

LAS ACTIVIDADES COGNITIVAS DE TRATAMIENTO Y CONVERSIÓN DE LAS  
REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS  
CONTEXTUALES RELACIONADOS CON EL CONCEPTO DE FUNCIÓN CUADRÁTICA

Gladys Escobar Hoyos

Manizales, Julio 14 de 2016

Universidad Autónoma de Manizales

Departamento de Educación

Maestría en Enseñanza de las Ciencias

Tesis de maestría

**LAS ACTIVIDADES COGNITIVAS DE TRATAMIENTO Y  
CONVERSIÓN DE LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN LA  
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CONTEXTUALES RELACIONADOS  
CON EL CONCEPTO DE FUNCIÓN CUADRÁTICA**

Investigación realizada en el marco de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias de la Universidad Autónoma de Manizales, por Gladys Escobar Hoyos, bajo la dirección de Dra Delma Ospina García

Manizales, Julio 14 de 2016

## **DEDICATORIA**

*Dedico esta tesis a mis padres y hermanos quienes me apoyaron todo el tiempo.*

*A mi esposo Leonardo quien me alentó para continuar.*

*A todos los que me colaboraron a escribir y concluir esta tesis.*

## **AGRADECIMIENTOS**

*Quiero expresar mi más profundo y sincero agradecimiento a todas aquellas personas que con su ayuda han colaborado en la realización del presente trabajo, en especial a mis padres, hermanos, y esposo por la motivación y el apoyo recibido a lo largo de estos años.*

*Especial reconocimiento merece el interés mostrado por mi trabajo y las sugerencias recibidas por la asesora de tesis Dra. Delma Ospina García.*

## TABLA DE CONTENIDO

### Contenido

<b>ABSTRACT.....</b>	<b>10</b>
<b>INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>11</b>
<b>CAPÍTULO 1 .....</b>	<b>13</b>
1.1 JUSTIFICACIÓN.....	13
1.2 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA.....	14
1.3 OBJETIVOS.....	15
1.3.1 OBJETIVO GENERAL.....	14
1.3.1 OBJETIVO ESPECÍFICOS.....	14
<b>CAPÍTULO 2 .....</b>	<b>16</b>
<b>REFERENTE CONCEPTUAL .....</b>	<b>16</b>
2.1 ANTECEDENTES.....	16

2.1.1 Caracterización de tratamientos y conversiones: el caso de la función afín en el marco de las aplicaciones (2007).....	15
2.1.2: Modelación usando función cuadrática: Experimentos de enseñanza con estudiantes De 5to de secundaria. (2012).....	16
2.1.3 Guiomar González Chica en su tesis de maestría en enseñanza de las ciencias titulada: Tratamiento de las representaciones semióticas de la función cuadrática. (2011).	17
2.1.4 Representaciones mentales sobre los problemas matemáticos en niños de 4º grado de básica primaria. (2006).....	18
2.1.5 Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal. (2012).....	19
<b>2.2 REFERENTE TEÓRICO .....</b>	<b>22</b>
2.2.1 Teoría de las Representaciones semióticas.....	23
2.2.2 Resolución de Problemas.....	28
2.2.3 Función Cuadrática.....	33
<b>CAPÍTULO 3 .....</b>	<b>36</b>
<b>DISEÑO METODOLÓGICO .....</b>	<b>36</b>
3.1 METODOLOGÍA.....	36
3.2 DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN .....	36
3.3 PROCEDIMIENTO .....	37
3.4 UNIDAD DE ANÁLISIS.....	38
3.5 UNIDAD DE TRABAJO .....	38
3.6 INSTRUMENTOS Y TÉCNICAS PARA LA RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN .....	38
<b>CAPÍTULO 4 ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN .....</b>	<b>45</b>

4.1 HALLAZGOS DEL INSTRUMENTO DE IDEAS PREVIAS .....	45
4.2 Hallazgos del instrumento post test.....	66
<b>CONCLUSIONES.....</b>	<b>74</b>
<b>RECOMENDACIONES .....</b>	<b>77</b>
<b>REFERENCIAS.....</b>	<b>78</b>
<b>ANEXO 1 .....</b>	<b>84</b>

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Resultados instrumento de ideas previas Problema 1.....	<a href="#">45</a>
Tabla 2 Resultados instrumento de ideas previas Problema 2.....	<a href="#">54</a>
Tabla 3 Resultados instrumento de ideas previas Problema 3. <b>¡Error! Marcador no definido.</b>	<a href="#">58</a>
Tabla 4 Resultados instrumento Post - Test Problema en contexto que privilegia la conversión verbal – algebraica. ....	<b>¡Error! Marcador no definido.</b> <a href="#">63</a>
Tabla 5 Resultados instrumento Post - Test Problema en contexto que privilegia la conversión tabular – gráfica .....	<b>¡Error! Marcador no definido.</b> <a href="#">67</a>
Tabla 6 Resultados instrumento Post - Test Problema en contexto que privilegia el tratamiento algebraico.....	<b>¡Error! Marcador no definido.</b> <a href="#">70</a>
Tabla 7 Expresión polinomial de la función cuadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ .....	95

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Transformaciones gráficas en el plano .....	35
Figura 2 Diseño de la investigación.....	37
Figura 3 Actividad: Comprendo el problema .....	41
Figura 4 Solución de problema en contexto que privilegia la conversión verbal – algebraica .....	<b>¡Error! Marcador no definido.....62</b>
Figura 5 Solución de problema en contexto que privilegia la conversión tabular – gráfica. <b>¡Error!</b> <b>Marcador no definido.67</b>	
Figura 6 Solución de problema en contexto que privilegia el tratamiento algebraico. <b>¡Error!</b> <b>Marcador no definido.70</b>	
Figura 7 Puntos principales de una parábola vertic .....	<b>¡Error! Marcador no definido.91</b>
Figura 8 Construcción de la tabla de valores .....	92
Figura 9 Puntos de la gráfica de la función $y = -x^2 - 2$ .....	<b>¡Error! Marcador no definido.93</b>
Figura 10 Gráfica resultante de la función $y = -x^2 - 2$ .....	<b>¡Error! Marcador no definido.94</b>
Figura 11 Parábolas típicas que representan las funciones cuadráticas <b>¡Error! Marcador no definido.96</b>	
Figura 12 Puntos característicos hallados de la función $f(x) = x^2 + 2x + 1$ <b>¡Error! Marcador no definido.98</b>	
Figura 13 Gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x + 1$ .....	<b>¡Error! Marcador no definido.98</b>

## RESUMEN

La presente investigación busca establecer cómo las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas favorecen la resolución de problemas contextuales relacionados con el concepto de función cuadrática, a través de la aplicación de una unidad didáctica que contiene aspectos puntuales sobre la función cuadrática y sus representaciones con aplicación directa en problemas que favorecen el tratamiento y conversión de sus registros de representación, el análisis de los resultados se realizó cualitativamente a la luz de la teorías sobre representaciones semióticas y resolución de problemas. Se concluye que definitivamente la movilidad y tratamiento entre las representaciones semióticas de la función cuadrática son útiles al momento de resolver problemas en contexto que requieran el planteamiento de alguno de sus registros de representación.

**Palabras Clave:** Función cuadrática, representaciones semióticas, Resolución de problemas, actividades cognitivas, tratamiento y conversión.

## ABSTRACT

This research seeks to establish how cognitive processing activities and conversion of semiotic representations towards solving contextual problems related to the concept of quadratic function, through the implementation of a teaching unit containing specific aspects of the quadratic function and its representations with direct application problems that favor conversion treatment and its representation registers, analysis results are qualitatively made in light of the theories semiotic representations and problem solving. It is concluded that definitely mobility and treatment between semiotic representations of the quadratic function are useful when solving problems in context that require the approach of any of their representation registers.

**Keywords:** quadratic function, semiotic representations, Problem solving, cognitive activities, treatment and conversion.

## INTRODUCCIÓN

En la enseñanza de las matemáticas es reconocida la importancia de incluir en los currículos la resolución de problemas puesto que es fundamental que los educandos reconozcan el mundo tal y como es, además de relacionar en su contexto los conceptos matemáticos. Así lo afirma Doorman et al. Citado por Santos (2007):

Problemas contextuales bien seleccionados ofrecen oportunidades para que los estudiantes desarrollen estrategias de solución informales, altamente contextualizadas, y se utilizan en la construcción de conceptos matemáticos...el contexto puede aún ser no realista o [ubicarse] dentro de las matemáticas, si el desarrollo del concepto lo requiere. Sin embargo, el contexto del problema debe ser experimentado como real por los estudiantes. El mundo real se utiliza como un dominio en el cual podemos usar nuestros conceptos matemáticos en la forma que deseemos. (p. 406-407).

Por otro lado, los conceptos matemáticos, a diferencia de los conceptos propios de muchas disciplinas, no se pueden abordar directamente con los sentidos, por lo que se requieren formas que los representen. Duval (1999) afirmó que los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción humana o de una experiencia intuitiva inmediata (p. 174).

Mesa y Villa (2008), destacan el hecho de que el estudio de las ecuaciones, cónicas, cinemática y las funciones fueron históricamente cimentando la noción de función cuadrática, estos elementos, son necesarios tomar en cuenta al momento de pensar en una propuesta didáctica del concepto de función cuadrática. Además se señala que el concepto de función cuadrática estuvo históricamente vinculado a la modelación de fenómenos de variación y cambio.

Según las perspectivas anteriores se propone el estudio sobre los procesos cognitivos que llevan a la resolución de problemas auténticos sobre función cuadrática que permita analizar las dificultades y los alcances, e incorporar a los sistemas de representación, a la visualización y la modelación como importantes elementos de la enseñanza.

Este trabajo propone identificar y analizar la resolución de problemas contextuales que requieren la formulación de una función cuadrática y determinar cómo las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las diferentes representaciones semióticas pueden contribuir al desarrollo exitoso de los problemas y a la aprehensión del conceptual del objeto matemático.

El presente informe se divide en cuatro capítulos. En el primer capítulo se establecen el problema, la justificación y los objetivos del estudio. En el segundo capítulo se presentan los referentes conceptuales, entre ellos los antecedentes y los referentes teóricos que incluyen la teoría de las representaciones semióticas, generalidades sobre la función cuadrática y sobre la resolución de problemas matemáticos en contexto. Partiendo de los elementos teóricos se realizó el diseño de los instrumentos de investigación y se realizó el análisis de los mismos. El tercer capítulo describe la metodología utilizada para la investigación incluyendo una descripción de los instrumentos de investigación en los tres momentos en los cuales se realizó el estudio. El cuarto capítulo contiene el análisis de los resultados obtenidos de la aplicación de los instrumentos y las conclusiones derivadas de dichos análisis junto con las recomendaciones para estudios posteriores.

# CAPÍTULO 1

## JUSTIFICACIÓN, PLANTEAMIENTO EL PROBLEMA Y OBJETIVOS

### 1.1 JUSTIFICACIÓN

En el proceso de enseñanza de la matemática en los ciclos de básica secundaria y media se evidencian las dificultades que los estudiantes presentan al momento del aprendizaje de las funciones, además los retos que plantea la calidad de la educación en torno a la contextualización de los saberes para fomentar la formación de ciudadanos competentes en la resolución de los problemas sociales desde todos los campos, lo que es un indicativo para plantear investigaciones en torno a la construcción del concepto de función, resolución de problemas y la búsqueda estrategias adecuadas de enseñanza.

Es conocido que en el estudio de la matemática, los problemas que se basan en los datos tomados de los fenómenos reales adquieren cada día mayor importancia puesto que se consideran enfoques integradores basados en actividades que fomentan el pensamiento crítico y el aprendizaje centrado en la práctica a través de afrontar problemas significativos situados en el contexto de distintas comunidades.

Con la investigación que se pretende desarrollar se espera construir un modelo didáctico de enseñanza de funciones cuadráticas en el marco de los problemas auténticos y sus representaciones semióticas, que contribuya a desarrollar habilidades en los estudiantes para realizar diversas representaciones de los fenómenos a estudiar y encontrar la solución más adecuada a los problemas; este trabajo puede llegar a ser insumo para nuevas investigaciones que busquen dilucidar los procesos de construcción y aprendizaje de los conceptos y objetos matemáticos para la elaboración de estrategias de enseñanza en básica secundaria y media.

## 1.2 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

En la investigación de la didáctica de la matemática es necesario determinar todos aquellos factores que influyen en el proceso de enseñanza y aprendizaje con el fin de desarrollar modelos que permitan que estos procesos consigan los objetivos que se persiguen como el desarrollo del pensamiento reflexivo y de la capacidad de transformación positiva de los contextos en los educandos.

Se propone analizar los problemas auténticos a través de las funciones cuadráticas y sus diferentes representaciones semióticas de tal manera que se determine el papel que dichas representaciones desempeñan al momento del aprendizaje del concepto y cómo pueden facilitar la comprensión y resolución de los problemas que se les planteen.

Las investigaciones sobre cómo los estudiantes incorporan los conocimientos matemáticos en sus estructuras cognitivas se consideran a la luz de su complejidad como lo afirman Godino y Batanero (1996):

La matemática es una actividad humana que se interesa por la resolución de situaciones problemáticas, ya sean del mundo físico, social o del propio dominio de la misma. Como respuestas a estos problemas emergen los objetos matemáticos, los cuales evolucionan progresivamente.

Dado lo anterior los objetos matemáticos que pueden estar representados de diferentes formas y se relacionan con las dificultades que se puedan presentar al momento de iniciar la comprensión de cualquier concepto, por esta razón es importante realizar estudios que dilucidan y generen estrategias que conduzcan a desarrollar e implementar didácticas en el aula de clase que contribuyan a la apropiación y aplicación en contexto de los saberes matemáticos por parte de los estudiantes.

Por lo expuesto anteriormente se define la pregunta problema:

¿Cómo las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas favorecen la resolución de problemas contextuales relacionados con el concepto de función cuadrática?

### **1.3 OBJETIVOS**

#### **1.3.1 Objetivo general**

Establecer cómo las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas favorecen la resolución de problemas contextuales relacionados con el concepto de función cuadrática.

#### **Objetivos específicos**

- Identificar los obstáculos que los estudiantes participantes del estudio presentan al momento de resolver problemas contextuales relacionados con la función cuadrática.
- Determinar el papel que desempeñan las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función cuadrática.
- Reconocer la incidencia que tienen las representaciones semióticas del concepto de función cuadrática y sus actividades cognitivas en la resolución de problemas.

## CAPÍTULO 2

### REFERENTE CONCEPTUAL

#### 2.1 ANTECEDENTES

Los siguientes son algunos estudios que relacionan las categorías que se tratan en el presente trabajo

2.1.1 Sandra Isabel Gutiérrez y Diego Aparicio, en su tesis de maestría en docencia de la matemática titulada: *Caracterización de tratamientos y conversiones: el caso de la función afín en el marco de las aplicaciones* (2007).

El problema de investigación que se plantea en el estudio se centra en los tratamientos y conversiones que hacen los estudiantes cuando se les propone una situación de variación en registro verbal que se modela mediante la función afín y que no explicita el registro de llegada.

Dentro de sus objetivos se plantea:

- Describir e interpretar los tratamientos y conversiones que hacen algunos estudiantes de cálculo diferencial de la Escuela Colombiana de Ingeniería, en situaciones de variación que tienen las siguientes características:

- Analizar la presentación de la función afín en los textos guía de acuerdo a dos aspectos, el primero asociado con el uso de los diferentes registros de representación y el segundo con los elementos de la variación que se promueven.

El Contexto teórico e investigativo está relacionado con el estudio *de* las producciones escritas de un equipo de estudiantes de cálculo diferencial, para caracterizar las transformaciones que realizan en tres situaciones que se modelan con la función afín y que han sido diseñadas con características especiales.

La metodología desarrollada en la investigación es cualitativa interpretativa.

Los principales resultados y conclusiones muestran entre otros un bajo nivel de articulación entre registros de representación, así como en la utilización de la función lineal como herramienta en la solución de problemas asociados a la variación. (Gutiérrez, S.I. y Aparicio, D., 2007).

Este estudio es valioso desde el punto de vista de las representaciones que se desean tratar en la presente investigación, puesto que aporta elementos importantes en la comprensión de la

actividad cognitiva de conversión entre las representaciones que puedan existir en este caso de la función afín, muy aplicables también para el estudio de la función cuadrática, pues sus clases de registros son los mismos que los de la función lineal.

2.1.2 Enrique Huayapa Gómez, en su tesis de maestría en enseñanza de las matemáticas titulada: Modelación usando función cuadrática: Experimentos de enseñanza con estudiantes De 5to de secundaria. (2012)

El problema de investigación que se plantea en el estudio se basa en la existencia de estudiantes con dificultades para resolver problemas matemáticos y en general para modelar situaciones-problema y/o fenómenos que suceden en su vida cotidiana, asimismo muchos de los estudiantes están familiarizados con la tecnología pero la usan frecuentemente para el entretenimiento y comunicación.

Dentro de sus objetivos se plantea:

- Diseñar una propuesta basada en experimentos de enseñanza, utilizando el graficador FUNCIONSWIN32 y EXCEL, que favorezca el aprendizaje del concepto de función cuadrática y que permita al alumno transitar entre diversas representaciones al modelar situaciones-problema.
- Construir actividades mediadas por EXCEL y FWIN32, considerando situaciones-problema, que faciliten las actividades de modelación, que permitan y promuevan el uso y conexiones entre diversas representaciones, para un adecuado aprendizaje de la función cuadrática.
- Analizar las representaciones que construye y coordina el estudiante modela situaciones-problema, durante el aprendizaje de la función cuadrática.

El Contexto teórico e investigativo está relacionado con el diseño de una propuesta basada en experimentos de enseñanza, utilizando el graficador funcionswin32 y excel, que favorezca el aprendizaje del concepto de función cuadrática y que permita al alumno transitar entre diversas representaciones al modelar situaciones-problema

La metodología desarrollada en la investigación es una metodología cualitativa, basada en la realización de experimentos de enseñanza.

El autor concluye que existen evidencias que los estudiantes, apoyados por excel y el graficador funcionswin32 realizan prácticas de modelación de situaciones problema, haciendo uso de

diversas representaciones, lo cual incide favorablemente en el aprendizaje y comprensión del concepto de función cuadrática. (Huayapa, E., 2012).

Esta investigación aporta elementos importantes tanto en los conceptos de representación de la función cuadrática, cómo contribuyen dichas en la comprensión del concepto y principalmente la gran aplicación que tiene la ecuación cuadrática para la modelación de fenómenos físicos y cotidianos, lo cual es fundamental para el enfoque de problemas auténticos y contextuales en el presente trabajo.

2.1.3 Guiomar González Chica en su tesis de maestría en enseñanza de las ciencias titulada: Tratamiento de las representaciones semióticas de la función cuadrática. (2011)

El problema de investigación que se plantea en el estudio consiste en que muchos alumnos no llegan a reconocer el mismo objeto matemático a través de sus diferentes representaciones semióticas posibles. Cuando la variedad de los tipos de representaciones utilizadas no provienen de un mismo registro, la conversión entre las distintas representaciones de un mismo objeto presenta graves dificultades.

Dentro de sus objetivos se plantea:

- Describir el tratamiento de las representaciones semióticas de la función cuadrática que realizan los estudiantes de grado 902 del Instituto Agropecuario Veracruz.
- Identificar las unidades significantes de las representaciones semióticas de la función cuadrática, en registro algebraico, registro gráfico y registro verbal.
- Describir y analizar el tratamiento de las representaciones semióticas realizado por los estudiantes de grado 902 del Instituto Agropecuario Veracruz mediante registro algebraico, registro gráfico y registro verbal, en contraste con la Teoría de Raymond Duval y afines.

El Contexto teórico e investigativo describe y analiza el tratamiento de las representaciones semióticas utilizadas por los estudiantes del grado noveno mediante los registros algebraico, gráfico, verbal en contraste con las teorías de Raymond Duval.

La metodología desarrollada en la investigación es una metodología descriptiva que sustenta las dificultades halladas en el tratamiento de las representaciones semióticas de la función cuadrática, mediante el diagnostico fundamentado en la teoría de las representaciones semióticas de Raymond Duval.

La autora concluye que las estrategias pedagógicas empleadas por los docentes favorecen los tratamientos cuasi-instantáneos que van con su propio bagaje conceptual y que los estudiantes con frecuencia recurren a representaciones algebraicas o auxiliares. (González, G. 2011).

Una de las categorías que pretende abordar la presente investigación es el tratamiento de las representaciones de la función cuadrática, el anterior trabajo contribuye a facilitar referentes teóricos al respecto de los tratamientos y a dilucidar las posibles dificultades que se pueden presentar al momento de ejecutar las actividades de la unidad didáctica.

2.1.4 Guarín Ramírez, María Andrea y Ríos Valencia, Gloria del Socorro. En su tesis de maestría: Representaciones mentales sobre los problemas matemáticos en niños de 4° grado de básica primaria. (2006)

El problema de investigación que se plantea en el estudio es comprender el procedimiento utilizado por los estudiantes de cuarto grado para resolver problemas y cómo representan todo el proceso para alcanzar la solución.

Dentro de sus objetivos se plantea:

- Comprender en los niños de cuarto grado las representaciones que se hacen sobre los problemas matemáticos que se les plantea en el aula de clase y aquellos que ellos mismos se formulan.
- Identificar las representaciones mentales que presentan los niños y niñas de cuarto grado en los problemas matemáticos.
- Conocer la relación que se establece entre los tipos de problemas y las representaciones que se hacen los niños y las niñas.
- Describir los medios representacionales que utilizan los niños y las niñas para resolver sus problemas matemáticos.

El Contexto teórico e investigativo se lleva a cabo a través del desarrollo de un instrumento de aplicación con el fin de observar las representaciones que tienen ellos de los problemas, cómo los crean a partir de sus representaciones, y cuáles son las representaciones en la resolución de problemas matemáticos.

La metodología desarrollada en la investigación es una metodología cualitativa ya que busca comprender cuáles son las representaciones mentales que tienen los estudiantes en la resolución

de problemas. La metodología utilizada es un estudio de caso puesto que se escoge una población de 10 estudiantes, para un análisis más detallado.

Con la investigación se concluye que para determinar cuáles son las representaciones mentales para la resolución de problemas es importante la evidencia a partir de las representaciones semióticas. (Guarín, M.A. y Ríos, G., 2006).

La investigación anterior contiene aspectos importantes relacionados con la teoría de resolución de problemas, teniendo en cuenta la teoría de Polya (1985), con sus fases en la resolución de problemas, planteando un cuestionario que permite comprender cómo los estudiantes llevan a cabo dicho proceso. Para la presente investigación es esencial tener en cuenta tales aportes con el fin de construir las preguntas que permitan alcanzar el objetivo general de comprensión del fenómeno a estudiar.

2.1.5 Delma Ospina García, en su tesis de maestría en enseñanza de las ciencias titulada: Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal. (2012)

El problema de investigación que se plantea en el estudio parte de que es necesario que el estudiante reconozca la diferencia entre el concepto de función, en este caso la función lineal y sus representaciones en los diferentes registros, por ello es indispensable que identifique sus unidades significantes, encuentre la correspondencia de las unidades de una representación con respecto a las unidades estructurales de la otra representación y haga conversiones de una representación semiótica a otra en diferentes registros.

Dentro de sus objetivos se plantea:

- Comprender las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas que realizan los estudiantes cuando se enfrentan a la solución de situaciones propias del concepto de función lineal.
- Identificar el papel que cumple el tratamiento y la conversión de representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de Función Lineal.
- Reconocer las actividades cognitivas de tratamiento y conversión que realizan los estudiantes de las representaciones semióticas del concepto matemático Función Lineal.

- Identificar el aporte de otros aspectos didácticos que posibilitan el tratamiento y la conversión de representaciones semióticas en el concepto de Función Lineal.

El Contexto teórico e investigativo en el que se enmarca la investigación es la teoría semiótica de las representaciones desarrollada por Duval (1999). Este referente permite comprender cómo se da la conceptualización de los objetos matemáticos, de qué manera intervienen las actividades cognitivas de formación, tratamiento y conversión entre representaciones semióticas del concepto

La metodología desarrollada en la investigación es una metodología cualitativa interpretativa, la cual se hace comprensible a partir del diálogo con la teoría, dando sentido a lo que cada estudiante desea expresar.

Con la investigación se confirma la teoría de Duval (2004), donde se plantea que entre más representaciones semióticas se involucren en el aprendizaje de un concepto matemático (en este caso el concepto de función lineal) y al interior de estas representaciones, se faciliten condiciones de congruencia, se alcanza una mejor comprensión, logrando que el estudiante establezca la diferencia entre la representación semiótica del concepto matemático y el objeto matemático representado, discriminar sus unidades significantes y ponerlas en correspondencia en otros registros, ya que el reconocimiento de la invarianza entre estas unidades significantes es la que permite la aprehensión del concepto matemático.. (Ospina, D., 2012).

Esta investigación comprensiva posee un carácter similar a la investigación que se plantea en el presente trabajo, aporta elementos como el abordaje de la teoría de las representaciones semióticas en este caso aplicados al concepto de función lineal, sin embargo las características y operaciones que deben realizarse son similares a la función cuadrática, por lo que este trabajo se establece como una base para el desarrollo de la investigación que se propone.

## **2.2 REFERENTE TEÓRICO**

### **2.2.1. Teoría de las Representaciones semióticas**

Para Duval (1999), es fundamental la identificación de los sistemas de representación de los objetos matemáticos para que pueda darse el proceso de enseñanza aprendizaje

La particularidad del aprendizaje de las matemáticas hace que estas actividades cognitivas requieran de la utilización de sistemas de expresión y de representación distintos a los del lenguaje natural o de las imágenes: variados sistemas de escritura para los números, notaciones simbólicas para los objetos, escrituras algebraica y lógica que toman el estatus de lenguajes paralelos al lenguaje natural para expresar las relaciones y las operaciones, figuras geométricas, representaciones en perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc.

No puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de representación.

Desde esta perspectiva es esencial no confundir jamás los objetos matemáticos, es decir, los números, las funciones, las rectas, etc., con sus representaciones, las escrituras decimales o fraccionarias, los símbolos, los gráficos, los trazados de las figuras, pues un mismo objeto matemático puede darse a través de representaciones muy diferentes. Y esta posibilidad es tan determinante que esta distinción es un tema recurrente en textos dirigidos a los alumnos de octavo grado: es el objeto representado lo que importa y no sus diversas representaciones semióticas posibles. Toda confusión entre objeto y su representación provoca, en un punto más o menos amplio, una pérdida en la comprensión: los conocimientos adquiridos se hacen rápidamente inutilizables por fuera de su contexto de aprendizaje, ya sea por no recordarlos, o porque permanecen como representaciones semióticas de los objetos matemáticos.

En matemáticas, las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma. En efecto, la posibilidad de efectuar transformaciones sobre los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado. Basta considerar el caso del cálculo numérico para convencerse de ello. Los procedimientos, y su costo, dependen del sistema de escritura escogido.

La coordinación entre las representaciones<sup>1</sup> que provienen de sistemas semióticos diferentes no es espontánea. Su puesta en juego no resulta automáticamente de los aprendizajes clásicos directamente centrados en los contenidos de la enseñanza. Un trabajo de aprendizaje centrado en la diversidad de los sistemas de representación, en la utilización de sus posibilidades propias, en su comparación por la puesta en correspondencia y en sus “*traducciones*”<sup>2</sup> mutuas, parece ser lo necesario, para favorecer tal coordinación. Ahora bien cuando se propone tal tipo de trabajo se vislumbra una completa modificación en las iniciativas de los alumnos para efectuar las transformaciones matemáticas y para que la ejecución sea rápida, igualmente se observa que se aumenta el interés en la tarea. No sólo se logran aciertos sino también una modificación en la calidad de las producciones. Este salto cualitativo en el desarrollo de las competencias y de los desempeños aparece ligado a la coordinación de sistemas semióticos en los alumnos.

Por otro lado, la interpretación de las definiciones que comportan una doble cuantificación, la negación de este tipo de enunciados, la conversión de un enunciado de una lengua natural a una lengua formal así como la conversión inversa, constituyen dificultades tales para los estudiantes en la enseñanza de las matemáticas, que el análisis de la articulación entre lengua natural y lengua formal se impone más allá de toda exigencia teórica.

Por ejemplo los problemas de la articulación entre la lengua natural y un sistema de representación semiótico que no cumple ninguna función discursiva y en el cual los mecanismos de interpretación perceptiva parecen devenir predominantes si no suficientes, el de las figuras geométricas. El papel de la articulación en la construcción de conocimientos matemáticos ha suscitado, en el plano epistemológico, opiniones contradictorias, y su utilización en la enseñanza se revela compleja y delicada, sobre todo cuando aparece la exigencia de la demostración. De hecho, aún no se dispone verdaderamente de criterios seguros para establecer la línea de separación que distingue la aprehensión perceptiva de formas representadas y la aprehensión conceptual de los objetos matemáticos representados. Tampoco se dispone de medios de análisis para poner en evidencia ni las transformaciones específicamente figurales que dan a las figuras un papel heurístico, ni para explicar la variabilidad de este papel de una situación a otra.

---

<sup>1</sup> Duval (1999) Expresa que coordinar dos representaciones consiste en poner en correspondencia las unidades significantes y convertir en diferentes representaciones de diversos registros semióticos.

<sup>2</sup> Conversiones

En esta perspectiva, la determinación de los registros que se deben movilizar y de algunas reglas de conversión para controlar la correspondencia, constituye el primer problema a resolver. La aplicación de esta aproximación no se limita a la comprensión de enunciados de problemas de matematización, al final de la primaria y en la secundaria, sino que se extiende al análisis y a la comprensión de casi todos los géneros de textos.

La conceptualización, el razonamiento, la aprehensión de figuras, la resolución de problemas e incluso la comprensión de textos, son actividades fundamentales cuyo estudio compete a campos tan diferentes como los de la psicología, las ciencias de la educación, la didáctica e incluso la inteligencia artificial. Las cuestiones relativas a su desarrollo, a su aprendizaje o a su modelización, son esenciales.

La especificidad de las representaciones semióticas consiste en que son relativas a un sistema particular de signos: el lenguaje, la escritura algebraica o los gráficos cartesianos, y en que pueden ser convertidas en representaciones equivalentes en otro sistema semiótico, pero pudiendo tomar significaciones diferentes para el sujeto que las utiliza.

La noción de representación semiótica presupone la consideración de sistemas semióticos diferentes y una operación cognitiva de conversión de las representaciones de un sistema semiótico a otro, así mismo el tratamiento se da cuando son representaciones producidas en el mismo registro semiótico. Esta operación ha de ser descrita en primer lugar como un “*cambio de forma*”. Trazar una curva correspondiente a una ecuación de segundo grado, o pasar del enunciado de una relación a su escritura literal habrá de considerarse como el cambio de la forma en que un conocimiento está representado.

Por todas las observaciones que se han podido hacer sobre el aprendizaje de las matemáticas, se ha probado que cambiar la forma de una representación es, para muchos alumnos de los diferentes niveles de enseñanza, una operación difícil e incluso en ocasiones imposible. Todo sucede como si para la gran mayoría de los alumnos la comprensión que logran de un contenido quedara limitada a la forma de representación utilizada.

Los sistemas semióticos, en efecto, deben permitir cumplir las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación. En primer lugar, constituir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema

determinado. Luego, el tratamiento que consiste en transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales. Por último, convertir las representaciones producidas en un sistema de representaciones en otro sistema, de tal manera que estas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado.

Los docentes de aula por lo general no hacen una distinción entre las actividades de tratamiento y las de conversión de las representaciones. Sin embargo, es esencial diferenciarlas muy bien. Un tratamiento es una transformación que se efectúa en el interior de un mismo registro, aquel en que se utilizan las reglas de funcionamiento: un tratamiento, pues, no moviliza más que un solo registro de representación. La conversión, al contrario, moviliza dos o más registros de representación y requiere su coordinación por parte del sujeto que la efectúa.

### ***Tratamiento de las representaciones semióticas y expansión informacional***

Un tratamiento es la transformación de una representación inicial en otra representación terminal, respecto a una cuestión, a un problema o a una necesidad, que proporcionan el criterio de interrupción en la serie de las transformaciones efectuadas. Un tratamiento es una transformación de la representación al interior del registro de representación o de un sistema. El cálculo es un tratamiento interno al registro de la escritura simbólica de cifras o de letras: sustituye, en el mismo registro de escritura de los números, expresiones dadas por expresiones nuevas. Sin embargo el término “cálculo” en matemáticas, es tomado en una acepción más amplia: se llama cálculo a todo proceso de transformación de escritura de los números, combinando actividad de tratamiento y actividad de conversión.

### ***Conversión de las representaciones y cambio de registro***

La conversión es la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada en un registro, en una representación de este mismo objeto, esta misma situación “traducción”, “ilustración”, “transposición”, “interpretación”, “codificación”, etc., son operaciones que hacen corresponder una representación dada en un registro con otra

representación en otro registro. La conversión es pues una transformación externa relativa al registro de la representación de partida.

### ***Las actividades cognitivas fundamentales de la representación***

Hay tres actividades cognitivas de representación inherentes a la semiosis: Formación, Tratamiento y Conversión.

**Formación:** Implica siempre una selección en el conjunto de los caracteres y de las determinaciones que constituyen lo que se quiere representar, bien sea para evocar un objeto real, o para expresar una representación mental. Es el recurso a unos signos para actualizar la mirada de un objeto o para sustituir la visión de ese objeto. Los actos más elementales de formación son, según los registros, la designación nominal de objetos, la reproducción de su contorno percibido, la codificación de relaciones o de algunas propiedades de un movimiento. **Tratamiento:** Es la transformación de una representación inicial en otra representación terminal, respecto a una cuestión, un problema. Un tratamiento es una transformación de la representación interna a un registro de representación o a un sistema. **Ejemplo:** El cálculo es un tratamiento interno al registro de una escritura simbólica de cifras o de letras: sustituye, en el mismo registro de una escritura de números expresiones nuevas por expresiones dadas; sin embargo el término cálculo tiene en matemáticas un significado más amplio: se llama cálculo a todo proceso de transformación de escritura de los números combinando actividad de tratamiento y actividad de conversión.

**La conversión:** Es la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada en un registro, en una representación de ese mismo objeto, o de la misma información en otro registro. Un tratamiento no moviliza más que un sólo registro de representación. La conversión es, al contrario, una transformación que hace pasar de un registro a otro; requiere de la coordinación por parte del sujeto que la efectúa. Este proceso permite comprender el estrecho lazo entre semiosis y noesis.

Entre la conversión y el tratamiento es necesario precisar que cognitivamente son bastante independientes la una de la otra, aunque matemáticamente la primera depende de la segunda; es

la razón por la cual la conversión de representación es el primer umbral de la comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. La conversión y el tratamiento deben ser separados para analizar lo que hacen los estudiantes cuando se enfrentan al problema. La comprensión conceptual surge de la coordinación de los diversos sistemas semióticos usados y darse cuenta de la forma específica de representar para cada sistema semiótico es condición cognitiva para la comprensión. La conversión presenta dos características que no se encuentran en el tratamiento Duval (1999), y que cimentan una operación cognitivamente más compleja y mucho más evolucionada que las operaciones de tratamiento en los registros mono funcionales: está Matemática orientada, es decir, siempre es necesario precisar cuál es el registro de partida y cuál es el registro de llegada. Y puede ser congruente o no congruente, es decir, que el pasaje de dos representaciones de un mismo objeto puede ser congruente en un sentido y no congruente en sentido contrario. Esto se explica por el hecho de que las posibilidades del sistema de representación de la representación de partida, son totalmente diferentes del sistema utilizado en la representación de llegada (Pavlopoulou, 1993).

Por su parte Hitt (2003) señala el escaso uso por parte de los estudiantes de los apoyos visuales para la resolución de problemas matemáticos y la escasa articulación de las diferentes representaciones de los conceptos. Esta escasa articulación se debe en gran medida, a que en general, los profesores no enseñamos a los estudiantes a que las incorporen en la resolución de ejercicios y problemas. También (Hitt, 1995) muestra las dificultades en las representaciones gráficas en problemas en contexto.

### **2.2.2 Resolución de Problemas**

#### **Estrategias para la resolución de problemas matemáticos**

Para Polya (1986), el proceso de resolución de problemas debe tener en cuenta algunas fases que aumentan la posibilidad de tener éxito al momento de llegar a una respuesta.

Se distinguen cuatro fases de trabajo. Primero, es necesario *comprender* el problema, es decir, ver claramente lo que se pide. Segundo, hay que captar las relaciones que existen entre los diversos elementos, ver lo que liga a la incógnita con los datos a fin de encontrar la idea de la solución y poder trazar un *plan*. Tercero, poner en *ejecución* el plan. Cuarto, *volver atrás* una vez

encontrada la solución, revisarla y discutirla. Cada una de estas fases es importante. Puede suceder que algún alumno se le ocurra por casualidad una idea excepcionalmente brillante y saltándose todo el trabajo preparatorio, vaya directamente a la solución. Tales golpes de suerte son deseables, naturalmente, pero puede llegarse a un resultado no deseado, desafortunado, si el alumno descuida cualquiera de las cuatro fases sin tener una buena idea. Es de temerse lo peor si el alumno se lanza a hacer cálculos o construcciones sin haber *comprendido* el problema. Generalmente es inútil ocuparse de los detalles si no se han visto las relaciones esenciales o sin haber trazado un plan previo. Se pueden evitar muchos errores si el alumno *verifica cada paso* al llevar a cabo el plan. Los mejores resultado pueden perderse si el alumno no reexamina, no *reconsidera* la solución obtenida.

### ***Concepción de un plan***

De la comprensión del problema a la concepción del plan, el camino puede ser largo y tortuoso. De hecho, lo esencial en la solución de un problema es el concebir la idea de un plan. Esta idea puede tomar forma poco a poco o bien, después de ensayos aparentemente infructuosos y de un período de duda, se puede tener de pronto una idea brillante. Lo mejor que puede hacer el maestro por su alumno es conducirlo a esa idea brillante ayudándole, pero sin imponérselo. Las preguntas y sugerencias de las que vamos a hablar, tienen por objeto provocar tales ideas. Para comprender la posición del alumno, el maestro debe pensar en su propia experiencia, en sus propias dificultades y éxitos en la resolución de problemas. Se sabe, está claro, que es difícil tener una buena idea si nuestros conocimientos son pobres en la materia, y totalmente imposible si la desconocemos por completo. Las buenas ideas se basan en la experiencia pasada y en los conocimientos adquiridos previamente. Un simple esfuerzo de memoria no basta para provocar una buena idea, pero es imposible tener alguna sin recordar ciertos hechos pertinentes a la cuestión. Los materiales necesarios para la solución de un problema de matemáticas son ciertos detalles particulares de conocimientos previamente adquiridos, tales como problemas resueltos, teoremas demostrados.

### ***Ejecución del plan***

El plan proporciona una línea general. Se debe de asegurar que los detalles encajen bien en esa línea. Nos hace falta pues, examinar los detalles uno tras otro, pacientemente, hasta que todo esté

perfectamente claro, sin que quede ningún rincón oscuro donde podría disimularse un error. Si el alumno ha concebido realmente un plan, el maestro puede disfrutar de una paz relativa. El peligro estriba en que el alumno olvide su plan, lo que puede ocurrir fácilmente si lo ha recibido del exterior y lo ha aceptado por provenir de su maestro. Pero si el mismo ha trabajado en un plan, aunque un tanto ayudado, y si ha concebido la idea final con satisfacción, entonces no la perderá tan fácilmente. No obstante, el profesor debe insistir en que el alumno *verifique cada paso*. Se puede asegurar de la exactitud de un paso de nuestro razonamiento ya sea “por intuición” o por medio de una “demostración formal”. Se puede concentrar sobre el punto en cuestión hasta que se vea tan claro que no quede duda alguna sobre la exactitud de dicho detalle. También se puede esclarecer el punto que interesa operando por deducción y ateniéndose a reglas formales.

### ***Visión retrospectiva***

Aún los buenos alumnos, una vez que han obtenido la solución y expuesto claramente el razonamiento, tienden a cerrar sus cuadernos y a dedicarse a otra cosa, al proceder así, omiten una fase importante y muy instructiva del trabajo. Reconsiderando la solución, reexaminando el resultado y el camino que les condujo a ella, podrían consolidar sus conocimientos y desarrollar sus aptitudes para resolver problemas. Un buen profesor debe comprender y hacer comprender a sus alumnos que ningún problema puede considerarse completamente terminado. Siempre queda algo por hacer, mediante un estudio cuidadoso y una cierta concentración, se puede mejorar cualquier solución, y en todo caso, siempre podremos mejorar nuestra comprensión de la solución. El alumno ha llevado a cabo su plan. Ha redactado la solución, verificado cada paso del razonamiento. Tiene, pues, buenos motivos para creer que su solución es correcta. No obstante, pueden haber errores, sobre todo si el razonamiento es largo y enredado. Por lo tanto, es recomendable verificar. Una de las primeras y principales obligaciones del maestro es no dar a sus alumnos la impresión de que los problemas de matemáticas no tienen ninguna relación entre sí. Ni con el mundo físico. Al reconsiderar la solución de un problema se nos presenta la oportunidad de investigar sus relaciones. Los alumnos se percatarán que un tal comportamiento es realmente interesante si han hecho un esfuerzo en esto y si tienen certidumbre de haber hecho las cosas bien. Desearán entonces ver si el esfuerzo podría aportarles otro beneficio y saber lo que habría de hacerse para obtener un resultado igual de correcto. El profesor debe alentar a sus

alumnos a imaginar casos en que podrían utilizar de nuevo el mismo proceso de razonamiento o aplicar el resultado obtenido.

Así, gracias a las cuestiones precedentes, los detalles de la fórmula adquieren una nueva significación, se establece un lazo entre ellos y diversos hechos. Hay, pues, mayores posibilidades para que la fórmula se fije en la mente, consolidándose los conocimientos de los alumnos. También se puede fácilmente transferir dichas cuestiones y utilizarlas en problemas semejantes. Después de una cierta experiencia de problemas del mismo tipo, un alumno inteligente podrá percibir las ideas generales subyacentes: empleo de todos los datos relativos a la cuestión, variación de datos, simetría, analogía. Si toma el hábito de dedicarse al examen de estos diversos puntos, desarrollará tanto más su aptitud para solucionar problemas.

### **Éxito o fracaso en la resolución de problemas matemáticos**

Schoenfeld reconoce que un aspecto importante en la caracterización de la naturaleza de las matemáticas es pensarla como la ciencia de los patrones. Las matemáticas revelan patrones escondidos que ayudan a comprender el mundo que nos rodea...El proceso de “hacer” matemáticas es más que cálculos y deducciones; involucra la observación de patrones, la prueba de conjeturas, la estimación de resultados (NRC, 1989, p. 31) (citado en Schoenfeld, 1992, p. 343).

En sus investigaciones, Alan Schoenfeld profundiza en los aspectos que influyen al momento de enfrentarse a la resolución de problemas matemáticos

Schoenfeld (1992) presenta una caracterización de las dimensiones o categorías que explican el éxito o fracaso de los estudiantes en la resolución de problemas: (a) el conocimiento o recursos básicos que incluye definiciones, hechos, formulas, algoritmos y conceptos fundamentales asociados con un dominio matemático particular o tema; (b) estrategias cognitivas o heurísticas que involucran formas de representar y explorar los problemas con la intención de comprender los enunciados y plantear caminos de solución. Algunos ejemplos de estas estrategias son dibujar un diagrama, buscar un problema análogo, establecer submetas, descomponer el problema en casos simples, etc. (c) las estrategias metacognitivas que involucran conocimiento acerca del funcionamiento cognitivo propio del individuo (¿Qué necesito? ¿Cómo utilizo ese conocimiento?) y estrategias de monitoreo y control del propio proceso cognitivo (¿Qué estoy

haciendo? ¿Por qué lo hago? ¿A dónde voy?) y (d) las creencias y componentes afectivos que caracterizan la conceptualización del individuo acerca de las matemáticas y la resolución de problemas, y la actitud y disposición a involucrarse en actividades matemáticas.

A diferencia de Polya, Alan Schoenfeld no está necesariamente de acuerdo en proponer estrategias heurísticas para la resolución de problemas

Schoenfeld (1992) propone ir más allá de una descripción de las estrategias y ofrecer oportunidades para que los estudiantes desarrollen el poder prescriptivo relacionado con su uso. En particular sugiere (a) ayudar a los estudiantes a desarrollar un gran número de estrategias de resolución de problemas más específicas y que relacionen de forma clara clases específicas de problemas, (b) enseñar estrategias de monitoreo que permitan a los estudiantes aprender cuándo pueden utilizar estrategias apropiadas y el contenido matemático relevante en la resolución de problemas, y (c) desarrollar formas de robustecer las creencias de los estudiantes sobre la naturaleza de las matemáticas, la resolución de problemas, y sobre sus propias competencias o formas de interactuar con situaciones matemáticas

Schoenfeld (1985, p. xii) establece que en la resolución de problemas: Aprender a pensar matemáticamente –involucra más que tener una gran cantidad de conocimiento de la materia al dedillo. Incluye ser flexible y dominar los recursos dentro de la disciplina, usar el conocimiento propio eficientemente, y comprender y aceptar las reglas “tácitas de juego”.

### **Resolución de problemas realistas y aprendizaje de las matemáticas**

Los aportes de Manuel Santos Trigo son importantes en cuanto resaltan el papel que tiene la enseñanza de matemáticas orientada hacia los problemas realistas

Se identifica a la resolución de problemas como una forma de pensar donde una comunidad de aprendizaje (los estudiantes y el profesor) buscan diversas maneras de resolver la situación y reconocen la relevancia de justificar sus respuestas con distintos tipos de argumentos. Es decir, la meta no es solamente reportar una respuesta sino identificar y contrastar diversas maneras de representar, explorar y resolver el problema.

En esta perspectiva se reconoce que un aspecto central en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes es que adquieran los caminos, estrategias, recursos y una

disposición para involucrarse en actividades que reflejen el quehacer matemático. Es decir, se reconoce la importancia de relacionar el proceso de desarrollar la disciplina con el aprendizaje o construcción del conocimiento matemático

En los Países Bajos (Holanda) se reconoce la importancia de implementar un currículum orientado en problemas de acuerdo a los principios de la educación matemática realista. La relación de la educación matemática realista con la resolución de problemas se manifiesta en el reconocimiento que el mundo real es una fuente o punto de partida para el desarrollo de los conceptos matemáticos resalta la idea de que los problemas sean vistos por los estudiantes como situaciones auténticas para desarrollar el pensamiento matemático, aporta las bases o elementos para promover la resolución de problemas.

Santos (2007) reporta que varias propuestas curriculares explícitamente identifican a la resolución de problemas como una actividad central en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes y el lenguaje en la presentación distingue aspectos del quehacer matemático;

Resulta necesario que matemáticos, educadores y profesores trabajen conjuntamente en el diseño de planes y programas que realmente reflejen la esencia de lo que significa aprender la disciplina. En particular, lo que interesa es que los estudiantes desarrollen una forma de pensar y disposición hacia el estudio de las matemáticas donde exhiban distintas formas de representar fenómenos, identifiquen relaciones y patrones, formulen conjeturas, justifiquen y comuniquen resultados.

En la resolución de problemas se reconoce también que pueden existir caminos distintos para promover el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes; sin embargo, tanto los programas de investigación como las prácticas de instrucción coinciden en reconocer la relevancia de conceptualizar la disciplina en términos de dilemas o preguntas que los estudiantes necesitan responder y discutir en términos de recursos matemáticos.

### **2.2.3 Función Cuadrática**

Para que el concepto de función cuadrática pudiese haber llegado a ser considerado como de gran importancia para la física y la matemática, era necesario que Galileo Galilei (1564- 1642)

descubriera que para la trayectoria de puntos del movimiento en caída libre le correspondía un espacio, un tiempo y una velocidad determinada, estableciendo así una correspondencia biunívoca entre el tiempo transcurrido en la caída y el espacio recorrido por el cuerpo; al igual que entre el tiempo transcurrido en la caída y la velocidad adquirida por el objeto que cae. Con esto se hace evidente que estas situaciones tendrán: variables, relación de dependencia, correspondencia biunívoca y adicionalmente están presentes constantemente en el entorno natural para provocar su estudio en un proceso de modelización matemática. Como por ejemplo la caída de un cuerpo o el movimiento de proyectiles. (González, 2011).

Una parábola es una sección cónica, la cual puede definirse como el “lugar geométrico de los puntos del plano cartesiano  $(x,y)$  que equidistan de una recta fija llamada directriz y un punto fijo llamado foco que está fuera de dicha recta.

La ecuación canónica de la parábola con vértice en  $(h,k)$  y directriz  $y = k - p$  es entonces:  $(x-h)^2 = 4p(y-k)$  de eje vertical, donde  $p$  es la distancia focal.

Para la parábola con vértice en  $(h,k)$  y directriz  $x = h - p$  es entonces:  $(y-k)^2 = 4p(x-h)$  de eje horizontal.

Una función cuadrática es una expresión polinómica de grado dos en la variable dependiente  $x$  e independiente  $y$ , que resulta del desarrollo de la ecuación de la parábola de eje vertical.

La función cuadrática es entonces una expresión polinómica de la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$  donde  $a, b$  y  $c$  son reales y  $a \neq 0$ .  $a$  es el coeficiente del término cuadrático,  $b$  es el coeficiente del término lineal, y  $c$  es el término independiente. Cada uno de ellos indica una determinada característica geométrica.  $a$ : orienta las ramas o sea la concavidad  $b$ : el desplazamiento del eje de la parábola  $c$ : el desplazamiento del vértice de la parábola.

En toda parábola se distinguen los siguientes elementos.

Abertura. Está determinada por el signo del coeficiente de  $x^2$ ; si  $a > 0$  la parábola abre hacia arriba y si  $a < 0$  la parábola abre hacia abajo.

Vértice. Es el punto  $v(h,K)$  donde  $h = -b/2a$  y  $k = f(-b/2a)$ . Si la parábola abre hacia abajo, el vértice es el valor máximo; si la parábola abre hacia arriba, es el valor mínimo.

Eje de simetría. Es la recta que pasa por el vértice y es paralela al eje Recibe este nombre porque al doblar el plano por esta recta los dos brazos de la parábola coinciden en todos sus puntos.

Intersecto y. Es el punto  $(0,c)$  , dicho valor se halla al remplazar  $x$  por  $0$  en la expresión  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

Intersecto x. Son los puntos de corte de la gráfica con el eje  $x$  y se hallan al sustituir  $y$  por  $0$  en la expresión  $y = ax^2 + bx + c$ .

### ***Gráfica de la función cuadrática***

La gráfica de la función  $y = f(x)$  consta de todos los puntos  $(x, f(x))$ , donde:  $x =$  distancia dirigida desde el eje  $y$  y  $f(x) =$  distancia dirigida desde el eje  $x$

Puesto que por definición de función hay exactamente un valor  $y$  para cada valor  $x$  se sigue que una recta vertical puede cortar a la gráfica de una función a lo sumo una vez.

La notación funcional sirve para describir cómodamente transformaciones de gráficas en el plano, tal como ocurre con la función cuadrática. Si se compara la gráfica de  $y = x^2$  . Cada una de las gráficas es una transformación de la gráfica de  $y = x^2$ .

Los tres tipos básicos de transformaciones en esas seis gráficas:

1. Traslaciones horizontales. 2. Traslaciones verticales. 3. Reflexiones

Tipos básicos de transformaciones ( $c > 0$ ): Gráfica original  $y = f(x)$  Traslación horizontal en  $c$  unidades hacia la derecha  $y = f(x - c)$  Traslación horizontal en  $c$  unidades a la izquierda  $y = f(x + c)$  Traslación vertical de  $c$  unidades hacia arriba  $y = f(x) + c$  Traslación vertical de  $c$  unidades hacia abajo  $y = f(x) - c$  Reflexión en el eje  $x$   $y = - f(x)$

# Figura 1. Transformaciones gráficas en el plano

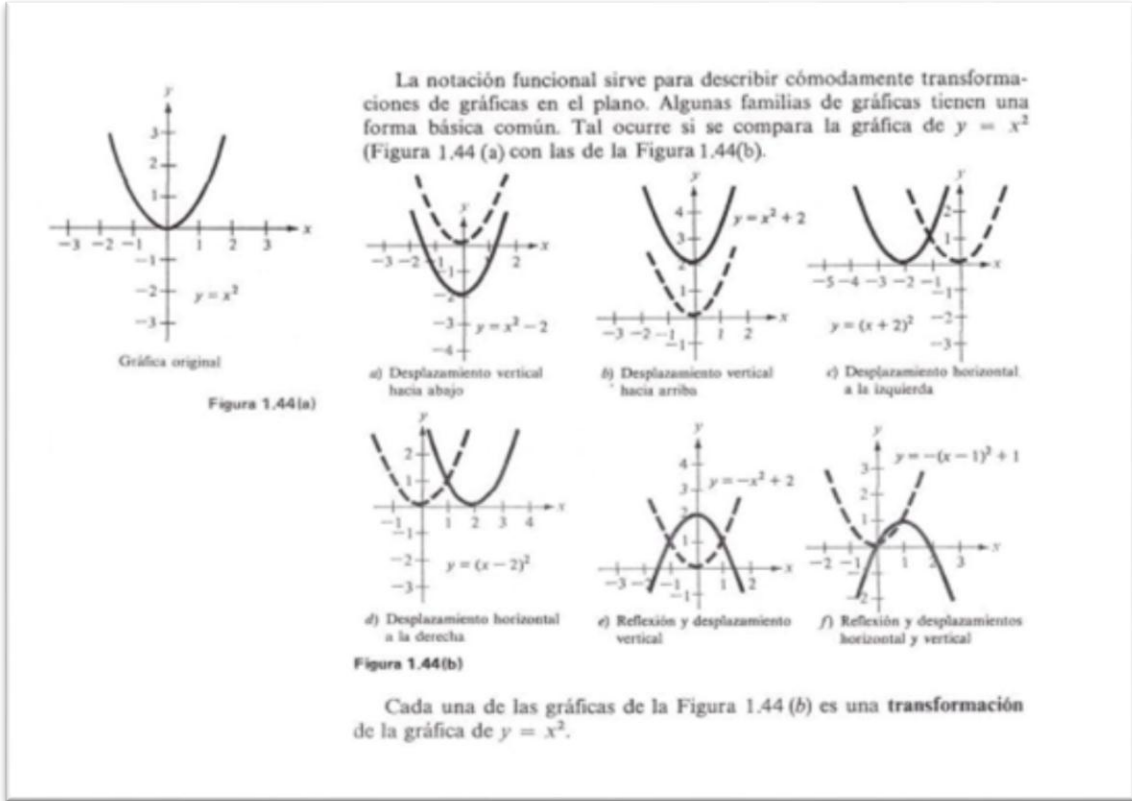


Figura 1. Transformaciones gráficas en el plano

## **CAPÍTULO 3**

### **DISEÑO METODOLÓGICO**

#### **3.1 METODOLOGÍA**

Para la investigación que se describe en el presente trabajo se planteó una metodología cualitativa que responde a la búsqueda de situaciones que no son fácilmente medibles ni comparables por medio de parámetros numéricos. Se dirige más a detectar cómo piensa y responde el estudiante ante un problema dado; qué conexiones mentales hace, a qué imágenes mentales acude y con qué sistemas de representación semióticas está familiarizado.

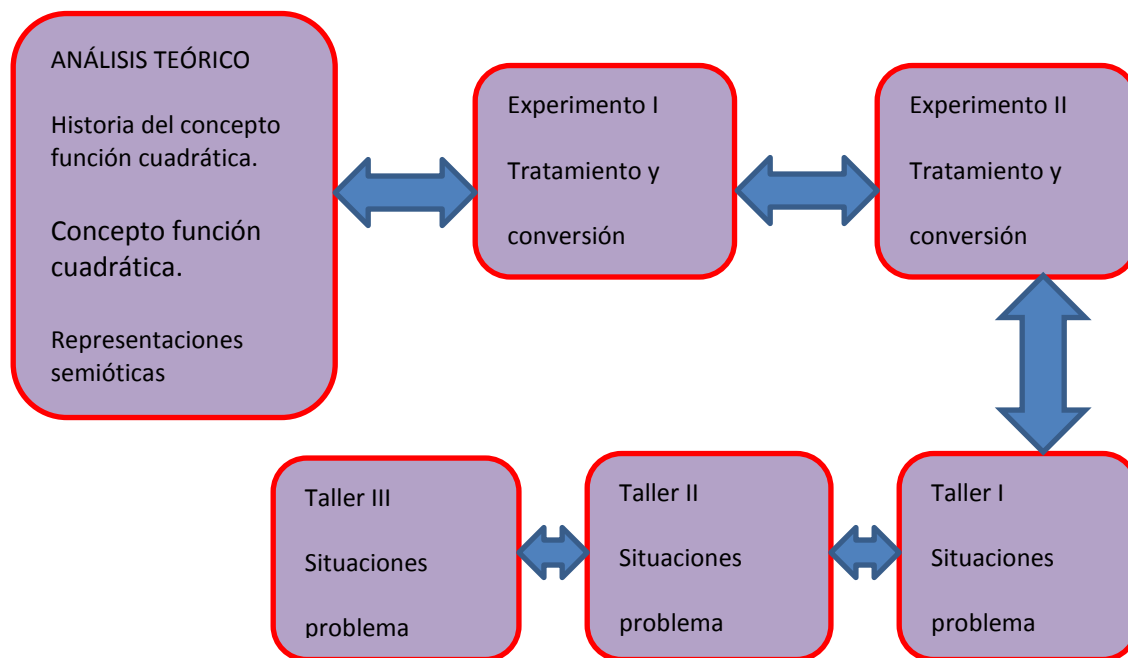
El objetivo de esta investigación involucra los conceptos relacionados con las representaciones semióticas de la función cuadrática y cómo a través de las actividades cognitivas de tratamiento y conversión se llega a la resolución de problemas que comprenden para su desarrollo el planteamiento de algunos de los registros de representación de la función cuadrática, se busca encontrar las relaciones que establecen los estudiantes acerca de todos los conceptos mencionados.

Los hallazgos obtenidos deben interpretarse con base en los referentes teóricos y la comprensión del contexto de la investigación, lo cual se hace desde la perspectiva de la autora.

Según Cobb et al. (2003, p. 46), la hipótesis o conjetura tiene dos fases: la prospectiva y la reflexiva. Con el objetivo de sustentar el surgimiento de otros caminos para el aprendizaje, la fase prospectiva es implementada con hipótesis sobre procesos y medios para posibilitar el aprendizaje y estos deben estar expuestos detalladamente en el proceso. La fase reflexiva tiene por objetivo probar las conjeturas del experimento, de manera frecuente y en varios niveles de análisis.

#### **3.2 DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN**

Para el diseño de la investigación se tuvo en cuenta la teoría de las representaciones semióticas, la teoría relacionada con el concepto de función cuadrática, la teoría acerca de la resolución de problemas matemáticos y los datos obtenidos a través de la aplicación de los instrumentos tanto de ideas previas como de post test.



*Figura 2 Diseño de la investigación*

### 3.3 PROCEDIMIENTO

La investigación se llevó a cabo en tres momentos: en el primer momento se aplicó un instrumento de ideas previas a través del cual se identificaron diversos obstáculos relacionados con los conceptos que involucra el estudio

En el segundo momento, se realizó la aplicación de la Unidad Didáctica desarrollada con el fin de afianzar los conceptos sobre función cuadrática y privilegiar las actividades cognitivas de tratamiento y de conversión previo a su aplicación en problemas que intencionan el uso de estos registros de representación. (Ver anexo 1).

Por último, se realizaron los talleres en los cuales los estudiantes se enfrentaron a la resolución de problemas en contexto que incluían un registro de representación de la función cuadrática,

con la aplicación del instrumento de investigación post test, con el fin de identificar las relaciones existentes entre los registros y su incidencia en la resolución de las problemas (Ver anexo 1)

### **3.4 UNIDAD DE ANÁLISIS**

La unidad de análisis de esta investigación fue la relación que identifican los estudiantes de grado undécimo entre las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de los registros de representación de la función cuadrática y la resolución de problemas en contexto que involucran la función cuadrática.

### **3.5 UNIDAD DE TRABAJO**

Estudiantes del grado undécimo, con edades entre 16 y 17 años, de la Institución Educativa Liceo León de Greiff del municipio de Manizales departamento de Caldas, para efectos de la investigación el trabajo se realizó con diez estudiantes que voluntariamente participaron en el desarrollo de los momentos; se constituyeron 5 parejas las cuales trabajaron ambos instrumentos y en el capítulo de análisis de resultados se denominan equipo 1, 2, 3, 4 y 5.

### **3.6 INSTRUMENTOS Y TÉCNICAS PARA LA RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN**

Para la recolección de la información se utilizaron técnicas de observación a través de instrumentos de cuestionarios escritos cuyos formatos se encuentran en el anexo 1.

### **3.6.1 Cuestionario escrito**

Se elaboraron dos instrumentos de cuestionarios escritos, un instrumento de ideas previas y un cuestionario post test.

El instrumento de ideas previas a través de sus preguntas abiertas, permitió detectar los obstáculos que presentan los estudiantes al momento de abordar los problemas y los registros de representación.

El segundo instrumento se aplicó después de intentar solucionar un problema contextual que involucra un registro de representación de la función cuadrática, el cual también consta de preguntas abiertas que indagan acerca de la forma de abordar el problema desde su comprensión hasta la reflexión que se da después de tener una solución, teniendo en cuenta el papel que tienen las actividades cognitivas al momento de dar la solución.

### **3.7 Plan de Análisis**

Dadas las características de los instrumentos cada uno se analizó de la siguiente manera

#### **3.7.1 Instrumento de ideas previas.**

Este instrumento buscaba hallar las dificultades a las cuales se pueden enfrentar los estudiantes al momento de resolver los problemas además de determinar si antes de abordar en clase la unidad didáctica tienen alguna noción acerca de las actividades cognitivas de tratamiento y conversión, y si identifican con facilidad el contexto del problema. Los problemas propuestos son de carácter contextual y el instrumento es un cuestionario.

#### ***Instrumento Ideas Previas***

Lea atentamente los siguientes problemas y realice las actividades propuestas.

1. Se deben colocar los socalos en el piso de un apartamento, con el fin de determinar la medida total en metros del material a comprar a partir de los datos de construcción se determina que el apartamento tiene como medida del largo 8 metros más que la medida de su ancho, y que el apartamento tiene una superficie de 105 m<sup>2</sup>, cuáles son las dos medidas?

2. En una fábrica de cajas es necesario determinar cuánto material es necesario si se deben producir 600 cajas y la unidad de compra son hojas grandes de lata de 100 cm largo por 200 de ancho. Se debe tener en cuenta que la caja se elabora a partir de una hoja rectangular cortando cuadrados de 4 cm en cada esquina y doblando los lados hacia arriba, si el ancho de la caja es de 3 cm menos que el largo y el volumen da cada caja es de 280 cm<sup>3</sup>, se debe encontrar las medidas de cada hoja de lata para saber cuántas hojas grandes pedir para cumplir con la producción.

3. Un granjero requiere colocar la cerca para un terreno rectangular, si tiene conocimiento de que el área total es de 62500 m<sup>2</sup>, y que el largo equivale a 500 m restado el largo, cuáles deben las medidas del cerco, de manera que se encierre toda el área requerida.

Después de leer los problemas piense en su posible solución y escriba el procedimiento.

<b>Problemas</b>	<b>EQUIPO</b>	<b>EQUIPO</b>	<b>EQUIPO</b>	<b>EQUIPO</b>	<b>EQUIPO</b>
<b>Preguntas</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>Representa gráficamente la situación que plantea el problema.</b>					
<b>Escribe el problema con tus propias palabras</b>					
<b>Qué debes hacer para solucionar el problema</b>					

<b>Qué recursos tienes para solucionar el problema</b>					
<b>Qué hiciste para resolver el problema</b>					
<b>Qué fue lo más fácil y por qué?</b>					
<b>Qué fue lo más difícil y por qué?</b>					
<b>En la pregunta que te pide representar de alguna forma el problema, por qué escogiste dicha forma y no otra?</b>					

*Figura 3 Actividad: Comprendo el problema*

*Representa gráficamente la situación que plantea el problema.*

Esta pregunta busca indagar si los estudiantes comprendieron que la solución del problema necesariamente lleva al planteamiento de una función cuadrática la que se puede representar en su registro gráfico.

*Escribe el problema con tus propias palabras*

Se pretende conocer si el estudiante comprende el problema con facilidad, ya que si es así puede replantearlo de manera verbal con palabras que utilice en su contexto cotidiano sin transcribirlo.

*Qué debes hacer para solucionar el problema*

En esta pregunta se intenta saber si el estudiante está familiarizado con alguna estrategia heurística general para resolver problemas matemáticos o bien si tiene la facilidad de plantear una estrategia propia derivada del contexto del problema.

*Qué recursos tienes para solucionar el problema*

Se busca indagar acerca del reconocimiento por parte del estudiante de los saberes previos necesarios para darle solución al problema.

*Qué hiciste para resolver el problema*

Esta pregunta busca que el estudiante compare el procedimiento que finalmente realizó con la estrategia que planteó.

*Qué fue lo más fácil y por qué?*

Se desea saber en qué momentos de la solución del problema el estudiante estuvo más seguro de su proceder.

*Qué fue lo más difícil y por qué?*

Se desean conocer las posibles dificultades que afrontan los estudiantes al enfrentarse a los problemas.

*En la pregunta que te pide representar de alguna forma el problema, por qué escogiste dicha forma y no otra?*

Se busca indagar acerca de las nociones que tengan los estudiantes sobre los registro de representación de la función cuadrática, ya que existen varias formas de representar y se pueden preferir unas sobre otras.

### **3.7.2 Post – Test**

Después de los talleres de resolución de problemas se aplicó el cuestionario post test que se planteó de acuerdo a los pasos para la resolución y análisis de un problema planteados por autores como Polya, Schoenfeld y Santos Trigo con el fin de identificar si se comprende el problema, además de involucrar los aspectos relacionados con las actividades cognitivas de tratamiento y conversión que se pretendió favorecer con cada problema. Para todos los talleres se aplicó el mismo cuestionario.

#### ***Cuestionario para la comprensión de los procesos involucrados en la solución de los problemas***

Entender el problema

- 1.-Entiende todo lo que dice el problema
- 2.-Puede replantear el problema en sus propias palabras.
- 3.-Distingue cuales son los datos.
- 4.-Sabe a qué quiere llegar.
- 5.-Distingue la conversión o tratamiento que quiere favorecer el problema

### Configurar el plan

En sus propias palabras describa la estrategia a utilizar o los pasos a realizar para resolver el problema.

### Ejecutar el plan.

1. Al implementar la estrategia, le dio solución al problema?
2. Utilizó la conversión o el tratamiento para obtener la solución del problema

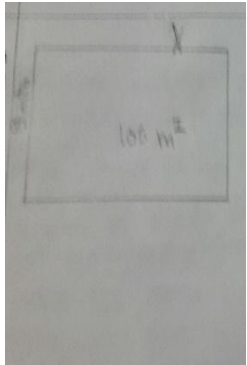
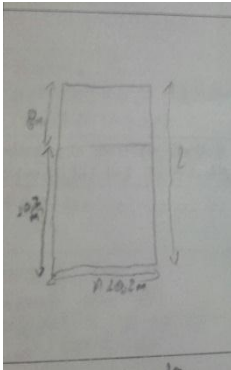
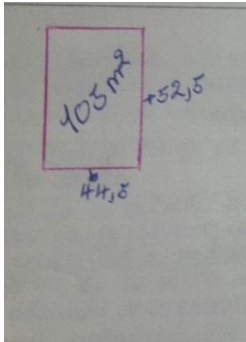
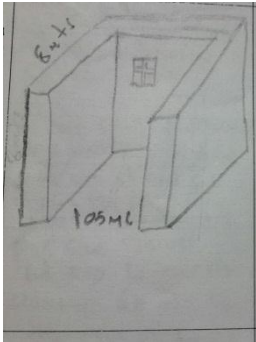
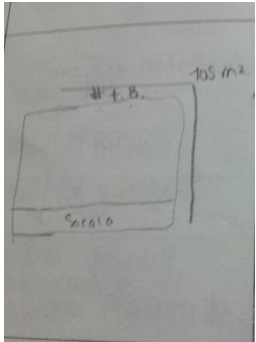
### Mirar hacia atrás

1. Es la solución correcta?
2. Cree que hay una solución más sencilla?
3. Considera que el tratamiento o la conversión hecha contribuyó a la solución del problema

## ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

### 4.1 Hallazgos del instrumento de ideas previas

**Tabla 1. Resultados instrumento de ideas previas Problema 1.**

Problemas Preguntas	EQUIPO 1	EQUIPO 2	EQUIPO 3	EQUIPO 4	EQUIPO 5
Representa gráficamente la situación que plantea el problema.					

<b>Escribe el problema con tus propias palabras</b>	No se sabe la medida del ancho para así poder comprar los socalos y poder colocarlos.	Determinar cuánto material se debe usar y cuáles son las medidas del ancho y largo del apartamento.	Cuál es la medida del largo y el ancho de una superficie que mide 105 m <sup>2</sup> y el largo es mayor 8 m que el ancho?	N.R	Nos pide encontrar la base y la altura.
<b>Qué debes hacer para solucionar el problema</b>	Calcular la medida del ancho del apartamento.	Saber las medidas. Hacer una gráfica. Saber qué me preguntan.	Dividir 105 m <sup>2</sup> entre dos el resultado debe dar 52,5 m y a este se le resta 8 m y el resultado es 44.5 m.	Se debe utilizar la ley de Pitágoras.	Saber el área del rectángulo y del cuadrado.
<b>Qué recursos tienes para solucionar el problema</b>	La medida del largo y la superficie del apartamento.	Calculadora. Conocimiento sobre el tema.	Una calculadora. Capacidad cognitiva. La hoja. Lapiceros.	Los datos que nos da el ejercicio y las fórmulas.	El área total del rectángulo, el valor adicional del largo del rectángulo.
<b>Qué hiciste para resolver el problema</b>	Encontrar un número que multiplicado por ocho de 105.	Gráfica. Operaciones (raíz cuadrada, multiplicaciones)	Leer para poder interpretar el problema y resolverlo en la forma adecuada.	Aplicar una fórmula determinada.	Dos números que multiplicados dieran 105.
<b>Qué fue lo más fácil y por qué?</b>	Determinar el área del rectángulo.	Hacer la gráfica por que las medidas las da el problema.	La división porque es algo sencillo.	Lo más fácil fue hallar las fórmulas y los datos.	Hallar la fórmula.
<b>Qué fue lo más difícil y por</b>	Encontrar el número del ancho	Recordar las fórmulas.	Calcular los resultados finales por que no	Lo más difícil fue definir las fórmulas	Hallar los números.

<b>qué?</b>	para darle solución al problema		sabíamos con exactitud sus medidas	y saber si son correctos.	
<b>En la pregunta que te pide representar de alguna forma el problema, por qué escogiste dicha forma y no otra?</b>	Porque me pareció la forma más directa y fácil para resolver el ejercicio adecuadamente.	Porque fue el método que nos enseñaron y fue el más fácil de hacer.	Porque es la forma más adecuada de representar una superficie que tiene $m^2$ .	Aunque así no lo sea pero así fue muy difícil solucionar el problema.	Porque describe perfectamente el problema planteado.

### Pregunta 1

#### Equipo 1

#### Hallazgo

El equipo se inclinó por la representación geométrica de la situación descrita en el problema, acertó planteando un rectángulo, sin embargo asumió que el largo es desconocido y que el ancho tiene un valor de 8 m, contrario a la información dada por el problema que indica que el largo es 8 m más largo que el ancho por lo que era conveniente tener la medida del ancho como incógnita.

#### Equipo 2

#### Hallazgo

El equipo se inclinó por la representación geométrica de la situación descrita en el problema, planteó igualmente un rectángulo en el cual se observan unos valores numéricos que corresponden a la raíz cuadrada del área total del apartamento. Es de anotar que en el enunciado claramente se afirma que existe una medida más larga que la otra por lo que refiere a un rectángulo, al extraer la raíz cuadrada del área el equipo asumió una forma cuadrada.

#### Equipo 3

#### Hallazgo

El equipo se inclinó por la representación geométrica de la situación descrita en el problema, el equipo adjudica unos valores de largo y ancho al rectángulo dibujado que evidentemente no representan los buscados puestos que si fuesen éstos el área sería aproximadamente  $2800 \text{ m}^2$ .

#### Equipo 4

#### Hallazgo

El equipo se inclinó por la representación pictórica de la situación descrita en el problema, lo hizo de una manera más tridimensional, expresaron correctamente la relación existente entre el largo y el ancho, sin embargo en la gráfica no queda clara la variable que representa el ancho del apartamento.

## Equipo 5

### Hallazgo

El equipo se inclinó por la representación geométrica de la situación descrita en el problema, muy similar al equipo anterior, describieron la relación existente entre el largo y ancho pero no hay evidencia clara de la incógnita que representa en ancho dentro de la gráfica.

### Análisis

Los estudiantes que se encuentran en grado undécimo poseen dificultades para traducir un enunciado de lenguaje verbal a lenguaje algebraico, este es un hecho que representa un obstáculo importante al momento de realizar la investigación puesto que una de las representaciones principales del objeto de estudio es la algebraica y dominar la conversión entre lenguaje verbal y algebraico se constituye fundamental para el aprendizaje tanto de matemáticas como para las áreas transversales, así lo afirma el boletín oficial de la junta de Andalucía citado por Rodríguez (2011):

La adecuada utilización progresiva de símbolos y expresiones contribuirá al desarrollo natural de las destrezas algebraicas, que se facilitará con la lectura e interpretación simbólica de las situaciones problemáticas que se planteen y, en sentido inverso, con la traducción al lenguaje verbal de expresiones y resultados. De esta manera, las Matemáticas deberán concebirse, entre otras muchas cosas, como un vehículo de comunicación y expresión de ideas, que contribuirá a la comprensión de otras materias (Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, 2007b, p. 53 y 54).

Las dificultades que reflejan los estudiantes del equipo dos y tres, están directamente asociadas a la falta de interpretación adecuada de los enunciados verbales, Schoenfeld (1992) plantea:

Para desarrollar los hábitos matemáticos apropiados y disposiciones de interpretación y encontrar sentido [a las ideas matemáticas] también como los modos apropiados de pensamiento matemático- las comunidades de práctica en la cual ellos [los estudiantes] aprenden matemáticas deben reflejar y promover esas formas de pensamiento. Es decir, los salones de clase deben ser comunidades en los cuales el sentido matemático, del tipo que esperamos desarrollen los estudiantes, se practique. (p. 345).

Es posible que estos obstáculos sean de origen didáctico, en esta época aún se replican didácticas en la enseñanza de las matemáticas alejadas del eje de la resolución de problemas, para que los estudiantes adquieran habilidades en este ámbito es necesario que el proceso de solucionar problemas se de manera transversal y sistemática a lo largo de su etapa escolar.

En todas las representaciones pictóricas, los equipos buscaron dibujar el rectángulo, lo cual es lógico y adecuado al inicio del abordaje del problema, en su desarrollo se pudo generar otro tipo de representación gráfica al momento de encontrar la ecuación cuadrática que da solución al problema, es de anotar que ningún equipo realizó dicha representación lo cual es un obstáculo relevante puesto que lo que pretende la investigación es encontrar la relación entre las actividades cognitivas que se pueden realizar entre los diferentes registros de representación de la función cuadrática y la solución de los problemas, según Duval (2004) el dominio de las operaciones necesarias para cambiar la forma mediante la cual se representa un conocimiento es primordial, ya que se constituye en una operación cognitiva básica que está muy relacionada con los tratamientos de comprensión y con las dificultades del aprendizaje conceptual. Lo descrito anteriormente puede ser la causa de obstáculos que sólo la coordinación de varios registros semióticos ayuda a remontarlos, y en consecuencia el dominio de la habilidad para cambiar de registro de cualquier representación semiótica en el aprendizaje de la matemática se torna fundamental.

## Pregunta 2

### Hallazgos

Tanto el equipo 1 como el equipo 2 identificaron en cierto sentido el carácter contextual del problema ya que más allá de calcular unas medidas de largo y ancho lo importante es determinar cuánto material se requiere con el fin de posteriormente estimar costos.

El equipo 3 sólo transcribió el problema casi tal y como se planteaba en la actividad y el equipo 5 se quedó en la discusión de las medidas requeridas.

Este obstáculo es importante y puede ser de origen didáctico, en la enseñanza de matemáticas aún se realiza el tránsito entre las situaciones que son puramente matemáticas y aquellas que se presentan en contextos más cotidianos. La enseñanza contextualizada es fundamental para

generar un pensamiento que le permita al estudiante solucionar todo tipo de problemas así lo afirman Santos Trigo y Espinoza (2010)

Una meta importante en las reformas de la educación matemática es proveer a los maestros de los recursos que les permitan transitar de una instrucción basada en la discusión y solución de problemas o tareas que involucren la aplicación directa de reglas o procedimientos para resolverlos hacia prácticas que incluyan la solución de tareas o problemas situados en contextos distintos y que demanden una reflexión cognitiva significativa en los estudiantes. En esta dirección, se valora y fomenta una posición inquisitiva por parte de los estudiantes y donde el tipo de problemas y formas de abordarlos resulta esencial.

La ausencia de situaciones en contexto en la enseñanza de matemáticas, ocasiona que para los estudiantes sea difícil identificar la importancia de estos aspectos al momento de resolver problemas y que se estanquen en el análisis de lo estrictamente operacional.

### Pregunta 3

#### Hallazgos

La pregunta pretendía que los estudiantes plantearan alguna estrategia heurística para la resolución del problema, que estuviera descrita en pasos generales, sólo en el equipo número dos se evidencia un intento muy incipiente.

Se evidenciaron otras dificultades como en el caso el equipo 3 en cuya respuesta existe una confusión relacionada con el concepto del área de una forma rectangular y una forma cuadrada, al dividir el área entre dos, ellos asumen que el apartamento es totalmente cuadrado, el error también consiste en que al dividir entre dos no existe el concepto de función cuadrática ya que no tuvieron en cuenta la raíz cuadrada.

El equipo 4 manifestó un concepto relacionado con el triángulo rectángulo, asumiendo que la forma del apartamento es triangular, al observar su representación gráfica corresponde al corte de un paralelepípedo, existe muy poca correspondencia entre los conceptos.

#### Pregunta 4

##### Hallazgos

Con la pregunta de los recursos se buscaba conocer si los estudiantes tenían claros los elementos teóricos acerca de la función cuadrática principalmente para llegar a una solución exitosa de problema, desde las preguntas anteriores incluyendo la pregunta 4 se evidencia la ausencia de esta base teórica ya que en ninguna respuesta ha sido mencionada la necesidad de plantear la ecuación cuadrática para hallar las medidas solicitadas.

#### Pregunta 5

##### Hallazgos

Es en esta pregunta donde se esperaba por parte de los equipos que explicitaran la ecuación cuadrática que debían plantear para hallar las medidas y finalmente la cantidad de material requerido como lo solicita el problema, sin embargo no se presentó en ninguna respuesta la solución específica. En el equipo 2 y equipo 5 si aparece el concepto de función cuadrática al relacionarlo con el problema de encontrar dos números desconocidos cuyo producto se conoce.

Por parte del equipo 5 se expresó en lenguaje verbal “el producto de dos números cuyo resultado sea 105”, lo que efectivamente corresponde a la definición del área, sin embargo no se tiene en cuenta la relación existente entre las dos medidas.

#### Pregunta 6

##### Hallazgos

La pregunta indaga acerca de aquellos aspectos que fueron más sencillos de dilucidar durante el proceso de solución del problema, sin embargo se evidencian bastantes dificultades al momento de identificar los conceptos propios y la información básica dada en el enunciado, el equipo 1 afirma que lo más fácil fue determinar el área cuando ésta se proporcionaba en la información del problema, el equipo dos asevera que las medidas las da en problema, lo cual revela un obstáculo al no poder reconocer que precisamente el problema es encontrar las medidas del apartamento y ya se habló de la confusión entre los conceptos de rectángulo y área por parte del equipo 3.

### Pregunta 7

#### Hallazgos

La pregunta pretendía que los estudiantes hicieran una retrospectiva y análisis acerca del procedimiento que siguió y los resultados que obtuvo, las respuestas reflejan que en general encontraron bastante dificultad al momento de tratar de llegar a una solución final satisfactoria, esto indica la poca claridad en los conceptos, la dificultad para plantear la ecuación es decir traducir el lenguaje verbal al lenguaje algebraico.

El reconocimiento de las dificultades y los errores es de suma importancia en el aprendizaje de las matemáticas puesto que lleva a los estudiantes a establecer estrategias para superarlos y retroalimenta la actividad docente. Engler et al (2002), citados por Golbach et al (2009), sostienen que los errores influyen en el aprendizaje de los nuevos contenidos como en el rendimiento de los alumnos. Por lo tanto es necesario que los alumnos los reconozcan y asuman la necesidad de superarlos a los fines de obtener logros en sus aprendizajes.

### Pregunta 8

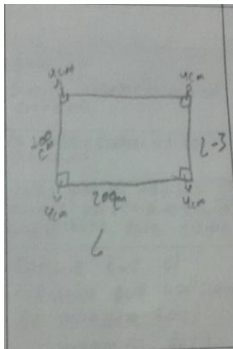
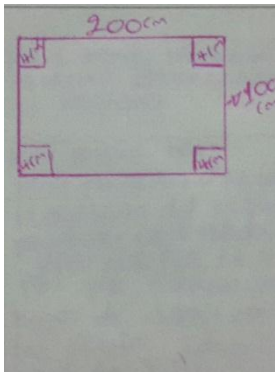
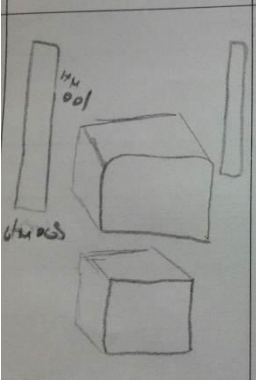
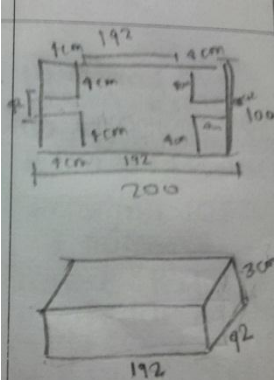
#### Hallazgos

En ninguna respuesta aparece el concepto de representación y su comparación con otras formas de representar que pueden existir, lo cual se constituye en el principal inconveniente puesto que lo que se busca con la investigación es que los estudiantes tengan claro el concepto de representación y la movilidad que puede existir entre las diferentes formas con el fin de resolver problemas planteados. Según Raymond Duval (2004)

El aprendizaje de la matemática es un campo de estudio propicio para el análisis de actividades importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Enseñar y aprender matemática conlleva que estas actividades requieran además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de distintos registros de representación y de expresión

Las actividades cognitivas que se realizan con las representaciones semióticas definen en la mayoría de los casos la manera de superar las dificultades conceptuales en el aprendizaje de las matemáticas por tanto es importante que los estudiantes las reconozcan y practiquen.

**Tabla 2. Resultados instrumento de ideas previas Problema 2.**

<b>Problemas Preguntas</b>	<b>EQUIPO 1</b>	<b>EQUIPO 2</b>	<b>EQUIPO 3</b>	<b>EQUIPO 4</b>	<b>EQUIPO 5</b>
<p><b>Representa gráficamente la situación que plantea el problema.</b></p>	<p>N.R</p>				
<p><b>Escribe el problema con tus propias palabras</b></p>	<p>N.R</p>	<p>Determinar cuánto material es necesario para producir las cajas y cuantas hojas son necesarias comprar para producirlas.</p>	<p>Cuántas hojas de lata grande se necesitan para producir 600 cajas con hojas de latas de 200 cm de ancho y 100 de largo con cortes en cada esquina de 4 cm.</p>	<p>N.R</p>	<p>Hay que saber cuántas cajas salen del área restante de la lámina sabiendo que cada caja debe tener 280 cm<sup>3</sup>. Encontrar las medidas de cada hoja para la caja.</p>

<b>Qué debes hacer para solucionar el problema</b>	N.R	Hallar las medidas de cada caja. Hacer la gráfica.	Dibujar el plano sumar los 4 cm de cada esquina se divide el volumen de 280 cm <sup>3</sup> y saca las medidas de la caja.	N.R	Sacar tres números que den un volumen de 280 cm <sup>3</sup> .
<b>Qué recursos tienes para solucionar el problema</b>	N.R	Calculadora. Conocimiento sobre el tema. Operaciones matemáticas.	Hojas  Calculadora  La mente poderosa Disposición	N.R	La medida de la lámina inicial. El volumen de cada caja. Lo que se le retira a la lámina inicial.
<b>Qué hiciste para resolver el problema</b>	N.R	Gráfica. Buena interpretación del tema.	Leer a fondo analizando los datos para resolver el problema.	N.R	No llegamos a la respuesta por que no encontramos una fórmula para realizarla.
<b>Qué fue lo más fácil y por qué?</b>	N.R	La interpretación del problema.	Leer porque así interpretamos el problema.	N.R	Retirar los cuadros.
<b>Qué fue lo más difícil y por qué?</b>	N.R	Hallar bien las medidas porque no tenía una buena base para iniciar.	La resolución del problema estábamos confundidos pero después no.	N.R	Encontrar los tres números.

<p><b>En la pregunta que te pide representar de alguna forma el problema, por qué escogiste dicha forma y no otra?</b></p>	<p>N.R</p>	<p>Porque fue el método que encontramos más fácil y dinámica para resolver el problema.</p>	<p>Porque hablan de hojas de lata entonces las pusimos con sus medidas.</p>	<p>N.R</p>	<p>Porque pudimos interpretar de ese modo como se vería la lámina y el cubo al final.</p>
--	------------	---	---	------------	---

## Pregunta 1

### Hallazgo

Según la representación pictórica de todos los equipos, ninguno supo interpretar que la lámina grande contiene varias láminas pequeñas de donde se arman las cajas, todos asumieron que de la lámina grande salen las dimensiones de las cajas, esto refleja problemas en la interpretación de los enunciados verbales de problemas matemáticos, para Bahamonde y Vicuña (2011)

Los estudiantes tienden a fijarse más en los conceptos que en el enunciado del problema para resolverlo. No es raro observar que, ante un problema propuesto después de haber practicado la suma, los escolares se dispongan a sumar sin haber leído el enunciado. Esto se debe entre otras causas, a los muchos consejos que se les ofrece para resolver problemas, como buscar las palabras clave que remiten a una operación (cuánto falta, cuánto sobra, entre todos, a cada uno, en total...) y efectuarla, ignorando la comprensión del enunciado; esto permite que los estudiantes escriban un número como respuesta, quizá resaltado, pero fuera de contexto, sin explicar qué quiere decir ni a qué se refiere.

A través de la didáctica en la enseñanza de las matemáticas los estudiantes pueden adquirir estrategias inadecuadas para resolver problemas, lo cual incluye prestar poca atención a los enunciados y realizar análisis superficiales y mecánicos.

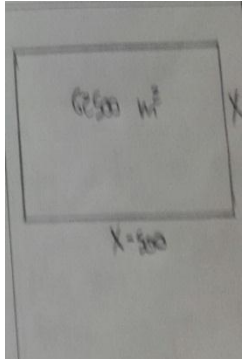
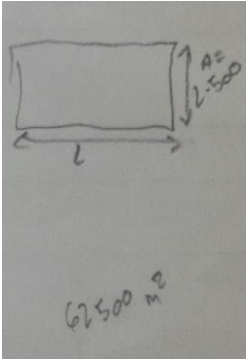
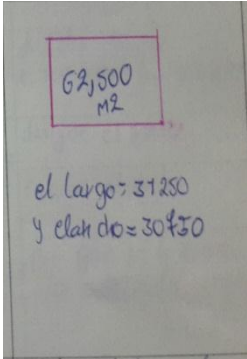
## Pregunta 2

### Hallazgo

En contraste con la pregunta uno al replantear el problema el contexto fue bien determinado por los equipos que contestaron la pregunta.

De la pregunta tres en adelante se encontraron los mismos obstáculos que en el problema anterior.

**Tabla 3. Resultados instrumento de ideas previas Problema 3.**

<b>Problemas Preguntas</b>	<b>EQUIPO 1</b>	<b>EQUIPO 2</b>	<b>EQUIPO 3</b>	<b>EQUIPO 4</b>	<b>EQUIPO 5</b>
<b>Representa gráficamente la situación que plantea el problema.</b>				N.R	N.R
<b>Escribe el problema con tus propias palabras</b>	Tenemos que hallar el ancho y el largo del rectángulo, sabiendo que el ancho es 500 m menor que el largo.	N.R	Calcular las medidas del cerco para que cierre los 62500 m2.	N.R	N.R
<b>Qué debes hacer para</b>	Encontrar las medidas del largo y	N.R	Hacer el gráfico de la cerca, dividir los 62500 con los valores	N.R	N.R

<b>solucionar el problema</b>	el ancho.		correspondientes.		
<b>Qué recursos tienes para solucionar el problema</b>	El área del rectángulo y el conocimiento de que el ancho es 500 m menor que el largo.	N.R	El cerebro. La profesora. Cuaderno.	N.R	N.R
<b>Qué hiciste para resolver el problema</b>	Encontrar dos números que multiplicados den 62500 y que el largo sea mayor 500 m.	N.R	Dividir.  Dibujar.  Restar.  Dar la respuesta.	N.R	N.R
<b>Qué fue lo más fácil y por qué?</b>	Saber lo que había que hacer.	N.R	Dibujar el plano.	N.R	N.R
<b>Qué fue lo más difícil y por qué?</b>	Encontrar los números con dichas características.	N.R	Calcular el ancho.	N.R	N.R
<b>En la pregunta que te pide representar de alguna forma el problema, por</b>	Porque nos pareció la forma más adecuada para el ejercicio propuesto.	N.R	Porque es la forma más adecuada.	N.R	N.R

<b>qué escogiste dicha forma y no otra?</b>					
---	--	--	--	--	--

## Pregunta 1

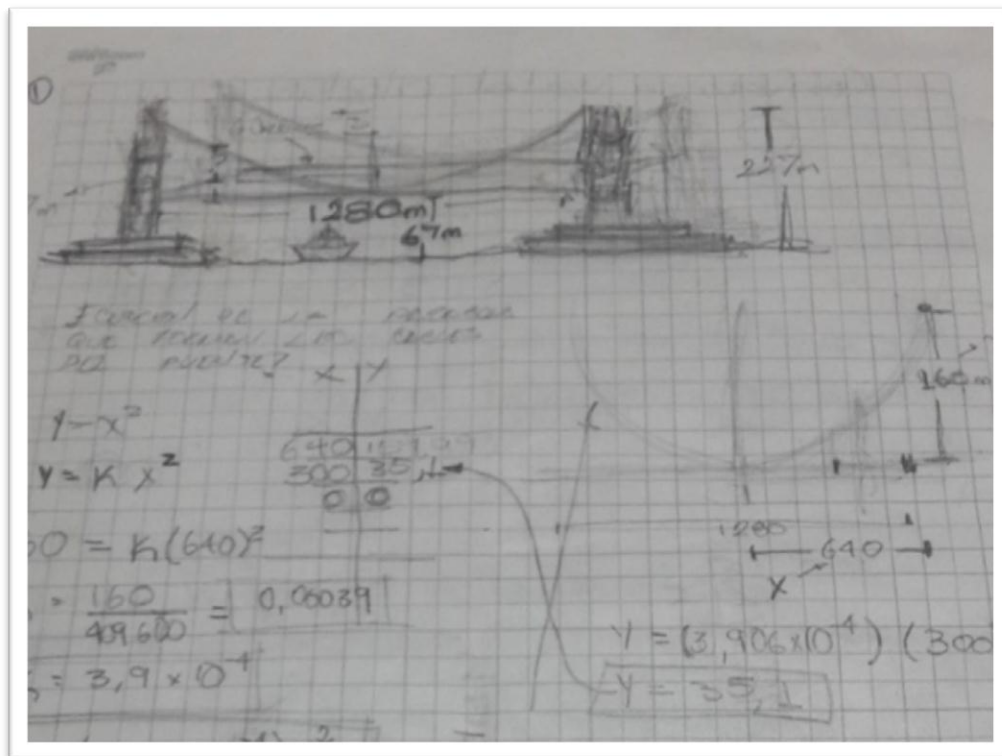
### Hallazgo

Siendo este problema muy similar al número uno, tuvo una mejor interpretación geométrica por los equipos que respondieron, tal vez el lenguaje utilizado se hizo más sencillo, identificaron la incógnita y la relación entre los lados del terreno rectangular. El equipo tres continúa cometiendo el error de dividir en área entre dos para obtener las medidas del largo y ancho.

De la pregunta dos en adelante se encontraron los mismos obstáculos que en los problemas anteriores.

## 4.2 Hallazgos del cuestionario post test

Figura 4. Solución de problema en contexto que privilegia la conversión verbal – algebraica.



**Tabla 4. Resultados instrumento Post - Test Problema en contexto que privilegia la conversión verbal – algebraica.**

<b>Preguntas</b>	<b>EQUIPO 1</b>	<b>EQUIPO 2</b>
Entender el problema  1. Entiende todo lo que dice el problema	Si se entiende	En la parte donde dice “el ancho de las calzadas es de 27 m”, podría dar lugar a pensar que existen varias calzadas cada una de 27 m.
2. Puede replantear el problema en sus propias palabras.	Se debe determinar la altura de las cuerdas para saber si el diseño es adecuado a partir de algunos datos de construcción.	Un puente con una longitud de 1280 m, está suspendido de dos torres de 227 m de altura, a través de dos cables que forman una parábola y tocan la calzada justo en el centro del puente, la distancia entre el agua y la calzada del puente es de 67m. Qué ecuación describe la parábola formada por los cables.
3. Distingue cuales son los datos.	El largo, la altura de las torres, la altura entre el puente y el río.	Los datos son. Longitud del puente 2280 m, altura de las torres 227 m, distancia entre la calzada del puente y la cima de las torres 160m, vértice de la parábola formada por los cables a 640m de ambas torres.
4. Sabe a qué quiere llegar.	Hallar la ecuación y calcular las alturas	Se requiere conocer la ecuación de la parábola descrita por los cables para saber a qué altura estarían en cualquier punto a lo largo del puente
5. Distingue la conversión o tratamiento que quiere favorecer el problema	Información del problema a la gráfica y viceversa.	Una conversión de gráfica a números
Configurar el plan  6. En sus propias palabras describa la estrategia a utilizar o los pasos a realizar para resolver el problema.	- Se hizo la gráfica -Se determinó la forma de la parábola - Con la forma y sabiendo que $y = ax^2$ y con un punto de halló a. - Con la ecuación se hallaron los otros valores.	- leer bien el problema - Hacer una gráfica de lo que describe. - Hacer una tabla de datos del problema. - Usar estos datos para obtener otros datos clave. - comprobar la solución.

Ejecutar el plan 7. Al implementar la estrategia, le dio solución al problema?	Sí se dio solución al problema	Esta estrategia me ayudó a solucionar el problema
8. Utilizó la conversión o el tratamiento para obtener la solución del problema	Se utilizó la conversión de palabras a gráfica y de la gráfica a la ecuación	La gráfica ayudó a ver con mucha más claridad los datos y la forma de resolverlo.
Mirar hacia atrás 9. Es la solución correcta?	Creo que sí es correcta	Considero que la solución es correcta
10. Cree que hay una solución más sencilla?	Hacer la gráfica con escalas más exactas y así determinar las alturas.	Una solución más sencilla sería tener un programa o software que al ser alimentado con los datos este me arroje los valores de la variables en cualquier punto de la parábola
11. Considera que el tratamiento o la conversión hecha contribuyó a la solución del problema	Si contribuyó, si no se hace la gráfica es muy difícil visualizar el problema y tener los resultados, además la ecuación ayuda si no hay recursos para hacer la gráfica exacta.	La conversión contribuyó ya que organizó con claridad los datos proporcionados en el problema

### Hallazgos

Ambos equipos lograron solucionar el problema. Los registros de conversión solicitada que era de un registro verbal a registro algebraico fue necesario para ambos pasar por la gráfica, es decir la parábola que se construye con los datos brindados, para poder llegar a la ecuación.

La conversión del registro verbal al registro gráfico se efectuó de forma directa, a partir de las descripciones suministradas en el registro de partida, por lo que se puede afirmar que existe un fenómeno de congruencia. Acerca de la actividad de conversión, Duval (2004) afirma que “es más compleja que el tratamiento porque cualquier cambio de registro requiere primero del reconocimiento del mismo objeto entre dos representaciones cuyos contenidos tienen muy seguido nada en común” (p. 112), y la congruencia de representaciones está determinada por tres condiciones según Duval (1999):

“... correspondencia semántica entre las unidades significantes que las constituyen, igual orden posible de aprehensión de estas unidades en las dos representaciones, y la posibilidad de convertir una unidad significativa en la representación de salida en una sola unidad significativa en la representación de llegada” (p. 6)

En la pregunta 2 el equipo 2, a pesar de la explicación durante la unidad didáctica continúa escribiendo un resumen del problema en lugar de describir lo más significativo y el contexto.

En la pregunta 3 el equipo 2 da una descripción de los datos muy basada en el concepto de función cuadrática, lo que representa un avance respecto al instrumento inicial después de la aplicación de la unidad didáctica. Para la enseñanza de las ciencias es muy importante que los contenidos se desarrollen a través de unidades didácticas, según Loste citado por Palacios (2014) “Las unidades didácticas... permiten el aprendizaje de contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales, materiales y recursos que permiten tratamientos más cercanos a las experiencias del alumnado, que promueven su participación activa, así como la formación de su sentido crítico” (p. 6)

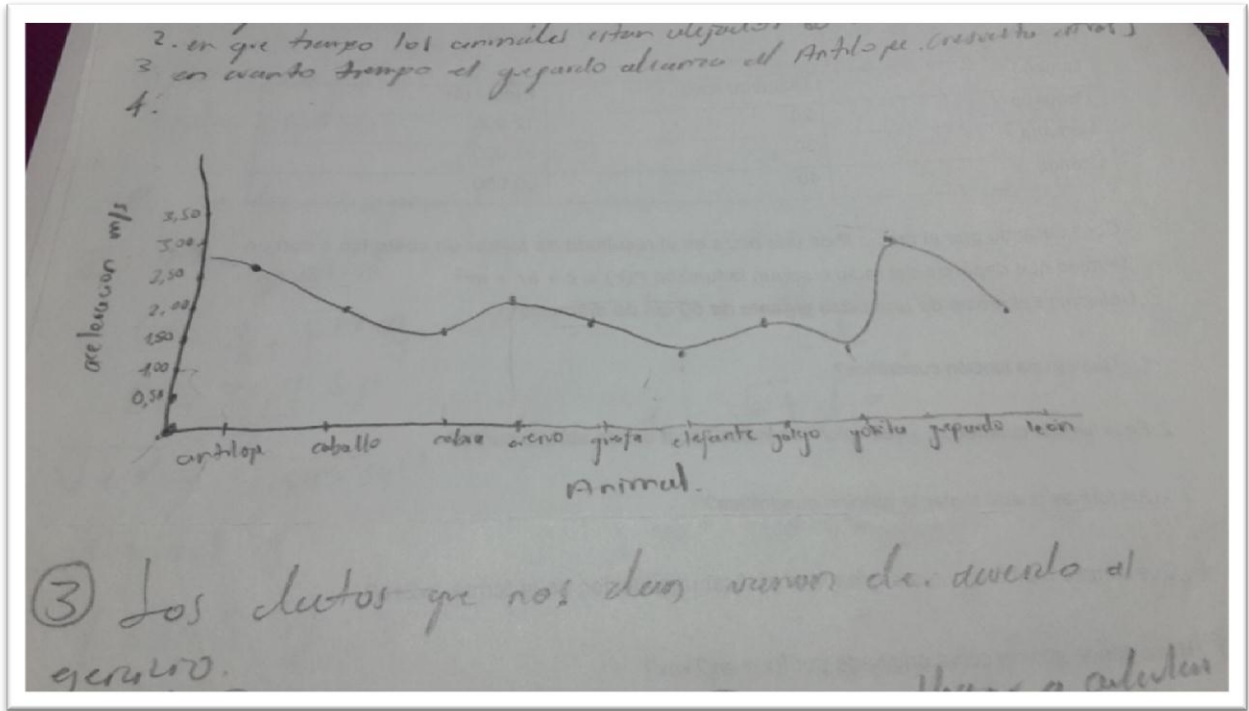
En ambos equipos se evidencia que distinguen con claridad la conversión que fue necesaria realizar para darle solución al problema, sin embargo en ningún punto del análisis se menciona que el registro de partida inicial fue el verbal, ambos equipos consideraron que la conversión realmente importante fue del registro gráfico al registro algebraico lo cual es netamente didáctico ya que en la enseñanza del concepto la mayoría de las veces se privilegia esta conversión, de manera operativa y mecánica, cuando en realidad para solucionar el problema los equipos realizaron ambas conversiones, del registro verbal al registro gráfico y del registro gráfico al registro algebraico. Hitt (2003) cita a Duval “Sobre la construcción de los conceptos matemáticos Duval establece que, dado que cada representación es parcial con respecto al concepto que representa, debemos considerar como absolutamente necesaria la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para su formación”. (p. 214)

Ambos equipos ponderaron la importancia de las conversiones realizadas para darle solución al problema; así lo citan Castro y Suavita (2011)

Toda actividad matemática implica el uso de sistemas de expresión y representación distintos al lenguaje común, lo que conlleva al desarrollo de Procesos Generales (MEN, 1998), como la resolución de problemas, razonamiento, modelación y comunicación, entre otros. Lo que significa y de acuerdo con Duval (1999), que dichas representaciones no son simplemente el medio para expresar los pensamientos del individuo o que su fin sea la comunicación, sino que son los instrumentos con los que se hace el trabajo matemático, es decir, son instrumentos semióticos, entendidos de acuerdo con Godino (1998) como, correspondencias (relaciones de dependencia o función) entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido o significado), establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

Todas las actividades matemáticas requieren la manipulación de los registros de representación de los objetos matemáticos, por esta razón es importante explorar y reconocer el rol fundamental que desempeñan tales sistemas de representación y también reflexionar sobre su uso y alcances en la construcción del conocimiento matemático y en una actividad tan esencial como lo es la resolución de problemas.

**Figura 5. Solución de problema en contexto que privilegia la conversión tabular – gráfica.**



**Tabla 5. Resultados instrumento Post - Test Problema en contexto que privilegia la conversión tabular – gráfica.**

Preguntas	EQUIPO 3	EQUIPO 4
Entender el problema	Si, está claro	Si
1. Entiende todo lo que dice el problema		
2. Puede replantear el problema en sus propias palabras.	Un guepardo comienza a perseguir un antilope que está ubicado a 80 metros, en este mismo instante lo ve y emprende su huida, su velocidad es igual a	Cada animal tiene una aceleración diferente. Si un guepardo persigue a un antilope calcular a qué distancia se encuentran después de determinado tiempo.

	cero.	
3. Distingue cuales son los datos.	Si	Aceleración, la fórmula de distancia, datos de tabla
4. Sabe a qué quiere llegar.	Al descubrir el tiempo en que se encuentra y una distancia en tiempos determinados	Quiere llegar a calcular los instantes y las aceleraciones a aplicar para obtener la respuesta.
5. Distingue la conversión o tratamiento que quiere favorecer el problema	Si, de la tabla y la fórmula se desprenden todos los valores de la gráfica.	Si se realizó la gráfica
Configurar el plan 6. En sus propias palabras describa la estrategia a utilizar o los pasos a realizar para resolver el problema.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Leer y entender el problema.</li> <li>- sacar los datos que me dan.</li> <li>- Mirar las operaciones que son debidas</li> <li>- Reemplazar los datos y realizar la gráfica</li> <li>- Resolver la operaciones y mirar la gráfica</li> <li>- Establecer los resultados de lo que piden.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- leer</li> <li>- revisar los valores de la gráfica</li> <li>- Aplicar la ecuación y revisar la gráfica</li> <li>- Hallar el valor solicitado</li> </ul>
Ejecutar el plan 7. Al implementar la estrategia, le dio solución al problema?	Sí con las operaciones adecuadas	Si
8. Utilizó la conversión o el tratamiento para obtener la solución del problema	Si se pasó de la tabla a la gráfica	Si se realizó la gráfica a partir de la tabla
Mirar hacia atrás 9. Es la solución correcta?	Sí, creo que esa es	Si
10. Cree que hay una solución más sencilla?	Tal vez en software para facilitar los tiempos.	Puede que la haya
11. Considera que el tratamiento o la conversión hecha contribuyó a la solución del problema	Si, gracias a ello se pudo solucionar.	Si sin la gráfica hubiera sido difícil de analizar

## Hallazgos

El equipo 3 persiste en la dificultad transcribir el problema y no interpretarlo con sus propias palabras.

Aunque ambos equipos construyeron la respuesta a partir de los datos brindados por el problema, no se alcanzó el objetivo de llegar a la solución a través de la gráfica, teniendo que pasar por el registro algebraico; se solicitaba la gráfica de distancia contra tiempo para así determinar en qué punto el guepardo alcanza el antílope.

En la gráfica elaborada por el equipo 3 se observa que no corresponde a una relación entre una variable dependiente y una independiente, corresponde a un histograma de los valores de la aceleración de los diferentes animales, no se elaboraron las tablas con los valores solicitados y de importancia. El registro gráfico es de suma relevancia al momento de analizar las conversiones entre varios registros así los afirma Duval: “En matemáticas los gráficos cartesianos se utilizan siempre en articulación con otros registros de representación” (Duval, 2004).

Los equipos se aproximaron a la respuesta no a través del registro gráfico como se solicitaba, sino a través del registro algebraico.

Sin embargo, ambos equipos consideraron que la gráfica sirvió de ayuda al momento de llegar a la respuesta.

**Figura 6. Solución de problema en contexto que privilegia el tratamiento algebraico**

Handwritten algebraic solution for a problem involving a prize of 500,000 pesos. The solution shows the derivation of a quadratic equation:

$$\frac{500.000 - 37.500x}{x} = \frac{500.000}{x+3}$$

$$(500.000 - 37.500x)(x+3) = 500.000x$$

$$500.000x + 1.500.000 - 37.500x^2 - 112.500x = 500.000x$$

$$-37.000x^2 - 112.500x + 1.500.000 = 0$$

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$X = \frac{+112.500 \pm \sqrt{112.500^2 - 4(-37.000)(1.500.000)}}{2(-37.000)}$$

$$X = \frac{112.500 + 5,33 \times 10^4}{-74.000} = 5$$

**Tabla 6. Resultados instrumento Post - Test Problema en contexto que privilegia el tratamiento algebraico.**

<b>Preguntas</b>	<b>EQUIPO 1</b>	<b>EQUIPO 5</b>
Entender el problema	Si el planteamiento del problema fue claro	Si
1. Entiende todo lo que dice el problema		
2. Puede replantear el problema en sus propias palabras.	La ecuación para un equipo de ganadores de un premio de 500000 pesos está definida, cuando el premio es repartido en partes iguales los 37500 representan tres partes más	Se debe hallar la cantidad de personas que ganaron un premio, a partir de la ecuación que modela el fenómeno y los demás datos.

	que se deben tener en cuenta al momento de repartirlo y reduciría lo que recibe cada persona en ese valor. Cuántas personas ganaron el premio?	
3. Distingue cuales son los datos.	Valor del premio 500000, reducción al valor del premio por persona 37500, partes más a repartir más el equipo 3.	
4. Sabe a qué quiere llegar.	Se quiere saber el número de personas que ganaron el premio.	Con la ecuación se debe calcular el número de personas que finalmente ganaron el premio después de la reducción.
5. Distingue la conversión o tratamiento que quiere favorecer el problema	Se quiere favorecer un tratamiento algebraico.	Si, se debe aplicar álgebra a la ecuación para poder despejar
Configurar el plan 6. En sus propias palabras describa la estrategia a utilizar o los pasos a realizar para resolver el problema.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Leer bien el problema.</li> <li>- Tabular los datos.</li> <li>- conocer bien qué me preguntan.</li> <li>- realizar el tratamiento de los datos.</li> <li>- solucionar el problema después del tratamiento.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Leer el problema varias veces y entenderlo.</li> <li>- Sacar los datos.</li> <li>- Estudiar la ecuación.</li> <li>- tratar de despejar la variable.</li> <li>- Considerar si la solución es lógica</li> </ul>
Ejecutar el plan 7. Al implementar la estrategia, le dio solución al problema?	La estrategia fue exitosa al momento de solucionar el problema.	Si
8. Utilizó la conversión o el tratamiento para obtener la solución del problema	Sin el tratamiento algebraico, hubiera sido difícil encontrar la solución.	Si, gracias al tratamiento se llegó a una respuesta, tal y como se presentó la ecuación, sin despejar no se hubiera podido resolver
Mirar hacia atrás 9. Es la solución correcta?	La solución es correcta	Si
10. Cree que hay una solución más sencilla?	A través de herramientas tecnológicas, hojas de cálculo software especializado.	No considero que haya otro camino

11. Considera que el tratamiento o la conversión hecha contribuyó a la solución del problema	El tratamiento algebraico nos ayudó a obtener una ecuación más sencilla para solucionar el problema.	Por supuesto, el tratamiento era fundamental para obtener la respuesta, sin las herramientas algebraicas hubiera sido bastante difícil.
--	--	---

### Hallazgos

Ambos equipos realizaron de manera exitosa el tratamiento del registro algebraico que se proponía en el problema. Al respecto Oviedo et al (2012)

El dominio de las operaciones necesarias para cambiar la forma mediante la cual se representa un conocimiento es primordial, ya que se constituye en una operación cognitiva básica que está muy relacionada con los tratamientos de comprensión y con las dificultades del aprendizaje conceptual. (p.30)

Es un avance significativo que los equipos hayan alcanzado el objetivo de resolución del problema a través del tratamiento, esto indica claridad en el concepto.

En todos los cuestionarios se observó una evolución en el planteamiento de la estrategia para resolver el problema que de acuerdo con Poggioli (1999) citado por Pérez y Ramírez (2011):

Las estrategias para resolver problemas se refieren a las operaciones mentales utilizadas por los estudiantes para pensar sobre la representación de las metas y los datos, con el fin de transformarlos y obtener una solución (p. 26). En este sentido, señala que estas estrategias comprenden los métodos heurísticos, los algoritmos y los procesos de pensamiento divergente. Los métodos heurísticos son "estrategias generales de resolución y reglas de decisión utilizados por los solucionadores de problemas, basadas en la experiencia previa con problemas similares. Estas estrategias indican vías o posibles enfoques a seguir para alcanzar una solución" (p. 27)

El establecimiento de dichas estrategias por parte de los estudiantes indica una buena comprensión del enunciado y abre el camino para aumentar las habilidades y destrezas al momento de resolver problemas.

En todos los cuestionarios se pondera la necesidad de contar con software al momento de analizar varios registros de representación, como una forma de solución más sencilla, que posiblemente tomaría menos tiempo en llevarse a cabo.

## CONCLUSIONES

- En el análisis de los resultados de la aplicación del instrumento de ideas previas se identificaron dificultades relacionadas con la interpretación de problemas en contexto, el establecimiento de estrategias para la resolución de problemas y casi que la inexistencia del concepto de representación y la posibilidad de realizar las actividades cognitivas de tratamiento y conversión; las didácticas en la enseñanza de matemáticas en muchos casos no favorecen la adquisición de habilidades y competencias para la resolución de problemas contextuales y no explicitan la necesidad de coordinar entre los registros de representación de los objetos matemáticos.
- En el experimento realizado a través del problema que privilegia la conversión verbal al algebraico los estudiantes recurrieron al registro gráfico como una representación auxiliar para realizar el tránsito hacia la representación algebraica, indicando que se encuentran más familiarizados con los tratamientos de los registros gráficos.
- En el experimento realizado a través del problema que privilegia la conversión del registro tabular al gráfico, los estudiantes evidenciaron una baja utilización del registro gráfico, a diferencia de cuando se trabaja desde la fórmula algebraica en la cual se apoyaron en la gráfica, posiblemente la enseñanza de la coordinación entre los diferentes registros aún no es manifiesta dentro de los currículos y dentro de los objetivos de las unidades didácticas lo cual afecta la movilidad entre todos los registros y por ende la comprensión global del concepto.
- El trabajo con resolución de problemas matemáticos en contexto lleva al estudiante a examinar los objetos matemáticos y progresar en su aprendizaje, lo que tiene como consecuencia la apropiación del concepto, expresado así por Santos (2007): “En este proceso, los estudiantes desarrollan un método inquisitivo que les permite

reflexionar constantemente de manera profunda sobre las diversas maneras de representar y explorar las ideas matemáticas” (p.23).

- Desde el inicio de la aplicación de los instrumentos fue evidente que para los estudiantes el establecimiento de una estrategia clara para resolver los problemas fue dificultoso, sin embargo se logró un avance posterior a la aplicación de la unidad didáctica. Para resolver problemas y plantear estrategias heurísticas en su resolución se debe realizar un trabajo continuo en su estudio y en el análisis de las posibilidades que permiten alcanzar una solución con éxito.
- Si bien el tratamiento de las representaciones depende directamente del registro inicial en el estudio se reflejó el uso predominante del tratamiento de los registros algebraicos, dado que en la enseñanza tradicional del álgebra prevalece el contexto netamente algebraico por su carácter operativo dando poco lugar a otros enfoques.
- Los cambios identificados después de la aplicación de la unidad didáctica demuestran el camino hacia la superación de todas las dificultades halladas inicialmente, los equipos lograron describir el problema haciendo énfasis en el contexto, reconocieron la conversión utilizada y lograron realizar el tratamiento algebraico de manera exitosa; esto resalta la relevancia de aplicar un instrumento inicial para tratar las problemáticas encontradas en la aplicación de la unidad didáctica, además de la importancia de llevar las temáticas al aula a través del desarrollo a conciencia de unidades didácticas a través de las cuales se genere una evolución conceptual.
- El uso de las diferentes representaciones incide favorablemente en el aprendizaje del concepto de función cuadrática y es un instrumento importante al momento de resolver problemas en contexto que requieren para su solución el planteamiento de los diferentes registros de representación de la función cuadrática.

- A través del instrumento post test, se identificó la fuerte relación que existe entre el éxito en la resolución de problemas en contexto de la función cuadrática y el empleo de sus representaciones semióticas.

## RECOMENDACIONES

- En la enseñanza de matemáticas en la educación básica se deben incluir actividades que permitan al estudiante identificar los registros de representación semióticos de la función cuadrática con el fin de permitir una apropiación más profunda del concepto, esto tanto para la enseñanza de la función cuadrática como para otros conceptos matemáticos además de incluir explícitamente los aspectos de representación y registros dentro de los currículos.
- En la enseñanza de matemáticas básicas, así como en los currículos y unidades didácticas se debe privilegiar la resolución de problemas en contexto como eje que articule los conceptos y que acerque al estudiante a un aprendizaje más significativo.
- Es necesario que se continúen realizando investigaciones en las que se evidencie la influencia de las representaciones semióticas de los diferentes objetos matemáticos en la resolución de problemas contextuales con el fin de caracterizar los procesos de pensamiento involucrados en los individuos al llevar a cabo estos procesos.
- Considerar este mismo tipo de estudio a partir de otros conceptos matemáticos.

## REFERENCIAS

- Aranzazu, C.. (2013). Secuencia didáctica para la enseñanza de la función cuadrática. Medellín.
- Bahamonde, S. y Vicuña, J. (2011). Resolución de problemas matemáticos. Punta Arenas. Recuperado de:  
[http://www.umag.cl/biblioteca/tesis/bahamonde\\_villarroel\\_2011.pdf](http://www.umag.cl/biblioteca/tesis/bahamonde_villarroel_2011.pdf).
- Castro, C. y Suavita, S. (2011). Formación, tratamiento y conversión como actividades cognitivas de representación: una experiencia con estudiantes para profesor. XIII conferencia interamericana de educación matemática Recife Brasil. Recuperado de:  
<http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/1358.pdf>
- Clapham, C. (2004). Diccionario de matemáticas. España: Editorial Complutense S.A.
- Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. Educational Researcher, Enero – Febrero 2003, 9-12. Recuperado de <http://inkido.indiana.edu/syllabi/p500/cobb%20et%20al.pdf>
- Díaz, M. et al. (2013). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. I congreso de educación matemática de américa central y el caribe. República Dominicana. Recuperado de:  
<http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/373-401-2-DR-C.pdf>
- Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Colombia: Universidad del Valle. Equipo de Educación Matemática.

Duval, R. (2004). Un tema Crucial en la Educación Matemática: La habilidad para cambiar en el registro de representación. La gaceta del RSME, 143-168.

Escohotado, A. (1993). Principios Matemáticos de la Filosofía Natural. Ediciones Altaya. Edición de. Barcelona.

Godino J y Batanero C. 1996. Relaciones Dialécticas entre Teoría, Desarrollo y Práctica en Educación Matemática: Un eta- análisis de tres Investigaciones. pp. 13-22. En, N. Malara (Ed.), An International View of Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline. Universidad de Módena.

Golbach, M. et al. (2010). Identificación de los errores en la resolución de problemas de geometría analítica y su comparación con el rendimiento académico en alumnos de ingeniería. Universidad Tecnológica Nacional San Miguel de Tucumán.  
Recuperado de: <http://www.soarem.org.ar/Documentos/48%20Goldbach>

González. G. (2011). Tratamiento de las representaciones semióticas de la función cuadrática. Recuperado de:  
<http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/bitstream/11182/860/1/INFORME%20FINAL%20INVESTIGACION%20TRATAMIENTO%20DE%20LAS%20REPRESENTACIONES%20SEMIOTICAS%20DE%20LA%20FUNCION%20CUADRATICA.pdf>

Guarin, M. A. y Ríos, G. (2006). Representaciones mentales sobre los problemas matemáticos en niños de 4º grado de básica primaria. Recuperado de:  
[http://ridum.umanizales.edu.co:8080/xmlui/bitstream/handle/6789/1212/Guarin\\_Ramierz\\_Maria\\_Andrea\\_2006.pdf?sequence=1&isAllowed=y](http://ridum.umanizales.edu.co:8080/xmlui/bitstream/handle/6789/1212/Guarin_Ramierz_Maria_Andrea_2006.pdf?sequence=1&isAllowed=y)

Gustín, J.D. y Avirama, L.W. (2014). Una propuesta para la enseñanza de la ecuación cuadrática en la escuela a través de la integración del material manipulativo.

Gutiérrez, S. y Aparicio, D. (2007). Caracterización de tratamientos y conversiones: el caso de la función afín en el marco de las aplicaciones. Recuperado de:  
<http://www.monografias.com/trabajos-pdf4/caracterizacion-tratamientos-y-conversiones-caso-funcion-afin-marco-aplicaciones/caracterizacion-tratamientos-y-conversiones-caso-funcion-afin-marco-aplicaciones.pdf>

Hitt, F. (1995). Intuición primera versus pensamiento analítico: dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. *Educación Matemática* 7(1), 63-75

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. Recuperado el 21 de julio de 2015 de <http://matedu.cinvestav.mx/librosfernandohitt/Doc-6.doc>

Hitt, F. (2002). *Funciones en contexto*. México: Prentice Hall.

Huayapa, E. (2012). Modelación usando función cuadrática: Experimentos de enseñanza con estudiantes De 5to de secundaria. Recuperado de:  
[http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/123456789/1571/HUAPAYA\\_GOMEZ\\_ENRIQUE\\_MODELACION.pdf?sequence=1&isAllowed=y](http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/123456789/1571/HUAPAYA_GOMEZ_ENRIQUE_MODELACION.pdf?sequence=1&isAllowed=y)

Ibáñez, P., & García, G. (2005). *Matemáticas IV. Precálculo*. México: Thomson Editores.

- Kline, M. (1992) El pensamiento Matemático en la antigüedad a nuestros días. I y II. Madrid: Alianza editorial.
- Kress, G., Ogborn, J. y Martins, I. (1998). A satellite view of language: some lessons from science classrooms. *Language awareness, Special Issue: Metacomunication in Instructional Settings*, 7 (2, 3), pp. 69-89
- Leithold, L. (1993). El Cálculo con Geometría Analítica. Segunda Edición. Ed. Harla.
- Mesa, Y.M. (2008). El concepto de función cuadrática: un análisis de su desarrollo histórico. Recuperado de:  
<http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/939/1/JC/0538.pdf>
- Mesa, Y. y Villa, J. (2008). Reflexión histórica, epistemológica y didáctica del concepto de función cuadrática. Universidad de Antioquia. Tomado de  
<http://funes.uniandes.edu.co/977/>.
- Ospina, D. (2012). Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal. Recuperado de:  
[http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/bitstream/11182/245/1/Tesis\\_Las%20representaciones%20semi%C3%B3ticas%20en%20el%20aprendizaje%20del%20concepto%20de%20funci%C3%B3n%20lineal.pdf](http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/bitstream/11182/245/1/Tesis_Las%20representaciones%20semi%C3%B3ticas%20en%20el%20aprendizaje%20del%20concepto%20de%20funci%C3%B3n%20lineal.pdf).
- Oviedo, L. et al. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria*. 13. Págs. 29 a 36. Recuperado de:  
<https://bibliotecavirtual.unl.edu.ar/ojs/index.php/AulaUniversitaria/article/download/4112/6207+&cd=1&hl=es&ct=clnk&gl=co>
- Palacios, N. (2014). La unidad didáctica: el aprendizaje del entorno y sus problemáticas. XIII Coloquio Internacional de Geocrítica El control del espacio y los espacios de

control Barcelona. Recuperado de:

<http://www.ub.edu/geocrit/coloquio2014/Nancy%20Palacios.pdf>.

Pavlopoulou, K. (1993). Un Problème décisif pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire: la coordination des registres de représentation. *Annales de didactique et sciences cognitive* 5, 67 – 93.

Pérez, Y. y Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de Investigación*. vol.35 no.73. Recuperado de:  
[http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1010-29142011000200009](http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1010-29142011000200009).

Puertas, M.L. (1996). Euclides: Elementos. Madrid: Ed. Gredos.

Polya, G. (1986). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.

Rodríguez, S. (2011). Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólico por estudiantes de secundaria. Recuperado de:  
[http://funes.uniandes.edu.co/1751/1/RodriguezDomingoS\\_TFM\\_julio2011.pdf](http://funes.uniandes.edu.co/1751/1/RodriguezDomingoS_TFM_julio2011.pdf).

Santos, L. (2007). La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica. Cinvestav. México. Recuperado de <http://www.uv.es/puigl/MSantosTSEIEM08.pdf>

Santos, L. y Espinosa, H. (2010). Teachers. use of dynamic software to generate serendipitous mathematical relations. *The Montana Mathematics Enthusiast*. 7 No. 1. Recuperado de:  
<http://www.matedu.cinvestav.mx/~santos/atat/productos.html>

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grows (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334-370). New York: Macmillan.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press.

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2007). Precálculo. Matemáticas para el cálculo. México. Thomson.

Tamayo, O., et al. (2005). La clase multimodal y la formación y evolución de los conceptos científicos mediante el uso de las tecnologías de la información y la comunicación. Universidad Autónoma de Manizales.

Ugarte, F. y Yucra, J. (2011). Matemáticas para arquitectos. Perú. Pontificia Universidad Católica del Perú.

## **ANEXO 1**

### **Unidad didáctica de aplicación general a todos los equipos**

#### **Identificación de obstáculos (Desubicación)**

##### **Instrumento Ideas Previas**

Lea atentamente los siguientes problemas y realice las actividades propuestas.

1. Se deben colocar los socalos en el piso de un apartamento, con el fin de determinar la medida total en metros del material a comprar a partir de los datos de construcción se determina que el apartamento tiene como medida del largo 8 metros más que la medida de su ancho, y que el apartamento tiene una superficie de 105 m<sup>2</sup>, cuáles son las dos medidas?
2. En una fábrica de cajas es necesario determinar cuánto material es necesario si se deben producir 600 cajas y la unidad de compra son hojas grandes de lata de 100 cm largo por 200 de ancho. Se debe tener en cuenta que la caja se elabora a partir de una hoja rectangular cortando cuadrados de 4 cm en cada esquina y doblando los lados hacia arriba, si el ancho de la caja es de 3 cm menos que el largo y el volumen de cada caja es de 280 cm<sup>3</sup>, se debe encontrar las medidas de cada hoja de lata para saber cuántas hojas grandes pedir para cumplir con la producción.
3. Un granjero requiere colocar la cerca para un terreno rectangular, si tiene conocimiento de que el área total es de 62500 m<sup>2</sup>, y que el largo equivale a 500 m restado el largo, cuáles deben las medidas del cerco, de manera que se encierre toda el área requerida.

Después de leer los problemas piense en su posible solución y escriba el procedimiento.

**Actividad: Comprendo el problema**

<b>Problemas</b> <b>Preguntas</b>	<b>EQUIPO</b> <b>1</b>	<b>EQUIPO</b> <b>2</b>	<b>EQUIPO</b> <b>3</b>	<b>EQUIPO</b> <b>4</b>	<b>EQUIPO</b> <b>5</b>
<b>Representa gráficamente la situación que plantea el problema.</b>					
<b>Escribe el problema con tus propias palabras</b>					
<b>Qué debes hacer para solucionar el problema</b>					
<b>Qué recursos tienes para solucionar el problema</b>					
<b>Qué hiciste para resolver el problema</b>					
<b>Qué fue lo más fácil y por qué?</b>					
<b>Qué fue lo más difícil y por qué?</b>					
<b>En la pregunta que te pide representar de alguna forma el problema, por qué escogiste dicha forma y no otra?</b>					

**La función cuadrática (Ubicación)**

## Historia del origen de la ecuación cuadrática

En algunos registros babilónicos se ha encontrado producciones de los cuales se puede inferir que tenían ciertas concepciones de elementos del álgebra, al respecto Posada y Villa (2006, p. 46) citado por Mesa (2008) afirma: "*...pues desde los babilonios (5000 a. C hasta los primeros años del cristianismo) se encuentran registros en los cuales se evidencia que estudiaban algunos problemas que trataban con la variación continua, pero sólo desde un registro tabular.*

Se indica así que desde los babilonios, comenzó la noción del concepto de función desde los registros tabulares, utilizando expresiones cuadráticas.

En la obra *Los Elementos de Eclides* citada por Mesa (2008) puede observarse el manejo y tratamiento de las relaciones cuadráticas que les competía como puede verse a manera de ejemplo en la proposición 5 del libro II, en la que se realiza una demostración de forma retórica y deductiva de una de las propiedades de la división de segmentos.

Proposición 5. Si se corta una línea recta en (segmentos) iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por los segmentos desiguales de la (recta) entera, junto con el cuadrado de la (recta que está) los puntos de sección, es igual al cuadrado de la mitad.

En los Elementos el término "cuadrado" se concibe como: "*...de entre las figuras cuadriláteras, cuadrado es la que es equilátera y rectangular*". también Puertas (1996), la traductora de esta obra, comenta que: "*para dibujar un cuadrado [Euclides] a partir de un lado la expresión dada es anagrápsai apó...que indica la acción de dibujar repetidamente a partir de una recta dada (un lado) las demás rectas (lados) que cierran un cuadrado*". Lo anterior permite mostrar la idea de cuadrado como figura cuadrilátera que evoca una concepción a partir de áreas pero que se construye a partir de la acción de repetir ese mismo lado, obviamente teniendo en cuenta los ángulos rectos, es decir, una cantidad multiplicada por sí misma sería la interpretación a la luz del álgebra geométrica.

Las nociones geométricas de los conceptos de áreas y superficies, llevan al concepto de cuadrado.

Dicha relación entre la geometría y el álgebra que establecían los griegos, pretende generalizar la medida de un segmento para aplicarlo en cualquier circunstancia en la que cumpla con las características de esta situación, en lo relacionado con las áreas cuadradas, es la manera de reducir el razonamiento a expresiones geométricas mediante la construcción rigurosa con regla y compás de tales problemas.

Es posible observar en el razonamiento de Euclides un análisis basado, no en un segmento con medida particular sino en un segmento en general, de lo cual se infiere cierto grado de generalidad, y aunque según Mason citado en Posada y Villa (2006) citado por Mesa (2008) la expresión de la generalidad es una de las bases del pensamiento algebraico, es posible pensar en un inicio de este pensamiento, tanto así que posteriormente esta generalidad sirve para el planteamiento del álgebra, pero no puede garantizarse la existencia de este pensamiento en los griegos, dado que sus razonamientos se basaban en las figuras geométricas más que en la relación cuadrática de la magnitud área con respecto a la longitud del lado. En este sentido se observa que las relaciones cuadráticas estaban firmemente ligadas a una interpretación geométrica y como punto central áreas de figuras planas, lo cual podría constituirse en un obstáculo dado que en términos de segmentos, los negativos no existirían por lo tanto la operación sobre estos elementos no se definiría

El punto culminante del álgebra, greco-alejandrina, se alcanzó con Diofanto que no se basa en significados geométricos si no en las relaciones geométricas. Siendo esta última una relación entre las propiedades permitiendo verlas desde un punto de vista algebraico. Diofanto plantea y resuelve ecuaciones indeterminadas de segundo grado, es decir, con varias soluciones, con lo que se podría observar en Diofanto la idea de variable. Plantea ecuaciones cuadráticas de la forma1:

$$ax^2 = 0$$

$$ax^2 + bx = c$$

Resuelve problemas de este tipo:

Encontrar dos números, tales que su suma sea 20 y su producto sea 26. Diofanto procede así: sea 20 la suma, 96 el producto y  $2x$  la diferencia entre los números buscados. Luego los números buscados son  $10 + x$ ,  $10 - x$ , por tanto  $100 - x^2 = 96$ , entonces  $x = 2$ , y los números buscados son 12 y 8. Problema 27 del libro I (Diofanto cit op. Kline 1970, p. 193).

Diofanto resuelve ecuaciones cuadráticas cuya forma más general es en nuestra notación  $y = Ax^2 + Bx + C$ , sin embargo considera sólo las raíces positivas, a diferencia de los indios que sabían que las ecuaciones cuadráticas tenían dos raíces e incluían las negativas y las irracionales, en expresiones como  $ax^2 + bx = c$  usaban el método de completar cuadrados que no era algo nuevo para ellos. (Kline 1970, p. 253).

### **Función Cuadrática**

Se denomina función cuadrática a una función polinómica de segundo grado  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , donde  $a, b$  y  $c$ , son números reales dados, con  $a$  diferente de 0.

La gráfica de una función cuadrática es un tipo especial de curva llamada parábola. Las funciones cuadráticas tienen múltiples usos en la vida real, por ejemplo se pueden emplear para resolver problemas de máximos y mínimos, es decir, aquellos donde se requiere establecer los valores de la variable independiente para los cuales, la variable dependiente alcanza su valor máximo o mínimo. (Clapham, 2004).

Ibáñez y García (2005) señalan además la importancia de la función cuadrática en otras áreas diferentes de las matemáticas como por ejemplo la física. Las funciones cuadráticas sirven además para determinar acontecimientos reales como por ejemplo la trayectoria de una pelota lanzada al aire, la forma que toma una cuerda floja sobre la cual se desplaza un

equilibrista, el recorrido desde el origen, con respecto al tiempo transcurrido, cuando una partícula es lanzada con una velocidad inicial, entre otras.

En otras disciplinas las funciones cuadráticas también son utilizadas, por ejemplo en Ingeniería Civil para resolver problemas específicos tales como la construcción de puentes colgantes que se encuentran suspendidos en uno de los cables amarrados a dos torres. En Biología las funciones cuadráticas son ampliamente utilizadas para estudiar los efectos nutricionales de los organismos (Ibáñez & García, 2005).

### **Forma Factorizada de la función cuadrática**

A la expresión  $f(x) = (x + 1)(x + 1)$  se le llama: forma factorizada de la función  $f(x) = x^2 + 2x + 1$  y, al valor  $-1$ , se le llama raíz ó cero de dicha función; pues cuando la función se evalúa en este valor, ésta se hace cero.

La forma (general) factorizada de una función cuadrática es:  $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$

Nos centraremos en el caso donde  $r_1$  y  $r_2$  son constantes (reales) y reciben el nombre de raíces de la función ó ceros de la función;  $a$  es el coeficiente del término cuadrático.

Expresiones como  $f(x) = x^2 + 1$ , no se pueden expresar de la forma factorizada con raíces reales, pues se trata de un polinomio irreducible, es decir no se puede expresar como un producto de dos expresiones polinómicas de coeficientes reales de grado uno y por lo tanto no tiene raíces reales.

### **Preguntas**

- (a) ¿Siempre será posible pasar una función cuadrática de forma polinómica, a forma factorizada con raíces reales? ¿Por qué si? , ¿Por qué no?
- (b) ¿En qué casos será posible, pasar una función cuadrática de forma polinómica a forma factorizada?

- (c) ¿Qué procedimiento(s) algebraico(s), permitirá(n) pasar de una forma polinómica a forma factorizada?
- (d) En mis propias palabras qué entiendo sobre las expresiones anteriores.
- (e) Cuáles cree que son las consecuencias de que no existan las raíces reales.

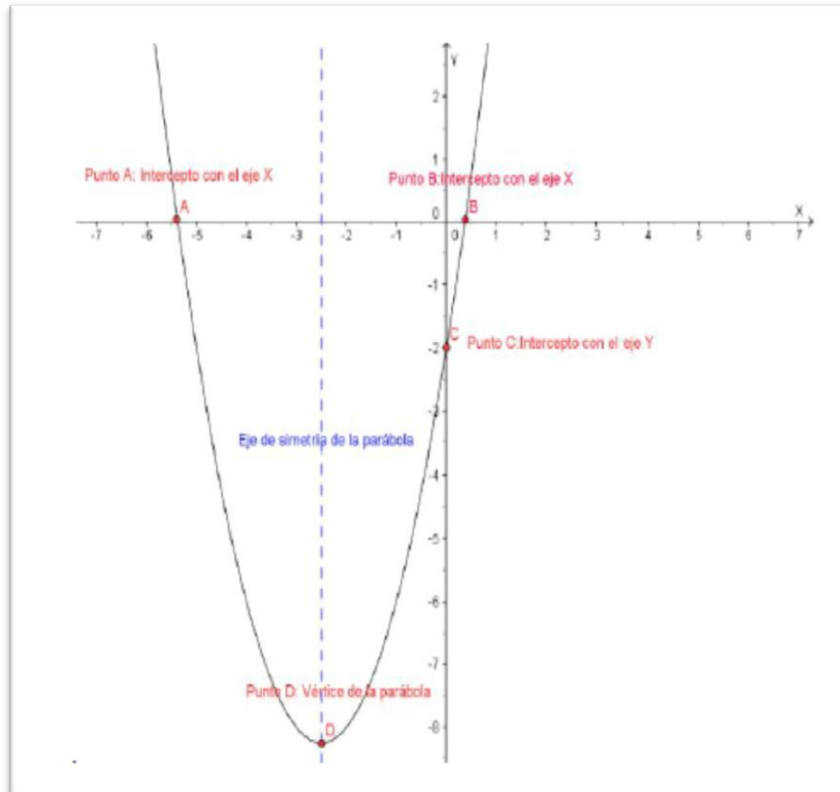
Tiempo por equipo: 15 min

Tiempo para socializar: 15 min

### **Representación gráfica de la función cuadrática**

La representación gráfica de función cuadrática recibe el nombre de parábola vertical. A continuación se presentará y explicará el esquema de una parábola en el plano cartesiano, en ella se identificarán sus puntos principales (figura 1).

Figura 7. Puntos principales de una parábola vertical



### **Elementos característicos de una parábola vertical:**

**Eje de simetría:** Es la recta vertical simétrica con respecto a la parábola.

**El vértice:** Es el único punto donde se intersectan el eje de simetría y la parábola.

**Interceptos con el eje :** Son aquellos puntos donde la parábola corta dicho eje; cabe anotar que no toda parábola se intercepta con el eje .

**Intercepto con el eje :** Es el punto donde la parábola corta al eje ; dicho punto siempre existirá.

## Tabulación de la ecuación cuadrática

Para trazar la gráfica de una función cuadrática se elabora una tabla de dos columnas una para la variable independiente  $x$  y otra para la variable dependiente  $y$ . Se obtienen los puntos que se consideren suficientes para trazar la función.

Ejemplo: Trazar la gráfica de la función  $y = -x^2 - 2$  mediante tabulación.

### Procedimiento:

1. Se evalúa la función en siete valores cualquiera de  $x$  (valores negativos y positivos)

$$f(-3) = -(-3)^2 - 2 = -9 - 2 = -11$$

$$f(-2) = -(-2)^2 - 2 = -4 - 2 = -6$$

$$f(-1) = -(-1)^2 - 2 = -1 - 2 = -3$$

$$f(0) = -(0)^2 - 2 = 0 - 2 = -2$$

$$f(1) = -(1)^2 - 2 = -1 - 2 = -3$$

$$f(2) = -(2)^2 - 2 = -4 - 2 = -6$$

$$f(3) = -(3)^2 - 2 = -9 - 2 = -11$$

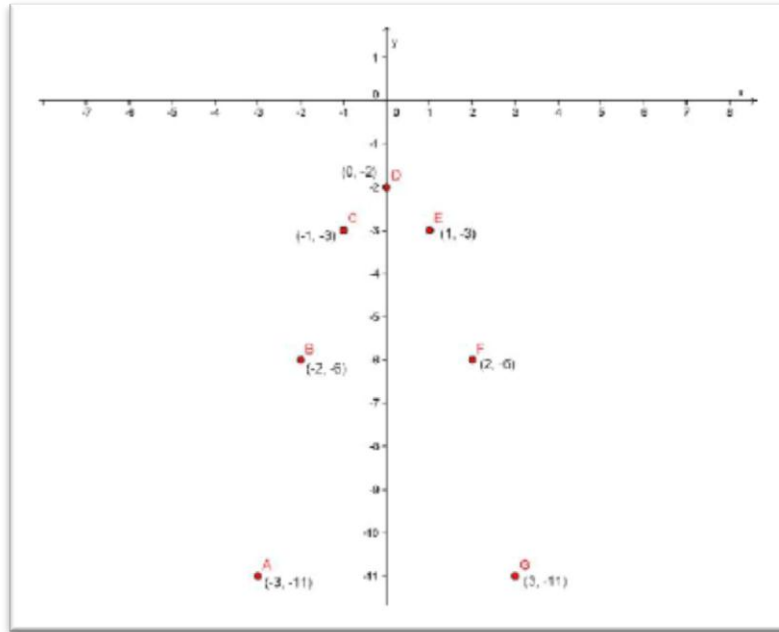
Construcción de la tabla de valores

	3	2	1				
	11	6	3	2	3	6	11

*Figura 4 Construcción de la tabla de valores*

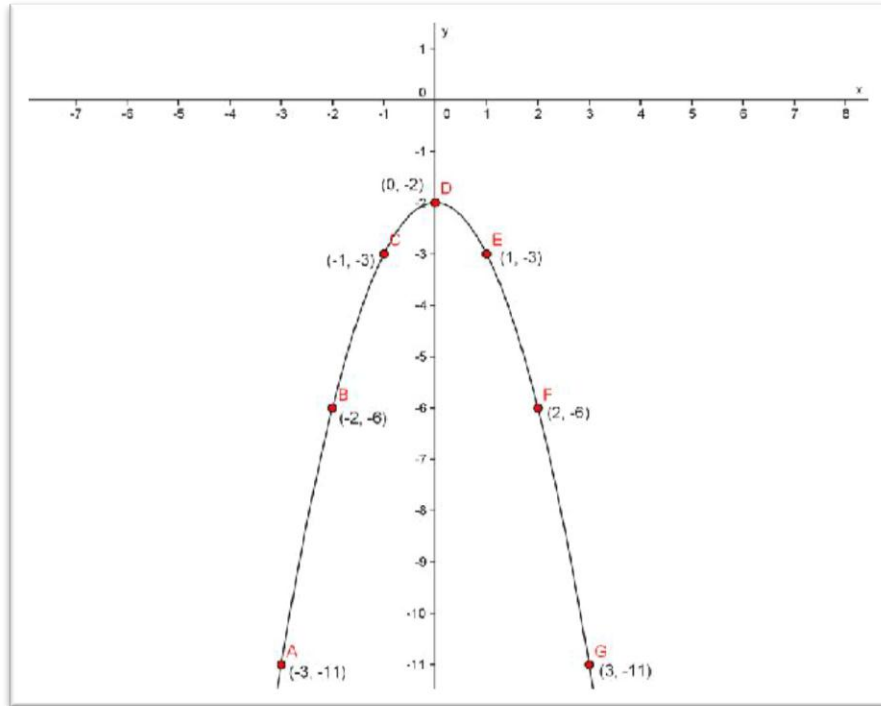
2. Se ubican en el plano cartesiano las siete parejas ordenadas

Figura 9. Puntos de la gráfica de la función  $y = -x^2 - 2$



3. Unir los puntos ubicados en el plano cartesiano

Figura 10. Gráfica resultante de la función  $y = -x^2 - 2$



A partir de la gráfica realizada de la función cuadrática  $y = -x^2 - 2$ , se observa:

- a) La parábola abre hacia abajo.
- b) El eje de simetría de la parábola: Es el eje y, es decir, está dado por la ecuación  $x = 0$
- c) El vértice: es el punto  $(0, -2)$ .
- d) Las raíces o ceros de la parábola: No tiene ya que la parábola no corta al eje x.
- e) Intercepto con el eje y: El punto  $(0, -2)$ .

Las características principales de una parábola como por ejemplo, hacia donde abre, su eje de simetría, las coordenadas del vértice, las coordenadas del intercepto con el eje y, las

coordenadas de los interceptos con el eje x (si existen), las brinda la expresión polinomial de cada función; veamos:

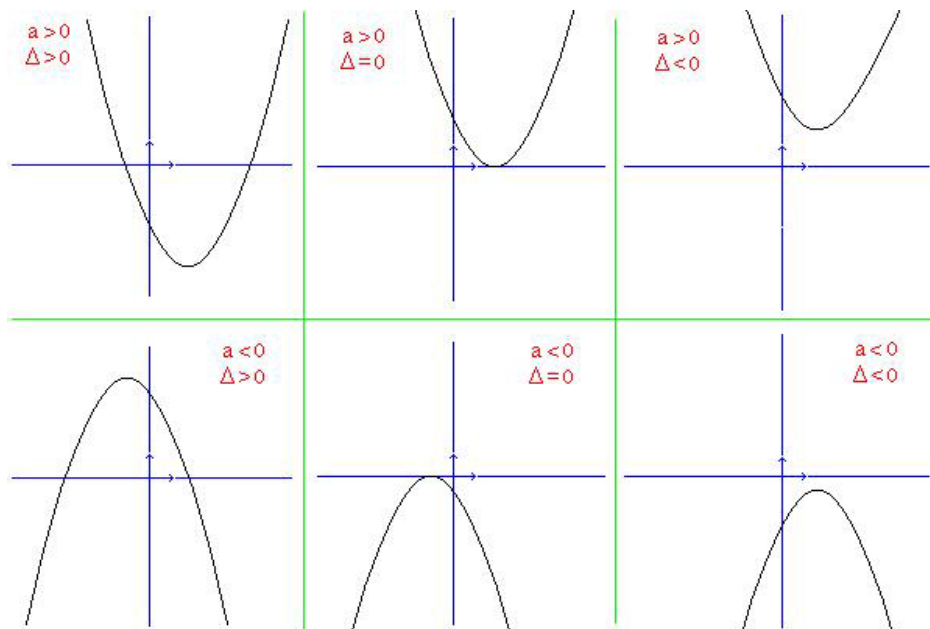
Expresión polinomial de la función cuadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$

Información	Operación a realizar
¿Hacia dónde abre la parábola?	Observar el valor de a. Si $a > 0$ , la parábola abre hacia arriba. La función tiene un valor mínimo. Si $a < 0$ , la parábola abre hacia abajo. La función tiene un valor máximo.
Eje de simetría	Calcular $\frac{-b}{2a}$ El eje de simetría es la recta $x = \frac{-b}{2a}$
Coordenadas del vértice	Evaluar la función en $x = \frac{-b}{2a}$ completando la pareja ordenada $\left[\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right]$
Coordenadas del intercepto con el eje y	Observar que $f(0) = c$ , entonces el intercepto es el punto (0, c)
Existen interceptos con el eje x	Establecer el discriminante. $\Delta = b^2 - 4ac$ , Si $\Delta > 0$ , la función tiene dos raíces reales diferentes. Si $\Delta = 0$ , la función tiene dos raíces reales iguales. Si $\Delta < 0$ , la función no tiene raíces reales.
Coordenadas de los interceptos con el eje x (si existen)	Se hallan, resolviendo la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$

Tabla 1 Expresión polinomial de la función cuadrática  $f(x)=ax^2+bx+c$

Dependiendo del coeficiente del término cuadrático a y del discriminante de la función  $\Delta = b^2 - 4ac$ , en la expresión polinomial de la función cuadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , una parábola puede presentarse en cualquiera de las seis ubicaciones siguientes

Figura 11. Parábolas típicas que representan las funciones cuadráticas



Además del procedimiento de tabulación para graficar una función cuadrática, existe otro más ágil en el que se determinan sólo los puntos principales por donde pasará la parábola como son: El eje de simetría, el vértice, el intercepto con el eje y y los interceptos con el eje x (en caso que existan).

Ejemplo trazo de la gráfica de la función  $f(x) = x^2 + 2x + 1$

Recordemos la expresión general de una ecuación de segundo grado

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ con } a \neq 0$$

Identifiquemos los coeficientes

$$a = 1, b = 2, c = 1$$

Concavidad: La parábola es cóncava hacia arriba pues  $a > 0$

Ecuación del eje de simetría

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2(1)} = \frac{-(2)}{2} = -1$$

La ecuación del eje de simetría  $x = -1$

Coordenadas del vértice:

$$\left[ \frac{-b}{2a}, f \frac{-b}{2a} \right]$$

Evaluando la función  $f(x) = x^2 + 2x + 1$  en  $x = -1$

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + 1$$

$$f(-1) = 1 - 2 + 1$$

$$f(-1) = 0$$

El vértice tiene coordenadas  $(-1, 0)$

Cortes con el eje x:

Se hallarán la raíces de  $x^2 + 2x + 1 = 0$

Observemos que  $x^2 + 2x + 1$  es un cuadrado perfecto

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

$$(x + 1)(x + 1) = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

Coordenadas del punto donde la gráfica corta al eje x  $(-1, 0)$

Obsérvese que en este caso coincide el vértice.

Cortes con el eje y:

Se obtiene evaluando la función  $f(x) = x^2 + 2x + 1$  en  $x = 0$

$$f(0) = (0)^2 + 2(0) + 1$$

$$f(0) = 1$$

Figura 12. Puntos característicos hallados de la función  $f(x) = x^2 + 2x + 1$

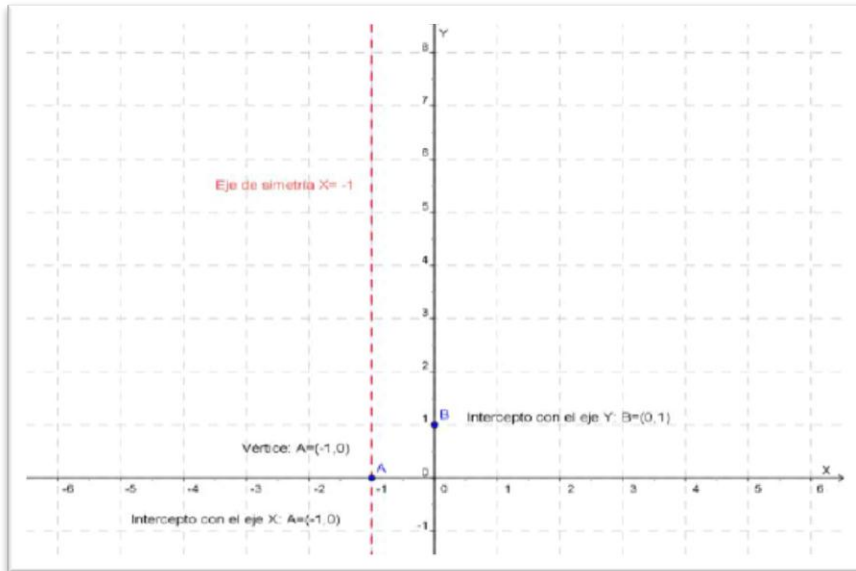
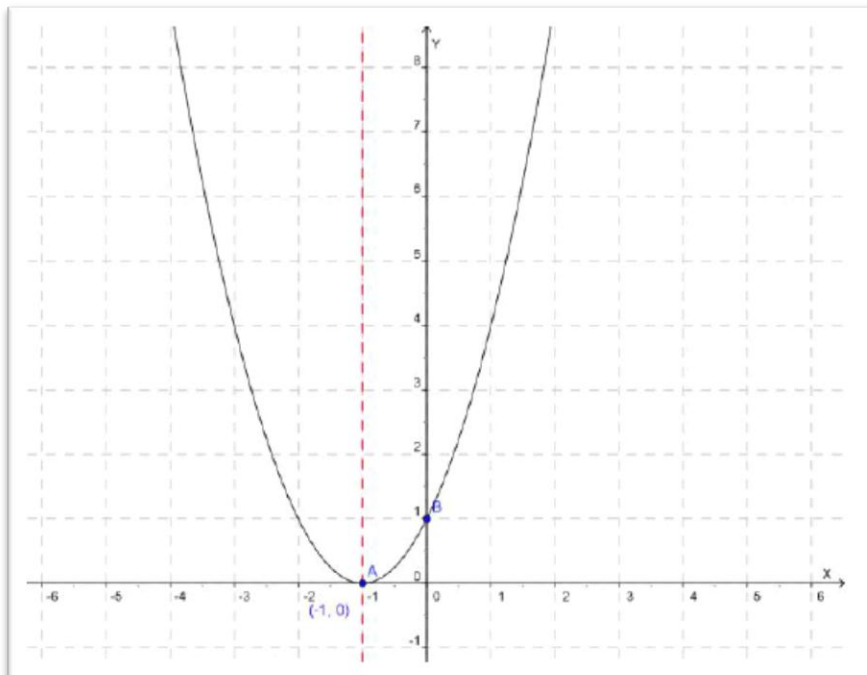


Figura 13. Gráfica de la función  $f(x) = x^2 + 2x + 1$



#### Preguntas

- ¿Con base en la expresión algebraica de una función cuadrática, hace conjeturas sobre las propiedades de su gráfica?

b. ¿Explica el procedimiento para trazar la gráfica de una función cuadrática?

Tiempo por equipo: 10 min

Tiempo para socializar: 10 min

## Post test (reenfoque)

### **PROBLEMA EN CONTEXTO QUE PRIVILEGIA LA CONVERSIÓN VERBAL – ALGEBRAICA**

El Golden Gate (Puerta dorada), es un puente ubicado en el estrecho de California a la entrada de la bahía de San Francisco E.E.U.U. Une a San Francisco con Marin County, el Golden Gate está suspendido de dos cables; además, el ancho de las calzadas es de 27m. Los cables forman una parábola y tocan la calzada exactamente en el centro del puente.

En la década posterior a la Primera Guerra Mundial el tráfico rodado en la región de la bahía de San Francisco se multiplicó por siete, de modo que el sistema de ferris fue incapaz de absorber ese crecimiento. Catalogado como puente colgante, construido entre 1933 y 1937, con una longitud aproximada de 1.280 metros, está suspendido de dos torres de 227 m de altura. Tiene una calzada de seis carriles (tres en cada dirección) y dispone de carriles protegidos accesibles para peatones y bicicletas. El puente también transporta de un lado a otro del canal gran cantidad de la energía necesaria para el desarrollo de la zona en tendidos eléctricos y conducciones de combustible. Bajo su estructura, deja 67 m de altura para el paso de los barcos a través de la bahía. El Golden Gate constituyó la mayor obra de ingeniería de su época. Fue pintado con urgencia para evitar la rápida oxidación producida en el acero de su estructura por el océano Pacífico.

1. Estima a que altura están los cables cuando la distancia es de 300 m del centro del puente.
2. Hallar la ecuación de la parábola que forman los cables del puente Golden Gate.
3. Usar la ecuación obtenida en el punto 2 para hallar la altura de los cables cuando la distancia es de 300 m y comparara el resultado con el del punto 1.

## PROBLEMA EN CONTEXTO QUE PRIVILEGIA LA CONVERSIÓN TABULAR – GRÁFICA

Cuando un cuerpo se ve primero en un lugar y luego en otro, es lógico decir que se desplaza; pero si no se observó en cada instante ese cambio de posición, es difícil saber que tan rápido lo hizo.

La velocidad es un cambio de posición en un tiempo determinado. La aceleración es un cambio de velocidad en un tiempo determinado.

La velocidad de los animales depende, principalmente, del medio en que se mueven. Así, se puede decir que los animales más rápidos son los que se desplazan por el aire, enseguida están los que se desplazan por tierra y, finalmente, los que lo hacen por el agua.

En lo que se refiere a los animales aéreos, el águila real es de los más veloces, con una aceleración de 9,33 m/s<sup>2</sup> otro es el vecejo con 5,56 m/s<sup>2</sup>, mientras que en el agua se encuentra el pez espada con 2,5 m/s<sup>2</sup> y el delfín con una aceleración de 1,78 m/s<sup>2</sup>.

La siguiente tabla registra la aceleración del movimiento de algunos animales

ANIMAL	ACELERACIÓN (m/s <sup>2</sup> )
Antilope	2,69
Caballo	1,92
Cebra	1,80
Ciervo	2,17
Jirafa	1,61
Elefante	1,44
Galgo	1,86
Gorila	1,33
Guepardo	3,19
León	2,22

$$d(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \quad \text{Donde, } d: \text{ distancia (m), } a: \text{ aceleración (m/s}^2\text{), } t: \text{ tiempo (s) y } v: \text{ velocidad (m/s).}$$

Si un guepardo comienza a perseguir a un antílope que está a 80 m, en ese mismo instante el antílope emprende su huida. Suponga que  $v_0$  es cero

1. ¿A qué distancia se encuentran los dos animales a los 5 segundos?
2. ¿En qué momento los dos animales están separados 10 metros?

3. ¿En qué instante el guepardo da alcance al antílope?
4. Elabora las gráficas de las aceleraciones para los animales de la tabla anterior

### **PROBLEMA EN CONTEXTO QUE PRIVILEGIA EL TRATAMIENTO ALGEBRAICO**

Un equipo de personas se presenta para reclamar un premio de \$500.000, los ganadores se reparten en partes iguales. Para repartir el premio se debe tener un cuenta tres partes más, lo cual implica una reducción de \$ 37.500 de la cantidad que recibiría cada persona. ¿cuántas personas forman el equipo de ganadores?. La ecuación está dada por:

$$37.500 = \frac{500.000}{x+3} - \frac{500.000}{x}$$

### **CUESTIONARIO PARA LA COMPRESIÓN DE LOS PROCESOS INVOLUCRADOS EN LA SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PLANTEADOS**

## Paso 1 Entender el problema

- 1.-Entiende todo lo que dice el problema
- 2.-Puede replantear el problema en sus propias palabras.
- 3.-Distingue cuales son los datos.
- 4.-Sabe a qué quiere llegar.
- 5.-Distingue la conversión o tratamiento que quiere favorecer el problema

## Paso 2 configurar el plan

En sus propias palabras describa la estrategia a utilizar o los pasos a realizar para resolver el problema.

## Paso 3 Ejecutar el plan.

1. Al implementar la estrategia, le dio solución al problema?
2. Utilizó la conversión o el tratamiento para obtener la solución del problema

## Paso 4 Mirar hacia atrás

1. Es la solución correcta?
2. Cree que hay una solución más sencilla?
3. Considera que el tratamiento o la conversión hecha contribuyó a la solución del problema

## **Bibliografía**

Aranzazu, C.. (2013). Secuencia didáctica para la enseñanza de la función cuadrática. Medellín.

Ibáñez, P., & García, G. (2005). *Matemáticas IV. Precálculo*. México: Thomson Editores.

Nuevas matemáticas. Álgebra, Geometría, Estadística. Grado 9. Edición para el docente. (2007). Unidad 5. Función Cuadrática. Bogotá.: Editorial Santillana.

Gustín, J.D. y Avirama, L.W. (2014). Una propuesta para la enseñanza de la ecuación cuadrática en la escuela a través de la integración del material manipulativo.

Mesa, Y.M. (2008). El concepto de función cuadrática: un análisis de su desarrollo histórico.