describió los objetos y procedió a resolver.

Figura 29. Ejemplos de problemas redactados por los estudiantes

Problema	Problema
<p>en la tienda vender la paca de leche es \$23.400 pero como en la tienda no me dicen precio de una que hago?</p> $\begin{array}{r} \$23.400 \div 6 \\ 54 \overline{) 23400} \\ \underline{300} \\ 300 \\ \underline{300} \\ 000 \\ 000 \\ \underline{000} \\ 000 \\ \underline{000} \\ 000 \end{array}$ <p>el precio de un litro de leche es 3.900</p>	<p>en una granja de vacas hicieron 6 pacas de leche y vendio las 6 a 23.400 cuantos vale cada una?</p> $\begin{array}{r} 23.400 \div 6 \\ 54 \overline{) 23400} \\ \underline{300} \\ 300 \\ \underline{300} \\ 000 \\ 000 \\ \underline{000} \\ 000 \\ \underline{000} \\ 000 \end{array}$ <p>1 litro cada paca valieron 3.900</p>

Nota: con las herramientas cognitivas que poseen los estudiantes, estos asumen lo que consideran es la mejor decisión para aplicar la operación y dar respuesta al interrogante, siendo acertado.

En cuanto a los resultados de las operaciones, únicamente los estudiantes ELQ4 y ESP2 tuvieron errores en el tercer ejercicio abierto, lo cual pudo estar relacionado con las cantidades manejadas, es decir, de tres y cuatro cifras, lo cual dificultó la ejecución de las

divisiones. Incluso en uno de los estudiantes el error fue que colocó un cero adicional en la respuesta. Causando el error sobre la operación.

Al finalizar los tres ejercicios abiertos se realizó una pregunta de reflexión:

1. ¿Qué información es muy importante para resolver problemas y por qué?

Como respuesta de los estudiantes, estos señalaron que es muy importante: “*los Naipes y el valor de unidad*” (EJB1); “*el valor de la unidad nos ayuda a saber cuándo vale algo que es lo que tiene que repartir o algo así*” (ESG3); “*la información del problema porque nos ayudan a resolver un problema*” (EJO5). Como se muestra es que los estudiantes son conscientes de la importancia de la información suministradas desde el problema planteado y en el Naipe Multiplicativo. Además, el estudiante ESP2 señaló que con la información del problema planteado se puede saber si es necesario realizar una multiplicación o una división.

Enseguida, se realizó la sesión 3, momento de práctica y transferencia, en donde los estudiantes fueron expuestos sobre el desarrollo del Naipe multiplicativo, únicamente con números (figura 30). Los estudiantes desarrollaron los tres ejercicios propuestos, en donde, además elaboraron el Naipe Multiplicativo sin información. Los tres ejercicios fueron resueltos correctamente por todos los estudiantes, sin errores y ejecutando las operaciones de la división acertadamente. Al finalizar se indagó con una pregunta de reflexión:

1. ¿Cómo se deben organizar los datos en el Naipe Multiplicativo para resolver los problemas?

El estudiante EJO5 señaló que “*primero toca que hacer le valor de la unidad y lo segundo el valor de varios*”. Esto es coherente también con lo que manifestó el estudiante ESG3: “*primero los datos que nos dicen cuanto es eso debe ir abajo y la pregunta arriba. Cuando pregunta por uno*”. De otro lado, el desempeño de los estudiantes en el área de matemáticas también tiene que ver con la comprensión lectora, es por ello que uno de los

participantes manifestó que: “*primero tienes que leer y después organizar dependiendo de lo que te hablen*” (ELQ4). Por su parte, una manera también de abordar la explicación es con un ejemplo, como lo resaltó el estudiante EJB1: “*por ejemplo, jugos con jugos, pregunta con precio*”. También el estudiante ESP2 dio una explicación por cantidades, en donde refiere que si el ejercicio pregunta por muchos es multiplicación, pero si la incógnita es la unidad, entonces se resuelve por división.

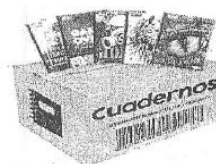
Figura 30. Naipes Multiplicativo con números

- 1) Durante la clase de matemáticas, el profesor Rodrigo planea realizar una actividad en la que los estudiantes se dividirán en 8 grupos, cada uno con el mismo número de integrantes. Hoy, 32 estudiantes asistieron a clase. ¿Cuántos estudiantes habrá en cada grupo?



Naipes Multiplicativo		Operación y Solución
1	?	
8	32	

- 2) A la coordinadora Selene le regalaron una caja con 24 cuadernos nuevos. Después de revisarlos, decidió repartirlos entre Tomas, Zaira, Yilbran y Emanuel. Si quiere que cada uno reciba la misma cantidad, ¿cuántos cuadernos debe dar a cada estudiante?



Naipes Multiplicativo		Operación y Solución

Nota: Elaboración propia.

Finalmente, en los últimos tres ejercicios se solicitó a los estudiantes que los resolvieran con el método del esquema sin el uso del Naipes Multiplicativo (figura 31). Aunque se logró llevar a cabo todos los ejercicios, únicamente los estudiantes EJO5, ESG3 y EJB1, llevar a cabo los ejercicios sin errores y dando los resultados correctos. No

obstante, los estudiantes ELQ4 y ESP2 tuvieron errores en dos de los ejercicios, por operaciones mal realizadas en la división, y con fusión en la cantidad de dígitos, esto al manejar cifras mucho más grandes a las que están acostumbrados.

Figura 31. Ejercicios para resolver con el método del esquema

Organiza los datos de cada problema sin ayuda del naipe multiplicativo y resuélvelo.

- 1) En una panadería, después de hornear un pedido grande, sobraron 216 panes. La gerencia decidió repartirlos entre los 6 empleados que trabajaron todo el día, con la idea de que cada uno reciba la misma cantidad. ¿Cuántos panes recibirá cada empleado?



Esquema	Operación y Solución
<div style="border: 1px dashed gray; padding: 10px; width: 80%; margin: auto;"> <!-- Empty space for drawing a schema --> </div>	<div style="border: 1px dashed gray; padding: 10px; width: 80%; margin: auto;"> <!-- Empty space for writing the operation and solution --> </div>

Nota: Elaboración propia.

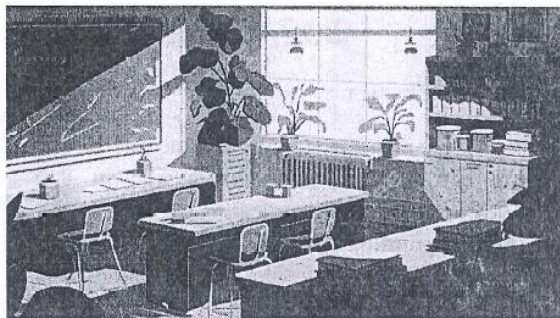
6.3 ANÁLISIS FINAL

La evaluación final se realizó con la aplicación de la misma evaluación inicial, en donde ya se podrá observar cuáles serán las respuestas dadas por los estudiantes según la adquisición de los nuevos conocimientos. Antes de iniciar con el primer ejercicio (figura 32) se indagó con dos preguntas a los estudiantes:

1. ¿Cómo puedes organizar la información para resolver el problema?
2. ¿Qué operaciones matemáticas o cálculos necesitas hacer para encontrar la respuesta del problema?

Figura 32. Ejercicio 1 de la prueba final

- 1) En el colegio Alberto Castilla, el personero estudiantil 2024 está comprometido con promover prácticas amigables con el medio ambiente. Para lograrlo, el personero quiere entregar 4 plantas a cada uno de los 25 salones del colegio.
¿Cuántas plantas en total necesita el personero para llevar a cabo su iniciativa?

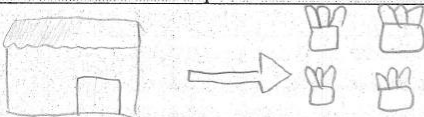
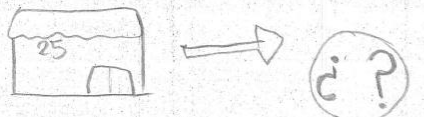


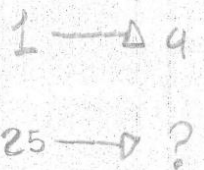
Nota: Elaboración propia.

Según el estudiante ELQ4, señala que se puede organizar el problema según el tipo, es decir con uno de los esquemas aprendidos en clase. Por su parte, el estudiante EJO5 manifiesta que *“primero el valor de unidad y luego el valor de varios”*. Esto ya lo habrían concluido dentro de las sesiones sobre las estrategias para el desarrollo de los ejercicios. Los estudiantes EJB1, ESP2 y ESG3, han manifestado que *“yo haré un Naipe Multiplicativo para saber si es división o multiplicación”*. Asimismo, pudieron concluir con exactitud que: *“organizándolas como multiplicaciones porque nos preguntan por varias”*. Esto quiere decir que los estudiantes ahora cuentan con los conocimientos necesarios para abordar con seguridad este tipo de problemas. Sobre la segunda pregunta cuatro estudiantes han dicho que *“una multiplicación para encontrar la solución”* (EJO5, EJB1, ESP2, ESG3). Por su parte, el estudiante ELQ4 manifestó que podría ser por cualquiera de las dos operaciones, pero que la elección de la operación correcta surge del análisis a profundidad del problema planteado.

Al desarrollar el ejercicio, los estudiantes utilizaron los esquemas aprendidos durante la implementación de las secuencias didácticas (figura 33). Los estudiantes ELQ4, EJO5, EJB1 y ESG3, han conseguido resolver correctamente el primer ejercicio. Únicamente la estudiante ESP2, aunque dibujo correctamente el esquema, el resultado fue erróneo.

Figura 33. Esquemas usados por los estudiantes

¿Cuántas plantas en total necesita el personero para llevar a cabo su iniciativa?	
Esquema	Procedimiento y Solución
	$\begin{array}{r} 25 \\ \times 4 \\ \hline 100 \end{array}$
	<p>R/=El personero tendrá que conseguir 100 plantas</p>

¿Cuántas plantas en total necesita el personero para llevar a cabo su iniciativa?	
Esquema	Procedimiento y Solución
	$\begin{array}{r} 25 \\ \times 4 \\ \hline 100 \end{array}$ <p>R/=El personero necesita 100 plantas para 25 salones</p>

Nota: Con el aprendizaje sobre el naipe multiplicativo y los ejercicios resueltos en la secuencia didáctica, los estudiantes han propuesto, de un lado, el uso de los elementos pictóricos, y de otro, los símbolos, ambos adecuados y pertinentes para obtener el resultado.

Luego se propuso el segundo ejercicio (figura 34), también con dos preguntas previas:

1. ¿Cómo crees que hicieron los dueños para que todos los empleados recibieran la misma cantidad de galletas?
2. ¿Crees que, si fueran más empleados en la fábrica, cada uno recibiría más o menos galletas? ¿por qué?

Figura 34. Ejercicio 2 de la prueba final

- 2) En una fábrica, hicieron tantas galletas que sobraron 256. Por eso, los dueños decidieron compartirlas entre los 8 empleados para evitar que se pierdan. Quieren que cada empleado reciba la misma cantidad como agradecimiento por su buen trabajo. ¿Cuántas galletas debe recibir cada empleado?



Nota: Elaboración propia.

Sobre la primera pregunta tres de los estudiantes manifestaron que la manera correcta de resolver el problema es: “tuvieron que hacer una división porque tienen que repartirlos entre 8 empleados” (ELQ4). Otra estudiante dijo, “lo haré con una división para repartir cada galleta” (ESP2). Lo mismo respondió EJB1, diciendo que “deberían dividir para saber cuánto se lleva cada uno”. De otro lado, los estudiantes EJO5 y ESG3 coincidieron en un procedimiento diferente, el cual consiste en entregar las galletas uno a uno de los trabajadores hasta que se acabaran.

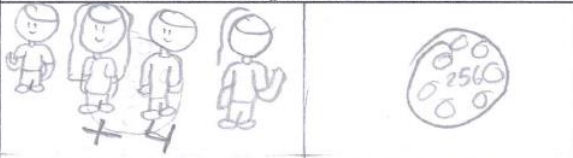
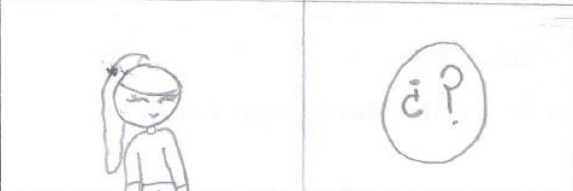
Sobre la segunda pregunta, los estudiantes dieron diferentes respuestas, no obstante, las estudiantes ELQ4 y ESG3 fueron consistentes al decir: “si fueran menos recibirían más porque ya no son 8 sino 6, si fueran más recibirían menos, porque ya aumenta la cantidad”. En cambio, los otros estudiantes (ESP2, EJB1, EJO5) se centraron en la posibilidad de que fueran más empleados y por ende les tocaría de a menos galletas a cada uno.

Todos los estudiantes resolvieron correctamente el ejercicio con esquemas y de dibujos (figura 35). Como se puede observar, ellos hicieron uso de la división, la operación correcta para el desarrollo del problema. Además, comprendieron que es más sencillo elaborar los ejercicios con el uso de esquemas, puesto que los dibujos demandan más tiempo y obtiene el mismo resultado. En este sentido, Riveras y Márquez (2023) concluyeron que el aprendizaje en los estudiantes de grado 5º de primaria para realizar las operaciones de división, tienen un mayor éxito cuando se deja de lado el aprendizaje netamente abstracto y se centra en la representación gráfica de las operaciones

matemáticas. Asimismo, resulta en un desafío curricular y didáctico para mejorar los proyectos de aula y así garantizar metodologías orientadas a actividades que garanticen el éxito académico de sus estudiantes.

Figura 35. Ejemplos de respuestas dadas por los estudiantes

¿Cuántas galletas debe recibir cada empleado?	
Esquema	Procedimiento y Solución
$8 \Rightarrow 256$ $1 \Rightarrow ?$	<p>El total de galletas que tiene que repartir la fábrica en los 8 empleados es 256</p> <p>¿por que? $\begin{array}{r} 256 \overline{) 18} \\ \underline{16} \\ 0 \end{array}$</p>

¿Cuántas galletas debe recibir cada empleado?	
Esquema	Procedimiento y Solución
	$\begin{array}{r} 256 \overline{) 18} \\ \underline{16} \\ 0 \end{array}$
	<p>R: cada uno recibirá 32 galletas</p>

Nota: En este ejercicio, nuevamente se observa que un estudiante utilizó los símbolos y otros los elementos pictóricos. En ambos casos con el análisis correcto del ejercicio.

Luego se planteó el ejercicio número tres de la prueba final (figura 36), e igualmente que en los casos anteriores se inició con dos preguntas;

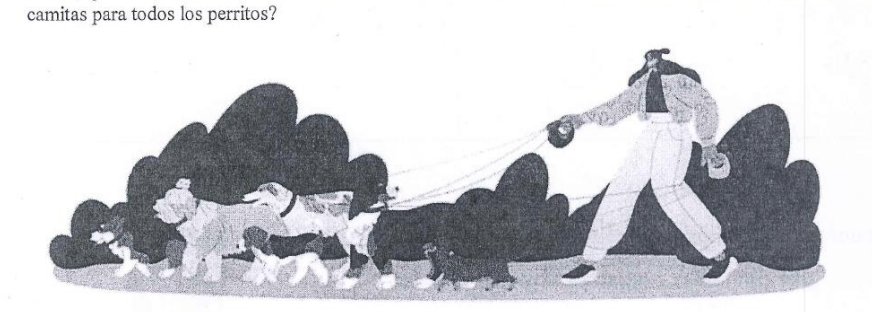
1. ¿Cómo te imaginas que Juan y Sofía organizaron la distribución de los 36 perritos entre las cunas de su refugio?
2. ¿Crees que Juan y Sofía necesitarán más de 10 cunas para acomodar a los 36 perritos? ¿Por qué piensas eso?

En la primera pregunta, desde la perspectiva de EJB1, es la correcta: “*yo pienso que Juan y Sofía deben hacer una multiplicación porque nos preguntan por varias*”. Asimismo, la estudiante ELQ4 señaló la respuesta anticipadamente diciendo que Juan y Sofía en realidad necesitan 12 camas. Por último, los tres estudiantes faltantes (ESG3, EJO5 y ESP2), señalaron que deberían empezar a repartir los perritos hasta que se acabaran las camas, lo cual no es práctico.

Sobre la segunda pregunta, cuatro de los estudiantes (EJB1, ELQ4, ESG3, ESP2) señalaron directamente que las camas y cunas no alcanzan, que quedan seis perros sin cama y que necesitarían dos camas adicionales. De otro lado, el estudiante EJO5 consideró que deben repartirse los perros uno a uno hasta que se acabaran las camas, lo cual parece lógico, pero no es práctico.

Figura 36. Ejercicio 3 de la prueba final

- 3) Juan y Sofía son veterinarios que rescatan perritos abandonados. El lunes pasado, adoptaron 36 perritos. Ahora, quieren acomodarlos en su refugio. Desean poner 3 perritos en cada cunita o cama. ¿Alcanzarán 10 camitas para todos los perritos?



Nota: Elaboración propia.

Posteriormente se evidenció la respuesta de los estudiantes sobre la resolución del problema, mostrando que todos dieron respuestas acertadas sobre la solución, además,

utilizaron adecuadamente la técnica del esquema, únicamente con números y sin necesidad de hacer dibujos (figura 37).

Figura 37. Ejemplos de respuestas dadas por los estudiantes

¿Alcanzarán las cunas para todos los perritos?		
Esquema		Procedimiento y Solución
3	1	$\begin{array}{r} 36 \ 3 \\ 06 \ 12 \\ \hline 0 \end{array}$ <p>R: Necesitan 12 cunas. NO alcanzan 10 cunas y necesitan 12.</p>
36	(c?)	

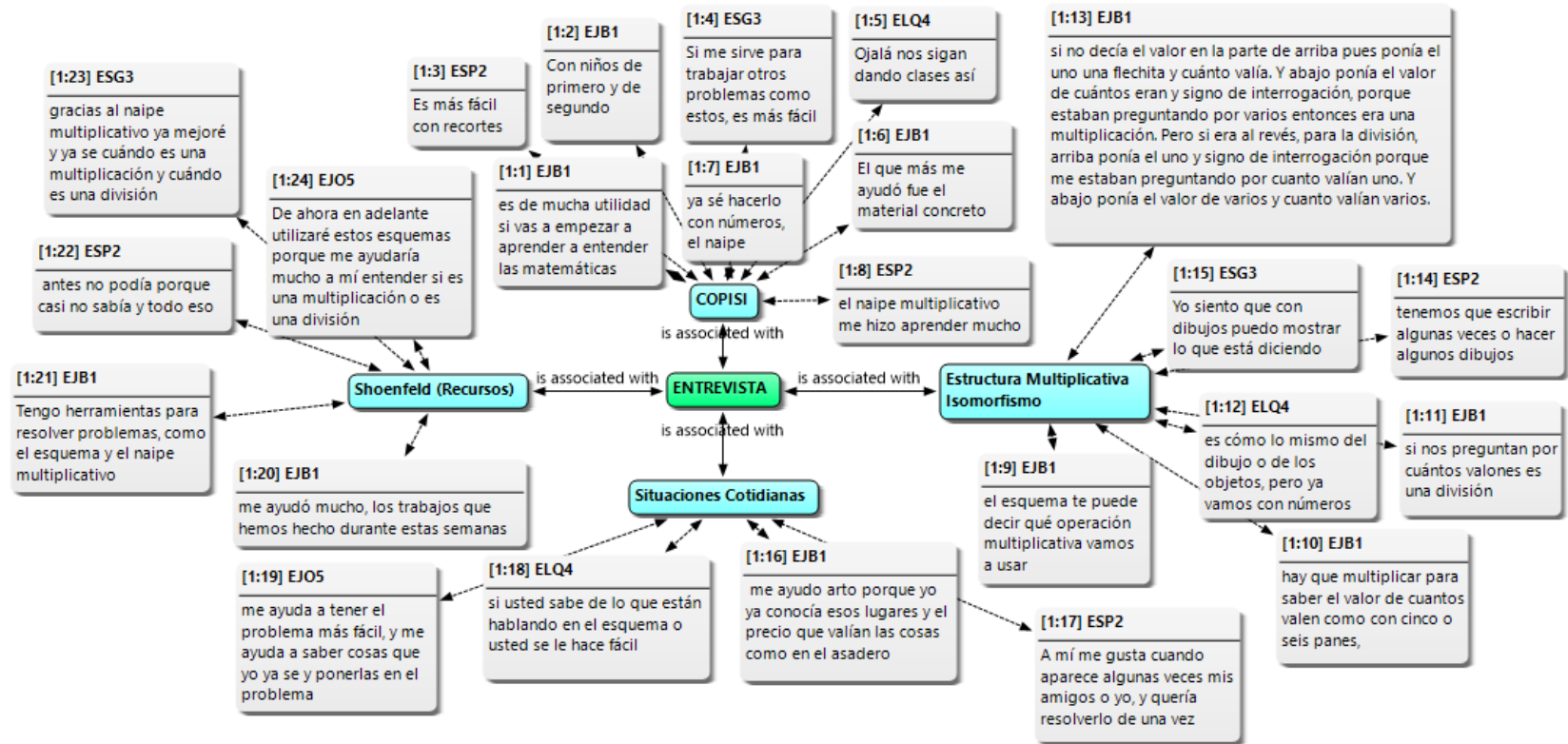
¿Alcanzarán las cunas para todos los perritos?		
Esquema		Procedimiento y Solución
36 → 0	1 → ?	$\begin{array}{r} 36 \ 13 \\ 06 \ 12 \\ \hline 0 \end{array}$ <p>R: 105 36 perrito necesitan 12 cunas y camas.</p>

Nota: En este ejercicio ambos estudiantes utilizaron directamente los símbolos, que resultan más prácticos, sencillos y directos para representar los elementos del ejercicio y obtener los resultados correctos.

6.4 ENTREVISTA

Al finalizar todo el proceso de intervención se indagó a los estudiantes por las percepciones que tuvieron frente al desarrollo de todas las actividades desde cuatro categorías principales: 1. COPISI; 2. Estructura Multiplicativa Isomorfismo; 3. Situaciones Cotidianas; 4. Shoenfeld (Recurso). Luego se generó una red semántica con las afirmaciones más relevantes dadas por los estudiantes participantes.

Figura 38. Red semántica para análisis de la entrevista



Nota: Las respuestas de los estudiantes fueron diversas, y en algunos casos repetitivas, aquí se graficaron específicamente sin repeticiones pero que involucraran todos los puntos de vista.

En la categoría COPISI, los estudiantes estuvieron de acuerdo que los dibujo y el material concreto resultaron de gran utilidad en el desarrollo de los problemas, facilitando el hecho de identificar si debían realizar multiplicaciones o divisiones. También consideraron que sería muy beneficioso seguir aprendiendo con métodos similares. No obstante, luego de aprender a realizar los esquemas, han considerado que los dibujos pueden ser de más ayuda para niños de grados más bajos.

Se observó que los estudiantes fueron conscientes de su evolución en el uso de los elementos suministrados para su aprendizaje: material concreto, elementos pictóricos, y símbolos, es decir, manifestando cambios importantes en la relación con la realidad (Iori, 2014; Puig, 1994). Fue a partir del método COPISI que los estudiantes encontraron vías nuevas y adecuadas para afrontar los problemas matemáticos con la integración de los mecanismos de análisis adecuados, como el naipe multiplicativo y su asociación hacia la toma de decisiones (Rambao y Lara, 2019).

Sobre la estructura multiplicativa, han señalado que los dibujos fueron necesarios para poder elaborar la estructura correctamente. Además, en la entrevista lograron describir con precisión como establecer cuándo es una multiplicación (cuando preguntan por varios) y cuándo es división (cuando preguntan por la unidad). Asimismo, consideran que el aprendizaje de las estructuras multiplicativas es especialmente útil para cuando se enfrenten a escenarios futuros de nuevos aprendizajes de las matemáticas.

El aprendizaje de las estructuras multiplicativas es útil en la comprensión de la realidad, su aprendizaje va más allá de la contemplación sobre la elección de la operación correcta, es un acercamiento al nivel de consciencia necesario para resolver problemas abstractos con exactitud (Polo-Blanco et al., 2020). Asimismo, la realidad que rodea al estudiante se convierte en un motivador que le brinda pistas para ahondar en la comprensión de la estructura multiplicativa y su utilidad, aspecto que se relaciona con la aplicación efectiva del naipe multiplicativo.

El desarrollo de ejercicios con situaciones cotidianas fue muy beneficioso para el aprendizaje de los estudiantes, quienes manifestaron que, gracias a estos, pudieron reconocer los precios, las operaciones y considerar que hay un mayor interés cuando se involucran con la participación de amigos con quienes se debe compartir un producto o

alimento. En síntesis, consideran que la realización de los esquemas analizando situaciones cotidianas, es más sencillo.

El acercamiento a los problemas cotidianos desde una simulación de ejercicios matemáticos, es una vía acertada para garantizar que los estudiantes formen aprendizajes significativos que están en coherencia con necesidades sentidas y situaciones que han vivido con anterioridad (Díaz-Hernández y Ruiz-Ortega, 2019). El aprendizaje contextualizado del estudiante puede ser el inicio de la adquisición consciente de motivación intrínseca para asumir una nueva posición sobre la importancia del aprendizaje de las matemáticas y su aplicación en su vida personal (Argandoña et al., 2018).

En la última categoría, Schoenfeld (recursos), los estudiantes señalaron que, gracias a los materiales concretos y las herramientas aprendidas para la construcción de los esquemas, ahora cuentan con habilidades para afrontar situaciones futuras. De un lado, porque han mejorado sus conocimientos y competencias matemáticas. Y de otro lado, porque ya pueden enfrentarse a situaciones desconocidas aplicando esquemas, dibujos o buscando materiales para desarrollar las posibles soluciones. El ejercicio de resolver problemas cotidianos con estrategias como el naipes multiplicativo, son acercamientos que ayudan al estudiante a la toma de decisiones, dejando de lado el aprendizaje estrictamente abstracto, para convertirse en un desafío deseable (Barrantes, 2006).

7 CONCLUSIONES

El presente trabajo de investigación ha logrado el cumplimiento de los objetivos establecidos, iniciando por la descripción de los aportes del método COPISI en la resolución de problemas de estructuras multiplicativas. Las decisiones metodológicas sirvieron para acceder a las narrativas y percepciones de los estudiantes en la medida que se enfrentaban a los desafíos del aprendizaje de las estructuras multiplicativas. Se concluye, que los estudiantes, luego de un proceso de intervención con la implementación de dos secuencias didácticas, lograron aprender la aplicación de la estructura multiplicativa para resolver problemas de multiplicación y división.

Al iniciar el trabajo de campo, se diagnosticó que existían falencias de comprensión de los problemas propuestos, los cuales solo pueden ser abordados cuando se comprende con precisión el funcionamiento de las estructuras multiplicativas. Este vacío inicial fue una de las justificaciones para adelantar este trabajo de investigación, en donde el método COPISI se convirtió en la vía para que los estudiantes, de manera ordenada, intencional y progresiva, lograran adquirir nuevos conocimientos que les permitiera aplicar estructuras multiplicativas para solucionar problemas aplicados.

Este proceso se llevó a cabo con la utilización de materiales concretos (objetos y recortes), elementos pictóricos, trabajo en equipo, el Naipe Multiplicativo, esquemas y símbolos. Lo anterior materializado en la secuencia didáctica, que fue más allá de la transmisión de conocimientos y hubo un constante feedback entre el docente y las percepciones de los estudiantes de cara a sus nuevos aprendizajes. Con lo cual se puede concluir, que el aprendizaje de los estudiantes puede ser beneficiado si el docente se muestra abierto a indagar constantemente por el avance de sus educandos en términos de percepciones, narrativas y puntos de vista que podrían clarificar nuevos ajustes en el trabajo de aula y así mejorar su desempeño.

Finalmente, una vez implementada la secuencia didáctica se logró evidencia cambios en la aplicación de la estructura multiplicativa de los estudiantes para la resolución de los problemas. Este cambio fue más notorio en la medida en que se apropiaron del uso de esquemas numéricos en lugar de esquemas con dibujos, debido a que los estudiantes habrían reforzado el funcionamiento de las estructuras multiplicativas. Bajo esta

perspectiva, los cambios dados durante el trabajo de investigación han sido relevantes y pueden ser considerados como punto de partida para nuevos estudios con estudiantes de primaria que busquen fortalecer la aplicación de la estructura multiplicativa en la resolución de problemas.

8 RECOMENDACIONES

En la institución educativa se recomienda que se acoja el método COPISI en el plan de aula para la enseñanza de las estructuras multiplicativas. Ya que actualmente este vacío ha hecho que el aprendizaje abstracto dificulte el avance de los estudiantes.

Los docentes de matemáticas de la institución educativa deben considerar con mayor énfasis el acondicionamiento de estrategias de intervención en donde los estudiantes logren un mayor interés y motivación por aprender nuevos conceptos. Se ha demostrado que el material concreto, los dibujos, el trabajo en equipo y las situaciones cotidianas, despiertan mayor interés en los estudiantes facilitando el aprendizaje.

Se recomienda que en la institución educativa se adopte la secuencia didáctica de esta investigación para que pueda ser mejorada y robustecida según las necesidades de otros niveles de formación. En este sentido, la colaboración de docentes de diferentes grados pueden enriquecer la propuesta inicial y beneficiar el aprendizaje de los estudiantes.

El presente trabajo de investigación no es del todo concluyente, y por el contrario, pretende ser un punto de partida teórico, metodológico y práctico para el desarrollo de nuevas investigaciones en estudiantes de niveles de formación similares y con necesidades formativas sobre estructuras multiplicativas. Ahora bien, dentro de la institución educativa también se requiere nuevos estudios en donde se incorporen nuevas temáticas, diferentes niveles de formación y el robustecimiento de la unidad didáctica aquí planteada. Todo lo anterior como un nuevo aporte al debate académico.

9 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aguirre, J. C., y Jaramillo, L. G. (2015). El papel de la descripción en la investigación cualitativa. *Cinta de moebio*, 53, 175-189. <https://doi.org/10.4067/S0717-554X2015000200006>
- Álvarez, M., y Acuña, M. A. (2018). *Juego simbólico y desarrollo del pensamiento matemático en niños de 5 años de una institución educativa de Villa el Salvador- 2015* [Tesis de Maestría. Universidad César Vallejo]. <https://hdl.handle.net/20.500.12692/25167>
- Álvarez, S. (2017). *El aprendizaje cooperativo como estrategia para fortalecer las habilidades en la resolución de problemas con estructuras multiplicativas* [Tesis de Maestría. Universidad del Norte]. <http://hdl.handle.net/10584/7647>
- Alzate, L., Pérez, L., Ramírez, A., y Valencia, S. (2012). El aprendizaje de las estructuras multiplicativas a través del juego educativo. *Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, 1090-1094. <https://core.ac.uk/download/pdf/19450302.pdf>
- Alzate, Y. (2021). *La educación por competencias, el laberinto del pensamiento que reta a las instituciones educativas en Colombia* [Universidad Pontificia Bolivariana]. <http://hdl.handle.net/20.500.11912/9854>
- Argandoña, F. A., Persico, M. C., Visic, A. M., y Bouffanais, J. I. (2018). Estudio de casos: Una metodología de enseñanza en la educación superior para la adquisición de competencias integradoras y emprendedoras. *Tec Empresarial*, 12(3), 7-16. <https://doi.org/10.18845/te.v12i3.3934>
- Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo* (23ª). Siglo Veintiuno Editores, S.A.
- Bados, A., y García, E. (2014). *Resolución de problemas*. Universitat de Barcelona. <http://hdl.handle.net/2445/54764>
- Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas. El trabajo de Allan Schoenfeld. *Cuadernos*, 1(1), 1-9. <https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/resolucion-de-problemas-el-trabajo-de-allan-schoenfeld/>

- Becerra, M. C. (2021). *El uso de material concreto como estrategia didáctica para favorecer el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes de 4º del Instituto Técnico Alfonso López, sede IV Centenario, de Ocaña* [Universidad Nacional Abierta y a Distancia. UNAD]. <https://repository.unad.edu.co/handle/10596/41036>
- Benavides, M. J. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa* [Tesis de Doctorado. Universidad de Granada]. <http://hdl.handle.net/10481/1827>
- Carmona-González, J. (2021). *Material en concreto como herramienta didáctica para la resolución de problemas matemáticos en tiempos de pandemia* [Tesis de Maestría. Universidad de Caldas]. <https://repositorio.ucaldas.edu.co/handle/ucaldas/17245>
- Colombia. Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden*. Ministerio de Educación Nacional.
- Conde, M. (2019). *Lineamientos pedagógicos para el desarrollo de competencias que fortalezcan las prácticas docentes del área de matemáticas* [Tesis de Maestría. Universidad Francisco de Paula Santander]. <http://repositorio.ufps.edu.co/handle/ufps/3188>
- De Barros, C., y Hernández, A. (2016). Función simbólica y representaciones mentales. Un enfoque desde el lenguaje. *Revista Internacional de Apoyo a la Inclusión, Logopedia, Sociedad y Multiculturalidad*, 2(4), 189-200. <https://revistaselectronicas.ujaen.es/index.php/riai/article/view/4244>
- Delgado, M. R., Mayta, E. I., y Alfaro, M. L. (2018). “Efectividad del método singapur” en la resolución de problemas matemáticos en estudiantes del tercer grado de primaria de una institución educativa privada del distrito de Villa El Salvador [Tesis de Maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú]. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/13286>
- Díaz-Barriga, F., y Hernández, G. (2003). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista* (2a.). Mc Graw Hill.
- Díaz-Hernández, L. G., y Ruiz-Ortega, F. J. (2019). La tienda didáctica : una estrategia para promover la resolución de problemas con estructura multiplicativa en 4º grado de

- básica primaria. *Latinoamericana de Estudios Educativos*, 15(2), 134-157.
<https://doi.org/10.17151/rlee.2019.15.2.7>
- Echeverry, M., y Cumbal, A. L. (2016). *Análisis discursivo de dos libros de texto de matemáticas del grado tercero de primaria en torno al campo conceptual multiplicativo* [Universidad del Valle]. <https://hdl.handle.net/10893/9746>
- Espinoza, J. (2017). La resolución y planteamiento de problemas como estrategia metodológica en clases de matemática. *Atenas*, 3(39), 64-79.
<https://www.redalyc.org/journal/4780/478055149005/478055149005.pdf>
- Gajardo, F. R., Ortiz, A. M., y Ramírez, C. A. (2018). *Metodología de enseñanza COPISI para el aprendizaje del algoritmo de la división en 4° básico* [Universidad de Concepción]. <http://repositorio.udec.cl/jspui/handle/11594/3068>
- García, J. Á. (2011). Modelo educativo basado en competencias: importancia y necesidad. *Revista Electrónica «Actualidades Investigativas en Educación»*, 11(3), 1-24.
<https://www.redalyc.org/pdf/447/44722178014.pdf>
- Gil, D., Dumas, A., Caillot, M., Martínez, J., y Ramírez, L. (1988). La resolución de problemas de lápiz y papel como actividad de investigación. *Revista Investigación en la Escuela*, 6, 3-20. <http://hdl.handle.net/11441/59160>
- Giraldo, Y., y Montoya, J. A. (2024). “La granja matemática” herramienta didáctica para solución de situaciones problema. Uso de estructuras aditivas -multiplicativas. *Franz Tamayo - Revista de Educación*, 6(16), 43-79.
<https://doi.org/10.61287/revistafranztamayo.v.6i16.10>
- ICFES. (2022). *Reportes de resultados para establecimientos educativos*. Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación.
<http://www2.icfesinteractivo.gov.co/resultados-saber2016-web/pages/publicacionResultados/agregados/saber11/consultaAgregadosEstablecimiento.jsf#No-back-button>
- Iori, M. (2014). Matemática y semiótica en el aula: un punto de vista necesario. En *Miradas contemporáneas en educación: Algunos puntos clave para el debate* (pp. 27-44). Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Iriarte, A. J. (2011). Desarrollo de la competencia resolución de problemas desde una

- didáctica con enfoque metacognitivo. *Zona Próxima*, 15, 2-21.
<https://www.redalyc.org/pdf/853/85322574002.pdf>
- Ivars, P., y Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. *Educacion Matematica*, 28(1), 9-38. <https://doi.org/10.24844/EM2801.01>
- Lázaro, R. (2021). Entrevistas estructuradas, semi-estructuradas y libres. Análisis de contenido. En *Técnicas de investigación cualitativa en los ámbitos sanitario y sociosanitario* (pp. 65-83). Ediciones de la Universidad de Castilla-La Mancha. <https://hdl.handle.net/10578/28529>
- León, O. L., y Calderón, D. I. (2008). Procesos de formación inicial en matemáticas en estudiantes sordos. *V Congreso IBERDISCAP Aitadis*, 391-395.
https://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/profesores/documentos/procesos_de_formacion_inicial_en_matematicas_en_estudiantes_sordos.pdf
- Marulanda, J. (2021). *La Resolución de Problemas Multiplicativos en la Básica Primaria a través de Mediadores Didácticos* [Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia]. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/79692>
- Millar, J. K. (2019). *Aplicación y evaluación de una secuencia didáctica bajo el enfoque COPISI para el aprendizaje de la adición y la sustracción dirigida a niños y niñas de segundo año básico que presentan dificultades de aprendizaje*. Universidad Alberto Hurtado.
- Molina, R., y Barraza, K. (2022). Estrategias pedagógicas diversificadas. Desarrollo de habilidades matemáticas en ejes números y operaciones. *Opción: Revista de Ciencias Humanas y Sociales*, 99, 170-191.
<https://doi.org/https://doi.org/10.5281/zenodo.7502694>
- Monje, C. A. (2011). *Metodología de la investigación cuantitativa y cualitativa. Guía didáctica*. Universidad Surcolombiana. <https://www.uv.mx/rmipe/files/2017/02/Guia-didactica-metodologia-de-la-investigacion.pdf>
- Moreno, L., y Ortega, N. P. (2018). *Estrategia concreta pictórica y abstracta para desarrollar competencias matemáticas en grado tercero de la Institución la Rinconada Guamal Magdalena* [Tesis de Maestría. Universidad de la Costa].

<http://hdl.handle.net/11323/192>

- Mulder, M., Weigel, T., y Collings, K. (2008). El concepto de competencia en el desarrollo de la educación y formación profesional en algunos Estados miembros de la UE: un análisis crítico. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, 12(3), 1-25. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=56712875007>
- Ojeda, A. (2019). *Un análisis de las estrategias empleadas por un grupo de estudiantes de sexto grado en la resolución de problemas de estructura multiplicativa* [Tesis de Maestría. Universidad del Valle]. <https://hdl.handle.net/10893/12753>
- Ortega, H. D. (2021). *Principales dificultades de aprendizaje de las matemáticas en educación básica primaria, consecuencias y posibles tratamientos* [Universidad Nacional Abierta y a Distancia. UNAD]. <https://repository.unad.edu.co/handle/10596/48658>
- Patiño, K. N., Prada, R., y Hernández, C. A. (2021). La resolución de problemas matemáticos y los factores que intervienen en su enseñanza y aprendizaje. *Revista Boletín Redipe*, 10(9), 459-471. <https://doi.org/10.36260/rbr.v10i9.1453>
- Peñaloza, D. Y., y Meneses, M. L. (2022). Método de Pólya como estrategia pedagógica para fortalecer la competencia resolución de problemas matemáticos con operaciones básicas. *Zona Próxima*, 31, 8-25. <https://doi.org/10.14482/zp.31.372.7>
- Polo-Blanco, I., Martínez, M. C., y Goñi-Cervera, J. (2020). Resolución de problemas de isomorfismo de medidas por estudiantes con trastorno del espectro autista. *Revista de Investigación en Educación*, 18(3), 345-355. <https://doi.org/10.35869/reined.v18i3.3273>
- Polya, G. (2015). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method* (34th ed.). Princeton University Press.
- Posso, Y. (2020). *El método CPA en la resolución de problemas aditivos y multiplicativos en estudiantes de Básica Primaria* [Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia]. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/77971>
- Puig, L. (1994). *Semiótica y matemáticas*. Ediciones Episteme. <https://www.uv.es/puigl/sm.pdf>
- Rambao, C. del S., y Lara, I. M. (2019). *Efecto del método Singapur como una estrategia*

para el fortalecimiento de la resolución de problemas matemáticos en contexto en estudiantes de tercer grado [Tesis de Maestría. Universidad de la Costa].

<http://hdl.handle.net/11323/5908>

Ramírez, C. P. (2020). *Implementación de una estrategia didáctica con el método Concreto Pictórico Abstracto (CPA) para el mejoramiento del aprendizaje de la matemática en el grado tercero de la I.E. Ovidio Decroly del municipio del Castillo-Meta, Colombia* [Universidad Nacional Abierta y a Distancia. UNAD].

<https://repository.unad.edu.co/handle/10596/34640>

Revelo, S. L., y Yáñez, N. D. P. (2023). Material concreto y su importancia en el fortalecimiento de la matemática: Una revisión documental. *MENTOR Revista de Investigación Educativa y Deportiva*, 2(4), 69-87.

<https://doi.org/10.56200/mried.v2i4.5304>

Riveras, Y., y Márquez, M. (2023). El estudio del currículo chileno en torno división como isomorfismo de medida: El caso de 5° básico. *PädiUAQ*, 6(11), 1-12.

<https://revistas.uaq.mx/index.php/padi/article/view/741>

Ruíz, L. L., y Lagos, A. V. (2020). *Comprensión de la estructura multiplicativa en los estudiantes de grado sexto* [Universidad Nacional Abierta y a Distancia. UNAD].

<https://repository.unad.edu.co/handle/10596/39283>

Sanaguano, R. del P. (2022). *Método Singapur como estrategia enseñanza-aprendizaje de tablas de multiplicar en niños de edad escolar* [Tesis de Maestría. Pontificia Universidad Católica del Ecuador].

<https://repositorio.puce.edu.ec/server/api/core/bitstreams/614c7cb7-5643-4cd2-94fd-399ae9f0a06e/content>

Sánchez, F. (2019). Fundamentos Epistémicos de la Investigación Cualitativa y Cuantitativa: Consensos y Disensos. *Revista Digital de Investigación en Docencia Universitaria*, 101-122. <https://doi.org/10.19083/ridu.2019.644>

Santos, L. M. (1992). Resolución de problemas; el trabajo de Alan Schoenfeld: una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas. *Educación Matemática*, 4(2), 16-24. [https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/resolucion-de-problemas-el-trabajo-de-alan-schoenfeld-una-propuesta-a-considerar-en-el-aprendizaje-de-las-](https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/resolucion-de-problemas-el-trabajo-de-alan-schoenfeld-una-propuesta-a-considerar-en-el-aprendizaje-de-las)

matematicas/

- Schoenfeld, A. (1981). *Episodes and Executive Decisions in Mathematical Problem Solving*. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED201505.pdf>
- Stanic, G., y Kilpatrick, J. (1989). Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. En *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving* (pp. 1-22). National Council of Teachers of Mathematics.
- Stauffer, S., Solares, D., y Broitman, C. (2020). Cálculo estimativo: un estudio con alumnos de 5to año de primaria. *Educación Matemática*, 32(2), 151-171. <https://doi.org/10.24844/EM3202.06>
- Temporetti, F. (2018). La psicología histórico-cultural, una cuestión metodológica. En *Psicología Histórico Cultural* (pp. 1-16). Centro de Publicaciones PUCE.
- Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2), 133-170. <https://www.ecosad.org/laboratorio-virtual/images/biblioteca-virtual/bibliografiagc/teoria-de-campos-conceptuales-vergnaud-1990.pdf>
- Vergnaud, G. (2013). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. Trillas.
- Zamora, J. I. (2017). *Propuesta de método de resolución de problemas matemáticos en educación primaria* [Tesis de Maestría. Universitat Jaume I]. <http://hdl.handle.net/10234/169269>
- Zapatera, A. (2020). El método Singapur para el aprendizaje de las matemáticas. Enfoque y concreción de un estilo de aprendizaje. *Revista INFAD de Psicología. International Journal of Developmental and Educational Psychology.*, 1(2), 263-274. <https://doi.org/10.17060/ijodaep.2020.n2.v1.1980>
- Zona-López, J. R., y Giraldo-Márquez, J. D. (2017). Resolución de problemas: escenario del pensamiento crítico en la didáctica de las ciencias. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, 13(2), 122-150. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=134154501008>

10 ANEXOS

Anexo A. Consentimientos informados



Ibagué, 07 de marzo de 2024

Señora
Selene Sandra Prado Rivera
Coordinadora
Institución Educativa Técnica Empresarial Alberto Castilla
Ibagué – Tolima

Cordial saludo,

Yo Rodrigo Herrera Marín, como estudiante de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias de la Universidad Autónoma de Manizales, solicito ante usted permiso para desarrollar dentro de la Institución Educativa y con los estudiantes de quinto grado, la propuesta de investigación titulada **MÉTODO COPISI: ESTRATEGIA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA: ISOMORFISMO DE MEDIDAS.**

Para el desarrollo de esta investigación se tomará registro fotográfico de los trabajos y entrevista de los encuentros que tendrán lugar con los miembros del grado seleccionado para la aplicación de la propuesta de investigación. Cabe resaltar que la información recopilada se empleará con fines investigativos y académicos, compartiendo la información que solicite la Institución Educativa para sus fines académicos, sociales o administrativos.

Autorización.

He leído y entendido el procedimiento expuesto en las líneas anteriores por el investigador. En consecuencia, expreso mi consentimiento para que los estudiantes de grado quinto de primaria de la Institución Educativa Técnica Empresarial Alberto Castilla, Sede El Topacio, de la ciudad de Ibagué, participen en el estudio.

Selene Sandra Prado Rivera
Coordinadora IE Técnica Empresarial Alberto Castilla
Sede 3 El Topacio

Anexo B. Formato de entrevista



INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICA EMPRESARIAL
ALBERTO CASTILLA
Resolución No. 81-0805 de Septiembre 11 de 2007
Código DANE: 173001008741
IBAGUÉ



Entrevista Semiestructurada

**Método COPISI: Estrategia Para La Resolución De Problemas
De Estructura Multiplicativa Isomorfismo De Medidas**

Objetivos:

- ✓ Indagar acerca de la efectividad de las actividades desarrolladas hacia la resolución de problemas de estructura multiplicativa vinculando las habilidades metacognitivas.
- ✓ Revisar la percepción de los estudiantes después de la implementación de la unidad didáctica centrada en la resolución de problemas de estructura multiplicativa a través del método COPISI

Después de realizar las actividades de la unidad didáctica:

1. COPISI

¿Qué opinas sobre la idea de utilizar herramientas como el Naipe Multiplicativo para aprender conceptos matemáticos?

2. COPISI

¿Qué te ayudó más a entender cómo se relacionan las cantidades en los problemas que resolvimos: usar objetos y dibujos o solo los números?

3. Estructura Multiplicativa Isomorfismo

¿Consideras necesario elaborar un esquema para entender la relación entre los datos? ¿Por qué?

4. Estructura Multiplicativa Isomorfismo

¿Puedes describir cómo realizabas los esquemas para resolver los problemas de matemáticas?

5. Situaciones Cotidianas

¿Crees que te ayudó trabajar con problemas relacionados con situaciones que conoces en tu vida diaria?

6. Shoenfeld (Recursos)

¿Consideras que las actividades realizadas en clase te han ayudado a adquirir conocimientos y habilidades para resolver problemas?

Anexo C. Instrumento de resolución de problemas



INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICA EMPRESARIAL
ALBERTO CASTILLA
Resolución No. 81-0805 de Septiembre 11 de 2007
Código DANE: 173001008741
IBAGUÉ



INSTRUMENTO INICIAL RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA: ISOMORFISMO DE MEDIDAS

Nombre: _____ Grado _____

Fecha: _____

Estimado estudiante el presente instrumento tiene como objetivo identificar los conocimientos, estrategias y procedimientos asociados a la comprensión y resolución de problemas de estructura multiplicativa.



A continuación, encontrarás una serie de problemas. Antes de resolver cada uno, responde las preguntas relacionadas. Luego, al final, responde la pregunta del problema.

Por favor, asegúrate de incluir un esquema de la solución y el procedimiento utilizado.

INICIA DESDE AQUÍ

- 1) En el colegio Alberto Castilla, el personero estudiantil 2024 está comprometido con promover prácticas amigables con el medio ambiente. Para lograrlo, el personero quiere entregar 4 plantas a cada uno de los 25 salones del colegio.
¿Cuántas plantas en total necesita el personero para llevar a cabo su iniciativa?



Fuente: <https://pt.pngtree.com>

Antes de resolver el problema, responde las siguientes preguntas

¿Cómo puedes organizar la información para resolver el problema?

Respuesta:

¿Qué operaciones matemáticas o cálculos necesitas hacer para encontrar la respuesta del problema?

Respuesta:

AHORA, RESUELVE PROBLEMA.

Recuerda hacer un esquema, puede ser un dibujo o un escrito, donde organices la información clave del problema.

¿Cuántas plantas en total necesita el personero para llevar a cabo su iniciativa?

Esquema	Procedimiento y Solución

BUEN TRABAJO AHORA RESUELVE OTRO

- 2) En una fábrica, hicieron tantas galletas que sobraron 256. Por eso, los dueños decidieron compartirlas entre los 8 empleados para evitar que se pierdan. Quieren que cada empleado reciba la misma cantidad como agradecimiento por su buen trabajo. ¿Cuántas galletas debe recibir cada empleado?



Fuente: <https://c8.alamy.com/compe>

Antes de resolver el problema, responde las siguientes preguntas

¿Cómo crees que hicieron los dueños para que todos los empleados recibieran la misma cantidad de galletas?

Respuesta:

<p>¿Crees que si fueran más empleados en la fábrica, cada uno recibiría más o menos galletas? ¿Por qué?</p>
<p>Respuesta:</p>

AHORA, RESUELVE PROBLEMA.

Recuerda hacer un esquema, puede ser un dibujo o un escrito, donde organices la información clave del problema.

¿Cuántas galletas debe recibir cada empleado?	
Esquema	Procedimiento y Solución

MUY BUEN TRABAJO, TE QUEDA EL ÚLTIMO

- 3) Juan y Sofia son veterinarios que rescatan perritos abandonados. El lunes pasado, adoptaron 36 perritos. Ahora, quieren acomodarlos en su refugio. Desean poner 3 perritos en cada cunita o cama. ¿Alcanzarán 10 camitas para todos los perritos?



Tomado de <https://img.freepik.com>

Antes de resolver el problema, responde las siguientes preguntas

Cómo te imaginas que Juan y Sofia organizaron la distribución de los 36 perritos entre las cunas de su refugio?

Respuesta:

¿Crees que Juan y Sofia necesitarán más de 10 cunas para acomodar a los 36 perritos? ¿Por qué piensas eso?

Respuesta:

AHORA, RESUELVE PROBLEMA.

Recuerda hacer un esquema, puede ser un dibujo o un escrito, donde organices la información clave del problema.

¿Alcanzarán las cunas para todos los perritos?	
Esquema	Procedimiento y Solución

"Gracias por tomarte el tiempo para resolver estos problemas y compartir tus respuestas"



Anexo D. Unidades didácticas



INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICA EMPRESARIAL
ALBERTO CASTILLA
Resolución No. 81-0805 de Septiembre 11 de 2007
Código DANE: 173001008741
IBAGUÉ



UNIDAD DIDÁCTICA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA: ISOMORFISMO DE MEDIDAS

ÁREA: Matemáticas

Docente: Rodrigo Herrera Marín

Nombre del Estudiante: _____ Grado _____

Objetivos:

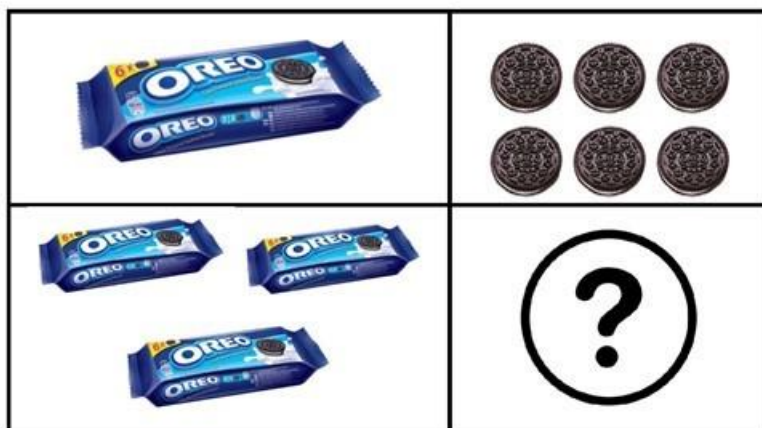
- Reconocer cómo dos cantidades cambian juntas de manera constante en situaciones cotidianas, como cuando una aumenta y la otra también, utilizando el Naípe Multiplicativo para comprender estas relaciones proporcionales
- Aplicar la multiplicación en resolución de problemas de proporcionalidad, comprendiendo la relación entre cantidades.

1ª Sesión

Momento de Exploración

El Naípe Multiplicativo

Es un cuadrado dividido en cuatro cuadrados internos donde se establecen relaciones de proporcionalidad en cada fila, permitiendo encontrar la incógnita mediante la multiplicación.



Adaptación "Naípe multiplicativo" Jorge Castaño

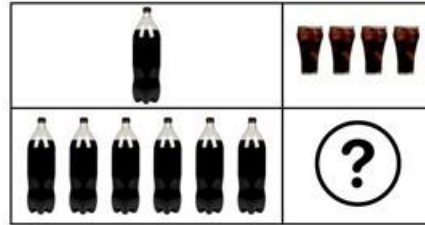
Este naípe multiplicativo representa la situación en la que 1 paquete contiene 6 galletas.

- En la primera fila del naípe se indica "1 paquete = 6 galletas".
- En la segunda fila, tenemos "3 paquetes = ?".
Esto nos muestra que queremos averiguar cuántas galletas tendrás en total si compras 3 paquetes, lo cual corresponde a este problema:

"Has notado que hay paquetes que contienen 6 galletas. Si tienes suficiente dinero para comprar 3 paquetes, ¿cuántas galletas tendrás en total?"

Ejemplo 2

Con este calor es mejor comprar gaseosa por litros para compartir en el salón. Si un litro de gaseosa llena 4 vasos grandes, ¿cuántos de estos vasos se podrán llenar con 6 litros?



A partir de este problema, responder:

¿Qué relación crees que existe entre la cantidad de gaseosa y la cantidad de vasos que se pueden llenar?

¿Qué estrategias podríamos usar para resolver este problema?

¿Cómo podríamos calcular cuántos vasos se pueden llenar con 6 litros de gaseosa?

¿Qué pasaría si tuviéramos más o menos litros de gaseosa? ¿Cómo afectaría eso a la cantidad de vasos llenos?

¿Puedes pensar en otras situaciones en las que se aplique esta misma regla?

Ejemplo 3

Representa en un naipe multiplicativo el siguiente problema:

Spongamos que en la papelería del barrio venden lápices a \$1.000 cada uno. Si decides comprar 6 lápices de una vez para asegurarte de tener suficientes, ¿cuánto tendrías que pagar en total por esos lápices?

Ahora realiza la operación que te daría el resultado

Ejemplo 4

Representa en un naipe multiplicativo el siguiente problema:

Para una reunión, necesitas 10 botellas de agua. En la tienda, las botellas de agua se venden a \$ 1500 cada una. ¿Cuánto tendrías que pagar en total por esas 10 botellas?"

Ahora realiza la operación que te daría el resultado

Actividad en clase

Explorando la Proporcionalidad con el Naipe Multiplicativo

Materiales:

- Naipe multiplicativo para cada grupo de estudiantes.
- Tarjetas de preguntas con problemas de proporcionalidad y multiplicación.
- Hojas con imágenes (una por problema).
- Hojas de borrador (una por estudiante).

Desarrollo:

Los estudiantes se organizan en equipos de 4.

Cada grupo recibe un naipe multiplicativo, tarjetas de preguntas y hojas con imágenes.

Proceso de la Actividad:

1. El primer estudiante del grupo elige una tarjeta de preguntas y lo lee en voz alta asegurándose que los lo comprendan.
2. El segundo estudiante selecciona las imágenes correspondientes al problema planteado, y las utiliza para representar el problema en el naipe multiplicativo.
3. El tercer estudiante verifica la representación en el naipe y realiza la operación matemática para resolver el problema.
4. El cuarto estudiante verifica el resultado obtenido por el tercer estudiante y proporciona retroalimentación, sugiriendo mejoras si es necesario.
5. Luego, los estudiantes cambian de roles y repiten el proceso con una nueva tarjeta de preguntas.

Después de la actividad grupal:

Preguntas de Reflexión

- ¿Qué te parece importante recordar? _____

- ¿Cuál es la operación matemática que podemos utilizar para resolver los problemas que trabajamos?. Y ¿por qué? _____

- ¿Cómo se deben organizar los datos utilizando el naipe multiplicativo para resolver los problemas? _____

- ¿Qué valor debes identificar para poder calcular otros valores? _____

- ¿Cómo organizar la información que trae cada problema para poder resolverlas? _____

Compromiso para la casa

Inventa un problema que se puede resolver en un naipe multiplicativo

2ª Sesión. Momento de Estructuración

Recordar los aprendizajes alcanzados en la sesión anterior y socialización de la tarea.

¿Qué fue lo más importante de la clase pasada? _____

¿Recuerdas cómo eran los problemas que trabajamos en la clase anterior? _____

¿Qué aprendiste durante la clase pasada, que crees que será útil para resolver problemas en el futuro? _____

Proporcionalidad Directa / Isomorfismo de medidas (Multiplicación)

En el campamento al que asisten Mario y Liliana reparten un litro de leche entre cinco niños. ¿Cuántos niños pueden desayunar con 5 litros?



Imagen Matemáticas De 5º. Edición especial

Organizamos los datos

1 Litro de leche → 5 Niños desayunan
 5 Litros de Leche → ¿Cuántos niños?

Dibujamos en el Naipe Multiplicativo:

Encontramos la relación

- Un litro de leche para 5 niños
- Más litros de leche, más niños pueden desayunar.



¿Qué operación matemática o cálculos necesitas hacer para encontrar la respuesta del problema?

Suma	Multiplicación
$5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25$	$5 \times 5 = 25$

R/ Con 5 litros de leche pueden desayunar 25 niños.



Importante
Es una relación de proporcionalidad directa entre cantidades, si una aumenta la otra también.

Resolvamos otro

Sara utiliza 1 libra de mantequilla para hacer 16 galletas.
¿Cuántas galletas podrá hacer con 6 libras?







Imagen Matemáticas 5º Edición especial

Organizamos los datos

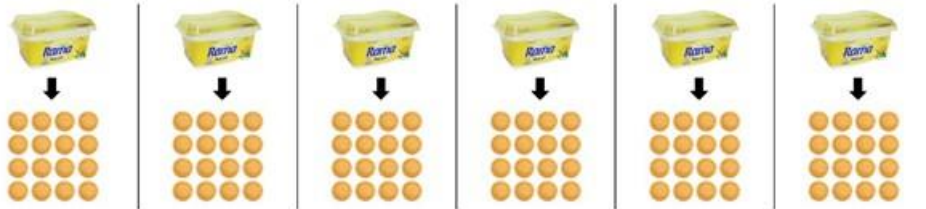
1 Libra de mantequilla → 16 galletas
6 Libras de mantequilla → ¿Cuántas galletas?

Dibujamos en el Naipe Multiplicativo:

Encontramos la relación

- 1 lb de mantequilla para 16 galletas
- Más lb de mantequilla , más galletas.



¿Qué operación matemática o cálculos necesitas hacer para encontrar la respuesta del problema?

Suma	Multiplicación
$16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 = 96$	$16 \times 6 = 96$

R/ Con 6 lb de mantequilla se pueden preparar 96 galletas.

Resolvamos uno parecido

Sara utiliza 2 libras de mantequilla para hacer 16 galletas. ¿Cuántas galletas podrá hacer con 10 libras?



Imagen: Matemáticas 5º. Edición especial

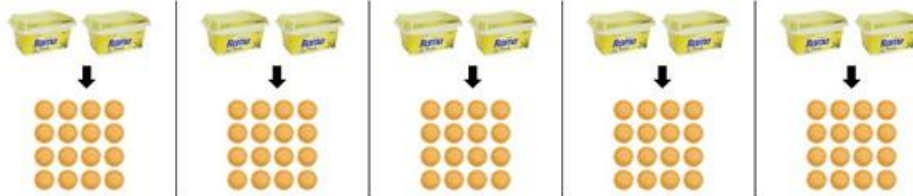
Organizamos los datos

2 Libras de mantequilla → 16 galletas
 6 Libras de mantequilla → ¿Cuántas galletas?

Dibujamos en el Naipe Multiplicativo:

Encontramos la relación

- 2 lb de mantequilla para 16 galletas
- 1 Libra 8 galletas.



¿Qué operación matemática o cálculos necesitas hacer para encontrar la respuesta del problema?

Suma	Multiplicación
$16 + 16 + 16 + 16 + 16 = 80$	$16 \times 5 = 80$

R/ Con 1 lb de mantequilla se pueden preparar 48galletas.

Momento de práctica. Ejercicios contextualizados

Dibuja en el Naipe multiplicativo y resuelve cada uno de los siguientes ejercicios:

- 1) Un estudiante está preparando su cartuchera para el nuevo año escolar. Él tiene cinco cajas de colores diferentes. Cada caja tiene muchos colores dentro. Si cada caja contiene 12 colores diferentes, ¿cuántos colores tendrá en total en su cartuchera?

Naipe Multiplicativo

Procedimiento y Solución

- 2) Saray ha decidido hacer una gran compra de chocolatinas para compartir con sus amigos y compañeros. En un supermercado, cada caja contiene 24 deliciosas chocolatinas. Si Marta compra 5 cajas ¿cuántas chocolatinas tendrá en total?

Naipe Multiplicativo

Procedimiento y Solución





- 3) Juan está planeando su fiesta de cumpleaños y quiere asegurarse de que todos sus invitados tengan suficiente gaseosa para tomar. Él tiene 6 litros de gaseosa. Si cada litro puede llenar aproximadamente 4 vasos, ¿cuántos vasos podrá llenar en total?

Naipe Multiplicativo




Procedimiento y Solución




Momento de práctica y transferencia. Ejercicios Abiertos

**Crea un problema con cada uno de los Naipes Multiplicativos.
Presenta tu problema a un compañero o compañera y verifica su solución.**

Naipes Multiplicativo		Problema
		
		

Naipes Multiplicativo		Problema
		
		





Naipes Multiplicativo		Problema
		
	\$ 450	

Naipes Multiplicativo		Problema
	\$ 16.000	
		

Momento de práctica y transferencia. Ejercicios Numéricos

A partir de los naipes multiplicativos, reemplaza las imágenes por números o cantidades y resuelve el problema.





- 1) En el patio de la casa de Mario, sus papás crían pollitos en jaulas puede contener hasta 18 pollitos. Ahora, tienen 4 jaulas llenas de pollitos. ¿Puedes ayudar a los padres de Mario a descubrir cuántos pollitos tienen en total en su patio?

Naipe Multiplicativo (Dibujos)		Naipe Multiplicativo (Números)					
		<table border="1" style="width: 100%;"><tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">18</td></tr><tr><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">?</td></tr></table>	1	18	4	?	
1	18						
4	?						
		Solución y respuesta:					

- 2) Los niños de 5º4 quieren invitar a sus compañeras al cine como celebración del Día de la Mujer. En total, hay 17 niñas en la clase. Deciden ver la película "Kung Fu Panda 4" en Cinemark. Si los miércoles cada boleta cuesta \$6500, ¿cuánto dinero necesitarán en total para comprar las boletas de todas las niñas?

Naipe Multiplicativo (Dibujos)		Naipe Multiplicativo (Números)	
	\$ 6.500		
		Solución y respuesta:	

- 3) Durante el recreo en la escuela El Topacio, la señora de la tienda escolar desea calcular cuánto dinero obtuvo de la venta de los 48 jugos Cifrut que vendió. Me pidió ayuda, y lo único que sabemos con certeza es que cada jugo se vendió a \$800 pesos.

Naipe Multiplicativo (Dibujos)		Naipe Multiplicativo (Números)	
			
		Solución y respuesta:	

Momento de práctica y transferencia. Ejercicios Numéricos

Organiza los datos de cada problema sin ayuda de la cuadrícula del naipe multiplicativo y resuélvelo.

- 1) En la entrada del barrio El Topacio se encuentra el famoso asadero de pollos. Cada día, se venden en promedio 35 pollos completos que se sirven con papas saladas, arepas y maduro asado, acompañados de una gaseosa de 1.5 litros, todo por tan solo \$25.000. ¿Cuánto dinero recauda el asadero en un día?



Esquema	Procedimiento y Solución
<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="border: 1px solid black; width: 80px; height: 30px; margin-right: 10px;"></div> ⇒ <div style="border: 1px solid black; width: 80px; height: 30px; margin-left: 10px;"></div> </div> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="border: 1px solid black; width: 80px; height: 30px; margin-right: 10px;"></div> ⇒ <div style="border: 1px solid black; width: 80px; height: 30px; margin-left: 10px;"></div> </div>	

- 2) El curso de 5° 4 de la escuela El Topacio está organizando un emocionante viaje de fin de año a Piscilago en Melgar. El paquete incluye transporte ida y regreso, alimentación que consta de 1 almuerzo y 2 refrigerios, ingreso al Parque Acuático Piscilago, asistencia médica y la compañía de un guía durante toda la excursión. El costo del viaje es de \$160,000 por persona. Si en total hay 35 estudiantes en el curso, ¿cuánto dinero necesitarán reunir total para financiar el viaje?



Esquema	Procedimiento y Solución

- 3) Para planear las actividades de la celebración del Día del Hombre, las niñas de 5° 3 y 5° 4 necesitan saber cuántos niños hay en total en los 12 grupos de la tarde. Con un promedio de 22 niños por salón, ¿cuántos niños participarán en las actividades del día del hombre?

Esquema	Procedimiento y Solución



SECUENCIA DIDÁCTICA N° 2
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA:
ISOMORFISMO DE MEDIDAS

ÁREA: Matemáticas

Docente: Rodrigo Herrera Marín

Nombre del Estudiante: _____ Grado _____

Objetivos:

- Reconocer cómo dos cantidades cambian juntas de manera constante en situaciones cotidianas, como cuando una aumenta y la otra también, utilizando el Naipe Multiplicativo para comprender estas relaciones proporcionales
- Aplicar la división en la resolución de problemas de proporcionalidad, comprendiendo la relación entre cantidades.

1ª Sesión. Momento de Exploración (Concreto)

El Naipe Multiplicativo

Es como una tabla dividida en 4 partes, donde se colocan números que nos ayudan a resolver problemas. No solo nos ayuda resolver problemas de multiplicación como hemos visto en clases anteriores, sino que también nos ayuda con problemas de división. Recuerda que la división es como repartir o “compartir” cosas en partes iguales. Cuando es por división, a veces es para averiguar cuál es el valor de unidad, es decir, el número de objetos que le corresponde a cada persona o grupo.

Ejemplo 1

Si tienes 10 chocolatinas y quieres repartirlos entre 5 amigos de manera equitativa, ¿cuántas chocolatinas recibirá cada amigo?

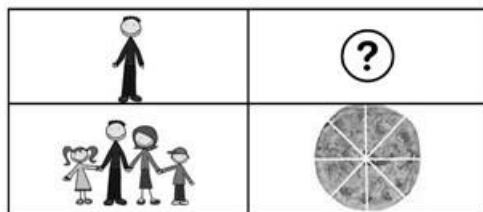
Adaptación "Naipe multiplicativo" Jorge Castaño

<ul style="list-style-type: none"> • En la primera fila, se indica la relación: "10 chocolatinas para 5 estudiantes", es decir: 	$10 \text{ Chocolatinas} = 5 \text{ niños}$
<ul style="list-style-type: none"> • En la segunda fila del naipe, se busca el <u>valor de la unidad</u>, es decir, "¿cuántas chocolatinas recibe un niño?", es decir: 	$¿\text{Cuántas chocolatinas?} = 1$

Lo que se resolvería por medio de la división $10 \div 5 = 2$

Ejemplo 2

El papá invita a su esposa y a sus dos hijos a comer pizza. ¿Cuántas porciones podrá recibir cada uno si compraron una pizza y se pidió que la dividieran en 8 porciones iguales?



Solución Y respuesta:

A partir de este problema, responder:

- 1) ¿Crees que es importante trabajar con material real, como las porciones de pizza? Explica tu respuesta:

- 2) ¿Si se utilizan dibujos, es más fácil de resolver? Explica tu respuesta: _____

- 3) ¿Cómo podríamos calcular el número de pizzas sin necesidad de imágenes o dibujos? _____

- 4) ¿Crees que el naipe multiplicativo es útil para resolver problemas de matemáticas como el de la pizza?

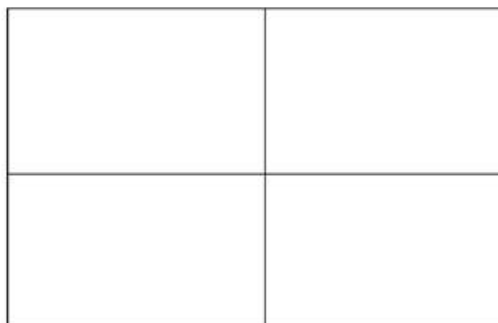
Ejemplo 3

Intenta representar en el naipe multiplicativo el siguiente problema:

Antes de salir a vacaciones, el profesor Jhonatan se encontró \$10,000 y no consiguió saber quién era el dueño.

Ahora, con ese dinero quiere premiar a 4 estudiantes que se quedaron voluntariamente a colaborar con el aseo del salón.

¿Cuánto dinero recibirá cada estudiante por su ayuda desinteresada?



Ahora realiza la operación que te daría la respuesta

Actividad en clase

"Desafío Matemático: Rotando entre Mesas de Problemas"



Materiales:

- Naipes multiplicativos para cada mesa de trabajo.
- Tarjeta con problema. (Uno por mesa)
- Imágenes recortadas relacionados con cada problema
- Hojas de resolución (una por grupo).

Desarrollo:

- Los estudiantes se organizan en equipos de 4.
- Cada grupo se ubica en una mesa y revisa los materiales



Proceso de la Actividad:

- **El primer estudiante** del grupo toma la tarjeta con el problema y lo lee en voz alta, asegurándose que todos los compañeros lo escuchen y comprendan.
- **El segundo estudiante** Utiliza las imágenes para representar el problema en el naipe multiplicativo.
- **El tercer estudiante** verifica la representación en el naipe y realiza la operación matemática y su respuesta en la hoja de resolución para resolver cada problema.
- **El cuarto estudiante** revisa el resultado obtenido por el tercer estudiante y lo corrige si es necesario.

Los estudiantes tienen 10 minutos para completar esta tarea. Luego de que suena la alarma, el grupo se desplaza a otra mesa, cambia de roles y repite el proceso con el siguiente problema.



Después de la actividad grupal:

Preguntas de Reflexión

- ¿Usar materiales que puedas tocar y ver te ayuda a entender mejor los problemas? Por favor, explica tu respuesta. _____

- ¿Qué información es muy importante para resolver estos problemas? _____

- ¿Cómo se deben organizar los datos utilizando el naipe multiplicativo para resolver los problemas? _____

- ¿Cuál es la operación matemática que podemos utilizar para resolver los problemas que trabajamos?. Y ¿por qué? _____

- ¿Qué aprendiste? _____

Compromiso para la casa

Inventa un problema similar a los de hoy, que pueda ser resuelto utilizando un naipe multiplicativo.

2ª Sesión. Momento de Estructuración (Concreto- Pictórico)

Recordar los aprendizajes alcanzados en la sesión anterior y socialización de la tarea.

¿Qué fue lo más importante de la clase pasada? _____

¿Recuerdas cómo eran los problemas que trabajamos en la clase anterior? _____

¿Qué aprendiste durante la clase pasada, que crees que será útil para resolver problemas en el futuro? _____

Proporcionalidad Directa / Isomorfismo de medidas (División)

Después de jugar, la abuela de Natalia nos sirvió galletas. En el plato había 15 galletas que sacó de tres paquetes. ¿Cuántas galletas vienen en cada paquete?

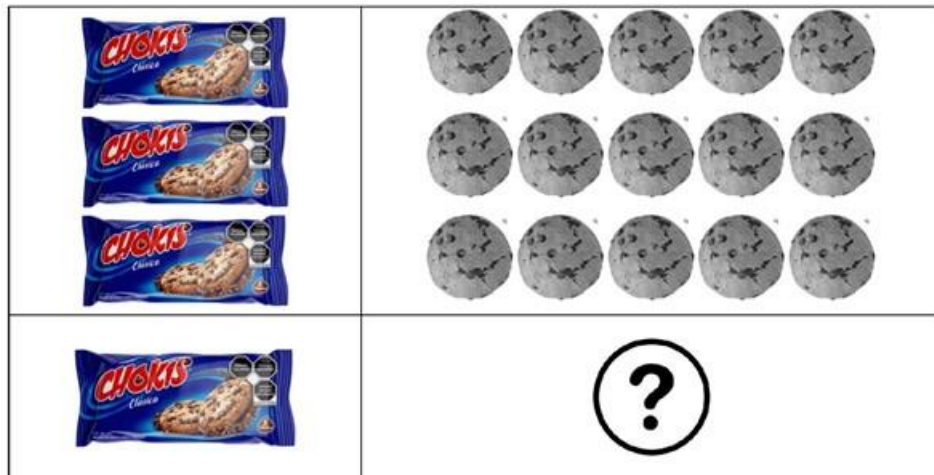


Imagen: <http://www.frepik.es/fotos-comidas/plato-galletas>

Organizamos los datos

3 Paquetes → 15 Galletas
1 Paquete → ¿Cuántas galletas?

Dibujamos en el Naípe Multiplicativo:



Encontramos la relación al repartir 5 galletas en cada paquete



¿Qué operación matemática o cálculos necesitas hacer para encontrar la respuesta del problema?

$$15 \div 3 = 5$$

R/ En cada paquete vienen 5 galletas

Resolvamos otro:

La mamá de Nikoll compra sus lápices en la papelería del Topacio. Allí, cada lápiz le cuesta \$2500. Sin embargo, una vecina le aconseja comprar una cajita de 6 lápices por \$9000.

¿Cuál opción sería mejor para la mamá de Nikoll: comprar individualmente o la cajita?



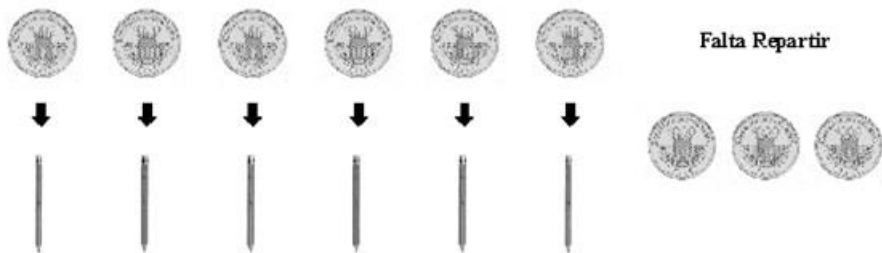
Imagen: Imágenes 123rf.com/stock_39425001_50190416-116079611 por doctores de la Universidad de Perito Moreno

Organizamos los datos

1 Lápiz \longrightarrow ¿Cuánto Cuesta?
 6 Lápices \longrightarrow \$ 9.000

Dibujamos en el Naipe Multiplicativo:

Al repartir:



¿Qué necesitas hacer para encontrar la respuesta del problema?

Respuesta =

Momento de práctica. Ejercicios contextualizados (Pictórico)

Dibuja en el Naípe multiplicativo y resuelve cada uno de los siguientes ejercicios:

- 1) El día de los niños, Hellen Gisell consiguió un montón de dulces: ¿24 dulces en total! Ahora, quiere compartirlos con sus dos mejores amigas del salón. ¿Cuántos dulces debería darle a cada una?

Naípe Multiplicativo

Operación y Solución

- 2) En la fiesta de cumpleaños de Dominick, se han invitado 30 personas. Para asegurarse de que todos estén cómodos y puedan disfrutar, decidieron organizarlos en 6 mesas. Ahora se preguntan: ¿Cuántos invitados deberían ubicarse en cada mesa?

Naípe Multiplicativo

Operación y Solución

- 3) Los padres de María Sofía son propietarios de una fábrica de postres. Esta mañana prepararon 35 postres de maracuyá que deben ser empacados en cajas de igual cantidad. Si necesitan distribuirlos en 5 cajas, ¿cuántos postres deben colocar en cada una?

Naípe Multiplicativo

Operación y Solución



Pregunta de Reflexión



¿Hacer los dibujos te ayuda a entender mejor los problemas? Por favor, explica tu respuesta. _____

Momento de práctica. Ejercicios Abiertos (Pictórico-Simbólico)

**Crea un problema con cada uno de los Naipes Multiplicativos.
Presenta tu problema a un compañero o compañera y verifica su solución.**

Naipes Multiplicativo		Problema
	\$23.400	
	?	

Naipes Multiplicativo		Problema
	\$ 15.000	
	?	

Naipes Multiplicativo		Problema
	?	
	\$ 13.500	

Pregunta de Reflexión

¿Qué información es muy importante para resolver problemas y por qué?

Sesión 3: Momento de práctica y transferencia. Ejercicios Numéricos (Simbólico)

Escribe las cantidades en el Naipe multiplicativo y resuelve.

- 1) Durante la clase de matemáticas, el profesor Rodrigo planea realizar una actividad en la que los estudiantes se dividirán en 8 grupos, cada uno con el mismo número de integrantes. Hoy, 32 estudiantes asistieron a clase. ¿Cuántos estudiantes habrá en cada grupo?



Naipe Multiplicativo		Operación y Solución
1	?	
8	32	

- 2) A la coordinadora Selene le regalaron una caja con 24 cuadernos nuevos. Después de revisarlos, decidió repartirlos entre Tomas, Zaira, Yilbran y Emanuel. Si quiere que cada uno reciba la misma cantidad, ¿cuántos cuadernos debe dar a cada estudiante?



Naipe Multiplicativo		Operación y Solución

- 3) Muchos niños de la escuela prefieren comprar su lonchera en el supermercado "El MANA". Allí, venden paquetes de 6 jugos Hit en cajita por \$6900. ¿Cuánto cuesta cada cajita de jugo individualmente?



Naipe Multiplicativo		Operación y Solución

Pregunta de Reflexión

¿Cómo se deben organizar los datos en el naipe multiplicativo para resolver los problemas?

Momento de práctica y transferencia. Situaciones de Aplicación (Simbólico)

Organiza los datos de cada problema sin ayuda del naípe multiplicativo y resuélvelo.

- 1) En una panadería, después de hornear un pedido grande, sobraron 216 panes. La gerencia decidió repartirlos entre los 6 empleados que trabajaron todo el día, con la idea de que cada uno reciba la misma cantidad. ¿Cuántos panes recibirá cada empleado?



Esquema	Operación y Solución
<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid gray; width: 80px; height: 40px; margin: 5px;"></div> <div style="font-size: 2em;">⇒</div> <div style="border: 1px solid gray; width: 80px; height: 40px; margin: 5px;"></div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; margin-top: 10px;"> <div style="border: 1px solid gray; width: 80px; height: 40px; margin: 5px;"></div> <div style="font-size: 2em;">⇒</div> <div style="border: 1px solid gray; width: 80px; height: 40px; margin: 5px;"></div> </div>	

- 2) Milan está emocionado por asistir al próximo partido de fútbol y ha decidido comprar 5 boletas para él y sus amigos. Se ha dado cuenta de que todas las boletas tienen el mismo precio, y juntas han costado un total de \$230.000. ¿Cuál es el precio de cada una de las boletas?



Esquema	Operación y Solución

- 3) En la jornada tarde aún no se ha realizado la celebración del Día de la Mujer a las profesoras. Para esto, los 4 profesores deben reunir \$90,000 para la decoración, comprar flores y un refrigerio para todos. ¿Cuál es la cantidad que cada profesor debe contribuir?



Esquema	Operación y Solución

Anexo E. Transcripción de las entrevistas

1. COPISI

¿Qué opinas sobre la idea de utilizar herramientas como el Naipe Multiplicativo para aprender conceptos matemáticos?

EJB1:

Pues yo opino que es de mucha utilidad si vas a empezar a aprender a entender las matemáticas. Con niños de primero y de segundo, y los de quinto si te va mal o no entiendes de problemas, el naipe te va a ayudar mucho. Sería bueno que siguiéramos trabajando con materiales como el naipe. Por ejemplo, para aprender fraccionarios, sería otro material para aprender cómo sería la división.

ESP2:

Es más fácil con recortes para reconocer si es multiplicación o división. Y también los dibujos son muy útiles.

ESG3:

Me ayuda bastante para saber si es multiplicación o división, y también me ayuda para resolver problemas matemáticos. Si me sirve para trabajar otros problemas como estos, es más fácil.

ELQ4:

Nos sirve de mucho porque es una manera más fácil de aprender y a nosotros casi no nos habían explicado la materia de matemáticas así, porque no sé, creo que nadie se le había ocurrido eso. Ojalá nos sigan dando clases así, porque es más chévere, como que la mente se relaja y no es así tan difícil las cosas.

EJO5:

Bien, nos ayudan a resolver problemas y a hacer operaciones, lo mismo como cuando trabajamos lo jugos. Cuántos vasos salían de los jugos. A mi me parece que usar esa herramienta es bueno, porque si nos hacemos eso, nos ayuda mucho más a entender el problema y nos ayuda a ordenar y a resolverlo.

2. COPISI

¿Qué te ayudó más a entender cómo se relacionan las cantidades en los problemas que resolvimos: usar objetos y dibujos o solo los números?

EJB1:

El que más me ayudó fue el material concreto, porque si fuimos siguiendo, por ejemplo, primero el material concreto, luego pasar a los dibujos, luego pasar a los números, para nosotros mismo pasar a hacer el naipe, para nosotros mismo hacer la respuesta con la solución. Pero el que más me ayudó fue el material concreto al inicio para entender. Pero ahora ya no lo necesito porque ahora yo ya sé hacerlo con números, el naipe. Y eso fue lo que usé en la evaluación, hacer un esquema con números.

ESP2:

A mi si me sirvió mucho para cuando hacía dibujos y para cuando hacía números. Y las multiplicaciones y divisiones son muy útiles, y el naipe multiplicativo me hizo aprender mucho.

ESG3:

Los recortes y los dibujos, porque me ayudaron a entender los problemas matemáticos. La verdad, si sería como colocarlos y organizarlos y ya sabía cuánto era la cantidad de pollo, o así.

ELQ4:

El objeto porque por ejemplo cuando hacíamos grupos, entonces se nos hacía más fácil. Y después ya fuimos con los dibujos, pues ya sabíamos que debíamos hacer el dibujo del problema que debíamos saber. Y ya lo último lo hicimos con números en los esquemas. El dibujo fue fácil, porque el librito ahí decía entonces nosotros nos hacíamos la idea y lo hacíamos. El más fácil fue el material, los objetos.

EJO5:

A mí me ayudó más los objetos porque nos ayudaban a entender como si estuviéramos trabajando con las cosas de verdad. Por ejemplo, trabajamos con los vasos de gaseosa, con el jugo, con la galleta oreo. Los dibujos también sirven porque también pude resolver, y el material concreto, lo mismo con los números.

3. Estructura Multiplicativa Isomorfismo

¿Consideras necesario elaborar un esquema para entender la relación entre los datos? ¿Por qué?

EJB1:

Si claro si me lo hubieran enseñado en tercero habría sido mejor, porque el esquema te puede decir qué operación multiplicativa vamos a usar. Y nos dice que el valor unidad es una multiplicación porque nos está preguntando por varios y hay que multiplicar para saber el valor de cuantos valen como con cinco o seis panes, y si nos preguntan por cuántos valones es una división. Si nos preguntan por cuánto vale uno y nos dice cuánto valen hartos, es una división. Por ejemplo, lo de los boletos al partido, no decían que cinco valían 230 mil y nos preguntaban por uno, era una división porque no nos daban el valor por unidad. Si luego un profesor me vuelve a preguntar, yo volvería a hacer un esquema, para saber qué operación multiplicativa matemática usaría.

ESP2:

Sí, porque algunas preguntas por varias, si es multiplicación, pero si preguntan por una es división. Y los esquemas son muy importantes.

ESG3:

Si es importante porque a mí me ayudó bastante para entender los problemas y saber si es multiplicación o división. Yo me daba cuenta que era multiplicación porque decía cuánto era el valor de uno. Y si preguntaban por varios, era una multiplicación. Y si era una división preguntaba simplemente por uno. Eso lo veía en el esquema.

ELQ4:

Si, porque es cómo lo mismo del dibujo o de los objetos, pero ya vamos con números. Es importante, porque si nos preguntan por una unidad pues tenemos que hacer la división, pero si nos preguntan por varias podemos hacer multiplicación. Es necesario hacer el esquema en un problema que me ponga el profesor. Da lo mismo hacer dibujo, material o esquema. Lo hago para entender, más fácil.

EJO5:

Si, porque haciendo el esquema nos ayuda a saber si es una división o es una multiplicación. Por ejemplo, si un pollo vale 25.000 cuanto valdrían 35. Ahí no están dando el valor de la unidad, ya sabíamos que es una multiplicación.

4. Estructura Multiplicativa Isomorfismo

¿Puedes describir cómo realizabas los esquemas para resolver los problemas de matemáticas?

EJB1:

Pues arriba en la primera cajita pongo el valor de la unidad y si no dan el valor de unidad es porque es una división. Pero abajo coloco el valor de cuanto valían artos, como

cinco o cuatro. Así es como los organizaba. Con eso sabía cuál operación matemática debía usar. Y si no decía el valor en la parte de arriba pues ponía el uno una flechita y cuánto valía. Y abajo ponía el valor de cuántos eran y signo de interrogación, porque estaban preguntando por varios entonces era una multiplicación. Pero si era al revés, para la división, arriba ponía el uno y signo de interrogación porque me estaban preguntando por cuanto valían uno. Y abajo ponía el valor de varios y cuanto valían varios. Si no dice el valor de unidad, pues pongo el valor de unidad se resuelve por multiplicación, y si nos preguntan cuánto vale uno hay que hacer una división porque nos dice cuánto valen varios.

ESP2:

Pues sí, tenemos que escribir algunas veces o hacer algunos dibujos. Y algunas veces tenemos que hacerlo por varios, como preguntas de varios, o por una pregunta. Y si es por varios es multiplicación, y solo por una pregunta es división. A la primera tenía que hacer la por dibujos, pero a lo último tenía que hacerlo por números.

ESG3:

Primero hacía la pregunta, y luego colocaba los datos, me gusta hacer muchos dibujos. Ya no hice más dibujos porque ahí ya tocaba con números. Yo prefiero hacer dibujos. Yo siento que con dibujos puedo mostrar lo que está diciendo, aunque uno ya sabe cómo es.

ELQ4:

El primero que yo decía era leer el problema para poder organizar los datos porque pues si mecían la unidad de uno pues ya tenía resuelto y organizar eso por ejemplo lo que valía uno primero ahí en el número uno, y lo que valía. Y después si me preguntaban por varios, ponía el número que era de varios y después el signo de interrogación de cuánto valía. Y así hacía yo.

EJO5:

Primera leía bien el problema, y luego sacaba el valor de la unidad. Si tenía el valor de la unidad ponía uno, la flechita y el valor de la unidad. Si no lo tenía, ponía uno, la flechita y signo de interrogación, y luego ponía el valor de varios. Si tenía el valor de varios, ponía el valor de varios, la rayita y cuántos salían. Y si no lo tenía ponía el valor de varios, la rayita y el signo de pregunta.

5. Situaciones Cotidianas

¿Crees que te ayudó trabajar con problemas relacionados con situaciones que conoces en tu vida diaria?

EJB1:

Pues sí, me ayudo arto porque yo ya conocía esos lugares y el precio que valían las cosas como en el asadero. Pues solo hay que mirar los datos y que operación hay que hacer porque ya conozco ese lugar, y se me hizo de mucha ayuda como el del asadero, por ejemplo.

ESP2:

A mí me gusta cuando aparece algunas veces mis amigos o yo, y quería resolverlo de una vez. Porque se siente chévere y queríamos resolverlo de una vez y de que imaginábamos a comprar pollo con nuestros amigos y todo eso.

ESG3:

Sí, porque uno ya entiende, uno ya sabe, pero uno que va a saber de cuánto vale un edificio en París, uno que va a saber. Un problema de huevos y de manzanas era fácil, porque sabíamos cuánto valía un paquete de manzanas.

ELQ4:

Pues eso es más fácil así resolverlo, porque si usted sabe de lo que están hablando en el esquema o usted se le hace fácil, pero si no sabe que es lo que le están hablando se le va a hacer difícil resolverlo.

EJO5:

Sí, porque me ayuda a tener el problema más fácil, y me ayuda a saber cosas que yo ya se y ponerlas en el problema. Pero si no sabría, entonces me tocaría que alguien me explique al menos, o sea alguien que ya lo sepa. Y así me sirve para organizar los datos y organizar todo y luego si hacer la operación.

6. Shoenfeld (Recursos)

¿Consideras que las actividades realizadas en clase te han ayudado a adquirir conocimientos y habilidades para resolver problemas?

EJB1:

Pues sí, porque cuando yo ya llegué a quinto, yo no sabía cuál era el valor de la unidad, sinceramente. Yo si considero que me ayudó mucho, los trabajos que hemos hecho durante estas semanas, me ayudaron mucho a adquirir nuevos conocimientos como el valor de unidad, cuánto valen varios y también nos hizo repasar las tablas de multiplicar, y nos ayudó con la división y la multiplicación reforzándola, que fue de mucha ayuda. Tengo herramientas para resolver problemas, como el esquema y el naipe multiplicativo. Puedo resolver problemas de división y de multiplicación.

ESP2:

Ya si puedo resolver problemas de esos como multiplicaciones, divisiones, los dibujos, los recortes y los números. Y antes no podía porque casi no sabía y todo eso.

Ahora siento que puedo resolver problemas de eso ya no me da miedo, con divisiones, multiplicaciones, dibujos, recortes y números.

ESG3:

Si, porque antes no sabía cuándo era división o era multiplicación. Pues no entendía, sin mentir, pero gracias al naípe multiplicativo ya mejoré y ya sé cuándo es una multiplicación y cuándo es una división. Si preguntan por una, y ya sabemos cuántos son varios, pues es una división, y si nos preguntan por varias y sabemos la unidad de una pues es una multiplicación. Antes no sabía eso. Con eso ya puedo resolver los problemas que me coloquen.

ELQ4:

Si, yo aprendí mucho más porque ya sé cuándo tengo que hacer división y multiplicación. En los problemas, porque más que todo eso aparecen es en los problemas, y así.

EJO5:

Sí, es como usted decía es una estructura del naípe, que nos ayuda a organizar los datos y eso nos decía si era una división o era una multiplicación. De ahora en adelante utilizaré estos esquemas porque me ayudaría mucho a mí entender si es una multiplicación o es una división, y así podría entender mejor los problemas.