Dificultades y errores en la solución de problemas con números racionales

Raúl Octavio Morales Díaz

Asesora de tesis:

Ligia Inés García C.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MANIZALES

DEPARTAMENTO DE EDUCACION

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

MANIZALES

2014

Tesis para obtener el grado de magister en enseñanza de las ciencias.

Dificultades y errores en la solución de problemas con números racionales.

Raúl Octavio morales Díaz.

Asesora

Ligia Inés García Castro.

Candidata a Doctora en Ciencias Sociales, Niñez y juventud.

Universidad Autónoma de Manizales

Departamento de Educación

Maestría en Enseñanza de las Ciencias

Manizales

2014

Agradecimientos

- A mi asesora, Candidata a doctora Ligia Inés García Castro por su gran acompañamiento en el desarrollo de la investigación.
- Al colegio Pedro Uribe Mejía y en especial a los estudiantes de grado 7ª, por el gran compromiso que mostraron durante el desarrollo de la investigación.
- A mis padres Mirian y Raúl, quienes desde niño me inculcaron el gran amor y disciplina hacia el logro de mis metas.
- A mi esposa Johana y mis hijas Manuela y samantha por entender y cederme parte de su tiempo para poder realizar este trabajo.

Contenido

Lista de figuras

LISTA DE ANEXOS.

PROBLEMA DE INVESTIGACION

La enseñanza de los números racionales ha sido una de las tareas más difíciles para los docentes de matemáticas que abordan este concepto en la básica primaria, tanto desde la exploración de las ideas previas que poseen los estudiantes, como la manera de enseñar y aprender los conceptos y la resolución de situaciones en donde se involucran los números racionales, debido a que se prioriza el fraccionamiento de la unidad o se centra en la mecanización de algoritmos, que dejan de lado el razonamiento y la comprensión del concepto que permitirían el planteamiento y solución de diferentes problemas matemáticos.

En palabras de Vergnaud (1983), el criterio y la fuente del saber matemático es la resolución de problemas, que en este caso, pueden estar asociados con el reparto, la medición, la comparación y transformación de medidas.

Un aspecto crucial en los programas de investigación en educación matemática (Font, 200, en las propuestas curriculares y en las prácticas de instrucción es el diseño o selección de problemas o actividades que promuevan el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes, según Santos-Trigo (2008), el uso del término problema en dominios como la psicología, la inteligencia artificial, y la educación matemática, se define como “la actividad mental y manifiesta que asume el resolutor desde el momento en que, presentándosele un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea”, lo cual coincide con lo planteado por Alan Schoenfeld, cuando define que “un problema no es realmente un problema si el estudiante no muestra interés particular por resolverlo”.

Para la presente investigación, cuando los estudiantes se enfrentan a la resolución de problemas matemáticos, se ponen en juego la comprensión del enunciado del problema, su traducción o conversión en un lenguaje aritmético o algebraico y además el reconocimiento del concepto matemático en el que el problema propuesto se encuentra inmerso.

Es allí donde la didáctica de las matemáticas debe asumir el papel importante de reorganizar los procesos de enseñanza y aprendizaje que se dan al interior del aula, que permitan modificar las practicas al presentar los problemas matemáticos en palabras de Obando (2003) como la base de la conceptualización matemática, de tal manera que permita el desarrollo del razonamiento y el pensamiento matemático y a su vez, el aprendizaje de conceptos matemáticos, en este caso del número racional.

En el aprendizaje de las matemáticas se manifiestan dificultades en los estudiantes, derivadas de distintos aspectos, tal como ya se ha dicho puede ser debido a la organización curricular de las matemáticas, conceptualización de los estudiantes, problemas al enseñar, entre muchos aspectos, según Socas (1997) estas dificultades se conectan y se refuerzan en estructuras más complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los estudiantes en forma de errores.

Brousseau tomado de Barrantes (2006) propone varios objetivos que deben guiar el proceso de enseñar; entre ellos estudiar las condiciones que deben cumplir los problemas propuestos al estudiante para favorecer la aparición y el funcionamiento de conceptos y además proveer las condiciones necesarias para que el estudiante pueda explorar y activar los conocimientos previos que se convierten en una oportunidad para identificar los obstáculos que pueden tener los estudiantes. En este sentido, comienza a sugerirse lo que se denomina obstáculos epistemológicos, para lo que Brousseau citado en Barrantes (2006) afirma que no puede considerarse un error, sino que hay un obstáculo propio del aprendizaje de las matemáticas que se refiere al poco reconocimiento que los estudiantes poseen para identificar la estrategia más adecuada para solucionar un problema.

“El error no es solamente el efecto de la ignorancia, la incertidumbre, sino que es el efecto de un conocimiento anterior, que, a pesar de su interés o éxito, ahora se revela falso o simplemente inadecuado, un ejemplo típico, puede ser el caso de las resolución de situaciones, cuando se trabaja la multiplicación de dos números naturales el resultado es un numero natural mayor, situación que no ocurre cuando los estudiantes se enfrentan a la multiplicación de dos números racionales.

De allí que se pueda plantear en palabras de Barrantes (2006) “la característica de los errores es que son predecibles”. Si se conoce el ambiente o la situación (el medio didáctico en el cual el obstáculo fue construido como conocimiento) es posible identificar qué tipo de errores son los que van a aparecer, porque precisamente los obstáculos son un conocimiento que el estudiante ha construido, correcta o incorrectamente. Permitiéndose al identificar dichos obstáculos en el aula modificar y mejorar las prácticas al interior de la misma, que se traduciría en mejores resultados en las prácticas y resolución de problemas asociados con los números racionales.

Lo anterior permite considerar que hay que promover en el estudiante, la constante interacción con situaciones que permitan la resolución de problemas, donde se haga necesario el manejo constante de los conocimientos por él aprendidos ya que en muchas situaciones, como es el caso del manejo de los números racionales, solo se reduce a utilizar un algoritmo que lo único que logra es que la resolución de problemas se convierta en un asunto eminentemente técnico y memorístico, que no logra ser transferido a otro contexto y en otra situación de aprendizaje.

De esta manera, se continúan fortaleciendo en el estudiante muchos más obstáculos que no permiten la adquisición de nuevos conocimientos en la forma apropiada y clara, Durox y Brousseau precisaron las condiciones que debería satisfacer un conocimiento para poder ser declarado un "obstáculo" en el sentido de Bachelard y explican el interés de este concepto, que conviene distinguirlo del de "dificultad":

- Un obstáculo es un conocimiento.
- Un obstáculo tiene un dominio de "validez".
- Un obstáculo resiste y reaparece.
- Un obstáculo es constitutivo del saber.

Según Barrantes (2006); la gran diferencia está en considerar el obstáculo como una dificultad ya que el obstáculo tiene unas condiciones precisas que lo sustentan y lo definen.

O como lo plantea Astolfi:

"El obstáculo es una forma del conocimiento, decía bachelard, quien se esforzó por describir lo que nos cuesta deshacernos de él, si hay dificultad, esta consiste en rechazar el uso del sentido común, en obligarnos a construir una respuesta elaborada cuando creemos disponer de una respuesta "lista para pensar".

En contraposición a lo anterior donde se toma como obstáculo epistemológico la necesidad de ideas previas, generadoras de ese obstáculo, para Bastién, Mora, Sánchez (2010) en el campo de las matemáticas actualmente se presenta la discusión con relación a si la resolución de problemas es un obstáculo epistemológico o un obstáculo cognitivo sustentada en que el concepto de obstáculo epistemológico de Bachelard esta especificado en la química.

Es en el campo de las matemáticas donde ha surgido una discusión sobre si los obstáculos que tiene un alumno para resolver problemas, son obstáculos epistemológicos o bien obstáculos cognitivos asociados al razonamiento matemático, ósea si el obstáculo para resolver problemas aplicando números racionales está definido por conceptos anteriores o si es un obstáculo posterior a su implementación y manejo del concepto.

Al respecto se considera que los obstáculos cognitivos son las dificultades que tiene el alumno para conocer y resolver problemas y que no provienen necesariamente de un conocimiento anterior; en cambio el obstáculo epistemológico nos remite a algo más profundo que una laguna de conocimiento o una falta de razonamiento matemático; tomado de Bastién , Mora, Sánchez-Guzmán (2010). El obstáculo epistemológico nos sitúa en el "acto mismo de conocer", se sitúa en el plano de los conocimientos anteriores, que fueron útiles en otras circunstancias y que ahora son una barrera para alcanzar el aprendizaje de un concepto.

Teniendo en cuenta las múltiples acepciones que reciben tanto el concepto de errores, obstáculos y dificultades, y lo planteado por Socas, quien ha realizado diversas investigaciones en torno a esta línea de investigación, se opta por abordar el concepto de dificultades debido a la posibilidad metodológicamente con la que se cuenta.

Además y siguiendo a Socas y Radatz, la manifestación de las dificultades se hace a través de errores, que son las manifestaciones explícitas de lo que pueda pasar en los estudiantes que no les permite avanzar en este caso, en la resolución de problemas.

Con lo expuesto anteriormente surge la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuáles y de qué manera se presentan los errores que evidencian las dificultades que poseen los estudiantes al enfrentarse a la resolución de problemas con números racionales?

1. JUSTIFICACIÓN

Desde la didáctica de la matemática se han abordado diferentes investigaciones relacionadas con los números racionales, algunos investigadores como Kieren, 1980,1983, 199,; Freudenthal 1983; Ohlsson 1980; Vergnaud, 1983; Puig, ; han promovido grandes avances en el manejo y la interpretación de los números racionales. En Freudenthal (1983) se ha trabajado el concepto de reparto desde dos aspectos que organizan las ideas sobre las fracciones: como fracturantes y comparadores, las primeras hacen referencia a la forma cómo la unidad ha sido dividida en varias partes iguales y la segunda se refiere al proceso de comparar diferentes fracciones.

En cuanto a las investigaciones relacionadas con la resolución de problemas; trabajos como los de Alan Schoenfeld y Puig, han desarrollado notablemente el concepto de resolución de problemas, pero en lo que relaciona a este con los números racionales, solo se han encontrado desde el concepto de reparto, en la investigación de León Pérez (1998), Rodríguez (2005), en el campo de resolución de problemas en matemáticas mas no específicamente en racionales, así como las investigaciones asociadas con resolución de problemas desde el campo de la física , asociados a la dinámica de Bastién, César, Sánchez-Guzmán (2010), y la tesis de maestría de Téllez (2010), donde se desarrollan diferentes propuestas de aprendizaje basado en problemas que permiten la mejor asimilación de diferentes conceptos y su posterior aplicación en situaciones reales.

En ninguna de las investigaciones antes mencionadas se hace referencia a la indagación de las dificultades que presentan los estudiantes en su aprendizaje o en el momento de adquirir nuevos conocimientos, aclarando que es importante tener en cuenta que la investigación no considera un problema matemático y mucho menos su resolución a las actividades que se realizan en el salón de clase, donde solo se pone en funcionamiento un algoritmo matemático o se implementa la aplicación de una ecuación o formula, que por el hecho de aplicarse en la forma correcta se caiga en el error de pensar que el estudiante resuelve problemas matemáticos y que no presenta ningún tipo de obstáculo en su aprendizaje.

Por lo cual se parte de la idea de que un problema matemático representa un reto o dificultad que no tiene resolución inmediata y que posibilita la búsqueda de procedimientos por parte del alumno a partir de los esquemas invariantes (Vergnaud 1983).

La resolución de problemas aporta a la construcción de conceptos, debido al establecimiento de las relaciones entre ellos, pero no se aprende a resolver problemas por el hecho de haber aprendido determinados conceptos y algunos algoritmos de cálculo, se hace necesario disponer de herramientas, técnicas específicas y pautas generales de resolución de problemas que permitan resolver los obstáculos que los estudiantes presentan y que no permiten que los conocimientos relacionados con los números racionales sean aprendidos en forma adecuada, de allí que la atención se centre no solo en el proceso de brindarle al estudiante diferentes estrategias en la resolución de problemas, sino generar diferentes procesos de reflexión que lo conduzcan a elaborar sus propias estrategias de trabajo y su forma de pensar o abordar situaciones complejas, descubriendo y siendo consciente de los obstáculos que en él se presenten, en el momento de utilizar los números racionales.

Aunque se han encontrado diferentes investigaciones que plantean estudios relacionados con los números racionales, resolución de problemas no solamente asociados a las matemáticas y obstáculos epistemológicos y cognitivos en la adquisición de nuevos contenidos, en las revistas y textos (Redalyc, Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática) entre otras, no se ha encontrado evidencia acerca de investigaciones que abarquen las tres categorías –dificultades-resolución de problemas y números racionales y las diferentes relaciones establecidas entre ellas.

3. OBJETIVOS

3.1 General

Reconocer los errores y las dificultades que presentan los estudiantes de educación básica al enfrentarse a la resolución de problemas con los números racionales

3.2 Específicos

- Identificar los errores que se presentan en los estudiantes al enfrentarse a la resolución de problemas con números racionales.
- Reconocer en los errores encontrados, las posibles dificultades que presentan los estudiantes en la resolución de problemas con números racionales.
- Aportar a la comprensión de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas que poseen los estudiantes.

4. ANTECEDENTES

De acuerdo con las categorías del estudio, los antecedentes revisados fueron clasificados así:

Con respecto a las dificultades, errores y obstáculos en el aprendizaje de la matemática,

1. Dificultades en el aprendizaje de la matemática, Obstáculos y errores en el aprendizaje del concepto de dependencia e independencia lineal. Mónica Caserio, Martha Guzmán, Ana María Vozzi (2007)

La presente investigación pretendió realizar una caracterización de los errores presentados en los estudiantes que ingresan a la universidad desde la clasificación realizada por Socas, cuando propone que existe una clasificación I-Errores que tienen su origen en un obstáculo y II-Errores que tienen su origen en ausencia de sentido del concepto, en el algebra lineal.

Para ello se diseñaron una serie de actividades en el aula enmarcadas en una investigación activa, la cual pretende el desarrollo de actividades y no a la implementación de teorías, impulsándose en el aula, la ingeniería didáctica puesto que se considera "que en el contexto de un paradigma cualitativo el "saber a enseñar" y el "caso a investigar "son susceptibles de ser tratados a través de ella", Caserio, M; Guzmán, M, Vozzi, A. (2007).

El desarrollo de esta investigación permite reconocer su pertinencia para el presente estudio, ya que retoma el concepto de "campos conceptuales" de G. Vergnaud, la aproximación a través de los saberes en Chevallard, desde la transposición didáctica., y la teoría de situaciones de G.Brousseau y la clasificación de los obstáculos que el realiza.

En cuanto a las conclusiones obtenidas en esta investigación se proponen algunas alternativas didácticas para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje, entre las cuales se destaca:

a. Al detectar los obstáculos presentes en los estudiantes, se deben implementar estrategias pedagógicas que permitan que estos se transformen en favorecedores de aprendizajes futuros.

b. Implementar trabajos prácticos al interior del aula que se enfoquen en los obstáculos detectados buscando así su superación.

c. Cambiar la idea de que hay que enfocar la enseñanza en solo completar el plan de asignatura y más bien implementar diferentes metodologías que posibiliten el aprendizaje autónomo.

Para el presente estudio, este antecedente se constituye en una posibilidad de reconocer las clasificaciones de las dificultades propuestas por Brousseau, desde el marco de la transposición didáctica, aspecto que suena novedoso, en tanto reconoce la clasificación de los errores propuesta por Socas, también retomado en el presente estudio y asume algunos aspectos de Brousseau, lo que permite tener una visión integral del concepto de errores y dificultades.

2. Prácticas docentes y errores de los alumnos. Patricia Có, Mónica del Sastre y Erica Panella (2008)

Esta investigación se lleva a cabo en el marco de un proceso de formación de profesores en un taller llamado " taller de resolución de problemas" correspondiente a un Postítulo de Formación Universitaria en Matemática y Estadística, el cual permitió interactuar con los docentes-alumnos y analizar propuestas de clase escritas por ellos, permitiéndose así detectar que los errores que se encuentran en los estudiantes de primer año de la universidad fueron enseñados o transmitidos por algunos docentes.

De allí que la propuesta de investigación estuvo diseñada en torno a generar diferentes estrategias de enseñanza que ayuden a los estudiantes a superar dichos obstáculos que se manifiestan en forma de errores.

La propuesta de investigación permite hacer claridad en cuanto al concepto de obstáculo Como afirma Socas (1997), "las dificultades en el aprendizaje de la matemática se deben a múltiples situaciones que se entrelazan entre sí y que van desde una deficiente planificación curricular hasta la naturaleza propia de la matemática que se manifiestan en sus expresiones simbólicas y en los procesos de pensamiento, pasando por el desarrollo cognitivo de los alumnos, así como por sus actitudes afectivas y emocionales. Estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculo y se manifiestan en los alumnos en forma de errores".

También en cuanto al concepto de error, Socas (1997) plantea "no debe entenderse al error únicamente como resultado de la falta de un conocimiento o una distracción, sino que debe ser considerado como evidencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado, aún cuando sus orígenes puedan ser diferentes".

Es de anotar que en esta investigación se utilizan las diferentes clasificaciones de los errores propuestas por Radatz (1980, Rico, 1995) y por Brousseau (1983) quien retomó las ideas de Bachelard y las desarrolló en el ámbito específico de la Didáctica de la Matemática.

En cuanto a los resultados de la investigación a partir de este diagnóstico se considera la necesidad de un proceso de articulación entre la escuela media y la universidad, y para ello proponen la realización de cursos de nivelación, realizando revisiones en cuanto al material didáctico utilizado y la metodología de enseñanza que permitan disminuir los errores presentados en matemáticas.

Esta investigación permitió clarificar la diferencia entre dificultades y errores y de allí derivar la selección de las dificultades en el presente estudio, ya que resulta más potente indagar por las dificultades que dan cuenta, bien sea de la complejidad de la matemática o de aspectos relacionados con la enseñanza.

La propuesta de clasificación de Radatz, presente en la investigación anterior, arrojó elementos importantes para tipificar las dificultades de los estudiantes en la resolución de problemas con racionales, en la presente investigación.

3. Reconocimiento de algunas dificultades en la práctica docente sobre la enseñanza de fracciones. Marta E. Valdemoros y Elena Fabiola Ruiz (2008)

En la presente investigación se dan a conocer los resultados obtenidos en un estudio de casos, a partir del análisis de las dificultades que poseen tres docentes en la enseñanza de la matemática y específicamente en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las fracciones.

La investigación parte de la fundamentación teórica de Freudenthal (1983) quien afirma que la fracción es el recurso fenomenológico del número racional, para lo que propone modelos didácticos propios para la enseñanza de las fracciones, en particular, enfatizando los modelos de área y longitud como medios naturales para visualizar magnitudes y aconsejando que su uso se dé de manera práctica y con manipulación de material.

El mencionado investigador considera que la riqueza didáctica con la que sean abordadas las fracciones proporciona aspectos fundamentales y que influyen el aprendizaje que realicen los estudiantes; Valdemoros Álvarez, Ruiz Ledezma, E; (2008); en este aspecto se pudo corroborar la pertinencia de la presente investigación que se centra en las dificultades encontradas desde el enfoque de resolución de problemas en el manejo de las fracciones.

Metodológicamente el estudio fue realizado en dos fases. En la primera, se indaga acerca del proceso de enseñanza previo efectuado por Melquiades quien es el docente que participa del estudio de caso y en la segunda fase se emplean dos entrevistas, dichos instrumentos, fueron triangulados para darle validez al estudio de caso.

Entre las conclusiones arrojadas por la investigación se encuentra que las dificultades propias de la enseñanza de fracciones radican esencialmente en:

a. El proceso de enseñanza y aprendizaje se basa en la memorización, es decir, solamente en el manejo de algoritmos y la utilización de un solo libro de texto.

b. El pobre domino conceptual y semántico de las fracciones, por lo cual muchas dificultades que presentan sus estudiantes, son debidas al proceso de enseñanza.

c. En el momento de abordar diferentes problemas matemáticos, sus estudiantes obtienen resultados diferentes indicando esto, que en el enfoque de resolución de problemas fundamentados en el contexto, se presentan dificultades asociadas a una interpretación diferente del problema ya sea en su lectura o en su comprensión.

Esta investigación arroja información importante acerca del reconocimiento de las dificultades que en esta caso radican en la enseñanza de las fracciones, lo que puede dar elementos para comprender las dificultades en los estudiantes.

4. Obstáculos, dificultades y errores en el aprendizaje de los números irracionales Mariela Lilibeth Herrera Ruiz (2010)

En la presente investigación, realizada con estudiantes de 3ª año de educación media en los cuales se deseaba indagar y describir los conflictos cognitivos que se presentan en los estudiantes al resolver situaciones con los números irracionales, para ello se proponen los tres siguientes objetivos específicos:

- Diagnosticar las dificultades que presentan los estudiantes de bachillerato en el aprendizaje de los números irracionales.
- Diagnosticar los errores que presentan los estudiantes de bachillerato en el aprendizaje los números irracionales.
- Describir los obstáculos que presentan los estudiantes de bachillerato en el aprendizaje los números irracionales.

Esta investigación se enmarca en la teoría propuesta por Socas (1997) en su tesis doctoral sobre dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria, las dimensiones afectivas descritas por Gómez (2000), la teoría de obstáculos de Brousseau (1976) y la teoría de errores de Radatz (1979).

Se realiza la clasificación propuesta por Socas (1997) en cuanto a las dificultades presentadas en matemáticas; en cuanto a los errores, se plantea la clasificación propuesta por Radatz (1979) y la categoriza en cinco clases; En cuanto a los tipos de obstáculos que se presentan en el sistema didáctico se retoman los planteados por Brousseau (1976) quien distingue tres, dependiendo de su origen:

- De origen epistemológico, se les puede encontrar en la historia de los mismos conceptos, no quiere decir que se deben reproducir en el medio escolar las condiciones históricas donde se les ha vencido;
- De origen didáctico, resultado de elecciones didácticas que se hacen para establecer la situación de enseñanza;
- De origen ontogénico o psicogénico, debido a las características del desarrollo del niño.

En cuanto al diseño metodológico la investigación se centró en el análisis de los cuadernos de los estudiantes, evaluaciones escritas y la aplicación de un cuestionario, a partir de un enfoque cualitativo, enfocada en un estudio de caso, ya que la información es brindada directamente por el estudiante.

En cuanto a los resultados se evidencia que los errores presentados por los estudiantes no son producto de situaciones espontáneas, ellos son la evidencia de que hay presentes en ellos "los conflictos cognitivos que surgen de dificultades y obstáculos" Herrera Ruiz, M. (2010).

En la investigación se plantea a partir de este diagnóstico, la necesidad de implementar en el aula estrategias pedagógicas que permitan identificar las dificultades presentes en los estudiantes, de tal manera que se generen posteriormente intervenciones didácticas.

Este estudio se constituye en un referente importante, a partir de la diferenciación que se hace de dificultades, errores y obstáculos recogiendo los aportes teóricos de Socas, Radatz y Brousseau y como estos permiten tener un concepto integral en cuanto a errores y dificultades. A partir de este estudio se pudo asumir para el presente estudio la clasificación propuesta por Radatz, ya que retoma diferentes dimensiones que no se ciñen a lo didáctico sino que también reconocen aspectos como la complejidad del lenguaje matemático, a la aplicación de reglas, al manejo del espacio y a conceptos previos.

5. Errores y dificultades de los estudiantes Resolución de problemas. Kilpatrick Jeremy, Gómez Pedro y Rico Luis (1998).

Como compilado de las conferencias que se realizaron en el Primer Simposio Internacional De Educación Matemática realizada en 1993, y organizada por el Centro De Investigación De La Matemáticas De La Universidad de los Andes, este documento resalta la importancia y aportes de cada una de las conferencias, realizadas por los autores, que presentan a la educación matemática como un área del conocimiento, desde el punto de vista tecnológico, así como el conocimiento de la teoría y su aplicación a la práctica, resaltando también el área desde la perspectiva científica, en la que la investigación se desarrolla con aplicaciones prácticas. En el que se informó al grupo de docentes de matemáticas que la enseñanza de esta área es, de hecho, un proceso de investigación, con resultados teóricos y prácticos relevantes para los problemas educativos del país.

Se estructura de la siguiente manera: en la primera parte, se hace una reflexión acerca de la historia de la investigación en educación matemática y de algunos de sus temas de actualidad; donde se presenta la evolución que la educación matemática ha tenido en España. Posteriormente se presenta la relación de algunas de las líneas de investigación en educación matemática que se han trabajado en Colombia.

La segunda parte presenta dos temas de gran actualidad en la educación matemática: la resolución de problemas y la evaluación. Estos textos son producto de las discusiones que los autores tuvieron con un grupo de investigadores colombianos. En la tercera y última parte se hace una reflexión sobre los errores y las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas y algunas técnicas sencillas de evaluación que un profesor puede introducir en su quehacer docente.

Como aspectos específicos, se pueden reconocer el señalamiento donde resaltan el error dentro del proceso de aprendizaje de la matemáticas, se determina entonces que el error puede contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje ; que este no aparece por azar sino que surge en un marco conceptual basado sobre conocimientos adquiridos previamente y finalmente se indica que todo proceso de enseñanza es potencialmente generador de error , debidos a diferentes causas, algunos de los cuales se presentan inevitablemente. Hay que admitir como consecuencia de las reflexiones anteriores que, a partir del error, el estudiante puede aprender distintas propiedades de un concepto de las que no era previamente consciente. Al cometer un error, el estudiante expresa un alcance incompleto de su conocimiento y permite a los compañeros o al docente colaborar en el completar este conocimiento adicional o llevarlo a comprender por sí mismo aquello que estaba mal.

De acuerdo con la clasificación y los diferentes orígenes que se plantean en cuanto al error en la enseñanza y evaluación de las matemáticas, permitieron visualizar acerca de las posibles categorías y representación del error, a la hora de plasmarlo en la recolección de información de campo y a contribuir a un análisis clasificatorio.

Gracias a este antecedente, sumado a esto el mayor provecho que se saca de este documento, es la redirección a otros documentos, ya que los autores realizan un compendio de diferentes investigaciones realizadas en 4 países Europeos en los que se revisa la importancia, clasificación, determinación y características del error en la matemáticas, permitiendo así que se cuente con más referencias a las cuales acudir para revisar y contribuir a la fundamentación del presente trabajo de investigación.

Investigaciones relacionadas con la resolución de problemas,

1. Resolución de problemas con utilización de conocimientos del mundo real. Marger da Conceição Ventura Viana, Marcos Paulo Freitas Gomes. (2007)

El objetivo central de la investigación fue analizar los conocimientos del mundo real en alumnos de quinto grado resolviendo problemas verbales de aritmética en el aula de clase, para lograrlo se realizó un estudio exploratorio utilizando análisis cualitativos y cuantitativos, en el cual se le aplico el test de Verschaffel, De Corte y Lasure (1994) a 88 alumnos del quinto grado de la Enseñanza Fundamental en las redes de enseñanza municipal, estatal y privada de la ciudad de Ouro Preto, provincia de Minas Gerais.

Los test fueron analizados atendiendo a los criterios ya establecidos por los autores, se pudo constatar que la gran mayoría de los alumnos que participaron en el estudio, resuelven los problemas sin tener en cuenta la realidad, a partir de este estudio, se generaron investigaciones posteriores en las cuales se obtuvieron similares resultados, en Bélgica (Verschaffel, De Corte y Borghart 1997), Japón (Yoshida, Verschaffel y De Corte, 1997), Suiza (Reusser y Stebler, 1997), Venezuela (Hidalgo, 1997) y Singapur (Lee y Yee, 2004). Tomado de Ventura Viana, M., Freitas Gomes, F (2007).

Esta investigación permitió hacer claridad en cuanto a la acepción de que es un problema ya que este genera diferentes matices según la forma en que se aborde, los autores se acogen a la establecida por Lester (1982) Apud Viana (2002):

> "Es una situación en que el sujeto o equipo desea o necesita resolver y no tiene camino inmediato y rápido para llegar a la solución" ya que la resolución de problemas debe estar orientada al aprendizaje de la matemática y no paralela a esta, y promover situaciones donde el estudiante descubra procedimientos propios y diferentes estrategias para su resolución. Lo cual coincide con lo que plantean los autores de la investigación "La resolución de problemas no es una actividad para ser desarrollada en paralelo o como aplicación del aprendizaje, sino que el aprendizaje en Matemática debe ser orientado en una perspectiva de resolución de problemas, en donde el problema ofrece el contexto donde se pueden aprender conceptos, procedimientos y actitudes matemáticas".

Metodológicamente se puede evidencia que esta investigación brinda herramientas para la elaboración de los instrumentos de recolección de información, ya que se pretende indagar por los errores a partir de la resolución de problemas.

2. Valdemoros M., Olguin E.(2009) Reparto con Fracciones: Estrategias de resolución

Es un estudio de caso, centrado en las estrategias de resolución de problemas de reparto con fracciones utilizadas por niños, la escuela elegida se ubica en la zona centro de la ciudad de México. Para la realización del trabajo de campo se seleccionó un grupo de cuarto grado de primaria conformado por 11 niños de ambos sexos con edades entre los 9 y 10 años.

En el diseño metodológico la investigación se centro en 3 sesiones; las cuales permitirían identificar las principales estrategias desarrolladas por los alumnos en la resolución de problemas de reparto con fracciones y detectar las dificultades que presentaban los niños en la resolución de los problemas.

Se iniciaron las sesiones por medio de observaciones en el aula que permitieran identificar los contenidos enseñados por el docente y sobre cuales prioriza a la hora de abordar las fracciones. Acompañada de la observación se implementó un cuestionario, el cual permite evidenciar las nociones previas en los estudiantes respecto al significado de fracción como relación parte-todo y como cociente, para determinar las estrategias de resolución de problemas, posteriormente se realizaron entrevistas semiestructuradas, las cuales fueron videograbadas. La fundamentación teórica está basada en la semántica de las fracciones, partiendo de los constructos de Kieren (1983) donde se afirma que en la expresión a/b se adquieren cinco significados los cuales denomina subconstructos: cociente, medida, operador multiplicativo, razón y relación parte-todo. Define la relación parte-todo como un todo que es cortado en partes iguales, usando la idea de fracción para cuantificar la relación entre el todo y un numero designado de partes; relacionándose con cada uno de los otros cuatro subconstructos, identificando una unidad apropiada a cada circunstancia (Kieren, citado en Olguín Trejo, E., Valdemoros Álvarez, M. (2010).

En cuanto a los resultados arrojados en la investigación se encuentra que la enseñanza está focalizada en el manejo de algoritmos más que en el desarrollo de diferentes estrategias de resolución de problemas, ya que es el maestro quien dirige la resolución de problemas y no permite que el estudiante realice un razonamiento de los problemas y de su posible solución.

Los estudiantes demuestran dominio en cuanto al reparto, pero se siguen evidenciando dificultades en la interpretación y manejo de las fracciones.

Esta investigación resulto ser pertinente como antecedente en cuanto permitió reconocer algunos aspectos procedimentales del estudio, que pudieran ser replicados para recoger información pertinente en el reconocimiento de los errores y dificultades.

3. Milevich L., Lois A. (2010) La resolución de situaciones problemáticas en la formación de profesores

La presente investigación se enmarca en un proyecto sobre resolución de problemas en las asignaturas de cálculo en la Facultad Regional General Pacheco, de la Universidad

Tecnológica Nacional, conformada por una población de 4 grupos de 30 alumnos aproximadamente de las cohortes 2005, 2006, 2007 y 2008, en la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática (LEM).

En la propuesta de investigación se quiere desarrollar en los estudiantes un aprendizaje significativo y para ello se parte de una propuesta de investigación basada en la resolución de problemas por lo cual se fundamenta teóricamente en las ideas de Schoenfeld (1989) y Romberg (1992) " quienes consideran importante propiciar una metodología dónde los alumnos se puedan desenvolver en un medio similar al de los matemáticos cuando trabajan, ambiente propicio para que desarrollen estrategias y habilidades propias del quehacer matemático. Desde esta perspectiva, aprender matemáticas está asociado a la identificación, selección, uso de estrategias y habilidades, por parte del alumno, utilizadas por los matemáticos al resolver problemas Milevicich, L; Lois, A; (2010).

Para el desarrollo del trabajo los investigadores parten de una categorización de la forma en cómo se aborda la resolución de problemas en el proceso de enseñanza:

- Algunos docentes justifican la enseñanza en resolución de problemas como una forma de estudiar algún contenido matemático.
- Otros docentes dejan la resolución de problemas solo para el final de la unidad de trabajo y en momentos por escasez de tiempo no lo abordan.
- Otros, presentan los contenidos teóricos en primer lugar y luego un problema a modo de aplicación.

- Otro grupo donde partir de un conjunto de problemas, se promueve la discusión, el uso de ejemplos y contraejemplos y diferentes métodos para encontrar su solución.

La pertinencia de dicha investigación se enmarca en el tópico anteriormente expuesto el cual es muy importante en la presente investigación ya que se parte de situaciones problemas y partir de ellos, identificar los errores y dificultades que presentan los estudiantes al resolverlos.

En cuanto al desarrollo metodológico, se abordó desde la Investigación-acción aplicada a la resolución de problemas, a partir de una muestra conformada por 4 grupos de 30 estudiantes aproximadamente, la cual pretende contribuir al desarrollo de la didáctica de la matemática y por consiguiente promover en los estudiantes la construcción de un conocimiento profesional a partir de su propia practica.

En cuanto al desarrollo de la propuesta en resolución de problemas se desarrollaron unidades didácticas en las cuales se tuvieron en cuenta los aportes de propuesta Krulik y Rudnick (1982) citado en Milevicich, L., Lois, A. (2010).

- Crear un ambiente apropiado para la resolución de problemas.
- Ofrecer un repertorio amplio y variado de problemas que generen una práctica intensiva y extensiva, además de que representen un reto para los aprendices.
- Enseñar a los alumnos a desarrollar estrategias que les permitan leer los problemas en forma analítica.
- Pedir a los alumnos que inventen sus propios problemas.
- Favorecer el trabajo en parejas o en pequeños grupos.

- Promover el uso de estrategias alternativas.
- Formular preguntas mientras los alumnos están en el proceso de discusión de los procedimientos para resolver problemas.
- Fomentar la retroalimentación.
- Utilizar estrategias que permitan el desarrollo de procesos del pensamiento.
- Solicitar que los alumnos representen, mediante un diagrama de flujo, sus propios procedimientos para resolver problemas.

En cuanto a los resultados que arroja la investigación se concluye que las dificultades en los estudiantes, se refieren al poco dominio de procedimientos generales y específicos para resolver problemas, también la dificultad para planificar el proceso de resolución, el manejo grafico, organización de la información, planificación de estrategias de resolución, aplicación de procedimientos adecuados entre otras.

Esta investigación aporta al presente estudio, elementos metodológicos para la identificación de las dificultades de los estudiantes y también para reconocer la necesidad de invertir hasta dos semanas en el proceso de planificación de las estrategias de resolución y la selección de las mismas. Los investigadores consideran que "el modelo de enseñanza aprendizaje planteado, que consiste en la aplicación de la metodología de resolución de problemas, resulta especialmente valioso para los alumnos, pues colabora claramente en su desarrollo profesional a partir de su experiencia como aprendices" Milevicich, L., Lois, A. (2010).

4. Los significados asociados a la nociòn de Fracción Flórez R. (2011)

La presente investigación tuvo como propósito, abordar las fracciones desde los diferentes significados, por lo cual la investigadora parte del reconocimiento de la dificultad que presenta tanto la enseñanza como el aprendizaje de las fracciones, fundamentalmente en los niveles básicos de formación.

La investigación que se desarrolló es de corte cualitativo ya que se pretende evidenciar el manejo de las fracciones en el discurso matemático escolar en la secundaria en torno a los diferentes significados y construcciones que realizan los estudiantes. Para ello se aplicó un cuestionario a 36 estudiantes de cada grado de nivel de secundaria para un total de 108 estudiantes de la jornada de la mañana con edades entre los 12y 15 años. El cuestionario aplicado pretendía identificar la forma en que son abordados los diferentes significados de las fracciones.

Para la caracterización de los diferentes significados y la forma en cómo resuelven situaciones problemas en torno a las fracciones, la investigadora ha empleado el modelo teórico denominado conocimiento "ideal" del número racional desarrollado por (Millsaps, 2005), en este modelo se caracterizan los diferentes desarrollos matemáticos con relación a los racionales en 6 niveles y en los cuales cada desarrollo por nivel obedece a unas características propias en cuanto al manejo y resolución de problemas asociados con los racionales. Dicho modelo apoyándose en los trabajos propuestos por (Kieren, 1983), (Valdemoros, 1993), Vergnaud (citado por Millsaps, 2005).

En cuanto a los resultados evidenciados en la investigación, se pudo reconocer que al resolver el problema planteado se recoge la mayor parte de los significados atribuidos a la noción de fracción (parte todo, operador, medida, cociente, partición), pero así el problema recoja los diferentes significados se encuentran serias dificultades a la hora de resolverlos por parte de los estudiantes, entre las cuales se destacan la dificultad en la interpretación del problema, la forma en cómo llegan a la respuesta, la dificultad generada en cuanto a la condición de equivalencia.

Esta investigación resulta pertinente para este estudio, ya que proporciona elementos teóricos y metodológicos para comprender las dificultades asociadas a la resolución de situaciones con fracciones.

5. Dos casos referidos al reparto con fracciones. Olguín E.M., Valdemoros M. (2011)

La presente investigación plantea la identificación de las diferentes estrategias en la resolución de problemas de reparto de fracciones, a partir de la cual se quiere conocer cuáles son los procesos empleados en la resolución de problemas y como a partir de éstos, se realiza la construcción del numero fraccionario.

La investigación se fundamenta en los desarrollos teóricos de Kieren (1983), donde la partición y la equivalencia son dos mecanismos constructivos que permiten al niño construir los cinco significados asignables a la fracción, a los cuales identifica como subconstructos: cociente, medida, operador multiplicativo, razón y relación parte-todo, este último, según las autoras, va relacionado con los otros cuatro significados de la fracción y es definido como un todo que ha sido cortado, prevaleciendo en esta situación la equidad e igualdad"; Olguín, E., Valdemoros, M.(2011).

Este aspecto permitió obtener elementos que aportarán a la identificación de las categorías iniciales de análisis, de tal manera que cuando se hiciera la clasificación de los errores presentados por los estudiantes, se pudiera tener en cuenta los constructos de Kieren y las posibles dificultades que presentan los estudiantes para su comprensión.

Como fundamentos teóricos para la identificación de las diferentes estrategias en la resolución de problemas con fracciones, desarrolladas por los estudiantes se apoya en las investigaciones realizadas por:

- Empson, Junk, Domínguez & Turner (2005) identifican la estrategia de coordinación de un solo artículo. Charles & Nason (2000) identificaron la estrategia fundante del cociente partitivo (Perera, 2001).
- En cuanto a estrategias utilizadas al resolver problemas de reparto con fracciones, Lamon (1996) apoyándose en Behr analiza las estrategias de partición de los niños en términos de las marcas y cortes, quien ha identificado la estrategia de marcar todo.
- La investigación efectuada por Mamede, Nunes & Bryant (2005) aseveran que en las fracciones en situaciones de cociente, el denominador señala el número de personas del reparto y el numerador el número de partes que les corresponde a cada persona. Olguín, E., Valdemoros, M (2011).

En cuanto a la identificación de las diferentes estrategias empleadas por los estudiantes Valdemoros (1993, 2004), pone en práctica el modelo de análisis para interpretar el uso del lenguaje (aritmético y verbal), en situaciones fraccionarias, en el cual se pueden identificar los planos constituyentes del lenguaje: el plano semántico, el plano sintáctico, el plano de la "traducción" de un lenguaje a otro lenguaje o a un sistema simbólico, el plano de la escritura numérica y el plano de la lectura. Olguín, E., Valdemoros, M (2011).

La identificación de estos planos es de total pertinencia para esta investigación ya que a través de dicho modelo se pueden reconocer las dificultades que presentan los niños cuando resuelven situaciones asociadas al reparto de las fracciones. A través de los cuales se pueden identificar los diferentes procesos y dificultades que se presentan en los niños a la hora de abordar la resolución de problemas con fracciones.

La investigación es desarrollada en una escuela del sistema público localizada en el área urbana de la ciudad de México, en la cual los niños pertenecientes a cuarto grado con 9 años de edad, empleando instrumentos como cuestionarios, observación de aula y entrevistas individuales.

Un aspecto importante y que se concluye en esta investigación es que se hace necesario identificar cómo influye la enseñanza recibida en el desarrollo de estrategias que los niños implementan en resolución de problemas de reparto con fracciones.

En cuanto a los instrumentos, el cuestionario permitió realizar una aproximación a los conceptos e ideas previas de los estudiantes.

Dada la metodología de estudio de casos, se seleccionaron dos casos típicos para identificar las estrategias empleadas en la resolución de problemas, tal es el caso de Mario que empleó únicamente la estrategia: Divide cada unidad en el mismo número de personas, en tanto Miriam empleó la estrategia: Divide cada unidad en el mismo número de personas, pero, además, utilizó la estrategia: En su respuesta numérica, da una fracción equivalente a la que corresponde a su reparto.

6. Resolución de problemas que implican identificar de manera constante la unidad de referencia: un estudio de caso. Lamadrid P., Valdemoros M.(2011

La presente investigación es abordada desde la conceptualización que tienen los docentes con relación al manejo de las fracciones, es un estudio cualitativo con una metodología de estudio de caso realizado en escuelas primarias públicas del Distrito Federal, México, durante el turno vespertino, su horario escolar es de las catorce a las dieciocho treinta horas en el grado tercero. La investigación se llevó a cabo por medio de la implementación de observaciones, cuestionario y entrevistas de corte didáctico, cada una de las cuales presenta ciertas características:

- Cuestionario inicial en el cual se indaga información del profesor en relación a su experiencia laboral, su formación, capacitación y actualización docente.
- Observación directa de la clase en la que el profesor plantea el contenido manejado con relación a las fracciones.
- Observación indirecta en las actividades cotidianas ubicada en los cuadernos de los estudiantes.
- Cuestionario en dos etapas: en la primera, el docente resuelve diferentes problemas con fracciones asignándoles los diferentes significados. En la segunda etapa, plantea y resuelve problemas con fracciones acorde al grado de instrucción que maneja en el aula.

En cuanto a la entrevista en profundidad y de corte didáctico (Valdemoros, 1998), se inicia con la construcción de una unidad didáctica y luego la solución de dos problemas y luego el planteamiento y resolución de dos problemas que le han implicado mayor dificultad. Lamadrid, P., Valdemoros, M. (2011).

La pertinencia de la investigación radica no solo en el hecho de identificar el papel del docente en el manejo y enseñanza de las fracciones, sino también en el referente teórico que emplea la investigadora la cual se apoya en los constructos teóricos desarrollados por Kieren (1983) En cuanto a los resultados obtenidos en la investigación se observa que el docente que participó en el estudio, no presenta una adecuada conceptualización en cuanto a la relación parte-parte, ya que no comprende que una parte es en sí misma divisible, también se evidencia que el docente tiene mejor manejo con relación al modelo discreto, ya que emplea de mejor forma los números naturales y el conteo en la resolución.

De acuerdo con los antecedentes revisados se pudo concluir que:

Los planteamientos de Brousseau(1985) y Bachelard (19) obedecen a obstáculos epistemológicos aplicados a la adquisición del conocimiento científico que en algunos casos no es acorde con lo que se observa desde la epistemología de la matemática; motivo que llevó a que no fueran planteados para la presente investigación.

También se pudo reconocer que existen clasificaciones de errores y dificultades a partir de lo propuesto por Socas (1997), Radatz (1979) y Rico (1995), que pueden clasificarse atendiendo a la presencia de esquemas cognitivos inadecuados, a dificultades para reconocer los conceptos matemáticos que le subyacen a determinadas situaciones problema.

El análisis de los errores cometidos por los alumnos en su proceso de aprendizaje dan cuenta de información acerca de cómo se construye el conocimiento matemático; por otro lado, constituye una excelente herramienta para relevar el estado de conocimiento de los alumnos, imprescindible a la hora de realimentar el proceso de enseñanza y aprendizaje con el fin de mejorar los resultados.

Se pudo reconocer además que si bien la mayoría de los estudios realizados, lograron identificar los errores que presentaban los estudiantes, en algunos casos permitían hacer una lista de posibles errores pero que no daban cuenta de las dificultades presentadas, aspecto que se pretendió explorar en el presente estudio.

5. MARCO TEÓRICO

El presente estudio se ubica en el conjunto de investigaciones que estudian los procesos de aprendizaje de resolución de problemas en las matemáticas. situación estudiada en profundidad para diferentes conceptos matemáticos, pero no relacionada con los números racionales y los obstáculos que se presentan en los estudiantes en el proceso de adecuar estos conocimientos a situaciones que involucren el desarrollo de actividades o estrategias nuevas, que permitan dar solución a situaciones problemicas.

Por lo anterior se ha considerado como categorías asociadas a la pregunta de investigación y sus posibles relaciones, las siguientes:

1. Números racionales y operaciones
2. Resolución de problemas en matemáticas
3. Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.
4. Dificultades y errores en la resolución de problemas con números racionales

5.1 Números racionales y operaciones

Existen varios conjuntos numéricos, algunos son subconjuntos de los otros, entre los principales tenemos a los complejos, imaginarios, reales, irracionales, enteros, naturales y racionales, estos últimos, los vamos a ver a continuación con mayor detalle, empezando con la definición y luego una muy breve historia.

El número racional se define como una pareja de números enteros llamados numerador y denominador, en donde en la relación a/b, b sea diferente de 0. Se escribirá así: a/b donde m es el numerador y n el denominador.

Según Kieren (1988), "los números racionales" son los números expresables como razón o cociente de dos números enteros y por consiguiente, entre ellos contamos con todas las fracciones, porcentajes y demás decimales representables mediante fracciones, esto es, los decimales finitos y los periódicos. (Tamayo et al., 2011).

Otro autor que también propone el concepto de Fracción es Freudenthal (1983), asumiendo que el término "fracción" parece pasado de moda, los números racionales son objetos matemáticos desde un punto de vista más actual, para él existe cierta diferencia entre "fracción" y "número racional", las *fracciones* son el recurso fenomenológico del número racional, mientras que "fracción" está relacionada con romper o fractura, el "número racional" está relacionado con "razón", mas no en el sentido de la razón sino en el de proporción, de medida.

Continuando con Freudenthal (1983), reconoce una categoría importante en el estudio de las fracciones y corresponde a la noción "parte-todo", ya que afirma que es limitada no sólo fenomenológicamente sino también matemáticamente, ya que bajo este enfoque solo podrían reconocerse como fracciones, las que son fracciones propias (el numerador es menor que el denominador). La enseñanza tradicional de la aritmética se limita a este enfoque, mayoritariamente incluso en el sentido restringido de la división del pastel y adicionalmente, pasa por alto que la concreción de las fracciones no se agota con romper un todo en partes.

Es interesante anotar que a los racionales positivos se les llama fraccionarios, además, es bueno distinguir el número fraccionario de la fracción, que es un numeral fraccional para un cierto número fraccionario, Vasco (1994), este mismo autor propone el "Archipiélago Fraccionario", La comparación es realizada tomando el conjunto de los racionales como un archipiélago que como su nombre lo indica no tiene una sola isla, sino varias. Según Vasco (1994), el Archipiélago Fraccionario, se define como:

> La isla principal del Archipiélago Fraccionario era una isla en donde vivían unos monstruos muy peligrosos que se llaman "monstruos achicadores" y otros que se llaman "monstruos agrandadores". Además allá vivía un monstruo que no le hacía nada a nadie, que se llama "el monstruo mansito". Así, cuando visitemos esa isla, debemos considerar a los fraccionarios como operadores o transformadores ampliadores o reductores, pero me gusta más llamarlos "monstruos agrandadores y achicadores". El monstruo mansito sería como un operador que no opera, o un transformador que no transforma, a veces llamado por los matemáticos "operador idéntico", pero sin decirnos idéntico a quién.
>
> (pp. 46)

En cuanto a la historia, comenzaremos mencionando que Diofanto en el siglo III, d. C., fue el primero de los matemáticos griegos que trató las fracciones como números.

> El concepto de fracción desde su origen histórico respondió a la necesidad de repartir objetos entre varias personas: el problema de distribuir 1, 2, 6 ó 7 hogazas de pan entre 10 personas, es una de las situaciones aparentemente resueltas en el Papiro de Rhind (también conocido como papiro de Ahmes, quien lo copió en 1650 a. C), como una de las referencias históricas más antiguas de la aparición de este concepto. (Méndez, 2003, citado en Tamayo et al., 2011).

Por otro lado, los babilónicos utilizaban fracciones cuyo denominador era una potencia de 60, mientras que los egipcios usaron, sobre todo, las fracciones con numerador igual a 1. En la escritura, la fracción la expresaban con un óvalo, que significaba parte o partido, y debajo, o al lado, ponían el denominador; el numerador no se ponía por ser siempre 1. Los griegos y romanos usaron también las fracciones unitarias, cuya utilización persistió hasta la época medieval. Según Tamayo et al. (2011), “para los antiguos egipcios, el problema de expresar las partes de un todo fue el motor de la invención de los fraccionarios, como la necesidad de medir cantidades continuas porque los números naturales resultaban insuficientes.” (p. 210).

En el siglo XIII, Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci, famoso entre otros trabajos por la serie de Fibonacci, introdujo en Europa la barra horizontal (vínculo) para separar numerador y denominador en las fracciones.

A principios del siglo XV, el árabe Al Kashi fue el que generalizó el uso de los números decimales tal y como los conocemos hoy. De acuerdo con Tamayo et al. (2011), “las matemáticas árabes tienen un auge importante en el manejo de los números racionales e introducen una notación más actual.” (p. 210).

A finales del siglo XVI, Simon Stevin desarrolló y divulgó las fracciones decimales que se expresaban por medio de números decimales: décimas, centésimas, milésimas, etc., pero los expresaba de una forma complicada; así para 123,456 escribía 123(0) 4(1) 5(2) 6(3). Según Freudenthal (1994), “en las propuestas de Stevin, las fracciones decimales se conectaron estrechamente a un sistema decimal de medida.” (p. 49).

A principios del siglo XVII, los números decimales ya aparecieron tal y como los escribimos hoy, separando con un punto o una coma la parte entera de la parte decimal. Los números decimales se impusieron, en casi todos los países, al adoptarse el Sistema Métrico Decimal, en el siglo XVIII, más concretamente en 1792.

> La formalización del número racional llegará en el siglo XIX, como lo que el álgebra llama cuerpo de fracciones de los números enteros. Los números racionales se expresan de dos formas diferentes, como fracción y con notación decimal. La escritura fraccionaria tiene, para Aleksandrov (1973) su origen en las relaciones entre la aritmética y la geometría. El uso particular de fracciones decimales y su utilización para la medida de magnitudes como el tiempo, da lugar a la notación decimal. (Centeno, 1988, citado en Tamayo et al., 2011).

Con relación a las operaciones, Freudenthal (1994), nos dice que "en la didáctica tradicional de las fracciones, la multiplicación está vinculada al patrón rectangular antes que al operador fracción." (p. 48), por otro lado, más atrás menciona que le parece molesto que "tres veces" sea una operación natural, igual como lo es "1/3 de", lo cual da a entender que para la multiplicación de fracciones se puede reemplazar "m/n de" por "m/n veces." (p. 42).

Thomas Kieren desde los años setenta ha venido investigando acerca de los diferentes significados que le son asociados a la fracción, en 1976 realizó una publicación, en la que advierte de al menos siete interpretaciones de los números racionales. Esta polisemia es la razón principal de las dificultades de aprendizaje, tanto relacionadas con el concepto como con las operaciones. (Fandiño, 2009)

Kieren[1] (1976, p. 133), en un análisis de los números racionales, sugiere siete interpretaciones para los fraccionarios y los números racionales:

- Fracciones
- Decimales
- Pares ordenados (clases equivalentes)
- Medidas

[1] El texto citado de Kieren se encuentra en inglés, la traducción es realizada por el investigador.

- Cocientes
- Operadores
- Razones

Sin embargo, más adelante Kieren (1983, p. 137) menciona cinco sub-constructos, a saber:

- Parte todo
- Razón
- Cociente
- Medida
- Operador

De acuerdo con Kieren (1976), los sub-constructos "parte-todo y razón" están estrechamente relacionados, éstos han formado las bases tradicionales y modernas para el desarrollo del significado de fracción. En el sub-constructo "parte-todo", algo entero es roto en partes iguales. Las ideas de fracción son utilizadas para cuantificar las relaciones entre la totalidad y un número designado de partes. El sub-constructo "cociente" está cercanamente emparentado a las relaciones parte-todo. En aquél se tiene en cuenta la cuantificación del resultado de dividir una cantidad en un número dado de partes y está relacionado últimamente al álgebra de las ecuaciones lineales. El sub-constructo "medida" al igual que el sub-constructo "cociente" está también emparentado a las relaciones parte-todo. Sin embargo, las tareas de medida significa la asignación de un número a una región. Esto es hecho usualmente a través de la iteración del proceso de contar el número de unidades completas utilizadas para cubrir la región. El sub-constructo "operador" describe a los números racionales como mecanismos, en el cual se asigna un conjunto (o región) multiplicativamente en otro conjunto. Este sub-constructo enfoca la atención de los racionales como elementos en el álgebra de funciones. Para una mayor claridad y comprensión en cuanto a los constructos de Kieren, citaremos a Obando (s. f.), él hace mención a la fracción como relación parte-todo de la siguiente manera:

> La fracción, como relación Parte-Todo, puede ser definida como una "nueva cantidad" que expresa la relación cuantitativa entre una cierta cantidad de magnitud tomada como unidad (todo) y otra cantidad de magnitud tomada como parte. Las magnitudes involucradas pueden ser continuas o discretas, y por consiguiente, las unidades (el todo) simples o compuestas respectivamente. (p. 61).

Además, Obando menciona a los números racionales como medida, de la siguiente forma:

> Se entiende por fracción decimal a aquellas fracciones en las cuales el denominador es una potencia de 10. Éstas pueden ser notadas de dos formas: en la notación de fracciones (fracciones de la forma $1/10^n$, con $n = 1, 2, 3, \ldots$) o en la notación decimal (es decir, en la notación de los puntos o las comas: $a.b_1b_2b_3b_4\ldots$, con $b_i = 0, 1, 2, \ldots, 9$).

Otro subconstructo, es el cociente indicado, que permite interpretar la fracción a/b como el cociente entre dos cantidades *a* y *b*. Esta es quizás la interpretación más común para las fracciones. El nombre de cociente indicado expresa que la división no se realiza a través del algoritmo convencional, sino que la fracción es el cociente.

Teniendo en cuenta el modelo propuesto por Kieren (1983), la propuesta del archipiélago fraccionario planteado por Vasco (1994), Obando recoge algunos aspectos relacionados con las implicaciones didácticas, tales como:

- El concepto de unidad es vital para la comprensión de los racionales, cuando el estudiante pierden el segmento unidad o la distancia unidad, no puede relacionar de manera correcta los otros aspectos como la parte, en la noción parte todo o los puntos en los que ha de dividir la recta, como es el caso de la recta numérica.

- Se hace necesario estudiar los racionales desde sus diferentes representaciones, de tal manera que el estudiante pueda encontrar diferentes maneras de identificar el concepto.

  Se puede pensar en abordar la enseñanza desde dos ejes fundamentales sobre los cuales organizar la enseñanza de los números racionales: desde la relación Parte – Todo y desde el operador fraccionario. El primero favorece las situaciones aditivas, mientras que el segundo las situaciones multiplicativas. Sobre ambos ejes se pueden sustentar trabajos en la demás interpretaciones, incluida la familia de las razones, para así rescatar las posibilidades que cada una de ellas ofrece en cuanto a la conceptualización de las fracciones y, en última instancia, de los números racionales.

5.2 Resolución de problemas en matemáticas

Martínez (2010) plantea que una de las actividades fundamentales en Matemáticas es la resolución de problemas. A lo largo de la historia, la aparición de problemas ha provocado que la matemática evoluciona debido a la necesidad de responder a diversas situaciones y fenómenos que se iban presentando, por tanto la resolución de problemas un verdadero motor en el desarrollo de las matemáticas

El dar un papel fundamental a la resolución de problemas tiene importantes implicaciones didácticas, ya que para ser consecuente con esta importancia y con la manera como se desarrolla el pensamiento matemático, debe tenerse en cuenta, que determinados conocimientos matemáticos permiten representar nuestra realidad y resolver problemas de otras ciencias o disciplinas en general. Por lo cual se hace "necesario relacionar los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana de los alumnos, así como presentarlos y enseñarlos en un contexto de situaciones problemáticas y de intercambio de puntos de vista" (MEN, 1994, p.18).

> "Tradicionalmente los alumnos aprenden matemáticas formales y abstractas, descontextualizadas, y luego aplican sus conocimientos a la resolución de problemas presentados en un contexto. Con frecuencia estos problemas de aplicación se dejan para el final de una unidad o para el final del programa, razón por la cual se suelen omitir por falta de tiempo" (MEN, 1994, p.22).

A partir de los cambios generados en el sistema educativo colombiano podemos observar a través de la Ley General de Educación (ley 115) de 1994 en su artículo 78: regulación del currículo propone que: "El Ministerio de Educación Nacional diseñará los lineamientos generales de los procesos curriculares y en la educación formal establecerá los indicadores de logros para cada grado de los niveles educativos, tal como lo fija el artículo 148 de la presente ley" p. 24. En el cual se entrega a los docentes y a las comunidades educativas del país una serie de documentos titulada "Lineamientos Curriculares", en cumplimiento del artículo 78 de la Ley 115 de 1994.

En dichos lineamientos curriculares específicamente en Matemáticas, docentes e investigadores en el área han planteado la incorporación en los procesos de enseñanza y aprendizaje, la implementación de la resolución de problemas como tema fundamental de análisis, en el cual se observa que la resolución de problemas matemáticos, generan en los estudiantes dificultades, las cuales no están localizadas en la asimilación del contenido sino que sus limitaciones se centran principalmente en la imposibilidad de aplicar o transferir el conocimiento adquirido a la solución de problemas en otros contextos o situaciones donde se hace necesario utilizar el conocimiento adquirido en una situación nueva para el estudiante. Evidenciándose así que la resolución de problemas es un proceso que debe estar implícito en el diseño curricular a lo largo de todo el proceso educativo, es decir desde los primeros momentos del proceso enseñanza aprendizaje.

Corroborando lo anterior, se asume que la resolución de problemas es un eje fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como plantean Pifarré, Manoli, Sanuy y Jorba (2001) al afirmar que uno de los principales objetivos a conseguir en el área de las matemáticas es que los alumnos sean competentes en la resolución de problemas.

Cabe destacar que alrededor de la resolución de problemas se presenten algunas definiciones, Juidías y Rodríguez (2007) plantean:

El amplio consenso existente en torno a la importancia de la resolución de problemas en el aula matemática contrasta vivamente con la ausencia de acuerdo en relación con lo que ello significa. La resolución de problemas en general ha recibido distintas definiciones en función de la teoría psicológica que la ha abordado. Así, los teóricos de la Gestalt consideraron que el núcleo de la resolución de problemas consistía en la comprensión del problema como un todo. Su compromiso con la noción de insight les llevó a considerar la resolución de problemas como una actividad que requería la integración, de forma novedosa, de las respuestas anteriormente aprendidas. Para los teóricos del conductismo la clave residía en las conexiones entre las acciones ejecutadas por el sujeto que resuelve el problema y las condiciones bajo las cuales se manifiestan esas acciones. El análisis de la psicología del procesamiento de la información integra, en cierta medida, algunas de las aportaciones de los enfoques anteriores pero pone especial énfasis en el estudio del conocimiento necesario para que la resolución de problemas tenga lugar. En el ámbito de las matemáticas, este paradigma inspira definiciones como la de Cawley y Miller (1986), quienes definen la resolución de problemas matemáticos como la interpretación de la información y el análisis de los datos para alcanzar una respuesta aceptable o con objeto de sentar las bases para una o más alternativas posibles.

Por otra parte en la resolución de problemas, Schoenfeld citado en Juidías y Rodríguez (2007), plantea que una actividad es considerada como un verdadero problema cuando requiere que:

a) El estudiante se interese o se involucre en la obtención de la solución;
b) El estudiante no tenga medios matemáticos de fácil acceso para alcanzar la solución.

Es decir un problema va mas allá de la mera utilización estandarizada y rutinaria de ejercicios, algoritmos o formulas. Esta es una de las características que permiten distinguir un problema de un mero ejercicio de aplicación (Juidías y Rodríguez, 2007).

Contreras (2009) aborda diferentes definiciones alrededor de la definición de problema en los cuales se destacan:

Kantowski citado en Contreras(2009) define: "Un problema es una situación para la que el individuo que se enfrenta a ella no posee algoritmo que garantice una solución. El conocimiento relevante de esa persona tiene que ser aplicado en una nueva forma para resolver el problema." (p. 195).

Agre (1982) dice que "Lo que es un problema para una persona puede no serlo para otra, y lo que es un problema para una persona un día puede no serlo un próximo día." (p. 130). Y el mismo Agre plantea: "La resolución de problemas es el proceso de aplicación de los conocimientos previamente adquiridos a situaciones nuevas y no familiares" (p. 471).

Para Polya (1965), la resolución de un problema consiste en cuatro fases bien definidas:

1. Comprender el problema.
2. Concebir un plan.
3. Ejecutar el plan.
4. Examinar la solución obtenida.

Donde en las fases anteriores se enfocan en la búsqueda de un "resolutor ideal" Martínez (2010) y cada fase se acompaña de una serie de preguntas que direccionan la actividad hacia la búsqueda de soluciones al problema.

Continuando con el trabajo de Polya, Schoenfeld citado en Castro (2008) buscaba en un principio instruir a los estudiantes en heurísticos generales de resolución de problemas, en los cuales no ha tenido éxito. Razón por la cual rompe con la estructura planteada por Polya y se plantea la necesidad de enseñar heurísticos o estrategias especificas asociadas a tipos de problemas. De lo cual Schoenfeld (1985) citado en Siñerez (2002, p.6), define "las estrategias heurísticas como reglas para tener éxito en la resolución de problemas, sugerencias generales que ayudan a comprenderlos mejor o hacer progresos a su solución”.

Los trabajos de Schoenfeld, son por otro lado, la búsqueda constante de explicaciones para el comportamiento de los resolutores reales de problemas (Martínez, 2010). En Godino (2002, p.40) se encuentran los diferentes componentes que propone Schoenfeld (1985) para la resolución de problemas:

1) Recursos cognitivos: conjunto de hechos y procedimientos a disposición del resolutor.

2) Heurísticas: reglas para progresar en situaciones difíciles.

3) Control: aquello que permite un uso eficiente de los recursos disponibles.

4) Sistema de creencias: nuestra perspectiva con respecto a la naturaleza de la matemática y cómo trabajar en ella.

Para Godino (2002) La resolución de problemas no es sólo uno de los fines de la enseñanza de las matemáticas, sino el medio esencial para lograr el aprendizaje, los estudiantes deberán tener frecuentes oportunidades de plantear, explorar y resolver problemas que requieran un esfuerzo significativo, mediante la resolución de problemas matemáticos, los estudiantes deberán adquirir modos de pensamiento adecuados, hábitos de persistencia, curiosidad y confianza ante situaciones no familiares que les serán útiles fuera de la clase de matemáticas, incluso en la vida diaria y profesional es importante ser un buen resolutor de problemas.

La resolución de problemas es una parte integral de cualquier aprendizaje matemático, por lo que debe ser el aspecto central en la organización de los contenidos matemáticos.

En consecuencia, la resolución de problemas debe estar articulada dentro del proceso de estudio de los distintos bloques de contenido matemático. Los contextos de los problemas pueden referirse tanto a las experiencias familiares de los estudiantes así como aplicaciones a otras áreas. Desde este punto de vista, los problemas aparecen primero para la construcción de los objetos matemáticos y después para su aplicación a diferentes contextos.

Una instrucción basada en la resolución de problemas intenta crear un microcosmos del quehacer matemático en el salón de clases (Schoenfeld, citado por Santos – Trigo, 2009), que refleje los valores y principios de la disciplina. Términos como problemas no rutinarios y comunidades de aprendizaje que promuevan los valores del quehacer de la materia son relevantes en una instrucción basada en la resolución de problemas.

Teniendo en cuenta la importancia que se le otorga a la resolución de problemas, para la presente investigación que involucra además, la comprensión de los números racionales, se propone en palabras de Fandiño (2009) "matemáticas contextualizadas" que privilegien la resolución de problemas matemáticos, analizados desde los constructos teóricos de Kieren (1983), donde se abordan diferentes situaciones problema, las cuales se estructuran desde la realidad propia de los estudiantes. Lo que en términos de Valdemoros y Ruiz (2008), llaman "la reflexividad critica" donde esta coincide con lo que Gimeno y Pérez (2000) citado en Valdemoros y Ruiz (2008, p.5), "han caracterizado como una reconstrucción crítica de la realidad, mediante el abordaje de las situaciones propuestas a través de diversos tratamientos de enseñanza, en tanto facilita aprender para la vida, o sea, para enfrentar las circunstancias que ésta configura". De acuerdo con esto se hace necesario llevar al aula de clase situaciones que representen el entorno de los estudiantes y así acercarlo al conocimiento científico partiendo de su propia realidad.

5.3 Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas

Reuniendo el análisis de varias concepciones sobre el error, cabe en primera instancia introducir que los errores, mal estigmatizados como fallas, y en muy pocas ocasiones se les da la oportunidad de ser un paso para corregir o avanzar, Si los tomamos en el contexto educativo y bajo la mirada de la evaluación lo han llevado a considerar en la escuela como algo negativo, algo que el alumno aprende a ocultar para no ser castigado. Sin embargo, los errores son la diferencia entre cuanto puede avanzar y mejorar y así lograr mejores aprendizajes. En el origen de los errores hay que tener en cuenta factores físicos, contextuales y cognitivos para determinar las causas de su aparición, sin dejar a un lado al profesor que a través de su intención de verificar cuanto ha aprendido su estudiante puede omitir involuntariamente factores que influyen para que la evaluación sea exitosa.

Como señala Matz, citado por Ruano, R., Socas, M. y Palarea, M. (2008), “los errores son intentos razonables pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación”. Se entiende que el error tendrá distintas procedencias, pero siempre se considerará como un esquema cognitivo inadecuado y no sólo como consecuencia de falta de conocimiento o de un despiste.

Si, “el error se quedara como error no habría oportunidades de cambio pero, si no hubiera errores que superar, no habría posibilidad de aprender.” Astolfi (1999), El aprendizaje se vería influenciado por la cantidad de aciertos que se requieran para inferir que se ha aprendido. Realmente, el aprendizaje en el estudiante esta dado en representaciones previamente construidas a través de una actividad cognitiva “aprender” y poder entender que aprender partiendo del error posiblemente suene descabellado por que la reacción primaria es dejar de hacer lo que se está haciendo y volver a iniciar para no caer en el error, pero si esta acción se analizase desde el error indudablemente se partiría del error para superarlo y regular el aprendizaje, se llegaría a un constructor de aprehensión desde el error.

Sanmarti (2007), dice que aprender no es tanto incorporar conocimientos a una mente vacía, sino reconstruirlos a partir de otros ya conocidos, revisando concepciones iníciales y rehaciendo prácticas. El mismo Einstein decía que buena parte de su trabajo consistía en detectar errores en la resolución de los problemas y superarlos uno a uno, donde investigaciones realizadas en este tema infieren en que “los errores que cometen los alumnos se pueden organizar al menos en dos grandes categorías: aquellos que provienen de un aprendizaje incompleto o impreciso de algún concepto o procedimiento y aquellos que provienen de una comprensión equivocada de un aspecto nuclear del concepto o procedimiento”.

En la práctica cotidiana del aula, los docentes observan que en el trabajo realizado por los estudiantes bien sea por medio de talleres, evaluaciones escritas o trabajos en grupo, presentan errores a la hora de dar solución a situaciones problema, los cuales están siempre presentes en todos los desarrollos y procesos relacionados con el trabajo de formación en matemáticas, tanto en la enseñanza como en el aprendizaje en todos los niveles educativos, desde la primaria hasta la universidad o en situaciones de la cotidianidad donde se hace uso de las matemáticas al resolver una situación particular.

Asimismo si se considera el correcto aprendizaje de las matemáticas como uno de los objetivos centrales en el proceso de instrucción, la aparición de errores serán señales de deficiencias en el aprendizaje y podrían conducir al fracaso en la consecución de los objetivos propuestos en la enseñanza; lo cual coincide con lo planteado Socas (2007), al afirmar que " Si bien el error puede tener procedencias diferentes, generalmente tiende a ser considerado como la presencia de un esquema cognitivo inadecuado en el alumno y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimientos".

Además Abrate, Pochulu y Vargas, (2006, p.27) plantean como en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se hayan gran cantidad de dificultades que generan errores; donde dichos errores son la manifestación de la existencia de dificultades (Franchi & Hernández, 2004) por lo tanto se hace necesario reflexionar acerca de ellos, ya que a partir de estos se debe tener en cuenta que en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se hallan gran variedad de dificultades las cuales destacan Di Blasi Regner y Otros (citado en Abrate, et al. 2006, p.27) y las agrupan en las siguientes:

1) Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos.

2) Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.

3) Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza.

4) Dificultades asociadas al desarrollo cognitivo de los alumnos.

5) Dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales.

De ese modo Abrate, Pochulu y Vargas, (2006, p.27) Detallan como se ha abordado el concepto del error y cómo a través de la teoría del procesamiento de la información se abrieron nuevos métodos y formas de abordar diferentes problemas; donde se comparte el supuesto en el cual "la mente humana poseía una estructura semejante a la de una computadora, la cual procesa la información a través de una serie de memorias"

Godino, Batanero & Font (2004). Reconocen el análisis de los errores tanto en el conductismo como en el procesamiento de la información estaba limitado a una función diagnostica y de corrección del error más no se analizaba su potencialidad; lo cual evidencia que el modelo de aprendizaje también es determinante; de hecho Godino, Batanero & Font (2004, p.74) plantean como "En un aprendizaje conductista, el error tiene que ser corregido, mientras que es constitutivo del conocimiento en un aprendizaje de tipo constructivista. Lo cual muestra como a partir del error desde una visión constructivista se hace necesario la visibilización del error lo cual permite su identificación y posterior análisis, ya que dicho error estimula la generación de nuevo conocimiento lo cual coincide con lo planteado por Abrate, Pochulu, & Vargas (2006, p.29) "se estimula su ocurrencia puesto que brindaba posibilidad para el sujeto constructor de conocimiento".

Resumiendo hasta ahora las ideas anteriormente expuestas, las investigaciones en torno a los errores se centran en dos objetivos fundamentales, la supresión del error o la potencialización del mismo en torno a la generación de nuevo conocimiento.

Con relación a la forma de abordar el error se presenta un común acuerdo entre los constructivistas en torno a los errores en matemáticas. En cuanto al tratamiento de los errores en matemáticas desde una postura constructivista en la cual se ha orientado la investigación. Rico (1995, p.5) plantea que hay un común acuerdo entre los constructivistas en los siguientes puntos:

1. Todo conocimiento es construido. El conocimiento matemático es construido, al menos en parte, a través de un proceso de abstracción reflexiva.
2. Existen estructuras cognitivas que se activan en los procesos de construcción.
3. Las estructuras cognitivas están en desarrollo continuo. La actividad con propósito induce a la transformación de las estructuras existentes.
4. Reconocer el constructivismo como una posición cognitiva conduce a adoptar el constructivismo metodológico.
5. Por lo tanto en el proceso de construcción de conocimientos matemáticos aparecerán de forma sistemática errores; los cuales deben ser detectados, corregidos y superarlos mediante actividades que promuevan la crítica sobre las propias producciones.

Por otro lado Rico (1995, p.6) plantea una serie de consecuencias que están asociadas a los procesos de enseñanza y aprendizaje en matemáticas relacionadas con los errores:

a) Los errores pueden contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje.
b) Los errores no aparecen por azar. Sino que surgen sobre un marco conceptual consistente en conocimientos adquiridos previamente.
c) Se hace necesario argumentar la necesidad de que cualquier teoría de instrucción modifique la tendencia a condenar los errores culpabilizando a los estudiantes de

los mismos, reemplazándola por la previsión de errores y su consideración en el proceso de aprendizaje.

d) Todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores.

En cuanto a los errores, entendiéndose como la manifestación tangible de la existencia de dificultades, aunque estas no se puedan visualizar o determinar su procedencia en forma inmediata Brousseau, David y Werner citados en Rico (1995, p.10) señalan cuatro formas en las cuales el error puede evidenciarse:

a) Los errores son a menudo el resultado de grandes concepciones inadecuadas acerca de aspectos fundamentales de las matemáticas.
b) Frecuentemente los errores se presentan como resultado de la aplicación correcta y crédula de un procedimiento imperfecto sistematizado, que se puede identificar con facilidad por el profesor.
c) También los errores pueden presentarse cuando el alumno utiliza procedimientos imperfectos y posee concepciones inadecuadas que no son reconocidas por el profesor.
d) Los alumnos con frecuencia inventan sus propios métodos, no formales pero altamente originales, para la realización de las tareas que se les proponen y la resolución de problemas.

De hecho Rico (1995), plantea como la mayor parte de especialistas e investigadores tienen puntos en común con relación a considerar que los errores tienen características generales evidenciadas en los alumnos:

a) Los errores son sorprendentes. Con frecuencia los errores cometidos por los alumnos urgen de manera sorprendente, ya que por lo general se han mantenido ocultos para el profesor durante algún tiempo.
b) Los errores son a menudo extremadamente persistentes. Debido a que pueden reflejar el conocimiento de los alumnos sobre un concepto o un uso particular.
c) Los errores pueden ser o bien sistemáticos o por azar, los primeros más frecuentes que los segundos.
d) Los errores ignoran el significado; de este modo, respuestas que son obviamente incorrectas, no se ponen en cuestión.

Por otro lado Rico (1995), manifiesta que existe gran variedad de categorizaciones de los errores, y que aun no existe un desarrollo teórico que vaya más allá de lo descriptivo que permita evidenciar la existencias de estos y poderlos predecir, por otro lado hace la aclaración de que la parte descriptiva de los errores aporta hechos, datos, regularidades e irregularidades en el abordaje de las matemáticas y dan pie para el desarrollo de nuevas investigaciones en el campo.

Rico (1995, p.13) retoma la caracterización hecha por Radatz (1979) en las cuales se establecen cinco categorías generales de análisis en torno a los errores presentados por los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos, los cuales han orientado la investigación.

1. Errores debidos a dificultades de lenguaje. Señala que el aprendizaje de los conceptos, símbolos y vocabulario matemáticos es para muchos alumnos un problema

similar al aprendizaje de una lengua extranjera. Una falta de comprensión semántica de los textos matemáticos es fuente de errores; por ello, la resolución de problemas verbales está especialmente abierta a errores de traducción desde un esquema semántico en el lenguaje natural a un esquema más formal en el lenguaje matemático.

2. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial. Aunque se trata de un campo de estudio cuyo desarrollo se está iniciando, es cierto que las diferencias individuales en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales es una fuente de dificultades para muchos jóvenes y niños en la realización de tareas matemáticas. Algunas representaciones icónicas de situaciones matemáticas pueden suponer dificultades en el procesamiento de la información; el análisis y síntesis perceptivos implican una demanda considerable para algunos alumnos, presentando dificultades y produciendo errores.

3. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. En este tipo de errores se incluyen todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Estas deficiencias incluyen la ignorancia de los algoritmos, conocimiento inadecuado de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios.

4. Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento. La experiencia sobre problemas similares anteriores puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información. En estos casos los alumnos desarrollan operaciones cognitivas, que continúan empleando aún cuando las condiciones fundamentales de la tarea matemática en cuestión se hayan modificado. Persisten en la mente algunos aspectos del contenido

o del proceso de solución, inhibiendo el procesamiento de nueva información. Dentro de esta clase de errores se encuentran los siguientes:

- Errores por perseveración, en los que predominan elementos singulares de una tarea o problema.
- Errores de asociación, que incluyen interacciones incorrectas entre elementos singulares.
- Errores de interferencia, en los que operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros.
- Errores de asimilación, en los que una audición incorrecta produce faltas en la lectura o escritura.
- Errores de transferencia negativa a partir de tareas previas, en las que se puede identificar el efecto de una impresión errónea obtenida de un conjunto de ejercicios o problemas verbales.

6. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Este tipo de errores surgen con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes.

5.4. Dificultades y errores en la resolución de problemas con números racionales.

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se han evidenciado la aparición de errores que son la manifestación de la existencia de dificultades, las cuales han sido estudiadas y explicadas en diversas investigaciones, de hecho Godino, Batanero & Font (2004) plantean como dificultades y errores en las matemáticas las siguientes:

1. Dificultades relacionadas con los contenidos matemáticos.

La abstracción y generalización de las matemáticas es una posible causa de las dificultades de aprendizaje. El análisis del contenido matemático permite prever su grado de dificultad potencial e identificar las variables a tener en cuenta para facilitar su enseñanza. A veces el error no se produce por una falta de conocimiento, sino porque el alumno usa un conocimiento que es válido en algunas circunstancias, pero no en otras en las cuales se aplica indebidamente. Con frecuencia el origen de los errores no es sencillo de identificar, aunque a veces se encuentran ciertos errores recurrentes, para los cuales la investigación didáctica aporta explicaciones y posibles maneras de afrontarlos.

Parece razonable pensar que si un tipo de error se manifiesta en un cierto número de alumnos de manera persistente en una tarea, su origen se debe buscar en los conocimientos requeridos por la tarea, y no tanto en los propios alumnos.

2. Dificultades causadas por la secuencia de actividades propuestas.

Se puede dar el caso de que la propuesta de actividades que presenta el profesor a los alumnos no sea potencialmente significativa, por causas diferentes:

a) Cuando el profesor no estructura bien los contenidos que quiere enseñar.

b) Cuando los materiales que ha escogido, como por ejemplo los libros de texto, no son claros, ejercicios y problemas confusos, rutinarios y repetitivos errores de edición.

c) Cuando la presentación del tema que hace el profesor no es clara ni está bien organizada, no se le entiende cuando habla, habla demasiado rápido, la utilización de la pizarra es caótica, no pone suficiente énfasis en los conceptos clave del tema.

El profesor debe analizar las características de las situaciones didácticas sobre las cuales puede actuar, y su elección afecta al tipo de estrategias que pueden implementar los estudiantes, conocimientos requeridos, estas características suelen denominarse variables didácticas y pueden ser relativas al enunciado de los problemas o tareas o también a la organización de la situación (trabajo individual, en grupo, entre otros).

3. Dificultades que se originan en la organización del centro.

En ocasiones el horario del curso es inapropiado, el número de alumnos es demasiado grande, no se dispone de materiales o recursos didácticos, etc.

4. Dificultades relacionadas con la motivación del alumnado.

Puede ocurrir que las actividades propuestas por el profesorado a los alumnos sean potencialmente significativas y que la metodología sea la adecuada, pero que el alumnado no esté en condiciones de hacerlas suyas porque no esté motivado. Este tipo de dificultades está relacionado con la autoestima y la historia escolar del alumno.

5. Dificultades relacionadas con el desarrollo psicológico de los alumnos.

Una fuente de dificultades de aprendizaje de los alumnos de primaria hay que buscarla en el hecho de que algunos alumnos aún no han superado la etapa preoperatoria (teoría de Piaget) y realizan operaciones concretas, o bien que aquellos que aún están en la etapa de las operaciones concretas realicen operaciones formales.

6. Dificultades relacionadas con la falta de dominio de los contenidos anteriores.

Puede ocurrir que el alumno, a pesar de tener un nivel evolutivo adecuado, no tenga los conocimientos previos necesarios para poder aprender el nuevo contenido, y, por tanto, la "distancia" entre el nuevo contenido y lo que sabe el alumno no es la adecuada. La evaluación inicial puede detectar los contenidos previos que hay que adquirir para conseguir el aprendizaje del contenido previsto, caso similar ocurre cuando se utilizan las diferentes operaciones con números naturales y después se pasa a trabajar con los números racionales y sus diferentes operaciones, presentándose allí serias dificultades, antes mencionadas, manifestadas en forma de errores o a las propias del contenido matemático las cuales serán abordadas en detalle más adelante.

Una de las situaciones que mas genera dificultades, manifestadas en forma de errores, en los estudiantes, se produce al generalizar tratamientos hechos en los números naturales y aplicarlos en los números racionales, por ejemplo el caso de la suma donde el estudiante sigue manejando la linealidad propia de los números naturales buscando aplicarla en los números racionales, entre otras dificultades; el análisis de estas situaciones son una de las preocupaciones más constantes entre los profesores de matemáticas en la educación colombiana y del mundo (Abrate, Pochulu, & Vargas, 2006).

Además el manejo del concepto de número racional y sus diferentes constructos teóricos aplicados a realidades particulares evidencian errores que obedecen a ciertas dificultades, los cuales deben ser reconocidos por parte de estudiantes y docentes para ser superados para favorecer la construcción de nuevos conocimientos matemáticos.

Ruano, Socas & Palarea, (2008) plantean que los errores aparecen en el trabajo de los alumnos, principalmente cuando se enfrentan a conocimientos novedosos que los obligan a hacer una revisión o reestructuración de lo que ya saben, es decir, que la asimilación del nuevo conocimiento se logra cuando tiene sentido para el estudiante, cuando esto no es posible, se le crea un conflicto al alumno porque le provoca una reestructuración nueva del conocimiento total, produciéndose posteriormente una acomodación de la estructura anterior, que le permite recobrar el equilibrio perdido, es decir que dicho conocimiento no reemplaza al anterior, parte de este para generar cambios en la forma de aprender y de resolver situaciones diferentes . Según la teoría piagetiana, los procesos psicológicos están muy bien organizados en sistemas coherentes y estos sistemas están preparados para adaptarse a los estímulos cambiantes del entorno, donde la persona construye esquemas (teorías) que pueden ser transferidas y generalizadas.

Algunas teorías sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas coinciden en la necesidad de identificar los errores de los alumnos en el proceso de aprendizaje, así como determinar sus causas y organizar la enseñanza teniendo en cuenta esa información. El profesor debe ser sensible a las ideas previas de los alumnos donde se prepare al estudiante a través de la búsqueda de saberes previos cuales podrían propiciar u obstaculizar el aprendizaje, luego activar los conocimientos previos al presentar los contenidos y, finalmente, estimular la integración y la transferencia en virtud de la nueva información adquirida, además Castellanos & Obando (2009) consideran que los estudiantes que no presenta errores visibles, ocultan posiblemente serios errores operacionales, estructurales y procesuales en las matemáticas, que dificultaran los aprendizajes posteriores, el error puede tener procedencias diferentes, considerado como la presencia de un esquema cognitivo inadecuado en el alumno y no solamente como consecuencia de una falta de conocimiento.

Fundamentado en lo anterior, la investigación se realizó orientada a la identificación de los errores y dificultades que se presentan en la resolución de problemas específicamente en el caso de los números racionales, donde se plantean situaciones problema en términos de Fandiño (2009) “matemáticas contextualizadas” para ser resueltos y analizados desde los constructos teóricos de Kieren (1988), donde se abordan diferentes situaciones problema, las cuales se estructuran desde la realidad propia de los estudiantes lo que en términos de Valdemoros y Ruiz (2008), llaman la reflexividad critica, que coincide con lo que Gimeno y Pérez citado en Valdemoros y Ruiz (2008,p.5), han definido como una reconstrucción crítica de la realidad, mediante el abordaje de las situaciones propuestas a través de diversos tratamientos de enseñanza, en tanto facilita aprender para la vida, o sea, para enfrentar las circunstancias que ésta configura.

De acuerdo con esto, se hace necesario llevar al aula de clase situaciones que representen el entorno de los estudiantes y así acercarlo al conocimiento matemático partiendo de su propia realidad.

Los problemas planteados en esta investigación retoman los cinco constructos desarrollados por Kieren (1983) para el tratamiento de los números racionales entre los cuales se destacan a) relación parte todo, b) medida, c) cociente, d) operador multiplicativo y d) razón.

Fandiño (2009) también propone una categorización exhaustiva de las dificultades en la resolución de problemas entre las cuales se destacan.

1. Dificultades en el ordenamiento.
2. Dificultades en la realización de operaciones.
3. Dificultades en el reconocimiento de esquemas.
4. Dificultades en la gestión del adjetivo igual.
5. Dificultades en la gestión de la equivalencia.
6. Dificultades en la gestión de la “fracción irreducible”, la reducción a los mínimos términos.

7. Dificultades en la gestión de figuras no estándar.
8. Dificultades al pasar de una fracción a la unidad que la género.
9. Dificultades en la gestión autónoma o espontanea de esquemas, figuras o modelos.

6. Diseño Metodológico

Este estudio obedece a un enfoque cualitativo con un alcance interpretativo que pretendió en primera instancia identificar los errores que se evidencian en la realización de talleres de resolución de problemas cuando se enfrentan con los números racionales.

Es importante considerar que la investigación en Educación Matemática ha tenido grandes movilizaciones debido en parte a que los objetos de estudio también se han modificado, Kilpatrick (1988) ya apuntó que se está produciendo un desplazamiento en el contenido y cambios en el estilo de investigación.

Al respecto Kilpatrick, afirma que vienen emergiendo temas como:

- Las diferencias en el aprendizaje por género, clase social o inmigración, estudio de las ideas y creencias de los profesores, afectividad y matemáticas y el estudio de las matemáticas utilizadas fuera del contexto escolar, así como el incremento de la investigación en procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en el nivel universitario.

- Incremento en importancia de temas que si bien estaban presentes en trabajos anteriores tales como análisis de errores, análisis de la instrucción, problemas relacionados con el uso de herramientas informáticas, la transición de la aritmética al álgebra, aprendizaje y primera enseñanza del análisis.

- Siguen estando vigentes estudios acerca de la resolución de problemas y razonamiento espacial.

Al respecto se reafirma desde la investigación en didáctica de la matemática y para este estudio, que el análisis de los errores puede llegar a generar transformaciones en el aula.

A partir de diferentes estudios en donde se indagó por los errores que presentan los estudiantes en matemáticas, se definieron las categorías con las cuales se clasificarían los errores que emergieran a partir de los talleres realizados.

En cuanto al procedimiento, retomando la crítica que se hace a las investigaciones en educación matemática que siguen manteniéndose los enfoques tradicionales, se requiere de miradas más comprensivas. Los procedimientos "duros" de recogida de datos y contrastación de hipótesis (observación sistemática y experimentación) si bien son rigurosos, en algunos casos y de acuerdo con el objeto de estudio reducen desde la mirada cuantitativa el alcance y la comprensión que puedan tener, aspecto que se tuvo en cuenta en el presente estudio.

Los métodos experimentales y cuantitativos no capturan la complejidad del hecho educativo, el sentimiento de que reducen el objeto de estudio o de que sus resultados carecen de interés, y en ocasiones la impotencia y la falta de imaginación, son motivos que llevan a muchos investigadores a abandonar las técnicas tradicionales de recogida de datos y contrastación y a elaborar y utilizar otras nuevas más "ajustadas al objeto de estudio", como suelen argumentar como principio común.

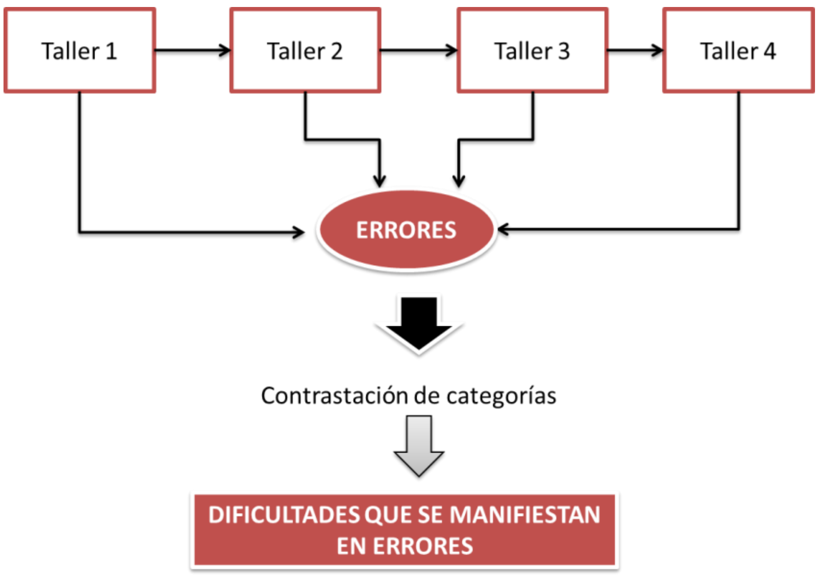
Derivado de la naturaleza del objeto de estudio de la presente investigación, se asume un paradigma cualitativo, dada la complejidad del aula y los diversos factores que allí convergen.

En tal sentido, en primera instancia se buscó identificar los errores que se evidencian en los estudiantes durante la resolución de problemas con números racionales, empleando como contexto el ambiente natural del aula, en donde los estudiantes a partir de la comprensión de las temáticas abordadas en clase, proceden a resolver situaciones en donde se puedan recoger datos para el presente estudio, basados en los constructos de Kieren (1983).

El trabajo de campo de realizó en varios momentos de tal manera que se pudiera evidenciar la frecuencia en la aparición de los errores, ya que la recurrencia determinaría la existencia de un error y no un hecho ocurrido al azar.

Posterior a la identificación y clasificación de los errores, se procedió a identificar las posibles dificultades asociadas a ellos. En este momento del análisis se hace la triangulación entre los datos que emergieron del análisis, los autores y las posturas como investigadores.

En el siguiente esquema se presenta el procedimiento llevado a cabo en la investigación:



6.1 Procedimiento

Teniendo en cuenta que el objetivo general es Reconocer los errores y las dificultades que presentan los estudiantes cuando se enfrentan a resolver problemas con los números racionales, se parte inicialmente del reconocimiento de los errores, que solo pueden evidenciarse a partir de la manera como los estudiantes resuelven los problemas que se le plantearon en cuatro talleres, realizado en diferentes momentos.

Posteriormente se infiere a partir de los errores encontrados y de las argumentaciones que hacen los estudiantes, las posibles dificultades asociadas a la resolución de problemas con números racionales.

Para lograr los objetivos específicos se pretende lo siguiente:

Para el primer objetivo especifico: Identificar los errores que se presentan en los estudiantes al enfrentarse a la resolución de problemas con números racionales, se procedió a revisar las diversas clasificaciones que hacen Rico, Radatz, Godino & otros y Fandiño y a partir del análisis de cada una de ellas, se adoptó la propuesta por Radatz.
En tal sentido, se hace un análisis cuantitativo de los errores encontrados en los estudiantes, categorizándolos.

Se diseñaron cuatro talleres fundamentados en los constructos de Kieren (1983), en los cuales a partir de los errores que los estudiantes mostraban en el proceso de solución de dichas situaciones problema, permitían evidenciar en forma general los errores presentados por ellos, y a partir de éstos realizar una categorización propia de los errores presentados; de hecho es claro que en la búsqueda de antecedentes no se han encontrado caracterizaciones propias o especificas con relación a los errores que se presentan en el área de las matemáticas, caso particular los números racionales.

Para el segundo objetivo, reconocer en los errores encontrados, las posibles dificultades que presentan los estudiantes en la resolución de problemas con números racionales.
Se hace uso de los cuatro instrumentos utilizados en el primer momento, pero a partir del análisis cualitativo, se pretende ir contrastando las categorías entre cada instrumento que recoge los datos de cada uno de los talleres para finalmente determinar la concurrencia de ellas y la frecuencia de aparición y así poder determinar la existencia de dificultades y no hechos al azar.

Es de anotar que en el planteamiento de las situaciones problema desde contextos representativos para los estudiantes, se plantea también un espacio para la argumentación de lo que el estudiante hizo y como resolvió la situación problema planteada, ya que a partir de esa argumentación se logra evidenciar las dificultades que presentan los estudiantes en la resolución de problemas con números racionales; las cuales en la búsqueda de antecedentes, si se han hallado categorizaciones para las mismas. Donde el análisis de dichas dificultades se realizara teniendo en cuenta las categorizaciones realizadas por Fandiño (2009).

6.2 Técnicas de recolección de información

La recolección de la información se llevó a cabo de la siguiente forma:

El proceso de recolección de la información se planteó en cuatro momentos relacionados entre sí. Es de anotar que todos los talleres se estructuraron con cinco situaciones problema, desde los constructos teóricos del número racional planteados por Kieren (1983).

En un primer momento se aplicó un taller diagnostico a 50 estudiantes, el cual planteaba 5 situaciones problema, fundamentadas en los constructos teóricos del numero Racional elaboradas por Kieren (1980). En este taller pretendió evidenciar en los estudiantes los conceptos e ideas previas que tenían frente a la solución de problemas en contextos significativos para el estudiante. Dicha sesión duro 3 horas.

Un segundo momento se propuso después de analizar la información que arrojó el instrumento del primer taller, para ello se planeó una nueva serie de situaciones problema en contextos significativos para los estudiantes donde se hizo énfasis explorando el manejo y la forma en que resolvían dichas situaciones y en como lo hacían ya que este instrumento como todos los demás van acompañados de un espacio para la argumentación preguntándoles cómo resolvieron las situación planteada y el procedimiento empleado. En la aplicación de este instrumento participaron 35 estudiantes ya que algunos de los estudiantes que participaron en la primera fase no asistieron a clase o no mostraron interés por continuar con la investigación. La sesión duro 3 horas.

Un tercer momento se seleccionaron 10 estudiantes que mostraron gran compromiso con la investigación y según su registro académico asisten normalmente a clase. Se aplicó otro taller pensado en los resultados obtenidos en la aplicación del segundo, el cual tuvo una duración de tres horas; ya que a partir de estos se empezaba a evidenciar la recurrencia y manifestación de ciertos errores, que evidenciaban la existencia de algunas dificultades con relación a los números racionales. De hecho en la medida que se iba avanzando en las fases de la investigación las situaciones planteadas iban aumentando su grado de dificultad permitiéndose así evidenciar la recurrencia lo que en términos de Godino (2004), en algunas situaciones el error no se produce por falta de conocimiento, este radica en que algunas veces, el estudiante emplea un conocimiento que es válido en ciertas circunstancias, lo utiliza en otras en las cuales no es válido. En un cuarto momento se aplicó el instrumento a los 10 estudiantes seleccionados y se propusieron situaciones problema partiendo de los errores recurrentes, presentados en el tercer instrumento. En esta fase se empleo un tiempo de 3 horas y media; haciéndose mucho énfasis a los estudiantes que justificaran como resolvían las situaciones planteadas.

A partir de lo expresado por ellos y los tres instrumentos anteriores se podría verificar la recurrencia de los errores y poderlos categorizar desde la tipología propuesta por Radatz (1979) y poder tipificar algunos con relación a la aritmética empleada en los procesos de solución y a los números racionales en particular. Y además evidenciar las dificultades presentadas por ellos en la resolución de problemas con números racionales.

7. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Durante el proceso de la investigación se observaron y analizaron los errores que presentaron los estudiantes en el momento de realizar los diferentes talleres propuestos, en el tiempo en que se desarrollo la investigación se registraron 275 errores diferentes presentes en la resolución de problemas con números racionales. Teniendo en cuenta la familiaridad y similitud entre ciertos errores se agruparon en 15 tipos de errores diferentes, que atendían a dificultades, los cuales se muestran en el cuadro 1.

Cuadro 1. Clasificación de los errores observados durante la investigación. Desde la tipología propuesta por Radatz (1979).

Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.	1. Realiza operaciones y usa notaciones de la aritmética en forma defectuosa.
	2. Presenta un conocimiento inadecuado de conceptos matemáticos que no permiten la solución de diversas situaciones problema.
	3. Al obtener un resultado en diferentes operaciones no determina la pertinencia del mismo.
	4. Interpreta y usa inadecuadamente una definición matemática asociada al concepto de número racional.
	5. Utiliza un algoritmo adecuado en la solución de un problema aritmético, pero lo aplica en forma defectuosa.
	6. Usa un algoritmo inadecuado para resolver un problema aritmético.
	7. Utiliza en forma adecuada un algoritmo para la solución de un problema aritmético, pero no llega a su solución.
	8. Realiza operaciones en forma defectuosa al no realizar las respectivas conversiones de unidades.
Errores debidos a dificultades para obtener información espacial	9. Al plantearse una figura geométrica para su análisis, plantea la necesidad de que sea una figura estándar.
	10. Construye figuras estándar en forma inapropiada a partir de figuras no estándar.
Errores debidos a dificultades de lenguaje	11. Plantea una ecuación que no corresponde con el enunciado de un problema aritmético.
	12. Toma mal un dato de una figura geométrica en la solución de un problema.

	13. Da una respuesta diferente o plantea una respuesta adicional a la que se le pide en un problema aritmético.
	14. Plantea una solución a un problema aritmético que no corresponde con el enunciado del mismo.
Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento	15. Utiliza estrategias de resolución de problemas en un momento determinado y lo aplica a situaciones donde no es pertinente.

En cuanto a los Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes los cuales surgen con frecuencia por aplicar reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes en el proceso de la investigación no se tuvieron en cuenta.

Teniendo en cuenta las dificultades expuestas por Radatz y con las cuales se pudieron identificar los errores en los estudiantes, se identificaron las categorías iniciales con las cuales se realizó el análisis cualitativo.

El presente cuadro representa la cantidad de estudiantes que participaron durante el proceso de investigación.

INSTRUMENTO	GRADO	NUMERO DE ESTUDIANTES	EDAD	NIÑOS	NIÑAS
1	SEPTIMO	50	11-13 AÑOS	30	20
2	SEPTIMO	35	11-13 AÑOS	20	15
3	SEPTIMO	10	11-13 AÑOS	4	6
4	SEPTIMO	10	11-13 AÑOS	4	6

La presente investigación se realizó en la institución educativa Pedro Uribe Mejía del municipio de Santa rosa de cabal Risaralda, donde el investigador forma parte de la planta docente. Dicha institución se encuentra ubicada en la zona rural del municipio a 7km del casco urbano en la vereda el Jazmín vía al municipio de Chichina caldas. Es de anotar que la institución cuanta aproximadamente con 1300 estudiantes donde el 80% de la población estudiantil vive en las veredas aledañas a la institución.

Para desarrollar este tipo de errores se realizaron unas clasificaciones propias alrededor de los errores manifestados por los estudiantes en el desarrollo y puesta en práctica de los diferentes instrumentos.

7.1 Clasificación de los errores desde la tipología propuesta por Radatz (1979)

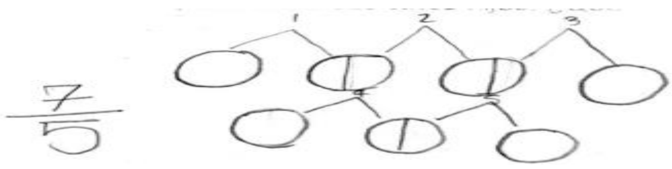
7.1.1Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

En este tipo de errores se incluyen todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Estas deficiencias incluyen la ignorancia de los algoritmos, conocimiento inadecuado de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios.

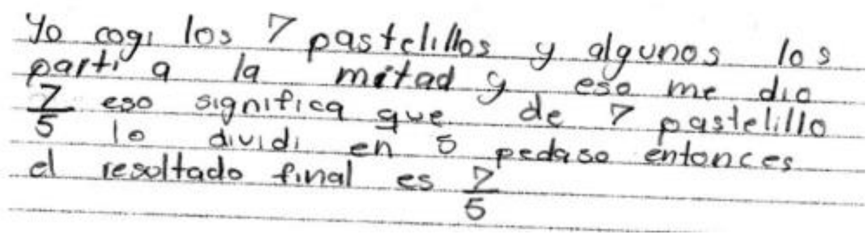
1.1 Presenta un conocimiento inadecuado de conceptos matemáticos que no permiten la solución de diversas situaciones problema.

Ante este tipo de errores se encontraron situaciones muy diversas ya que son altamente recurrentes en los estudiantes en cuanto al no agotamiento del todo, es decir en cuanto se les planteaba la situación problema es común la utilización de figuras por ellos conocidas como los círculos o rectángulos conocidas como figuras estándar, Fandiño (2009) en este caso, y se puede ver como no se agota la unidad y ello se verifica al solicitar que narre la situación.

Don Luis tiene 7 pastelitos, los cuales desea repartir entre sus cinco hijos. ¿Qué porción de pastelito le corresponde a cada hijo?



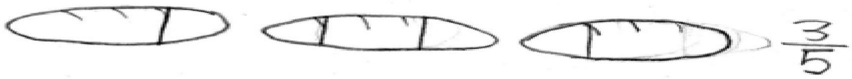
Y el estudiante lo explica así


Yo cogi los 7 pastelillos y algunos los parti a la mitad y eso me dio 7/5 eso significa que de 7 pastelillo lo dividi en 5 pedaso entonces el resoltado final es 7/5

Al analizar la situacion se observa como el estudiante establece la relacion entre la cantidad de panes y el numero de personas, pero el error se evidencai en que no han construido el concepto de “fracción” centrado en las relaciones “parte-todo”, lo cual se puede tambien observar en el siguiente problema planteado

En otro caso se evidencia lo siguiente.

Doña María lleva tres panes a su casa para comer en el desayuno, si ella desea repartir los panes entre ella y sus cuatro sobrinos. ¿Qué porción de pan le corresponde a cada uno?



Y el estudiante lo explica así

yo cogi los 3 panes y decia que habia
que repartirlos en 5 persona y intente
dividirlos hasta que pude dividir los panes
y el resultado lo hice asi son 3 panes y
hay que repartirlo entre 5 personas y eso
me dio $\frac{3}{5}$ eso significa que $\frac{3}{5}$ hay que
coger 3 panes y partirlos en 5 pedaso
osea que a cada uno le toca $\frac{3}{5}$.

Adicional a lo dicho anteriormente se observa como el estudiante sigue sin construir la relacion parte todo, pero si establece la relacion entre el numero de panes y el numero de personas . Al no agotar el todo aun no se ha construido el concepto de fracción ya que siempre deja un sobrante.

Ante la siguiente pregunta

> *Don Luis tiene 7 pastelitos, los cuales desea repartir entre sus cinco hijos. ¿Qué porción de pastelito le corresponde a cada hijo?*

Un estudiante responde le toca de a 1/2, a partir de lo observado en la grafica el estudiante reconoce la unidad no de manera discreta sino continua y por lo tanto representa gráficamente un rectángulo dividido en 7 partes aparentemente equitativas, ya en la representación numérica, la comprensión de la situación y por consiguiente de la relación parte – todo, se muestra confusa y no se logra establecer la relación en cuanto a que representa lo realizado en la grafica con el resultado obtenido en forma numérica lo cual concuerda con lo planteado por Vilma Pruzzo de Di Pego (2012) donde aclara que para el niño, resulta muy difícil comprender la diferencia entre tomar partes de un todo y repartir uno o varios todos.

1.2 Al obtener un resultado en diferentes operaciones no determina la pertinencia del mismo.

Doña Teresa desea repartir un pastel que compro entre ella y sus cuatro hijos. ¿Qué fracción del pastel le corresponde a cada uno?

$$\frac{1}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{20} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

Y el estudiante lo explica así

En la bola que habia lo Parti En 6
Partes y Cogi Cuatro En toncen multiplique
Un Cuarto Por Cuatro Quintos Eso medio
4/20 le Saque mitad al Cuatro y al
Veinte medio 2 le saque mitad y
El resultado que 10 me dio Fue 1
El Pastel que le toco acada Uno fue 1/5.

En esta situacion se evidencia como el estudiante continua sin agotar el todo, no construye el concepto de fracciones equivalentes por lo cual deja un sobrante al explicar el proceso que realiza, donde el estudiante no aclara el por que de realizar la multiplicacion de ¼ por 4/5 y tampoco revisar la pertinencia de la respuesta; donde se puede observar que el proceso de resolución de problemas que realiza el estudiante no esta orientado por la estrategia de resolucion que plantea en sus cuatros faces Polya, apartir de las cuales el estudiante puede encontrar posibles errores y validar o no los resultados obtenidos. Lo anterior concuerda con lo resuelto en otra situacion por un estudiante ante el problema propuesto.

> Por trabajar seis horas diarias, Leonardo recibe un salario mensual de $ 500.000. ¿Cuántas horas debe trabajar, para recibir un salario de $ 600.000?

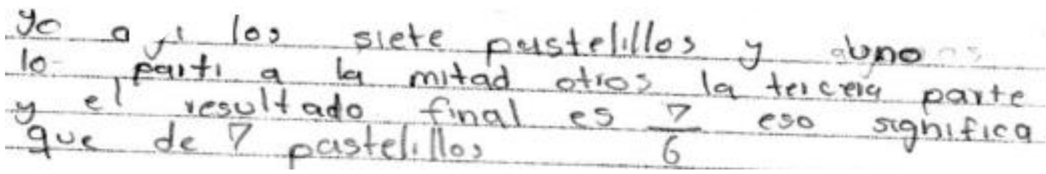
500.000 |6
20 083333 tiene q' trabajar 8.horas con 33 minutos.
20
20
20

En este problema se visualiza como el estudiante solo recurre a la división como estrategia de solución y no verifica si la respuesta obtenida es válida o no y si a partir de esta se encuentra la solución al problema planteado, lo cual permite verificar lo dicho en las líneas anteriores.

1.3 Interpreta y usa inadecuadamente una definición matemática asociada al concepto de número racional.

Don Luis tiene 7 pastelitos, los cuales desea repartir entre sus cinco hijos. ¿Qué porción de pastelito le corresponde a cada hijo?

Y el estudiante lo explica así

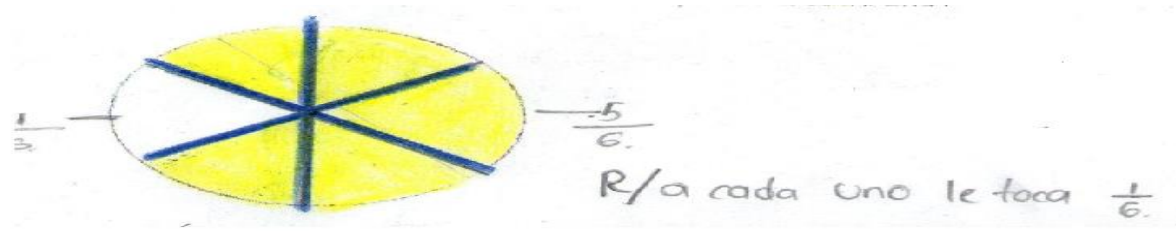


yo a y los siete pastelillos y uno
lo parti a la mitad otros la tercera parte
y el resultado final es $\frac{7}{6}$ eso significa
que de 7 pastelillos

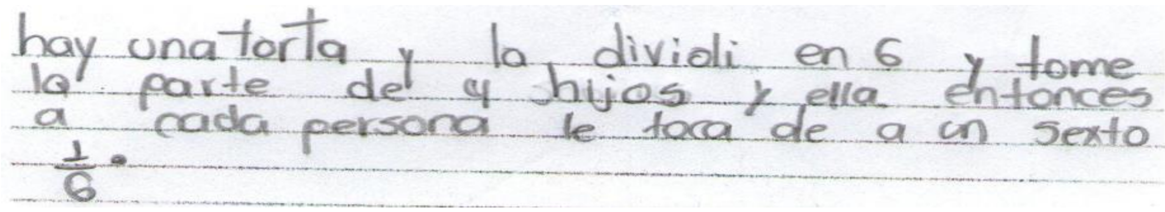
Ante esta situación y la explicación realizada por parte del estudiante se puede evidenciar como no se ha realizado por parte de ella la construcción del concepto de fracción y aún más la relación parte todo, ya que en la partición que el realiza no se evidencia el concepto de partición equitativa, por lo cual realiza partición diferentes, las cuales justifica en la respuesta, la cual para el parece ser la correcta ya que realiza la partición, adicionalmente se puede evidenciar que en su resultado da 7/6, es decir no ha trabajado como un todo discreto lo ha hecho con un todo continuo ya que 7/6 representa una unidad y un 1/6 adicional de otra unidad

Ante una nueva situación

Doña Teresa desea repartir un pastel que compro entre ella y sus cuatro hijos. ¿Qué fracción del pastel le corresponde a cada uno?

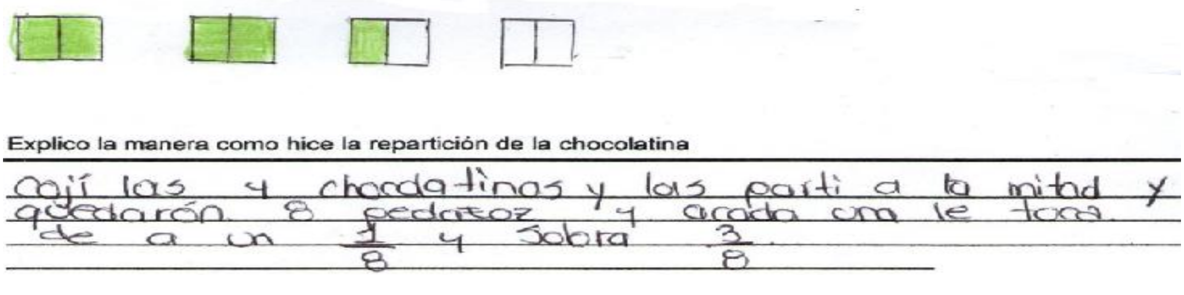


Al justificar su respuesta se puede ver en la gráfica que la estudiante no agota el todo y adicionalmente plantea en su justificación el hecho de partir en 6 partes lo que evidencia que es necesario dejar un sobrante


hay una torta y la divioli en 6 y tome la parte de 4 hijos y ella entonces a cada persona le toca de a un sexto 1/6.

Como en otra situación planteada se puede observar como no se agota el todo en la solución del problema.

Laura quiere repartir cuatro chocolatinas entre sus cinco amigas. ¿Qué cantidad de chocolatina recibe cada una de las amigas de Laura?


Explico la manera como hice la repartición de la chocolatina

cojí las 4 chocolatinas y las partí a la mitad y quedarón 8 pedazoz y a cada uno le toca de a un 1/8 y sobra 3/8

En el problema propuesto se evidencia como el estudiante considera en forma gráfica trabajar con el todo discreto, pero cuando realiza la justificación plantea que a cada uno le toca 1/8 y que sobran 3/8, considerando a la unidad como un todo continuo, con lo cual se evidencia que el estudiante no ha construido el concepto de fracción ni tampoco su constructo teórico en cuanto a la relación parte todo evidenciándose esta en el hecho de dejar sobrante y no establecer la diferencia entre el todo continuo y el todo discreto.

1.4 Usa un algoritmo inadecuado para resolver un problema aritmético.

¿Cuántos vasos de un cuarto de Litro se necesitan para llenar un recipiente de 4 Litros?;
Dibuja los vasos de un cuarto de litro que son necesarios para llenar el recipiente de cuatro litros.

$$\frac{3}{4} \times \frac{10Lt}{1} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}.$$

Y lo explica así

Esto Es lo que yo Entiendo Porque Me Estan Preguntando que Cuantas botellas de tres Cuartos de litros de 10 ltros Entonces Creo que Es Una Multiplicacion Porque Multiplico $\frac{3}{4}$ x 10 sobre 1 Es Igual a $\frac{30}{4}$ le saque Mitad y que 15 y Un Medio. y el $\frac{15}{2}$ significa la necesarios Resipientes de 10 litros.

Ante esta misma situacion otro estudiante plantea como respuesta

$\frac{3}{4} \times \frac{10}{1} =$ 30 | 4
20 7

La cual justifica de la siguiente manera

No se que cantidad de botellas necesito para poder
llenar el recipiente no lo entiendo por que si
una botella que tiene a tres cuartos de litro yo creo
que se necesita 7 botellas de un litro para poder
llenar de recipiento por que los tres cuartos los multiplico
por 10 litros que tiene el recipiente necesitamos 7 botellas
de tres cuartos.

En las respuestas dadas por los estudiantes se puede evidenciar que no hay una clara comprensión del problema, ya que la representación hecha por ellos no es la correcta, se evidencia que solamente se dejan guiar por la implementación de un algoritmo, el cual al aplicarlo no conduce realmente a su solución, en cuanto a las estrategias de resolución de problemas, atendiendo a lo propuesto por Polya, se refieren a la comprensión del problema, el diseño del plan, la ejecución del plan y la revisión de la solución.

En ninguno de los datos recolectados, los estudiantes logran llevar a cabo las estrategias propuestas por Polya y se podría afirmar que hay desconocimiento de los requerimientos del problema. Martinez, J (2010) plantea que al vincular la idea de fracción y su comprensión desde su representación simbólica impide a los estudiantes entender las relaciones matemáticas que están detrás del algoritmo.

1.5 Realiza operaciones en forma defectuosa al no realizar las respectivas conversiones de unidades.

Cuando Jorge camina normalmente, sus pasos tienen una longitud en promedio de tres quintos de metro. En un día normal, Jorge camina 4Km. ¿Cuántos pasos da Jorge en un día normal?

Y el estudiante lo explica así

Yo cogi 1 metro y tome las 3 parte y me
dio 60cm y 4 Km lo volvi ens mt y me dio
4000 y dividi 4000 entre 60 y me dio
66 entonse Juan dan 66 pason en un dia
de 60 cm y oto me dio 4Km

Y continúa planteando en la pregunta siguiente

Explico la manera de como realice el proceso para encontrar cuantos pasos da Jorge, si camina 6 kilómetros.

Cogi 66 pasos de 4Km y lo dividi en 2 y me
dio 35 y lo multiplique por 3 y me dion 99
entonces camina en un dia 99 pasos de
60 cm y por todo recorri 6 Km.

En el problema propuesto se evidencia como el estudiante no tiene claridad suficiente en cuanto a la conversión de unidades ya que solo pasa 4km a metros y continua el cálculo desconociendo que para realizar procesos aritméticos en necesario que se esté trabajando en la misma unidad de medida, con lo cual se observa que se presenta por parte del estudiante un desconocimiento de dicha regla, adicionalmente se observa como al realizar el proceso el estudiante no realiza la verificación del resultado obtenido.

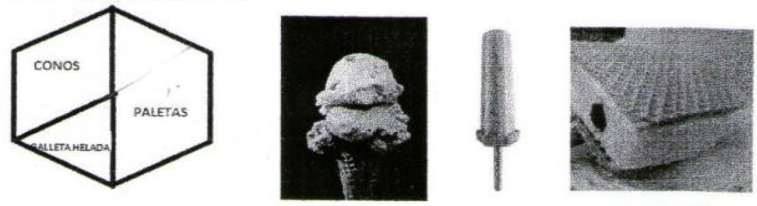
7.1.2 Errores debidos a dificultades para obtener información espacial

Aunque se trata de un campo de estudio cuyo desarrollo se está iniciando, es cierto que las diferencias individuales en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales es una fuente de dificultades para muchos jóvenes y niños en la realización de tareas matemáticas. Algunas representaciones icónicas de situaciones matemáticas pueden suponer dificultades en el procesamiento de la información; el análisis y síntesis perceptivos implican una demanda considerable para algunos alumnos, presentando dificultades y produciendo errores.

2.1 Al plantearse una figura geométrica para su análisis, plantea la necesidad de que sea una figura estándar.

Al preguntarle a un estudiante sobre la solución de la siguiente situación plantea que no es capaz de resolverlo ya que desconoce la operación que debe realizar y además por la forma que tiene el dibujo

El siguiente diagrama representa las preferencias de un grupo de estudiantes con relación a los helados. Con relación a la información. ¿que fracción de estudiantes prefieren paletas?
Y ¿qué fracción de estudiantes prefieren galleta helada?



No se si tengo q' dividir o hacer ~~otra~~ otra operación no lo entiendo por la forma q' tiene el dibujo.

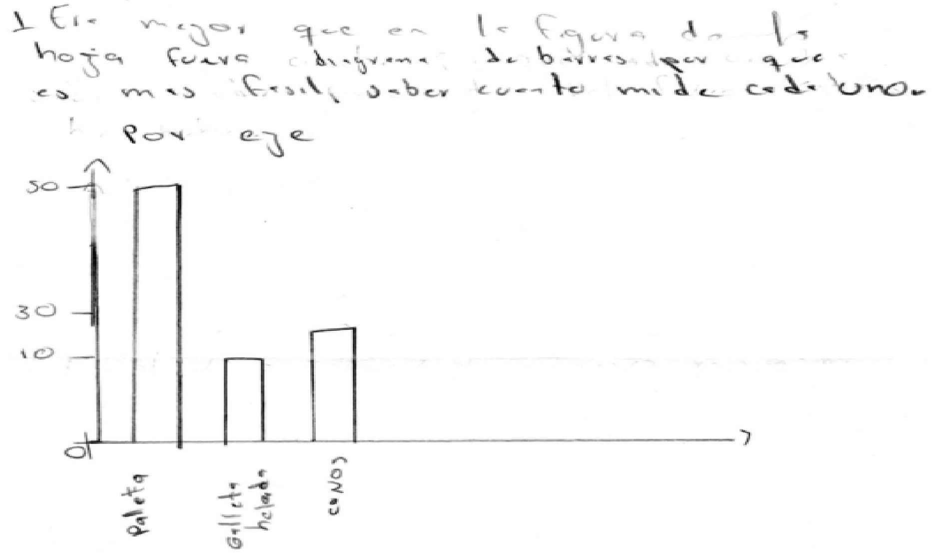
Otro estudiante al tratar de resolver el ejercicio anterior plantea que no lo puede resolver ya que considera que sería mejor que fuera un diagrama circular

NO ENTIENDO = COMO se resolverlo y no Comprendo Como Solucionarlo con fracciones, y en este ejercicio no se especifico bien la parte que toca resolver. Sería mejor el diagrama circular.

En el problema propuesta se plantea al estudiante una situación donde se hace necesario la comprensión del problema y la interpretación del mismo ya que a partir de este se puede dar solución, se evidencia como el estudiante manifiesta el hecho de no saber cómo hacerlo lo cual implica un desconocimiento por parte de el de los diferentes registros semióticos y sus respectivas conversiones a la hora de abordar el concepto de numero racional, ya que en la Teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval (1993, 1995) citado en Varettoni, M; Elichiribehety (2010) se considera que los sistemas de representación que utiliza la matemática son las figuras, las gráficas, la escritura simbólica y el lenguaje natural. Su postura señala que es esencial para la actividad matemática que se puedan movilizar varios signos en el curso de una misma acción, o bien que se pueda elegir un signo en vez de otro. Lo cual concuerda con lo planteado en el siguiente problema donde el estudiante sugiere que para su solución sería mejor emplear un diagrama circular, es decir el estudiante sugiere utilizar figuras estándar Fandiño (2009), las cuales han sido estudiadas por Fandiño (2009) y estas son generadoras de diversos errores al no dárseles a conocer figuras y formas diversas que permitan establecer los diferentes constructos teóricos planteados por Kieren (1980).

2.2 Construye figuras estándar en forma inapropiada a partir de figuras no estándar.

Al preguntarle a un estudiante por el ejercicio anterior dicho estudiante manifiesta que es mejor que fuera un diagrama de barras ya que para él es más fácil de resolver y por lo cual sugiere un diagrama por el mismo



construido.

El estudiante sugiere un diagrama en el cual retoma la necesidad de emplear un diferente registro de representación semiótica donde trata de representar la figura geométrica y su respectiva partición de otra de forma, es decir trata de realizar la conversión a otro registro de representación, la cual no lo hace en la forma más adecuada. Lo cual coincide con lo planteado por Duval (1993, 1995) citado en Varettoni, M; Elichiribehety (2010) donde. Se constituyen en un proceso complejo, pasar de un registro de representación a otro (conversión) o representar un objeto de diferentes maneras en un mismo sistema de representación (tratamiento) no es evidente y mucho menos sencillo para los sujetos; a dicha dificulta se le llama f*enómeno de no-congruencia*,

7.1.3 Errores debidos a dificultades de lenguaje

Señala que el aprendizaje de los conceptos, símbolos y vocabulario matemáticos es para muchos alumnos un problema similar al aprendizaje de una lengua extranjera. Una falta de comprensión semántica de los textos matemáticos es fuente de errores; por ello, la resolución de problemas verbales está especialmente abierta a errores de traducción desde un esquema semántico en el lenguaje natural a un esquema más formal en el lenguaje matemático.

7.2 Plantea una ecuación que no corresponde con el enunciado de un problema aritmético.

El consumo de agua en un día caluroso por cada cuatro personas es de 5,5 Litros. En iguales condiciones; ¿cuántos Litros de agua consumirían 13 personas? Y ¿16 personas?

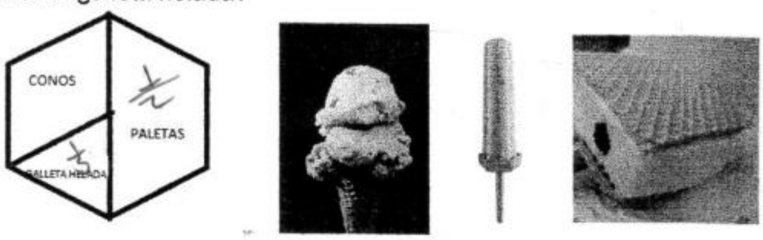
$$\frac{13}{1} \times \frac{16}{1} = \frac{102}{1} = 102 \div 5{,}6 = 19{,}$$

Como realice el Proceso fue de 13 sobre
1 y 16 sobre 1 el resultaido me
dio 102 Porque Multiplique 13 X 16
Porque 1 el 13 Esta en 16 y el 16 en
el 13 y eso me dio 102 el 13 lo
multiplique Por 16 Porque 1 debayo lo
Puse sobre 1 y el 16X13 y el 1X1 = 102/1 y el
102 lo
divioli Por
5,5 y el
R// = es di
19,0

En la solución propuesta por el estudiante se nota que realmente no hay una comprensión del problema a resolver ya que inmediatamente pasa a la utilización de un algoritmo "entendiendo por algoritmo la prescripción efectuada paso a paso para alcanzar un objetivo siguiendo un procedimiento heurístico que nos permita descubrir la solución del problema para después hacer la construcción formal rigurosa" (Figueras, E. 1994, pág. 3); se evidencia que no hay una revisión clara del resultado obtenido y mucho menos la implementación de las diferentes fases de resolución de un problema planteadas por Polya. Es decir el estudiante no ha trabajado en forma exhaustiva las operaciones y diversos procesos como el concepto de medida es decir desde un punto de vista semántico y solamente ha pasado rápidamente a su expresión escrita, es decir su elaboración sintáctica.

3.2 Toma mal un dato de una figura geométrica en la solución de un problema.

El siguiente diagrama representa las preferencias de un grupo de estudiantes con relación a los helados. Con relación a la información. ¿que fracción de estudiantes prefieren paletas? Y ¿qué fracción de estudiantes prefieren galleta helada?



Al plantearse la situación el estudiante se deja llevar por lo visual y no realiza la partición en forma correcta por lo que plantea la siguiente justificación

En el primer ejercicio la fracción es de la mitad
seria un medio por que esta señalado en el diagrama
porque en la mitad es de meras paletas y la fraccion
de los estudiantes que prefieren galleta helado es de la quinta
Parte por que ese seria el número que esta en el diagrama

Da una respuesta diferente o plantea una respuesta adicional a la que se le pide en un problema aritmético.

Doña María lleva tres panes a su casa para comer en el desayuno, si ella desea repartir los panes entre ella y sus cuatro sobrinos. ¿Qué porción de pan le corresponde a cada uno?

$\frac{1}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{25}$

lo que yo entiendo es que a sus cuatro sobrinos y ella tendria que repartirlo en 5 y cojo 5 y repartiria a sus sobrino y ella le toco $\frac{4}{25}$ avos.
y la explicacion Escojia y entiendo
$\frac{1}{4}$ lo multiplicaria Por $\frac{4}{5} = \frac{4}{25}$ avos

En esta solución y su respectiva justificación se da cuenta de que no hay realmente una comprensión real del problema planteado, empleando información para realizar la multiplicación que no está incluida en el problema mismo, adicionalmente este está planteado como un todo discreto y en la grafica realizada se observa cómo está hecha en el todo continuo donde utiliza un rectángulo y lo parte en 5 partes aparentemente iguales.

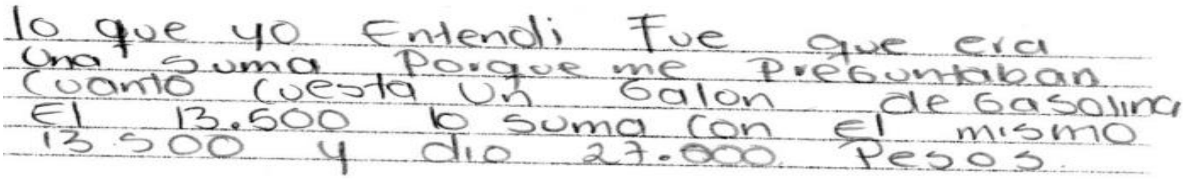
3.3 Plantea una solución a un problema aritmético que no corresponde con el enunciado del mismo.

Si galón y medio de gasolina cuesta $ 13.500. ¿Cuánto cuesta un galón de gasolina?

$$\begin{array}{r} 13.500 \\ 13.500 \\ \hline 27.000 \end{array}$$

R// = Un Galon de Gasolina bale $27.000

Y lo explica así


lo que yo Entendi Fue que era Una suma Porque me Preguntaban Cuanto Cuesta Un Galon de Gasolina El 13.500 lo suma con El mismo 13.500 y dio 27.000 Pesos.

7.1.4 Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento

La experiencia sobre problemas similares anteriores puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información. En estos casos los alumnos desarrollan operaciones cognitivas, que continúan empleando aún cuando las condiciones fundamentales de la tarea matemática en cuestión se hayan modificado. Persisten en la mente algunos aspectos del contenido o del proceso de solución, inhibiendo el procesamiento de nueva información.

7.2 Utiliza estrategias de resolución de problemas en un momento determinado y lo aplica a situaciones donde no es pertinente.

Laura quiere repartir cuatro chocolatinas entre sus cinco amigas. ¿qué cantidad de chocolatina recibe cada una de las amigas de Laura?

Dibuja la forma en cómo se repartirían las 4 chocolatinas.

Y lo explica así

Como yo la hice Fue de Esta Forma que hice 4 Chocolatinas y las Parti En dos y Eso Queda 4 y Ella las repartio Entre sus 5 amigas y a cada Una le toco de a ~~2~~ Mitad de Chocolatina

Y al planteársele una situación diferente con las cuatro chocolatinas

Si Laura también quisiera comer chocolatina con sus amigas. ¿Qué cantidad de chocolatina debería recibir cada una?

$\frac{1}{2}$ Una media $\frac{2}{1}$ Esto seria dos y Un Medio

Y al explicar la situación

la Manera En que la hice Fue que En ~~la~~ El Problema que hice anterior Sobraron 2, y Un Medio Entonces El Problema que Ne Preguntan deberia recibir ~~1~~, 2, y Un Medio

Se puede evidenciar que no hay una comprensión semántica de lo que establece el problema planteado, el estudiante asume que se debe repartir el sobrante de las chocolatinas con Laura, por lo cual establece que al sobrarle de ahí debe realizar la nueva partición, no teniendo presente que en el enunciado del problema se le plantea la situación como si fuera un nuevo problema por resolver, además se evidencia que sigue sin agotar el todo.

Por trabajar seis horas diarias, Leonardo recibe un salario mensual de $ 500.000. ¿cuántas horas debe trabajar, para recibir un salario de $ 600.000?

500.000 |6
20 083333 tiene q' trabajar 8.horas con 33. minutos.
20
20
20

y explica la situación de la siguiente manera

primero cogi 500000. y lo dividi entre. las 6 horas. y me dio. 0833

Con el resultado anterior plantea la solución a la nueva situación.

Con la información anterior. ¿Cuántas horas debería trabajar Leonardo para recibir un salario de $800.000?

9 horas y 43 minutos.

Y justifica su respuesta en

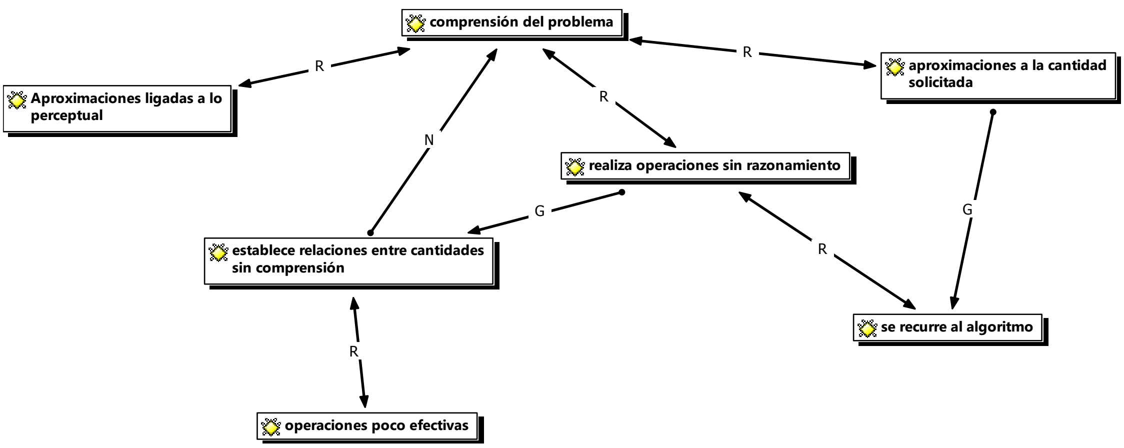
Empece a sumar 83333 asta q' me de. 800 000.

En esta situación se ve como una estrategia de solución que utiliza en el problema anterior decide seguir utilizándola así el contexto no sea el más pertinente y al justificar la respuesta plantea como la solución es seguir sumando hasta llegar a la respuesta utilizando solo la parte sintáctica, es decir utilizar el algoritmo sin darle sentido a la parte semántica. Sin comprender realmente lo que plantea el problema (Figueras; E, 1994).

A partir de los datos y de la primera categorización lograda en el ejercicio de cuantificar el número de errores encontrados en los 10 estudiantes que participaron en los cuatro talleres, se contrastaron las categorías, que se agruparon en 3 grandes dificultades. A continuación se presentan las redes semánticas elaboradas con el apoyo de Atlas ti, en donde se presentan las dificultades encontradas en los estudiantes en la resolución de problemas con números racionales:

7.2 Categorías emergentes a partir de los errores encontrados desde la tipología propuesta por Radatz (1979).

7.2.1 Categoría 1: Comprensión del problema



Cuando los estudiantes se enfrentaron a las situaciones problema, optaron por asumir dos posturas; una de ellas, el reconocer que no comprendían el problema o que los datos no daban elementos suficientes para saber qué operación había que hacer para resolver el problema, tal como se manifiesta en las siguientes evidencias:

Ante una situación como la siguiente:

Laura quiere repartir cuatro chocolatinas entre sus cinco amigas. ¿Qué cantidad de chocolatina recibe cada una de las amigas de Laura? Dibuja la forma en cómo se repartirían las 4 chocolatinas

Una estudiante responde:

No fui capas de hacerlo.
no se si hay q dividir o multiplicar.

Se evidencia que el estudiante no intenta comprender el problema, debido a que no encuentra la operación que le permite resolver el problema, por la necesidad de recurrir inmediatamente al algoritmo.

En algunos textos escolares e incluso para algunos maestros, no hay consenso con la definición de "problema", sin embargo podemos considerar los problemas como situaciones enunciadas verbalmente que requieren de habilidades y conocimientos matemáticos para ser resueltos.

En este sentido, los problemas permiten la movilización del pensamiento y por consiguiente no presentan de manera explícita, el procedimiento a seguir, lo que demanda en el estudiante, no solo el reconocimiento de las operaciones que debe hacer para resolverlo, sino que le exige la comprensión de la situación.

Según Moreno y Waldegg, (Citados por Obando & Múnera, 2003, p. 1)

> "una situación problema […] *es el detonador de la actividad cognitiva, para que esto suceda debe involucrar implícitamente los conceptos que se van a aprender, debe representar un verdadero problema para el estudiante, pero a la vez debe ser accesible a él y debe permitir al alumno utilizar conocimientos anteriores*".

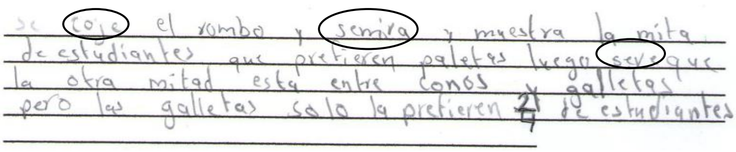
El empleo de situaciones problema como centro de la actividad matemática permite no sólo la posibilidad de introducir nuevos temas o explorar ideas previas, sino también el desarrollo del razonamiento, que desplaza la emergencia por el algoritmo.

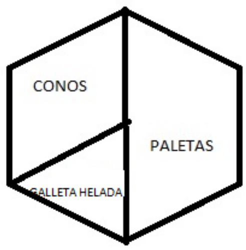
Ante otra situación y teniendo en cuenta que las situaciones problema están acompañadas de imágenes que apoyan la comprensión del problema, el estudiante se deja llevar por la imagen, apresurándose a dar respuestas que pueden no ser acertadas.

Se presenta la siguiente situación,

El siguiente diagrama representa las preferencias de un grupo de estudiantes con relación a los helados. Con relación a la información. ¿qué fracción de estudiantes prefieren paletas? Y ¿qué fracción de estudiantes prefieren galleta helada

El estudiante responde:





El estudiante resuelve la situación a partir de la observación que hace de la figura geométrica, cuando dice que se “coge” el rombo y se “mira” y finalmente dice que “se ve que”, lo que permite afirmar que se guía por la forma antes que por el enunciado y la partición que se hace de la forma geométrica.

De acuerdo con Schoenfeld citado por Vilanova, en la resolución de problemas se ponen en juego cuatro factores que es necesario considerar: El conocimiento de base, es decir, las herramientas matemáticas con las que cuenta el estudiante para enfrentarse a la actividad matemática, como por ejemplo: que información tiene?, de qué manera se pueden organizar los datos?, entre otros aspectos.

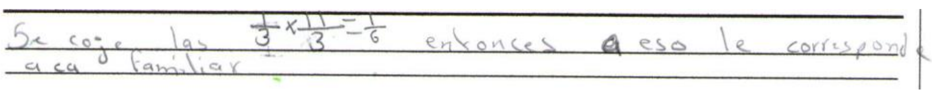
Las estrategias de resolución de problemas, atendiendo a lo propuesto por Polya, se refieren a la comprensión del problema, el diseño del plan, la ejecución del plan y la revisión de la solución.

En ninguno de los datos recolectados, los estudiantes logran llevar a cabo las estrategias propuestas por Polya y se podría afirmar que hay desconocimiento de los requerimientos del problema.

En cuanto a los aspectos metacognitivos, los estudiantes llegan a solucionar el problema, pero no son conscientes de si la respuesta obtenida, es la que requiere el problema, tal como se observa en la siguiente situación:

Lucia, compra tres pizzas grandes para una reunión familiar a la cual asistirán 11 de sus familiares. Si lucia, debe repartir las pizzas. ¿Qué cantidad de pizza le debe dar a cada familiar? Dibuja la forma en cómo se repartirían las tres pizzas.

Un estudiante realiza las siguientes operaciones:



Se observa que el estudiante realiza varias operaciones para resolver la situación sin llegar a la respuesta correcta y sin darse cuenta que la respuesta que obtiene, no tiene relación con el requerimiento que hace el problema a través de la pregunta.

También se da el caso en que una estudiante, parece comprender el problema pero en el momento de resolverlo, se da cuenta que está realizando operaciones poco efectivas que no le llevan a ninguna respuesta:

Por trabajar seis horas diarias, Leonardo recibe un salario mensual de $ 500.000. ¿Cuántas horas debe trabajar, para recibir un salario de $ 600.000?

para recibir un salario de $600.000. no lo entendi porque llego a muchos procedimientos, pero no llego a la verdadera conclusion del respectivo resultado. porque al saber que trabaja 6 horas saldrian siendo 180 horas por un mes, y asi sucesivamente sigo con procedimientos y no llego.

Se confirma la tendencia a utilizar procedimientos algorítmicos sin tener un conocimiento claro del sentido de la operación; algunos sólo pueden resolver problemas “tipo” y otros pueden plantear estrategias dentro del campo de la matemática intuitiva. En este punto podemos afirmar la falta de conocimientos claros en relación con los algoritmos, ya que obtuvieron respuestas pero sin utilizar los procedimientos más efectivos y eficaces.

Se puede afirmar que los estudiantes sólo pueden resolver problemas “tipo”, ya que al no aparecer en el problema alguna palabra clave para determinar el algoritmo a aplicar, (por ejemplo en los problemas de resta decir ‘perdió’, ‘le robaron’, etc.) se encuentra que no hacen el intento por resolver la situación planteada de alguna forma.

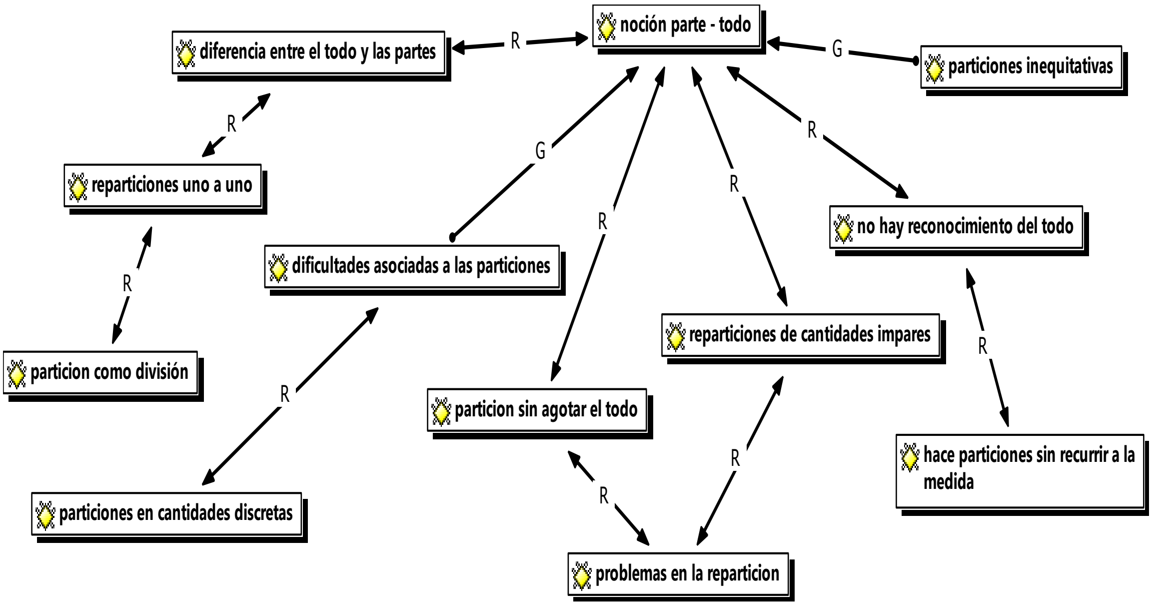
Otros estudiantes proponen estrategias dentro del campo de la matemática intuitiva, es decir, con base en el contexto intentan aplicar un procedimiento que los lleve a la solución adecuada y no se basan en el uso de operaciones y reglas simbólicas sin tomar en cuenta el contexto.

La misma estudiante también afirma:

no lo puedo hacer, porque al no saber el respectivo significado de lo anterior no lo podria resolver.

Teniendo en cuenta que la comprensión de los problemas matemáticos, recoge también el manejo de los conceptos matemáticos que poseen los estudiantes, la siguiente categoría da cuenta de los aspectos conceptuales.

7.2.2 Categoría 2: noción parte – todo



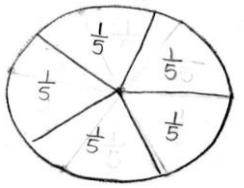
Teniendo en cuenta que las situaciones problema propuestas en cada uno de los talleres, se resuelven empleando los números racionales, esta categoría resulto de gran importancia, y por consiguiente permitió reconocer algunas dificultades en los estudiantes, que se refieren a la comprensión de los números racionales.

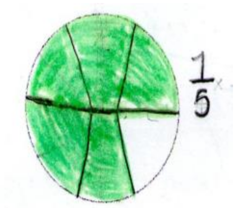
Una de las subcategorías corresponde a las dificultades asociadas a las particiones, veamos:

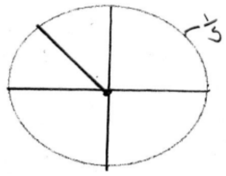
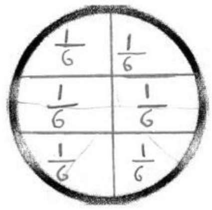
Ante la siguiente situación:

Doña Teresa desea repartir un pastel que compro entre ella y sus cuatro hijos. ¿Qué fracción del pastel le corresponde a cada uno?

Algunos estudiantes realizan las siguientes particiones:





En el primer caso, el estudiante intenta realizar particiones equitativas, empleando regla y asignándole a cada una de las porciones 1/5.

En el segundo caso, lo divide en 6 partes y asume que la parte que no quedo coloreada corresponde a 1/5, en tanto en el tercer caso, hace una partición inequitativa, pero que pretende cumplir con la condición de partir en 5 partes.

Existen tres momentos en la construcción del concepto de fracción y se pueden evidenciar en lo realizado por los niños:

1. El primer momento se caracteriza por una pérdida de la equivalencia de las partes al fraccionar la unidad.

2. Las equivalencias se conservan en el fraccionamiento del entero, pero con el uso prioritario de la fracción unitaria.

3. Se descubre la utilización de estrategias multiplicativas, tanto en la relación entre el número y las partes como entre el conjunto de estas y las partes proporcionales del reparto.

En el cuarto caso, el estudiante intenta hacer particiones que asume como equitativas, y a cada una de ellas la denomina 1/6.La partición está asociada a la forma, lo que indica que el estudiante hace particiones pero teniendo en cuenta la forma, tal como aparece en el siguiente relato:

No se si tengo q' dividir o hacer otra operación no lo entiendo por la forma q' tiene el dibujo.

Según Tamayo y otros (2011), no se establece una relación coherente entre la acción física y el resultado matemático posible, por lo tanto, se cae en imprecisiones al hacer las particiones, o se presenta una dificultad relacionada con las operaciones de multiplicación y división con números racionales.

Se reconoce en los estudiantes, que cuando se les presenta la situación problema relacionada con operar con los racionales, en un primer momento recurre a la acción física para luego dar cuenta del resultado aritmético.

No la hice porque intente partir la pizzas en 11 pedazos y no la pude partir por eso es que no la hice.

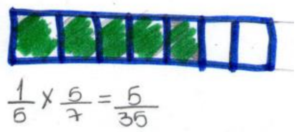
De acuerdo con Vasco (1994), la partición física y la selección de la unidad no es lo mismo que la partición matemática, en la partición física no se tiene en cuenta la magnitud que es la que se parte o divide, en tanto al realizar la acción matemática, si se tiene en cuenta la magnitud, como el largo, el área o la masa.

El concepto de unidad se evidencia cuando se propone su reconstrucción a partir de las partes, esta situación puede presentar dificultades de resolución a los estudiantes por lo que no es posible saber cuál va a ser su representación, el significado de la unidad es el significado del "todo". Según Llinares (2003), "*la manera en la que pensemos sobre la unidad y la parte nos proporcionara diferentes maneras de representarla gráficamente*".

La dificultad que presentan algunos estudiantes para reconocer la unidad, se evidencia en los diferentes datos:

Ante la siguiente situación:

Don Luis tiene 7 pastelitos, los cuales desea repartir entre sus cinco hijos. ¿Qué porción de pastelito le corresponde a cada hijo?



En primera instancia, el estudiante reconoce la unidad no de manera discreta sino continua y por lo tanto representa gráficamente un rectángulo dividido en 7 partes aparentemente equitativas, ya en la representación numérica, la comprensión de la situación y por consiguiente de la relación parte – todo, se muestra confusa, por las siguientes razones:

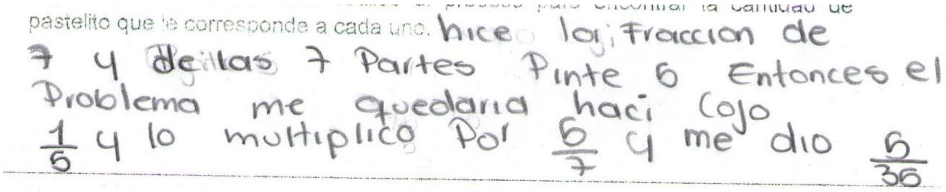
Reconoce 1/5 como una parte del pastel,

Reconoce la totalidad de los hijos, es decir, 5 como la parte del pastel que se toma de 7 pasteles y lo representa como 5/7,

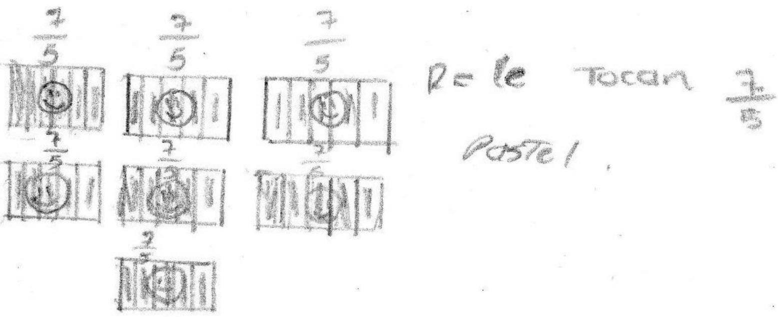
Recurre a una multiplicación entre la porción que le correspondería a cada uno de los hijos por la porción que le correspondería a todos los 5 hijos, sin agotar el todo, porque quedan 2 pasteles sin repartir.

Obtiene una cantidad 5/35, que finalmente no da cuenta del problema.

Al narrar lo que hace, dice que:

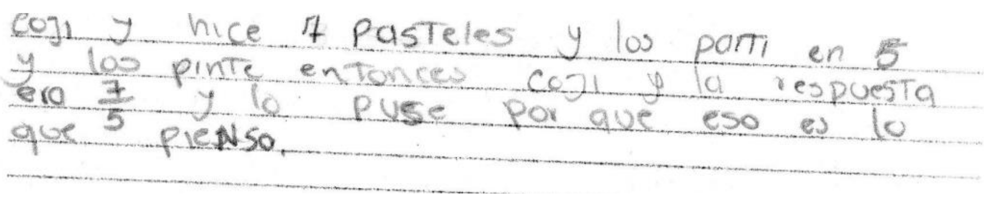

pastelito que le corresponde a cada uno. hice la Fraccion de 7 y deillas 7 Partes Pinte 5 Entonces el Problema me quedaria haci Cojo $\frac{1}{5}$ y lo multiplico Por $\frac{5}{7}$ y me dio $\frac{5}{35}$

Otro estudiante realiza lo siguiente:

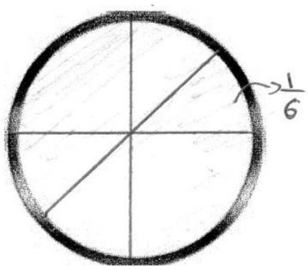


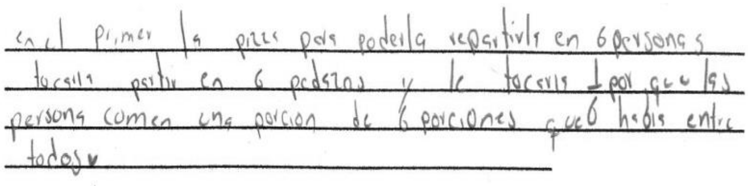
En este caso, el estudiante establece correspondencia uno a uno partiendo cada uno de los pastelitos en 5 partes de tal manera que a cada uno de los hijos les da una porción 7/5 al sumar las diferentes porciones de cada pastel.

Al solicitarle la argumentación a la actividad matemática realizada, responde:

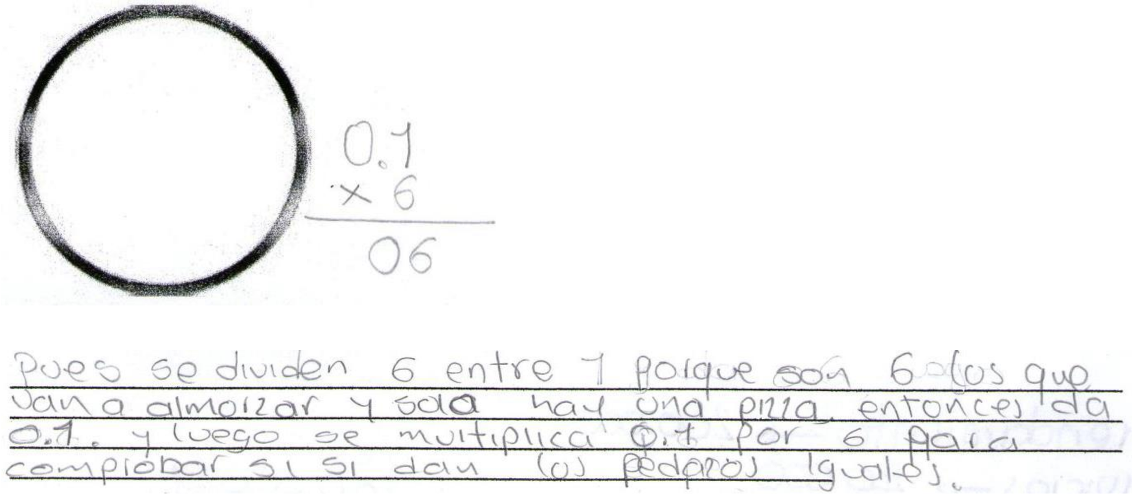


De igual manera otro estudiante,





En otro caso se evidencia lo siguiente:

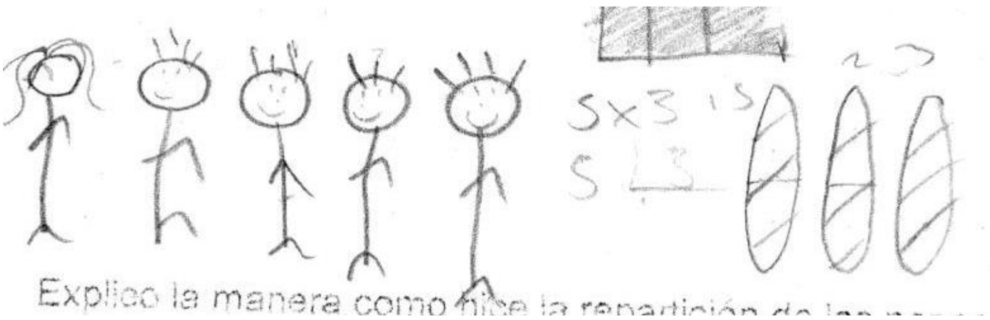


En este caso el estudiante realiza una operación con decimales, asumiendo que la cantidad de 1 es representada por 0,1, al hacer una división entre 6 y 1.

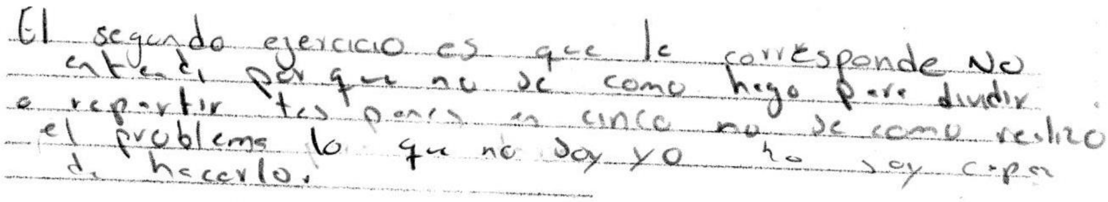
Al recurrir a estos procedimientos, se pierde la conservación de la igualdad, o el sentido de agotar el todo.

Ante la siguiente situación:

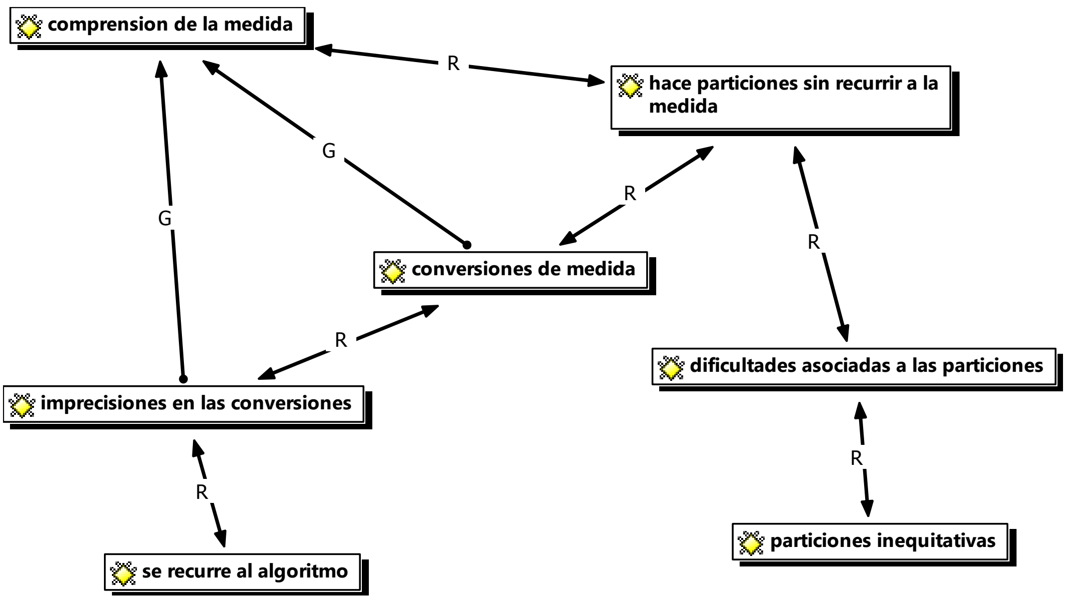
Doña María lleva tres panes a su casa para comer en el desayuno, si ella desea repartir los panes entre ella y sus cuatro sobrinos. ¿Qué porción de pan le corresponde a cada uno?



El niño hace una representación pictórica en donde logra relacionar las personas a quienes se les va a repartir el pan, con los tres panes que se tienen para repartir. Al dibujar, el estudiante se da cuenta que no tiene como repartir una cantidad menor entre una cantidad mayor, debido a que se están considerando los números racionales o como números naturales.


El segundo ejercicio es que le corresponde No entendí por que no se como hago para dividir a repartir tes panes en cinco no se como realizo el problema lo que no soy yo no soy capa di hacerlo.

7.2.3 Categoría 3: Comprensión de la medida



El estudio de los números racionales, se constituye en una parte importante de la aritmética escolar, porque permite comprender los fenómenos del mundo real asociados a la actividad de medir y comparar.

Una idea esencial para la comprensión de los números racionales es la del fraccionamiento o partición de la unidad en un número finito de partes iguales. Esta idea aparece cuando la unidad de medida es mayor que la cantidad a medir, cuando se necesita establecer una subunidad de medida que quepa un número entero de veces en la cantidad a medir.

En la siguiente situación se puede evidenciar la dificultad para acudir a la medida,

¿Cuántas botellas de tres cuartos de litro, son necesarias para llenar un recipiente de 10 litros?, dibuja la cantidad de botellas.

Cogi el litro Y lo dividi en 3 y me dio 333 cogio 0.000 y los dividi en 333 y me dio 30 vasitos entonces necesito 30 vasitos de 333ml para llenar un recipiente de 10 lt

El estudiante divide la cantidad, un litro, haciendo la conversión en centímetros cúbicos, lo que indica que emplea la conversión de medida pero no logra reconocer a que se refiere cuando se habla de ¾ de litro.

Otro estudiante realiza lo siguiente:

grafiqué $\frac{3}{4}$ partes y tome 3 entonce divide 1000 entre 4 y da 250.000 entonces como son 10 litros se mutiplica por las (4) cuartos partes y da 40 Botellas.

El estudiante reparte el litro que lo reconoce como una unidad en cuatro partes, posteriormente multiplica por las mismas 4 para obtener 40 botellas, hay un acercamiento a la medida pero finalmente esta no le proporciona elementos para solucionar el problema.

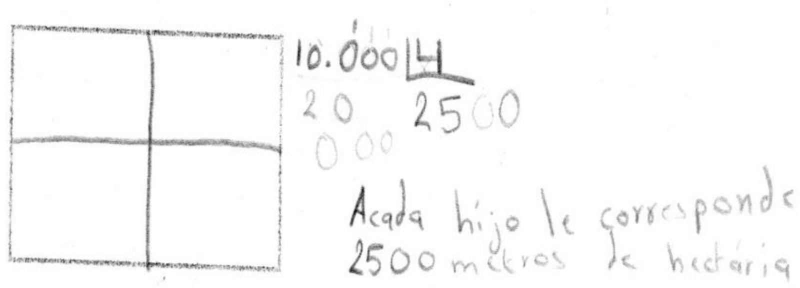
Se nota que el estudiante recurre a la medida, o a una aproximación a ésta, como mecanismo de partición, históricamente y de acuerdo con Chamorro (1991, 127), "*la construcción de los números racionales como extensión de los enteros es consecuencia de la medición de magnitudes"*; al trabajar en esta aproximación se ubica primero un 'todo' (continuo o discreto), el cual se divide en partes congruentes (puede ser de las partes de una superficie o la cantidad de objetos), la medida es la relación entre la parte y el todo.

A partir de lo anterior, aparece un primer concepto asociado a la medida, de acuerdo con Chamorro (1991, p. 17) cuando dice que "*para medir, el niño utiliza al principio una medida perceptiva a partir de impresiones sensoriales, antes de adoptar una unidad de medida"*, de acuerdo con lo ocurrido en el ejercicio propuesto, los estudiantes no han logrado reconocer que para esta acción solicitada se requiere una medida de área o de superficie sino que recurren a lo que perceptivamente les representa la forma cuadrada o rectangular.

Veamos la siguiente situación:

Don Jesús desea repartir una hectárea de tierra entre sus cuatro hijos. ¿Qué cantidad le corresponde a cada hijo?

Al respecto los estudiantes realizan lo siguiente:



En este caso el estudiante, realiza dos acciones de manera independiente; por una parte, realiza la división de la hectárea en partes iguales, más inclinados por la forma cuadrada que se les propone para la partición de la unidad y en un segundo momento realiza la división de 10.000 entre cuatro, que corresponde a los cuatro hijos como lo plantea la situación,

No hay una razón justificada por el estudiante que permita comprender porque se hace la división entre 10.000 y finalmente responde que a cada hijo le corresponden 2.500 metros de hectárea, en donde parece que no se reconoce la hectárea como una medida de longitud.

La acción de medir supone la reiteración de una unidad de medida, es decir debe haber una noción de división que es repetida sobre la totalidad de la extensión de la magnitud que se está teniendo en cuenta y esta repetición ha de ser tal que el intervalo que hay que medir debe estar recubierto o lleno por la unidad de medida.

Otro de los aspectos importantes en el desarrollo de las nociones asociadas al proceso de medida es la comprensión de la relación entre el tamaño de la unidad y el número necesario para medir la cantidad dada, esto quiere decir que cuanto menor sea la unidad de medida, tantas más veces será preciso repetirla, hasta "cubrirla" toda. En este sentido, la base de todo proceso de medida es en primera instancia la identificación de la unidad con que se mide, es decir, cierta idea de subdivisión expresada en función de cierta unidad de medida, que es repetida sobre la totalidad de la magnitud que se esté considerando.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Teniendo en cuenta los objetivos del estudio, en donde se pretendía reconocer los errores y las dificultades que presentan los estudiantes al enfrentarse a resolver problemas con los números racionales, se reconoce que de acuerdo con Rico (1995), teniendo en cuenta lo propuesto por Radatz, podemos clasificar los errores presentados en los estudiantes al resolver problemas que requieren los racionales:

- Algunos errores de los estudiantes pueden deberse a dificultades en el manejo del lenguaje matemático, esto se demuestra en las dificultades de comprensión de los problemas, la falta de comprensión semántica de las situaciones lleva generalmente a errores, debido a las diferencias entre el lenguaje natural y el lenguaje formal.

- Para el caso de las situaciones presentadas en donde había un manejo espacial, relacionado con formas geométricas o particiones dentro de una forma circular, el análisis y síntesis perceptivos implican una demanda considerable para algunos estudiantes.

- Algunos errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos, en este aspecto se centraron gran parte de los errores de los estudiantes, debido a la complejidad que genera en los estudiantes los números racionales. También se incluyen en este tipo de errores, la dificultad en el manejo de algoritmos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios.

Parece que el origen de estos errores, es necesario situarlo en la inexistencia de una ruptura en la idea de número que tiene el estudiante, pues traslada significados de los números naturales a los números racionales; por lo tanto resulta conveniente presentar situaciones en las que los números naturales se muestren ineficaces, para solucionar situaciones que sugieran la necesidad de construir un nuevo sistema de representación; de este modo, los estudiantes asociarán los números naturales a los usos y características propias del contexto en el que aparecen y, en consecuencia, ampliarán su idea de número a otros contextos diferentes.

En cuanto a las dificultades,

Teniendo en cuenta que las categorías emergentes en el análisis de los datos, dan cuenta de tres dificultades que recogen otros aspectos, se puede concluir que:

La comprensión del problema se convierte en una de las dificultades esenciales a la hora de solucionar problemas con números racionales, de acuerdo con los datos se puede afirmar que existe una necesidad de encontrar los datos cuantitativos con los cuales hacer cualquier operación matemática, de tal manera que si no se encuentra explícito, se asume que no se comprende el problema.

También se reconoce en los datos recolectados con los estudiantes, que la comprensión del problema se debe en gran parte a no poder relacionar de manera coherente los datos que presenta el problema.

En cuanto a los aspectos conceptuales en la solución de problemas con racionales, la categoría *noción parte – todo*, surge permanentemente en los datos recolectados en este estudio, debido a que se evidencian muchas dificultades que establecen esta relación, bien sea porque no hay una identificación del todo o de sus partes o porque se puede reconocer un abuso en el uso de esta noción, especialmente cuando se abordan situaciones problema que requieren de la medida o del constructo operador multiplicativo, en términos de Kieren(1980).

A pesar de que en la primaria se potencia permanentemente la partición, se siguen evidenciando particiones inequitativas y los estudiantes continúan presentando dificultades al momento de hacer particiones en cantidades impares y la forma sigue siendo el aspecto principal para pensar en la partición y no la medida.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Astolfi, J. P. (1999). El "error", un medio para enseñar. Colección Investigación y Enseñanza, N° 15. España: Díada Editora.

Abrate, R.; Pochulu, M. & Vargas, J. (2006). Errores y dificultades en Matemática: Análisis de causas y sugerencias de trabajo. Villa María. Universidad nacional de villa maría.

Bachelard, G., (1972). La formación del espíritu científico. Contribución al psicoanálisis del conocimiento objetivo. (Siglo XXI: Buenos Aires).

Barrantes, H.(2006). Centro de investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas, UCR

Escuela de Ciencias Exactas y Naturales, UNED. www.cimm.ucr.ac.cr/hbarrantes

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes, (pp. 91-125). New York: Academic Press.

Batanero, C., Díaz Godino, J. & Font, V. (2004). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques 4, 165-198

Caserio, M., Guzmán, M. & Vozzi, A. M. (2007). Dificultades en el aprendizaje de matemática. Obstáculos y errores en el aprendizaje del concepto de dependencia e independencia lineal. Acta latinoamericana de matemática educativa, 20, 9-15. Comité latinoamericano de matemática educativa.

Castellanos, M. & Obando, Jorge. A. (2009). Errores y dificultades en procesos de representación: El caos de la generalización y el razonamiento algebraico. 10 encuentro colombiano de matemática educativa 2009. Asociación colombiana de matemática educativa

Castro, E. (2008). Resolución de problemas, ideas, tendencias e influencias en España. Recuperado de http://www.uv.es/puigl/castroseiem2008.pdf

Cawley, J & Miller, J. (1986). Vistas seleccionadas sobre la metacognición, la resolución de problemas de aritmética, y problemas de aprendizaje. American psicologycal asociation. Recuperado de http://scholar.google.es/scholar?hl=es&q=Cawley+y+Miller+%281986%29&btnG=&lr

Chamorro M. C, (1991) *El problema de la medida.* Síntesis Madrid.

Co, P., Sastre, M. & Panella, E. (2008). Prácticas docentes y errores de los alumnos. Acta latinoamericana de matemática educativa, 21, 527-532. Comité latinoamericano de matemática educativa.

Contreras, C.L. (2009). El papel de la resolución de problemas en el aula. Revista electrónica Iberoamericana de Educación en Ciencias y Tecnología. 1(1), 38-98. Recuperado de http://www.exactas.unca.edu.ar/riecyt/VOL%201%20NUM%201/Doc%20RIECyT%20 1-3.pdf

D'amore, B., Pinilla, M.I. (2002). Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica". Educación Matemática. México. 14, 1, 48-61

Díaz Godino, J. (2004). Didáctica de las matemáticas para maestros. Universidad de granada. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Fandiño Pinilla, M.I (2009). Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos. Bogotá: editorial magisterio.

Figueras, E. (1994). Leer, escribir y comprender matemáticas. *Revista Suma*. Recuperado de http://revistasuma.es/IMG/pdf/19/020-034.pdf

Flores, R. (2011). Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria. (Tesis maestría). Instituto Politécnico Nacional, México. Recuperado de

http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/flores_2010.pdf

Franchi,L & Hernández de Rincón, A. (2004). Tipología de errores en el área de la Geometría plana. Parte II. Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal. Educere, 8,(25) abril-junio, 2004, pp. 196-204, Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel. Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001

Freudenthal, H. (1994). Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. México: CINVESTAV-IPN.

Freitas, M. P. & Ventura, M. C. (2007). Resolución de problemas con utilización de conocimientos del mundo real. Acta latinoamericana de matemática educativa, 20, 287-293. Comité latinoamericano de matemática educativa.

García, R. (2011). Los significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria. Acta latinoamericana de matemática educativa, 24, 23-33. Comité latinoamericano de matemática educativa.

Bastien, G., MORA,C., SÁNCHEZ-GUZMÁN,D. (2010). obstáculos en la resolución de problemas en alumnos de bajo rendimiento.1Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, Legaria 694, Col Irrigación, C. P. 11500, México D. F. Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, Av. San Pablo 180, C. P. 02200 México D. F.

(Recibido el 28 de abril 2010; aceptado el 14 de Junio de 2010)

Gomez, P; Kilpatrick, J & Rico, L. (1998). Errores y dificultades de los estudiantes Resolución de problemas. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/679/1/KilpatrickEducacion.pdf

Godino, J.D. (2004). Matemáticas para maestros. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/welcome.htm

González, P.L. & Valdemoros, M.E. (2011). Resolución de problemas que implican identificar de manera constante la unidad de referencia: un estudio de caso. Acta latinoamericana de matemática educativa, 24, 595-605. Comité latinoamericano de matemática educativa.

Herrera, M. L. (2010). Obstáculos, dificultades y errores en el aprendizaje de los números irracionales. Acta latinoamericana de matemática educativa, 23, 247-257. Comité latinoamericano de matemática educativa.

Juidías Barroso, J. & Rodríguez Ortiz, I. R. (2007). Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. Revista de Educación, 342, 257-286. Recuperado de http://www.revistaeducacion.mec.es/re342/re342_13.pdf

Kieren, T., 1980. Recent Research on Number Learning. Eric Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education, Columbus, Ohio.

Kieren, T. (1983). The rational number constructs. Its elements and mechanisms. En T. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning* (pp. 125-149). Columbus, OH: Eric/Smeac.

Kieren, T. (1998). Rational and fractional numbers: from quotient fields to recursive understanding. Recuperado de http://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=cvJ0l6VpEwUC&oi=fnd&pg=PA49&dq=+Kieren+(1988)+&ots=ORz8U42uVX&sig=tbZtdsSTmMGzZW-38u55JwbqQSU#v=onepage&q=Kieren%20(1988)&f=false

Lamadrid, P & valdemoros, M. (2011). Resolución de problemas que implican identificar de manera constante la unidad de referencia: un estudio de caso. Recuperado de http://www.clame.org.mx/documentos/alme24.pdf

Ledezma, E.F. & Valdemoros, M.E. (2008). Reconocimiento de algunas dificultades en la práctica docente sobre la enseñanza de fracciones: estudio de caso. Acta latinoamericana de matemática educativa, 21, 616-627. Comité latinoamericano de matemática educativa.

Leon Perez, J (1998). Procedimientos de niños de primaria en la solución de problemas de reparto. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, julio, año/vol. 1, número 002.Comité Latinoamericano de Matemática Educativa Distrito Federal, México pp. 5-28

Ley general de educación. (1994). Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf

Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón: desde la relación parte todo al razonamiento proporcional. En C. Chamorro (ed.) Didactica de las matemáticas para primaria. Pearson, Madrid.

Llinares, S. & Sánchez, V. (1996). Comprensión de las nociones matemáticas y modos de representación. El caso de los números racionales en estudiantes para profesores de primaria. En Giménez, LLinares & Sánchez (Ed.). El proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la educación matemática. pp. 96-118.

Lineamientos curriculares en matemáticas. (1994). http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/article-116042.html

Martínez, J (2010). Resignificacion de la suma de fracciones. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/2647/1/Resignificaci%C3%B3nSalasAsocolme2012.pdf

Martínez, M. & Abundis, S. (2010). Dificultades en alumnos de Bachillerato al realizar procedimientos con fracciones. Un estudio de casos. México: Tesis de licenciatura sin publicar de la facultad de matemáticas. Universidad Autónoma de Guerrero.

Milevicich, L. & Lois, A. (2010). La resolución de situaciones problemáticas en la formación de profesores. Acta latinoamericana de matemática educativa, 23, 1127-1136. Comité latinoamericano de matemática educativa.

Obando, G., & Múnera, J. J. (2003). Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática. *Revista Educación y Pedagogía* .

Obando, G.; Vanegas, M. D. & Vásquez, N. L. (s. f.). Módulo 1. Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos. Diploma en Desarrollo de Competencias Básicas en Matemáticas en la Educación Básica y Media del Departamento de Antioquia. Serie Didáctica de las Matemáticas. Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia.

Obregón, I. (2007). Magia y belleza de las matemáticas y algo de su historia. Bogotá: Intermedio Editores.

Olguín, E.M. & Valdemoros, M.E. (2009). Reparto con fracciones: estrategias de resolución. Acta latinoamericana de matemática educativa, 22, 789-799. Comité latinoamericano de matemática educativa.

Olguín, E.M. & Valdemoros, M.E. (2011). Dos casos referidos al reparto con fracciones. Acta latinoamericana de matemática educativa, 24, 575-585. Comité latinoamericano de matemática educativa.

Ohlsson, S., (1980). Mathematical Meaning and Applicational Meaning in the Semantics of Fractions and Related Concepts .Learning Research and Development Center University of Pittsburgh.

Palarea, M. M., Ruano, R. M. &Socas, M. M. &. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. PNA 2 (2),61-74.

Pifarré, M. & Sanuy Burgués, J. (2010). El Aprendizaje de Estrategias de Resolución de Problemas con Una hoja de Cálculo.

Pochulu, M.D.(2005). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. Revista Iberoamericana de Educación (ISSN: 1681-5653). Recuperado de http://www.rieoei.org/deloslectores/849Pochulu.pdf

Polya, G. (1). (1965). Como plantear y resolver problemas. México: editorial trillas.

Puig, L. (1996). Elementos de resolución de problemas. Granada: Comares.

Pruzzo de Di Pego, Vilma. (2012). Las fracciones: ¿problema de aprendizaje o problemas de la enseñanza? *Revista Pilquen*, Sección Psicopedagogía, 8. Recuperado de http://www.revistapilquen.com.ar/Psicopedagogia/Psico8/8_Pruzzo_Fracciones.pdf

Siñerez, L. (2002). La enseñanza de la resolución de problemas de regla y compás. Revista latinoamericana de Matemática educativa.5 (1), 79-101. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33505104

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas .Cap. 3, 69-108, en Kilpatrick, J.; Gómez, P., y Rico, L.: Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica, Méjico. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/486/1/RicoL95-100.PDF

Rodriguez, E. (2005), metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico. Memoria presentada para optar al grado de Doctor. Madrid, 2005.ISBN: 84-669-2873-1

Ruiz, E. F. & Valdemoros, M. (2006). "Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: El caso de Paulina". Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9(2), 299-324.

Sanmartí, N. (2007). 10 ideas clave: evaluar para aprender. Barcelona. GRAÓ.

Santos Trigo, M. (2008). La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Cinvestav-IPN. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1193/

Socas, M.M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. Cap. V, 125-154. En Rico, L et al: la educación matemática en la enseñanza secundaria. Barcelona: horsori. Recuperado de http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2095380. 1

Socas, M.M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. Investigación en educación matemática (pp. 19-52). San Cristóbal de la Laguna, Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1247/

Tamayo, O. et al. (2011). La clase multimodal y la formación y evolución de conceptos científicos a través del uso de tecnologías de la información y la comunicación. Manizales: Artes Gráficas Tizan Ltda.

Tellez, A., (2010). Secuencias didácticas ABP para principios de la dinámica y leyes de newton en bachillerato. Tesis para Obtener el título de maestra en ciencias en física educativa. México, D. F., Mayo de 2010.

Valdemoros, M. & Ruíz, E. (2008). El caso de Lucina para el estudio de las fracciones en la escuela de adultos. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *RELIME*, *11*(1), 127-157. Recuperado de http://dialnet.unirioja.es/servlet/listaarticulos?tipo_busqueda=EJEMPLAR&revista_busqueda=7978&clave_busqueda=184563

Varettoni, M & Elichiribehety, I. (2010). Los registros de representaciones que emplean docentes de Educación Primaria: un estudio exploratorio; *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias.* 5(2). Recuperado de http://www.scielo.org.ar/scielo.php?pid=S1850-66662010000200005&script=sci_arttext

Vasco, C. E. (1994) Archipiélago Fraccionario. Lineamientos curriculares

Vasco, C. E. (2010). Problemas y retos de la educación por competencias en las matemáticas de 5° grado. Conferencia en el acto de lanzamiento de la fase piloto del Programa de Mejoramiento de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en Barranquilla. Universidad del Norte, Barranquilla, junio 22 de 2010.

Vergnaud, G. (1983). Estructuras multiplicativos. En R. Lesh y M. Landau, Eds,. *Adquisición de conceptos y procesos matemáticos.* Nueva York: Academic Press.

VILLANOVA, S. (S,F). EL PAPEL DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EL APRENDIZAJE. *REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN*. RECUPERADO DE HTTP://WWW.RIEOEI.ORG/DELOSLECTORES/203VILANOVA.PDF

ANEXOS

Anexo A

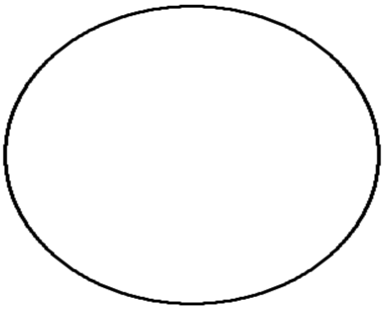
Instrumento 1

Colegio: ____

Nombre _________________________________ Edad ________

En esta guía encontrarás algunas situaciones relacionadas con los números racionales, espero que las resuelvas en la forma que consideres conveniente:

1. Doña Teresa desea repartir un pastel que compro entre ella y sus cuatro hijos. ¿Qué fracción del pastel le corresponde a cada uno?



Explico la manera de como realice el proceso para encontrar la cantidad de pastel que le toca a cada uno

2. Don Luis tiene 7 pastelitos, los cuales desea repartir entre sus cinco hijos. ¿Qué porción de pastelito le corresponde a cada hijo?

Explico la manera de como realice el proceso para encontrar la cantidad de pastelito que le corresponde a cada uno.

Y si don Luis también quisiera comer pastelito ¿Qué porción le tocaría?

Explico la manera de como realice el proceso para encontrar la cantidad de pastelito que le corresponde a Don Luis.

3. Un tanque lleno de agua con capacidad de 2000 litros empieza a vaciarse de la siguiente manera:

a) El primer día se vació la quinta parte.
b) El segundo día se vació la cuarta parte de lo que quedaba.
c) El tercer día se vació las dos cuartas partes de lo que quedaba.
¿Qué cantidad de agua queda en el tanque en el cuarto día?

Utiliza el espacio para dibujar la medida en la cual disminuye el balde cada día.

Explico la manera de como realice el proceso para encontrar la cantidad de agua que queda en el cuarto día.

4. El consumo de agua en un día caluroso por cada cuatro personas es de 5,5 Litros. En iguales condiciones; ¿cuántos Litros de agua consumirían 13 personas? Y ¿16 personas?

Explico la manera de como realice el proceso para encontrar la cantidad de agua que consumen 13 y 16 personas.

5. ¿Cuántos vasos de un cuarto de Litro se necesitan para llenar un recipiente de 4 Litros?;
Dibuja los vasos de un cuarto de litro que son necesarios para llenar el recipiente de cuatro litros.

Explico la manera de como realice el proceso para encontrar la cantidad de vasos que son necesarios para llenar un recipiente de cuatro litros.

Y si el recipiente fuera de 10 Litros, ¿cuántos vasos de un cuarto de Litro se necesitarían para llenarlo? Dibuja los vasos de un cuarto de litro que son necesarios para llenar el recipiente de 10 litros.

Explico la manera de como realice el proceso para encontrar la cantidad de vasos que son necesarios para llenar un recipiente de 10 litros.

____
____
____
____
____
____
____

MUCHAS GRACIAS POR TU PARTICIPACION.

Fotos tomadas de Google imágenes

Anexo B

Instrumento 2

Colegio: ____

Nombre ____________________________________ Edad ________

En esta guía encontrarás algunas situaciones relacionadas con los números racionales, espero que las resuelvas en la forma que consideres conveniente:

1. Don Jesús desea repartir una hectárea de tierra entre sus cuatro hijos. ¿Qué cantidad le corresponde a cada hijo?

Explico la manera como hice la repartición de la hectárea

____

____

____

____

____

2. Doña María lleva tres panes a su casa para comer en el desayuno, si ella desea repartir los panes entre ella y sus cuatro sobrinos. ¿Qué porción de pan le corresponde a cada uno?

Explico la manera como hice la repartición de los panes

____

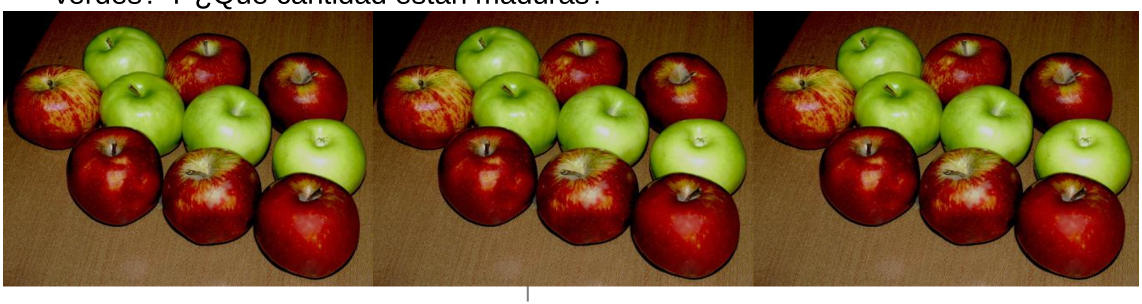
____

____

____

____

3. Don Mario compro 30 manzanas entre verdes y maduras. Si las tres quintas partes de las manzanas están maduras. ¿Qué cantidad de manzanas están verdes? Y ¿Qué cantidad están maduras?



Explico la manera de como realice el proceso para encontrar la cantidad de manzanas verdes y las manzanas maduras.

4. Si galón y medio de gasolina cuesta $ 13.500. ¿Cuánto cuesta un galón de gasolina?

Explico la manera de como realice el proceso para encontrar el precio de un galón de gasolina

Con la información anterior. ¿Cuánto costarían cuatro galones y medio? Y ¿seis galones?

Explico la manera de como realice el proceso para encontrar el precio de cuatro galones y seis galones de gasolina

5. Cuando Jorge camina normalmente, sus pasos tienen una longitud en promedio de tres quintos de metro. En un día normal, Jorge camina 4Km. ¿Cuántos pasos da Jorge en un día normal?

Explico la manera de como realice el proceso para encontrar cuantos pasos da Jorge, en un día normal.

Con la información anterior. Si Jorge camina 6Km. ¿Cuántos pasos da?

Explico la manera de como realice el proceso para encontrar cuantos pasos da Jorge, si camina 6 kilómetros.

MUCHAS GRACIAS POR TU PARTICIPACION.

Fotos tomadas de Google imágenes

Anexo C

Instrumento 3

Colegio: ____

Nombre __________________________________ Edad ________

En esta guía encontrarás algunas situaciones relacionadas con los números racionales, espero que las resuelvas en la forma que consideres conveniente:

6. 6 amigos van a un restaurante, en el cual ordenan una pizza. ¿qué porción de pizza le corresponde a cada uno?

Explico la manera como hice la repartición de la pizza.

7. Laura quiere repartir cuatro chocolatinas entre sus cinco amigas. ¿qué cantidad de chocolatina recibe cada una de las amigas de Laura?
   Dibuja la forma en cómo se repartirían las 4 chocolatinas.

Explico la manera como hice la repartición de la chocolatina

Si Laura también quisiera comer chocolatina con sus amigas. ¿Qué cantidad de chocolatina debería recibir cada una?

Explico la manera como hice la repartición de la chocolatina

8. Don Leonardo recibe un salario mensual de $ 600.000, el cual distribuye de la siguiente manera:
   a) La tercera parte para arrendamiento.
   b) De lo que queda las dos cuartas partes para alimentación.
   c) De lo que queda las dos quintas partes para servicios.
   d) De lo que queda la mitad para transporte.

   ¿Qué cantidad de dinero gasto en cada cosa? Y ¿cuánto dinero le quedo?

Explico la manera de como realice el proceso para encontrar la cantidad de dinero que gasto don Leonardo

9. Por trabajar seis horas diarias, Leonardo recibe un salario mensual de $ 500.000. ¿cuántas horas debe trabajar, para recibir un salario de $ 600.000?

Explico la manera de como realice el proceso para encontrar la cantidad de horas que debe trabajar Mario, para recibir un salario de $600.000.

Con la información anterior. ¿Cuántas horas debería trabajar Leonardo para recibir un salario de $800.000?

Explico la manera de como realice el proceso para encontrar la cantidad de horas que debe trabajar Mario, para recibir un salario de $800.000.

10. ¿Cuántas botellas de tres cuartos de litro, son necesarias para llenar un recipiente de 10 litros?, dibuja la cantidad de botellas.

Explico la manera de como realice el proceso para encontrar la cantidad de botellas necesarias para llenar el recipiente de 10 litros.

Con la información anterior, que cantidad de botellas de tres cuartos de litro son necesarias para llenar un recipiente de 20 litros?

Dibuja la cantidad de botellas necesarias de tres cuartos de litro.

Explico la manera de como realice el proceso para encontrar la cantidad de botellas necesarias para llenar el recipiente de 20litros.

MUCHAS GRACIAS POR TU PARTICIPACION

Fotos tomadas de Google imágenes

Anexo D

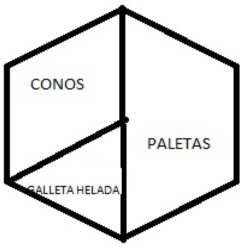
Instrumento 4

Colegio: ____

Nombre _________________________________ Edad ________

En esta guía encontrarás algunas situaciones relacionadas con los números racionales, espero que las resuelvas en la forma que consideres conveniente:

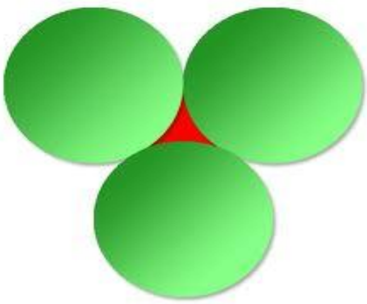
11. El siguiente diagrama representa las preferencias de un grupo de estudiantes con relación a los helados. Con relación a la información. ¿que fracción de estudiantes prefieren paletas?
    Y ¿qué fracción de estudiantes prefieren galleta helada?





Explico la manera que utilice para encontrar la fracción de estudiantes que prefieren galleta helada y la fracción de estudiantes que prefieren paletas.

12. Lucia, compra tres pizzas grandes para una reunión familiar a la cual asistirán 11 de sus familiares. Si lucia, debe repartir las pizzas. ¿qué cantidad de pizza le debe dar a cada familiar? Dibuja la forma en cómo se repartirían las tres pizzas.

Explico la manera como hice la repartición de las pizzas.

Si Lucia también quisiera comer pizza con sus familiares. ¿Qué cantidad de pizza debería recibir cada persona?

Explico la manera como hice la nueva repartición de la pizza

13. Jorge desea viajar a Manizales en bus desde la ciudad de Pereira. El bus emplea un tiempo de tres cuartos de hora en llegar, viajando a una velocidad de 60 Km por hora. ¿ que distancia rrecorre el bus desde Pereira hasta Manizales?.

Explico la manera de como realice el proceso para encontrar la distancia que recorre el bus desde la ciudad de Pereira hasta Manizales.

14. Se realiza una encuesta en un colegio, con relación a las preferencias de los estudiantes, acerca de los deportes que ellos practican.

DEPORTES	CANTIDAD DE ESTUDIANTES
VOLEIBOL	90
FUTBOL	60

BALONCESTO	20

Con la información anterior encontrar:

a. La relación entre los estudiantes que practican voleibol y futbol.

b. La relación entre los estudiantes que practican futbol y baloncesto.

Explico la manera de como realice el proceso para encontrar la relación entre los estudiantes que practican voleibol y futbol.

Explico la manera de como realice el proceso para encontrar la relación entre los estudiantes que practican futbol y baloncesto.

15. María lleva para su fiesta de cumpleaños 5 litros de helado, si desea servir el helado en vasos de un noveno (1/9) de litro ¿Cuántos vasos puede llenar?

Dibuja la cantidad de vasos que debe utilizar maría para servir los 5 litros de helado.

Explico la manera de como realice el proceso para encontrar la cantidad de vasos necesarias para servir los cinco litros de helado.

MUCHAS GRACIAS POR TU PARTICIPACION

Fotos tomadas de Google imágenes