



INFLUENCIA DEL ESPESOR EN EL
COMPORTAMIENTO A FLEXIÓN DE VIGAS
SIMÉTRICAS ELÁSTICAS SUJETAS A GRANDES
DEFLEXIONES

LISSETH KATHERINE RAMÍREZ ANTOLÍNEZ

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES
FACULTAD DE INGENIERÍA
MAESTRÍA EN INGENIERÍA
MANIZALES

2018

INFLUENCIA DEL ESPESOR EN EL
COMPORTAMIENTO A FLEXIÓN DE VIGAS
SIMÉTRICAS ELÁSTICAS SUJETAS A GRANDES
DEFLEXIONES

LISSETH KATHERINE RAMÍREZ ANTOLÍNEZ

Proyecto de grado para optar al título de Magister en
Ingeniería

Director: Prof. CÉSAR AUGUSTO ÁLVAREZ VARGAS
Departamento de Mecánica y Producción
Email: dekinov@autonoma.edu.co

Codirector: Prof. SEBASTIÁN DURANGO IDÁRRAGA
Departamento de Mecánica y Producción
Email: sebastiandi@autonoma.edu.co

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES
FACULTAD DE INGENIERÍA
MAESTRÍA EN INGENIERÍA
MANIZALES

2018

DEDICATORIA

A:

Dios, por darme la oportunidad de vivir y de asumir este gran compromiso de formarme como magíster, fortaleciendo siempre mi corazón e iluminando mi mente en los momentos de dificultad, y también por haber puesto en mi camino a mis padres, a mis hermanos, a Francisco quienes fueron mi mayor soporte y compañía durante todo mi periodo de estudio. Gracias al apoyo incondicional de ellos, hoy surgen frutos en este proyecto de investigación.

¡Hoy es y será siempre un gran día para la ciencia!

AGRADECIMIENTOS

De manera especial quiero expresar mi cálido agradecimiento a mi director de tesis de maestría, Prof. César Augusto Álvarez Vargas, por la dedicación y apoyo que me brindó desde la formulación de este trabajo de investigación y durante la ejecución del mismo, ya que gracias a su orientación y rigurosidad se logró culminar con éxito.

Asimismo, agradezco a mi codirector, Prof. Sebastián Durango Idárraga por su asesoría, a los estudiantes de ingeniería mecánica Cristian Restrepo Mesa y Juan David Giraldo Henao por su colaboración durante la toma de datos en el diseño experimental.

También quiero mencionar a la directora de la maestría, Prof. Diana Yomali Ospina por su acompañamiento y asesoría durante mi permanencia en la universidad.

Finalmente, agradezco a todos mis compañeros de maestría en especial a María Gissela, con quienes compartí largas horas de estudio, pero también de felicidad al enseñarme la ciudad de Manizales de una manera muy amena y acogedora.

RESUMEN

El comportamiento mecánico que presentan las vigas elásticas simétricas y delgadas durante un ensayo de flexión a tres puntos ha sido ampliamente estudiado, no obstante, la mayoría de los autores no plantea el dominio de la solución y presenta resultados mediante modelos analíticos sin considerar la verificación a través de un diseño experimental además de asumir despreciable el espesor de la viga para la simplificación del problema.

El planteamiento anterior conllevó a analizar la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo influye el espesor en el comportamiento a flexión a tres puntos de una viga simétrica elástica sujeta a grandes deflexiones?

A través del presente trabajo de investigación se estudió el fenómeno de flexión a tres puntos para el caso de grandes deflexiones en un material fotopolímero teniendo en cuenta la variación de espesor de acuerdo a la siguiente descripción: i. descripción de un modelo analítico adaptado de Batista para el comportamiento a flexión, ii. Desarrollo de un modelo experimental para verificar o refutar la validez del modelo.

Los resultados del análisis estadístico de los datos muestran que el espesor (en el dominio dispuesto por las normas ASTM, para materiales con forma de lámina como es el caso expuesto existen dos condiciones: especímenes de espesor $\geq 1,6 \text{ mm}$ y especímenes con espesor $< 1,6 \text{ mm}$) es determinante en la conceptualización del modelo de flexión a tres puntos, sin embargo, la comprobación gráfica de los datos experimentales comparado con el modelo analítico arrojó que dicho modelo necesita ajustes y su solución es compleja pues se deben resolver simultáneamente dos casos no lineales de la ecuación diferencial: fuerza y momento dominantes, solo el 22% de las probetas sometidas al ensayo de flexión a tres puntos se ajustaron de manera aceptable al modelo matemático expuesto en este trabajo, el cual incluyó el espesor de la viga y se derivó con base a Batista.

Palabras clave: *diseño experimental, elasticidad, grandes deflexiones, prueba de flexión de tres puntos.*

ABSTRACT

The mechanical behavior of symmetrical and thin elastic beams during a three-point bending test has been widely studied, however, most of the authors do not propose the domain of the solution and present results by means of analytical models without considering the verification through an experimental design in addition to assuming negligible the thickness of the beam for the simplification of the problem.

The previous approach led to analyze the following research question: How does the thickness influence the flexural behavior at three points of an elastic symmetric beam subject to large deflections?

Through the present research work, the phenomenon of three-point bending was studied in the case of large deflections in a photopolymer material taking into account the variation in thickness according to the following description: i. description of an analytical model adapted from Batista for flexural behavior, ii. Development of an experimental model to verify or refute the validity of the model.

The results of the statistical analysis of the data show that the thickness (in the domain of the ASTM standards, for materials with sheet form as in the case of the conditions exist: specimens of thickness $\geq 1,6$ mm and specimens with thickness < 1.6 mm) is decisive in the conceptualization of the three-point flexure model, however, the graphic verification of the experimental data compared with the analytical model: nonlinear cases of the differential equation: dominant force and moment, only 22% of the test pieces subjected to the three-point bending test were adjusted in an acceptable way to the mathematical model in this work, which included the thickness of the beam and was derived based on Batista.

Key words: *experimental design, elasticity, large deflections, three point bending test.*

CONTENIDO

| | |
|--|----|
| NOTACIÓN | 14 |
| 1 INTRODUCCIÓN..... | 17 |
| 1.1 DESCRIPCIÓN DEL ÁREA PROBLEMÁTICA Y SU JUSTIFICACIÓN..... | 17 |
| 1.2 ANTECEDENTES | 29 |
| 1.3 OBJETIVOS..... | 46 |
| 1.3.1 OBJETIVO GENERAL..... | 46 |
| 1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS..... | 46 |
| 2 MODELO ANALÍTICO..... | 47 |
| 2.1 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA..... | 47 |
| 2.1.1 GEOMETRÍA Y CONDICIONES DE EQUILIBRIO | 47 |
| 2.1.2 FORMA NO DIMENSIONAL DE LAS ECUACIONES EXPUESTAS | 52 |
| 2.1.3 SIMETRÍA..... | 63 |
| 2.1.4 FORMULACIÓN PARA EL PROBLEMA DE FLEXIÓN DE TRES PUNTOS | 65 |
| 2.2 SOLUCIÓN GENERAL DEL PROBLEMA..... | 71 |
| 2.2.1 CASO DE FUERZA DOMINANTE..... | 73 |
| 3 DESARROLLO EXPERIMENTAL | 77 |
| 3.1 METODOLOGÍA..... | 77 |

| | | |
|-------|------------------------------------|-----|
| 3.1.1 | HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN | 77 |
| 3.1.2 | ENFOQUE METODOLÓGICO | 78 |
| 3.1.3 | PLANTEAMIENTO DEL DISEÑO | 81 |
| 3.1.4 | MONTAJE EXPERIMENTAL..... | 89 |
| 4 | RESULTADOS | 104 |
| 4.1 | ANÁLISIS ESTADÍSTICO..... | 104 |
| 4.2 | VALIDACIÓN DEL MODELO ANALÍTICO .. | 122 |
| 5 | DISCUSIÓN DE RESULTADOS..... | 139 |
| 6 | CONCLUSIONES | 143 |
| 7 | RECOMENDACIONES | 146 |
| 8 | REFERENCIAS | 147 |
| 9 | ANEXOS..... | 153 |

LISTA DE TABLAS

| | |
|--|-----|
| Tabla 1. Aplicaciones e importancia del ensayo de flexión a tres puntos..... | 27 |
| Tabla 2. Resumen de antecedentes fenómeno de grandes deflexiones y prueba a flexión de tres puntos | 41 |
| Tabla 3. Incógnitas según el tipo de soporte | 68 |
| Tabla 4. Factores, niveles y variable de respuesta para el experimento del fotopolímero | 87 |
| Tabla 5. Hoja de datos para fotopolímero | 88 |
| Tabla 6. Resultados de deflexión y ángulos para el fotopolímero | 102 |
| Tabla 7. Efectos estimados para la deflexión (mm)..... | 108 |
| Tabla 8. Análisis de varianza para el fotopolímero | 111 |
| Tabla 9. Coeficiente de regresión para la deflexión | 118 |
| Tabla 10. Coordenadas en xy para la probeta B12 mediante Engauge Digitizer | 124 |
| Tabla 11. Valores para ω y κ | 126 |
| Tabla 12. Coordenadas $x(s)$ y $y(s)$ para la probeta B12 mediante funciones elípticas de Jacobi | 128 |
| Tabla 13. Distribución de probetas por gráfica | 131 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Fig. 1. Viga con carga de flexión a tres puntos | 17 |
| Fig. 2. Esfuerzos en la viga | 19 |
| Fig. 3. Deflexión máxima de la viga..... | 22 |
| Fig. 4. Sección transversal de la viga..... | 23 |
| Fig 5. Geometría y condiciones de carga del problema | 47 |
| Fig. 6. Equilibrio del voladizo | 49 |
| Fig. 7. Relación entre los sistemas de coordenadas $0\xi\eta$ y $0xy$ | 54 |
| Fig. 8. Rotación..... | 63 |
| Fig. 9. Geometría y cargas para el caso de flexión a tres puntos..... | 65 |
| Fig. 10. Diagrama de cuerpo libre para la viga deformada .. | 66 |
| Fig. 11. Geometría y carga para para una viga en voladizo . | 70 |
| Fig. 12. Diseño de la investigación..... | 79 |
| Fig. 13. Planteamiento del diseño experimental..... | 81 |
| Fig. 14. Dimensiones probeta tipo A 0,95 mm de espesor .. | 83 |
| Fig. 15. Dimensiones probeta tipo B 1,65 mm de espesor... | 83 |
| Fig. 16 Proceso de fabricación de probetas fotopolímero | 85 |
| Fig. 17. Vista superior durante el proceso de fabricación de probetas | 85 |
| Fig. 18. Pasos para realizar el montaje experimental..... | 89 |
| Fig. 19. Marcación probetas de fotopolímero | 90 |
| Fig. 20. Masas utilizadas en el experimento de fotopolímero | 91 |
| Fig. 21. Partes del tablero rotulado | 92 |
| Fig. 22 Proceso de montaje de los apoyos | 93 |

| | |
|--|-----|
| Fig. 23. Ajuste de la cámara para la captura de video | 94 |
| Fig. 24. Desarrollo del experimento para fotopolímero | 94 |
| Fig. 25. Probeta de fotopolímero sometida a flexión | 95 |
| Fig. 26 Polietileno de recubrimiento de los apoyos | 96 |
| Fig. 27 Plano inclinado para medir fricción | 97 |
| Fig. 28 Diagrama de cuerpo libre en el plano inclinado | 97 |
| Fig. 29 Determinación de la fricción | 98 |
| Fig. 30 Cálculo de la deflexión para la probeta A9 con el software Tracker | 99 |
| Fig. 31 Cálculo de los ángulos para la probeta A9 | 100 |
| Fig. 32. Ángulos presentes en la deflexión de la viga | 101 |
| Fig. 33. Toma de ángulos con Tracker probeta A9 | 101 |
| Fig. 34 Residuales para el factor fuerza | 105 |
| Fig. 35 Residuales para el factor claro | 105 |
| Fig. 36 Residuales para el factor espesor | 106 |
| Fig. 37 Probabilidad normal para los residuales del fotopolímero | 106 |
| Fig. 38 Homocedasticidad para el experimento con fotopolímero | 107 |
| Fig. 39 Diagrama de pareto para el fotopolímero | 110 |
| Fig. 40 Efectos principales para la deflexión | 113 |
| Fig. 41 Probabilidad normal para los efectos | 114 |
| Fig. 42 Interacción entre fuerza y espesor | 115 |
| Fig. 43 Interacción entre claro y espesor | 116 |
| Fig. 44. Interacción entre la fuerza y el claro | 117 |
| Fig. 45 Superficie de respuesta entre fuerza y claro | 119 |
| Fig. 46 Superficie de respuesta entre fuerza y espesor | 120 |
| Fig. 47 Superficie de respuesta entre claro y espesor | 120 |

| | |
|---|-----|
| Fig. 48 Contorno de la superficie de respuesta para fuerza y espesor..... | 121 |
| Fig. 49. Fotografía de deflexión para la probeta B12 | 123 |
| Fig. 50. Gráfica de la curva base para la probeta B12 con los datos de Engauge Digitizer..... | 125 |
| Fig. 51. forma de la curva base según el modelo analítico para la probeta B12 | 129 |
| Fig. 52. Comprobación modelo analítico probetas A8, A1, A3..... | 130 |
| Fig. 53. Comprobación modelo analítico probetas A9, A6, A12..... | 132 |
| Fig. 54. Comprobación modelo analítico probetas A4, A11, A7..... | 133 |
| Fig. 55. Comprobación modelo analítico probetas A5, A10 | 134 |
| Fig. 56. Comprobación modelo analítico probetas B4, B8, B6 | 135 |
| Fig. 57. Comprobación modelo analítico probetas B9, B11 | 136 |
| Fig. 58. Comprobación modelo analítico probetas B3, B1, B7 | 137 |
| Fig. 59. Comprobación modelo analítico probetas B10, B5, B12..... | 138 |

LISTA DE ANEXOS

| | |
|---|-----|
| ANEXO A. PROPIEDADES DEL MATERIAL VEROBLUE..... | 153 |
| ANEXO B. CÓDIGO EN MATLAB PARA CÁLCULO DE FUNCIONES ELÍPTICAS DE JACOBI Y GRÁFICAS DEL MODELO ANALÍTICO | 154 |

NOTACIÓN

L : Separación de los soportes

F : Fuerza aplicada en el extremo libre de la viga

P : Fuerza aplicada en el centro de la viga

P_1 : Fuerza interna de la viga

σ : Esfuerzo normal en la viga

M_0 : Momento aplicado en el extremo libre de la viga

$M(s)$: Momento de flexión

δ : Deflexión de la viga

h : Espesor de la viga

b : Ancho de la viga

r : Radio de los soportes de la viga

μ : Coeficiente de fricción

$x(s)$: Coordenada de la curva base en el eje x

$y(s)$: Coordenada de la curva base en el eje y

$\phi(s)$: Ángulo entre la tangente a la curva base y el eje x

$\phi_0(s)$: Ángulo entre la tangente a la curva base y el eje x en el extremo de la viga

$\gamma(s)$: Ángulo entre el eje x y la dirección de la fuerza \mathbf{F}

$\alpha(s)$: Ángulo entre la tangente a la curva base del voladizo en el extremo libre y la dirección de la fuerza en el extremo \mathbf{F}

$\varphi(s)$: Ángulo entre la tangente a la curva base y el eje ξ

$\kappa(s)$: Curvatura de la curva base

κ_0 : Curvatura adimensional en el extremo libre de la viga

$s \in [0, L]$: Parámetro de longitud de arco medido desde el extremo libre del voladizo hasta el extremo empotrado del mismo

N : Componente normal de la fuerza en el extremo \mathbf{F}

T : Componente tangencial (fricción) de la fuerza en el extremo \mathbf{F}

H : Componente horizontal de la fuerza interna \mathbf{P}_1

V : Componente vertical de la fuerza interna P_1

E : Módulo de elasticidad del material

I : Segundo momento de área de la sección transversal de la viga con respecto al eje neutro

EI : Rigidez del voladizo (cte.)

ω : Parámetro de carga

$\xi(s)$: Coordenada de la curva base en el eje ξ

$\eta(s)$: Coordenada de la curva base en el eje η

1 INTRODUCCIÓN

1.1 DESCRIPCIÓN DEL ÁREA PROBLEMÁTICA Y SU JUSTIFICACIÓN

El ensayo de flexión de tres puntos mide la fuerza que se requiere para doblar una viga bajo condiciones de carga de tres puntos como se presenta en la Fig. 1 en la cual, L representa la separación de los soportes, P representa la carga a la cual es sometida, δ representa la deflexión máxima y, M representa el momento flector interno. Las pruebas de flexión se utilizan para determinar las propiedades mecánicas de diversos materiales (por ejemplo, el módulo de flexión o la resistencia a la flexión [1]).

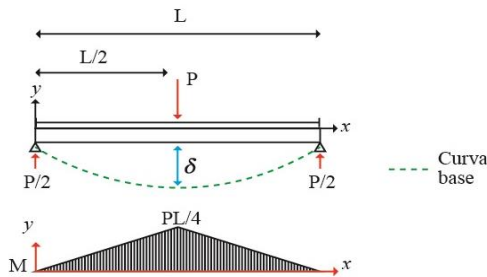


Fig. 1. Viga con carga de flexión a tres puntos

Durante un ensayo de flexión de tres puntos una viga es soportada por un rodillo en cada uno de sus extremos inferiores, mientras que un rodillo superior en la parte central es el encargado de aplicar la carga P , dicha carga origina flexión en la viga con lo que su eje se deforma en una curva, comúnmente conocida como la curva de flexión de la viga (para efectos del desarrollo del modelo analítico de este trabajo, se denominará a esta curva como la *curva base* representada en la Fig. 1). Las fibras del material en la parte superior experimentan esfuerzos de compresión, por el contrario, las fibras inferiores experimentan esfuerzos de tensión como se evidencia en la Fig. 2. Se asume que todas las cargas actúan en el plano xy , es decir las deflexiones por flexión ocurren en este mismo plano, conocido como plano de flexión. La deflexión de la viga δ en cualquier punto a lo largo de su eje es el desplazamiento de ese punto desde su posición original medida en la dirección y [2].

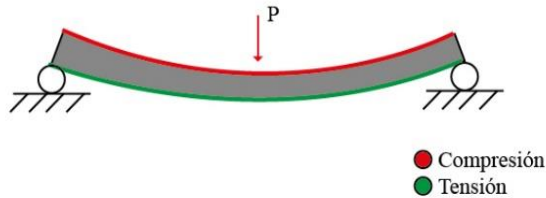


Fig. 2. Esfuerzos en la viga

El momento de flexión interno M , induce el esfuerzo normal σ en la viga que bajo condiciones de elasticidad lineal se puede calcular usando la ecuación:

$$\sigma = -\frac{My}{I} \quad (1)$$

Donde y es la distancia desde el eje neutro de la viga hasta el punto donde se quiere determinar el esfuerzo, I es el segundo momento de área de la sección transversal alrededor del eje neutro, M se define como el momento flector interno en la sección de análisis. El esfuerzo normal máximo se encuentra en el punto más alejado del eje neutro. En la Fig. 1 se observa

que el momento interno alcanza su valor máximo en la mitad del tramo de la viga (con una magnitud de $PL/4$).

La Ec. (1) se conoce como la fórmula de la flexión elástica y muestra que los esfuerzos son directamente proporcionales al momento flector M , e inversamente proporcionales al segundo momento de área I de la sección transversal respecto al eje neutro, además varían linealmente con la distancia y desde el eje neutro.

En el ensayo de flexión de tres puntos la viga se flexiona por la acción de la carga concentrada P . Es de interés conocer la deflexión para diseñar apropiadamente vigas sujetas a grandes deflexiones cuyas aplicaciones se encuentran en áreas como la aeronáutica, la robótica, el diseño de elementos mecánicos, entre otros [3]. Para ampliar las aplicaciones en las cuales la deflexión desempeña un papel fundamental se presenta la Tabla 1, al final de esta sección con algunos trabajos de investigación relacionados que ratifican la importancia del estudio del ensayo de flexión a tres puntos.

La ecuación diferencial de la curva de deflexión es ampliamente conocida:

$$\frac{d^2\delta}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (2)$$

Donde δ representa la deflexión, M es el momento de flexión, I es el segundo momento de área, x es la distancia de la viga desde uno de sus extremos elegido como referencia, E es el módulo de elasticidad.

Si se integra la Ec. (2) se puede obtener una expresión para la deflexión δ en términos de x bajo condiciones de fronteras específicas. El problema de la determinación de la relación entre fuerza y deformación para la flexión simétrica de tres puntos de una viga elástica delgada ha sido totalmente tratado [4] y la solución se obtiene a partir de la siguiente ecuación:

$$\delta = \frac{PL^3}{48EI} \quad (3)$$

Donde P es la carga aplicada, L la separación de los soportes, E es el módulo de elasticidad, I el segundo momento de área

de la sección transversal, y el coeficiente $1/48$ resulta de la especificación de las condiciones de frontera. La Ec. (3) se basa en la teoría de Euler-Bernoulli considerada una simplificación de la teoría lineal de la elasticidad que proporciona un medio para calcular las características de carga y deflexión de las vigas aplicable al caso de pequeñas deflexiones. La Fig. 3 ilustra el comportamiento de una viga delgada sometida a flexión de tres puntos con sus condiciones de frontera.

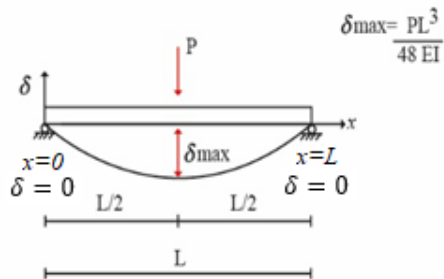


Fig. 3. Deflexión máxima de la viga

El segundo momento de área con respecto al eje neutro para una viga de sección transversal rectangular se calcula con la siguiente ecuación:

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (4)$$

Siendo h el alto de la viga o espesor y b el ancho como se presenta en la Fig. 4

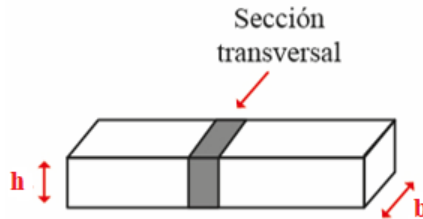


Fig. 4. Sección transversal de la viga

El módulo de flexión, el comportamiento de esfuerzo-deformación y los límites de falla en flexión pueden obtenerse usando la geometría simple de un ensayo de flexión de tres puntos. Estos ensayos se aplican en materiales poliméricos de acuerdo a la norma técnica ASTM D790[5], y en materiales metálicos según la norma técnica ASTM [6]

E290. El material utilizado en este trabajo de investigación fue un fotopolímero el cual obedece a la norma técnica ASTM D790. En esta norma se presentan dos rangos para el espesor cuando el material posee forma de lámina: especímenes de espesor $\geq 1,6 \text{ mm}$ y especímenes con espesor $< 1,6 \text{ mm}$.

* Especímenes de espesor $\geq 1,6 \text{ mm}$ [$\frac{1}{16} \text{ in}$]: para **pruebas planas** (caso expuesto en este trabajo), la profundidad de la muestra debe ser el espesor del material. Para las pruebas de borde, el ancho de la muestra debe ser el espesor del material, y la profundidad no debe exceder el ancho. Para todas las pruebas, el intervalo de la separación entre los soportes L debe ser $16 (\pm 1)$ veces el espesor de la viga h .

La anchura del espécimen no excederá de un cuarto de la separación entre soportes L para muestras de más de $3,2 \text{ mm}$ [$\frac{1}{8} \text{ in}$] de espesor. Las muestras de $3,2 \text{ mm}$ o menos de espesor deberán tener $12,7 \text{ mm}$ [$\frac{1}{2} \text{ in}$] de ancho. El espécimen debe ser lo suficientemente largo como para que sobresalga en cada extremo al menos el 10% de la separación

entre soportes L , pero en ningún caso será menos de 6.4 mm [$\frac{1}{4}$ in] en cada extremo. El alero debe ser suficiente para evitar que la muestra se deslice a través de los soportes.

* Especímenes con espesor $< 1,6$ mm [$\frac{1}{16}$ in]: para este caso el espécimen tendrá una longitud de 50,8 mm [2 in] Por 12,7 mm [$\frac{1}{2}$ in] de ancho, y se probará de manera plana con una separación de soportes de 25,4 mm [1 in].

La teoría clásica de deflexión de vigas desprecia el cuadrado de la primera derivada en la ecuación del momento de flexión y no puede ser utilizada cuando las pendientes de la viga son grandes. En muchos casos no se pueden obtener grandes deflexiones sin forzar a la viga plásticamente, pero cuando el espesor de la viga es pequeño comparado con su anchura, son posibles grandes deflexiones dentro del límite elástico del material [7] . La teoría de flexión lineal ofrece una buena aproximación cuando la deflexión es pequeña. Esta teoría se usa efectivamente para el análisis de los problemas de flexión para vigas manufacturadas de materiales metálicos [8].El problema para grandes deflexiones ha sido tratado por

muchos investigadores [9] como se discutirá en la sección de antecedentes, la dificultad radica en que la mayoría de los autores no plantean el dominio de la solución (a diferencia de Batista, 2014 [9]), y presentan soluciones mediante modelos analíticos sin considerar la verificación a través de un diseño de experimentos, además de asumir despreciable el espesor de la viga para la simplificación del problema. El planteamiento anterior conllevó a formular la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuál es la influencia espesor en el comportamiento a flexión a tres puntos de una viga simétrica elástica sujeta a grandes deflexiones? A través del presente trabajo de investigación se estudió el fenómeno de flexión a tres puntos para el caso de grandes deflexiones en un material elástico simétrico teniendo en cuenta el espesor de la viga. Como primera medida se tomó el trabajo realizado por Batista [9], y se realizó un diseño experimental para corroborar su modelo analítico el cual establece la relación entre la fuerza aplicada y la deflexión de la viga durante un ensayo de flexión a tres puntos efectuado sobre fotopolímero. El trabajo llevado a cabo en el laboratorio permitió determinar cuáles factores produjeron interacciones

importantes en el ensayo a flexión de tres puntos. Como se mencionó con anterioridad, se presenta la Tabla 1 la cual evidencia la importancia del estudio del ensayo a flexión de tres puntos.

Tabla 1. Aplicaciones e importancia del ensayo de flexión a tres puntos

| Área de aplicación | Pertinencia del Estudio | Autor |
|---------------------------|--|--|
| Construcción | Se estudió el comportamiento a flexión en losas de hormigón construidas a partir de barras de poliéster reforzadas con hilos naturales como lino y yute. Un sistema de techado de losas de concreto ligero de dichas barras se presenta como una solución sostenible para construir edificios de bajo costo. La capacidad de flexión y la deflexión máxima se incrementó al utilizar este tipo de materiales compuestos. | Aladdin M. Sharkawi et al. [10] (2017) |
| Medicina | Se realizó un estudio de la morfología a la fractura bajo carga de flexión en un fémur animal para ayudar a diferenciar entre las lesiones accidentales o abusivas que podrían sufrir los niños que son víctima del maltrato infantil. | Gina Bertocci et al. [11] (2017) |
| Estudio de suelos | La degradación del permafrost alpino bajo el cambio climático global ha llevado a unapérdida por deshielo y fisuras superficiales en glaciares rocosos. Probetas de suelo artificial congelado son sometidas a un ensayo de flexión de tres y de cuatro puntos para determinar la propagación de grietas que pudiesen ocasionar una falla en los glaciares de roca. | Yuko Yamamoto, et al. [12] (2016) |

Tabla 1. Aplicaciones e importancia del ensayo de flexión a tres puntos-Continuación-

| | | |
|--------------------|--|---|
| <p> Materiales</p> | <p> Se estudió el rendimiento a la flexión de un material compuesto por capas de fibra de vidrio y un laminado de fibra de metal, con un núcleo de espuma de aluminio. se obtuvo una estructura compuesta con la mejor resistencia a la flexión. Se prefieren la resina epoxi y las espumas de aluminio de baja porosidad, el espesor de las láminas de aluminio debe ser de al menos 1,5 mm, y el tipo de fibra de vidrio tiene poco efecto sobre la resistencia a la flexión. Se discutieron los principales modos de falla de las nuevas estructuras compuestas con dos tipos de pegamentos.</p> | <p> Ning-zhen Wang et al. [13] (2015)</p> |
| <p> Materiales</p> | <p> Los materiales nanoestructurados se han investigado a profundidad en las últimas dos décadas debido a sus propiedades mecánicas y físicas como alta resistencia y dureza, resistencia a la corrosión y al desgaste. Una tecnología avanzada de generación de materiales nanoestructurados es la aplicación de grandes deformaciones plásticas mediante el tratamiento de desgaste mecánico superficial (SMAT) en materiales cristalinos como metales y aleaciones. Este material se somete a pruebas de flexión de tres puntos para conocer su resistencia. Estos materiales son una buena opción en estructuras livianas.</p> | <p> S.P. Mai et al.[14] (2018)</p> |

1.2 ANTECEDENTES

Entre los primeros investigadores en tratar el problema de las grandes deflexiones se encuentra Freeman [7] quien determinó la relación entre la fuerza central, la separación de los soportes y la deflexión. En su trabajo utilizó la suposición de que el momento de flexión es proporcional a la curvatura de la superficie central de la viga para derivar dos ecuaciones no lineales que relacionan la fuerza aplicada, la separación entre los soportes y la deflexión del punto medio como una función del ángulo tangente de la viga en los soportes. Resolvió estas ecuaciones gráficamente para varias combinaciones de parámetros dados y desconocidos. Habló de posibles formas de vigas con separación de los soportes constante en función del ángulo tangente en los mismos y también proporcionó verificación experimental de sus resultados teóricos teniendo en cuenta la fricción en los apoyos.

Relaciones similares, pero usando integrales elípticas, fueron obtenidas por Conway [15] quien realizó un estudio del efecto de la fricción en los soportes en la deflexión del punto

medio de la viga. Efectuó sus cálculos para un ángulo tangente dado en el punto de soporte determinando su carga correspondiente y la deflexión en el punto medio y, presentó los resultados en forma gráfica. Resaltó que, para un análisis aún más sofisticado, se debe considerar también el momento de flexión equivalente en los puntos de contacto de la viga. No tuvo en cuenta el radio de los soportes de la viga. Un análisis del efecto de la fricción también puede encontrarse en Frisch-Fay [16], en el cual el autor muestra cómo puede obtenerse la solución del problema a partir de la solución para una viga en voladizo sometida a una carga uniformemente distribuida, en dicho trabajo discutió casos fronterizos para los cuales se aplicó una teoría aproximada.

El problema, en el contexto de la estandarización de la prueba de flexión de tres puntos para grandes deflexiones elásticas, fue tratado por West [17], quien resolvió numéricamente la ecuación de vigas no lineales y presentó la deflexión del punto medio en forma de factores de corrección a la teoría de la viga lineal para varios valores de la carga. También observó que el diámetro finito de los soportes de rodillos modifica la separación de los soportes efectiva, aunque sólo

utilizó este hecho para corregir sus datos experimentales. El efecto de la fricción y el radio de los soportes en la solución de las ecuaciones de la viga fue tratado por Theocaris et al. [18]. El objetivo de este trabajo consistió en investigar la flexión de tres puntos en grandes deflexiones con el propósito de aplicarlo como un método de ensayo para la determinación del módulo efectivo de elasticidad de los materiales teniendo en cuenta el efecto de la fricción y el radio de los soportes en la solución de las ecuaciones de la viga. Los autores también estudiaron el efecto del espesor h de la viga sobre la posición del eje neutro de la viga. Ellos muestran que, debido a una fuerza axial, el eje neutro no es el eje central de la viga, como fue asumido explícitamente por Freeman [7], sino más bien una nueva incógnita del problema. Mediante cálculos numéricos, mostraron que el efecto del desplazamiento del eje neutro es insignificante para las vigas que cumplen $h/L \geq 20$. Los autores no incluyeron el efecto del radio de soportes en los cálculos, sino que proporcionaron fórmulas de corrección.

Entre los autores que discutieron el problema en el siglo pasado está Ohtsuki [8] quien trató el problema de grandes

deflexiones no lineales de una viga elástica delgada simplemente apoyada para la flexión simétrica de tres puntos. Derivó ecuaciones diferenciales no lineales que gobiernan las deflexiones de una viga por aplicación de un método numérico y de un método analítico basado en integrales elípticas de Jacobi de primer y segundo orden. También propuso una técnica de reducción para estimar representativamente la máxima deflexión, la pendiente máxima y el máximo esfuerzo de flexión para grandes deflexiones a partir de la teoría lineal convencional para flexión. En los cálculos se excluyó el efecto de la fricción y el diámetro de los soportes[8].

Si se trata sobre los equipos para medir la flexión, aparece Fukuda [19], quien diseñó un mecanismo para tratar la prueba de flexión en compuestos avanzados, en especial para el feepoxi T800. Aunque la prueba de flexión de tres o cuatro puntos es conveniente para obtener una resistencia a la flexión, tiene varias desventajas especialmente para materiales compuestos avanzados. Un método recientemente propuesto se basa en una flexión por compresión axial y este método supera las desventajas anteriores.

Joo y Kwak [20] simularon la flexión de tres puntos mediante un elaborado procedimiento numérico basado en un análisis de contacto elastoplástico de gran deflexión. En este estudio se utilizó una formulación de minimización, que es equivalente a la forma incremental que se presenta como ecuaciones diferenciales parciales con desigualdades. Se adoptó un método de programación cuadrática secuencial basado en la técnica de elementos finitos como método de solución. Para examinar la validez del método de simulación, se realizaron experimentos para especímenes variando el ancho. Por otra parte, Gdoutos et al. [21] analizaron el comportamiento carga-deflexión para una viga compuesta sometida a flexión de tres puntos. La viga fue fabricada de revestimientos unidireccionales de carbono/epoxi y un núcleo de espuma de células cerradas de cloruro de polivinilo. Se desarrolló una mecánica no lineal de análisis de materiales que explica el efecto combinado del comportamiento no lineal de los revestimientos y materiales de núcleo (no linealidad material) y las grandes deflexiones de la viga (no linealidad geométrica). Se encontró que el efecto de la no linealidad del material sobre la deflexión de la viga es más

pronunciado para las fallas de núcleo dominadas por cizallamiento en el caso de longitudes de tramos cortos.

Yoshihara e Itoh [22] realizaron ensayos de flexión en tres puntos de especímenes arbóreos con relaciones de separación de los soportes y espesor mayores que las utilizadas en las normas estándar, y examinar la influencia de la deflexión en la medición de las propiedades de flexión. Las relaciones esfuerzo-deformación de flexión obtenidas de los diferentes procedimientos se compararon entre sí, y la influencia de la deflexión en la medición de las propiedades de flexión como el módulo de Young, el límite de esfuerzo proporcional y la resistencia a la flexión fueron examinadas.

En el típico ensayo de flexión de tres puntos, las magnitudes medidas son la fuerza y la deformación, a partir de las cuales se pueden calcular, según una teoría subyacente, diversas características de los materiales. Mientras que los autores anteriores ofrecieron correcciones a estas ecuaciones por factores numéricos o en forma gráfica, la aparición de ordenadores de bajo costo en los años noventa hizo que tales métodos fueran obsoletos.

Así, Arnautov [23] presentó un método para determinar la resistencia a la flexión de los materiales compuestos unidireccionales a partir de ensayos de flexión de tres puntos con deflexiones grandes mediante integrales elípticas del primer y segundo tipo. Propuso un modelo analítico para calcular el esfuerzo de flexión en el ensayo de barras delgadas teniendo en cuenta los cambios en las reacciones de los soportes en los extremos de las barras y en el tramo de la barra causada por su desviación, se desprecia la fricción y el radio en los soportes. Los resultados obtenidos se compararon con datos experimentales de tensión. El método elaborado para calcular esfuerzos de flexión tiene una obvia ventaja sobre el procedimiento de ingeniería convencional, porque la precisión de cálculo de los esfuerzos aumenta considerablemente en el caso de deflexiones grandes. Yoshihara [22] examinó la viabilidad de los métodos de estimación para medir el módulo de Young mediante la prueba de flexión de tres puntos para especímenes de pino. Mediante la medición de las deflexiones en el punto medio de los soportes y en el punto medio entre la carga y los puntos de apoyo, los módulos de Young se determinaron de acuerdo

a la teoría de vigas elemental (Timoshenko). Por otra parte, concluyó que el uso de extensómetros debe tenerse en cuenta como un método estandarizado para medir el módulo de Young por flexión.

Mujika [24] comparó la diferencia entre el módulo de flexión para un mismo espécimen de prueba sometido a flexión de tres y cuatro puntos en materiales compuestos. En su trabajo analizó el efecto de la separación de los soportes y la separación de la carga causado por la variación de la zona de contacto entre la muestra y los rodillos de soporte y de carga despreciando el efecto de corte.

Muñoz-Guijosa et al. [25], propuso un mecanismo de prueba de flexión pura basado en un sistema de poleas que, además de introducir las rotaciones necesarias, permite la reducción de la distancia entre los soportes de la probeta y garantiza la flexión pura, para la caracterización de materiales metálicos, materiales compuestos, materiales biológicos entre otros.

Tari [26] investigó las grandes deflexiones paramétricas de vigas en voladizo Euler – Bernoulli. Se trató con la ecuación característica de la desviación de la viga y, se empleó la

técnica de expansión automática de Taylor (ATET) para presentar soluciones de deformación en función de los parámetros de carga del problema de valores límite de Euler-Bernoulli. Khaneh Masjedi y Reza Ovesy [3], Analizaron las grandes deflexiones de vigas geoméricamente exactas bajo cargas conservadoras y no conservadoras utilizando el método de colocación de Chebyshev para la discretización de las ecuaciones gobernantes de la viga con formulación intrínseca. En el caso de cargas no conservadoras (seguidoras), puesto que la formulación se expresa en un bastidor deformado, la formulación está completamente libre de cualquier desplazamiento o variables rotacionales, y se puede conseguir una solución directa. En el caso de cargas conservadoras, las cargas aplicadas son función de rotaciones de vigas, y para mantener la naturaleza intrínseca de la formulación, se evita una integración directa de rotaciones y se empleó una solución iterativa de las ecuaciones gobernantes además de una actualización sobre las rotaciones de la viga como una etapa de post-procesado.

Borboni, De Santis [27], describieron la deformación de la superficie neutra de la viga y particularmente los

desplazamientos horizontal y vertical de la sección transversal del extremo libre. En éste trabajo se investigó una viga en voladizo con sección transversal rectangular constante, que fue sometida a una carga vertical constante concentrada, a una carga horizontal constante concentrada y a un par de flexión constante concentrado en el extremo libre. La viga fue fabricada de material elástico no lineal de tipo Ludwick asimétrico con diferente comportamiento en tensión y compresión.

Batista [9] es el autor de referencia para este trabajo de investigación, en su desarrollo presentó una solución para la configuración de equilibrio de una viga elástica delgada sometida a flexión simétrica en tres puntos, en términos de las funciones elípticas de Jacobi. Se derivaron ecuaciones generales y se estableció el dominio de la solución. Se discutieron varios ejemplos que ilustran el uso de la solución y, los resultados numéricos obtenidos se compararon con los resultados de otros autores. En este trabajo se tuvo en cuenta el efecto del radio en los soportes de la viga. Se concluye que derivar la solución en términos de las funciones elípticas de Jacobi representa una ventaja sobre la solución expresada por

integrales elípticas. Finalmente se obtuvo una fórmula de aproximación mediante la cual se da la carga de la viga como función polinomial de la deflexión de la misma.

Venetis y Sideridis [1] presentaron una solución aproximada a la ecuación de flexión de tres puntos para una viga de sección rectangular simplemente soportada en términos de series binomiales de potencias. La deflexión de la viga debido a una carga perpendicular se estima para altas tasas de su curvatura. Después de la deformación de la viga, se supone que la forma de su área de sección transversal permanece rectangular. La solución propuesta consiste en series binomiales de potencias y no contiene integrales elípticas u otras funciones especiales.

Mujika et al. [28], trataron el efecto de la variación del punto de contacto entre el soporte y los rodillos de aplicación de carga en ensayos de flexión de tres y cuatro puntos y la posible influencia de reacciones horizontales, bajo el supuesto de ángulos de flexión pequeños. Los enfoques analíticos correspondientes a la flexión de tres puntos y cuatro puntos fueron comparados con los resultados

experimentales que corresponden a una muestra de carbono / epoxi unidireccional. Se demostró que el módulo de flexión obtenido con el nuevo enfoque en todas las condiciones experimentales es casi constante. Además, las curvas de carga-desplazamiento coincidieron con las curvas experimentales.

A partir de la revisión de antecedentes, se evidenció que el problema de la flexión de la viga de tres puntos ha sido bien estudiado, pero aún existen algunas brechas. Por ejemplo, ninguno de los autores mencionados con anterioridad tuvo en cuenta el espesor de la viga en relación a la deflexión, lo que significa que desprecian el momento de flexión en los puntos de soporte de la viga y por tanto los cálculos son simplificados. El espesor de una viga es un parámetro físico que se debe tener en cuenta para el dimensionamiento de la misma, es importante incluirlo en este trabajo de investigación para calcular con precisión el esfuerzo que soporta el material para determinada condición de carga. La Tabla 2 resume los principales hitos investigados en la revisión de antecedentes.

Tabla 2. Resumen de antecedentes fenómeno de grandes deflexiones y prueba a flexión de tres puntos

| | Resumen del estudio | Autores | Consideraciones |
|---|---|------------------------|---|
| 1 | Relación entre la fuerza central, la separación de los soportes y la deflexión en el punto medio para grandes deflexiones. | Freeman (1946) | *No se tiene en cuenta el espesor de la viga. *Se considera la fricción en los soportes. |
| 2 | Análisis de grandes deflexiones en vigas simplemente apoyadas empleando integrales elípticas. | Conway (1947) | *No se tiene en cuenta el espesor de la viga. *Se considera la fricción en los soportes. *No se considera el radio de los soportes en la viga. *para un análisis aún más sofisticado, se debe considerar también el momento de flexión equivalente en los puntos de contacto de la viga. |
| 3 | Análisis del pandeo de una barra bajo su propio peso y las grandes deflexiones de un voladizo sometido a una carga uniformemente distribuida. | Frisch-Fay (1961-1962) | *No se tiene en cuenta el espesor de la viga *Se considera la fricción en los soportes. |
| 4 | Contexto de la estandarización de la prueba de flexión de tres puntos para grandes deformaciones elásticas con teoría no lineal. | West (1964) | *Se considera el radio de los soportes. *No se tiene en cuenta el espesor de la viga. *Se experimenta con un polímero. |

Tabla 2. Resumen de antecedentes fenómeno de grandes deflexiones y prueba a flexión de tres puntos -Continuación-

| | | | |
|---|---|------------------------|--|
| 5 | Investigación completa de la flexión de tres puntos en grandes deflexiones con el propósito de aplicarlo como un método de ensayo para la determinación del módulo efectivo de elasticidad de los materiales. | Theocaris et al (1977) | *Se considera la fricción en los soportes. *Considera fórmulas de corrección para el radio en los soportes. *Se considera el espesor de la viga sobre la posición del eje neutro. |
| 6 | Comparación de los resultados de flexión de la viga obtenidos por métodos analíticos, numéricos y experimentales para grandes deflexiones no lineales. | Ohtsuki (1986) | * No se considera el efecto de la fricción y radio en los soportes. |
| 7 | Mecanismo para tratar la prueba de flexión en compuestos avanzados, en especial para el fepxi T800. | Fukuda (1989) | *Nuevo método de prueba de flexión basado en compresión axial. *Se elimina el rodillo de carga central. |
| 8 | Simulación la flexión de tres puntos mediante un elaborado procedimiento numérico basado en un análisis de contacto elastoplástico de gran deflexión. | Joo, Kwak (1989) | *No se considera la fricción en los soportes. *Se experimenta con acero. |
| 9 | Análisis del comportamiento carga-deflexión para una viga compuesta sometida a flexión de tres puntos. | Gdoutos et al (2001) | *Viga de material compuesto. |

Tabla 2. Resumen de antecedentes fenómeno de grandes deflexiones y prueba a flexión de tres puntos -Continuación-

| | | | |
|----|---|------------------------|---|
| 10 | Ensayos de flexión en tres puntos de especímenes arbóreos con relaciones amplitud-profundidad mayores que las utilizadas en las normas estándar para examinar la influencia de la deflexión en la medición de las propiedades de flexión. | Yoshihara, Itoh (2002) | *Se tratan especímenes arbóreos. *La relación L/e es mayor que la utilizada en la norma. |
| 11 | Método para determinar la resistencia a la flexión de los materiales compuestos unidireccionales a partir de ensayos de flexión de tres puntos con deflexiones grandes mediante integrales elípticas del primer y segundo tipo. | Arnautov (2005) | * No se considera el efecto de la fricción y radio en los soportes. *Se experimenta con polímero. |
| 12 | Viabilidad de los métodos de estimación para medir el módulo de Young de la madera mediante la prueba de flexión de tres puntos utilizando especímenes de pino. | Yoshihara (2006) | *Se tratan especímenes arbóreos. |
| 13 | Diferencia entre el módulo de flexión para un mismo espécimen de prueba sometido a flexión de tres y cuatro puntos en materiales compuestos. | Mujika (2006) | *Se experimenta con polímero. *No se tiene en cuenta el espesor de la viga. |

Tabla 2. Resumen de antecedentes fenómeno de grandes deflexiones y prueba a flexión de tres puntos -Continuación-

| | | | |
|----|--|-----------------------------------|--|
| 14 | Mecanismo de prueba de flexión pura basado en un sistema de poleas para la caracterización de materiales metálicos, compuestos, biológicos entre otros. | Muñoz-Guijosa et al (2011) | *La capacidad del sistema de introducir grandes deflexiones en los especímenes de prueba permite la caracterización de muchos tipos de materiales, ya sean metales, compuestos, materiales biológicos, etc. También permite la prueba de especímenes curvados. |
| 15 | Investigar las grandes deflexiones paramétricas de vigas en voladizo Euler – Bernoulli. | Tari (2012) | * Se analiza el momento y la fuerza en el extremo terminal de la viga. |
| 16 | Analizar la gran deflexión de vigas geoméricamente exactas bajo cargas conservadoras y no conservadoras utilizando el método de colocación de Chebyshev. | Khaneh Masjedi, Reza Ovesy (2014) | *El método de colocación Chebyshev exhibe una tasa de convergencia muy rápida en polinomios de orden bastante bajo. Estas características hacen que el método de colocación de Chebyshev sea computacionalmente eficiente en comparación con los métodos basados en elementos finitos. |

Tabla 2. Resumen de antecedentes fenómeno de grandes deflexiones y prueba a flexión de tres puntos -Continuación-

| | | | |
|----|---|----------------------------|---|
| 17 | Describir la deformación de la superficie neutra de la viga y particularmente los desplazamientos horizontal y vertical de la sección transversal del extremo libre (viga elástica no lineal). | Borboni , De Santis (2014) | *Se considera la fuerza horizontal, la fuerza vertical y el momento de flexión en el extremo libre de la viga. *Se desprecian los esfuerzos cortantes y la fuerza axial. |
| 18 | Solución para la configuración de equilibrio de una viga elástica delgada sometida a flexión simétrica en tres puntos, en términos de las funciones elípticas de Jacobi. | Batista (2014) | *No se tiene en cuenta el espesor de la viga. *No se considera el efecto del radio en los soportes de la viga. |
| 19 | Presentar una solución aproximada a la ecuación de flexión de tres puntos para una viga de sección rectangular simplemente soportada en términos de series binomiales de potencia. | Venetis, Sideridis (2015) | *No se tiene en cuenta el espesor de la viga. |
| 20 | Ensayos de flexión en tres puntos y de flexión en cuatro puntos bajo la suposición de pequeñas rotaciones de flexión y verificación con resultados experimentales obtenidos en una muestra en diferentes condiciones de ensayo. | Mujika et al (2016) | *Se consideran los esfuerzos cortantes y el desplazamiento vertical del punto de contacto. |

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 OBJETIVO GENERAL

Determinar la incidencia del espesor en el comportamiento a flexión de vigas simétricas elásticas sujetas a grandes deflexiones mediante la prueba de flexión de tres puntos.

1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Establecer un modelo analítico de flexión a tres puntos incluyendo el espesor de la viga.
2. Establecer un modelo experimental que permita verificar el modelo analítico el cual considera el espesor de la viga en un ensayo de flexión a tres puntos.
3. Establecer a partir del diseño experimental otros factores geométricos, o de carga o, la interrelación entre ellos que puedan ser influyentes en el modelo de flexión.

2 MODELO ANALÍTICO

2.1 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

2.1.1 GEOMETRÍA Y CONDICIONES DE EQUILIBRIO

Se considera inicialmente una viga elástica recta e inextensible de longitud L (se desprecian los esfuerzos cortantes), empotrada en un extremo y sometida al otro extremo a una fuerza F , y un momento de flexión M_0 , la cual se presenta en la Fig 5.

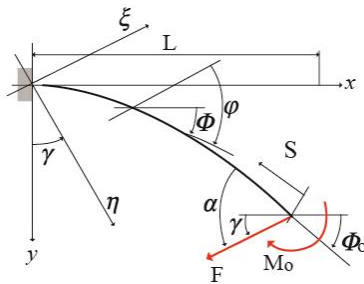


Fig 5. Geometría y condiciones de carga del problema

En el sistema de coordenadas cartesianas Oxy , la forma de la curva base deformada del voladizo se describe usando las siguientes ecuaciones diferenciales según [29]:

$$\frac{dx}{ds} = -\cos \phi, \quad \frac{dy}{ds} = -\sin \phi \quad (5)$$

$$\frac{d\phi}{ds} = -k \quad (6)$$

En las cuales $x(s)$ y $y(s)$ son las coordenadas de la curva base, $\phi(s)$ es el ángulo entre la tangente a la curva base y el eje x , $\kappa(s)$ es la curvatura de la curva base y, $s \in [0, L]$ es el parámetro de longitud de arco medido desde el extremo libre del voladizo hasta el extremo empotrado del mismo.

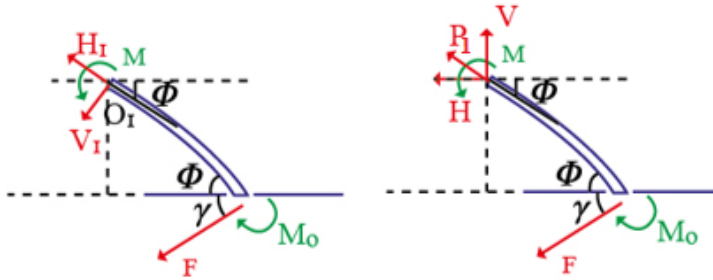


Fig. 6. Equilibrio del voladizo

Para las reacciones en O_1 , se puede asumir que las fuerzas actúan en dirección de una sola resultante \mathbf{P}_1 , y esta fuerza \mathbf{P}_1 se puede descomponer en el eje x y el eje y . Resultado del equilibrio mostrado en la Fig. 6 se obtiene:

$$H = -F \cos \gamma \quad V = F \sin \gamma \quad (7)$$

Al realizar la sumatoria de momentos con respecto al eje z se obtiene:

$$\therefore M = M_0 - H \sin \phi s + V \cos \phi s$$

$$\therefore \frac{dM}{ds} = -H \sin \phi + V \cos \phi$$

Pero según la Ec. (7) se tiene que:

$$H = -F \cos \gamma \quad V = F \sin \gamma$$

$$\therefore \frac{dM}{ds} = F \cos \gamma \sin \phi + F \sin \gamma \cos \phi$$

$$\therefore \frac{dM}{ds} = -H \sin \phi + V \cos \phi = F \sin(\phi + \gamma) \quad (8)$$

En las ecuaciones (7) y (8) se definen a \mathbf{H} y \mathbf{V} como las componentes horizontal y vertical de la fuerza interna \mathbf{P}_1 , $\mathbf{M}(\mathbf{s})$ es el momento de flexión, $F \geq 0$ es la magnitud de la fuerza aplicada en el extremo, γ es el ángulo entre el *eje x* y la dirección de la fuerza \mathbf{F} .

Si α es el ángulo entre la tangente a la curva base del voladizo en el extremo libre y la dirección de la fuerza aplicada en el extremo \mathbf{F} y, ϕ_0 es el ángulo tangente en el extremo libre y el eje x , se tiene:

$$\gamma = \alpha - \phi_0 \quad \phi_0 \equiv \phi(0) \quad (9)$$

Ahora, se acude a la ecuación constitutiva de Bernoulli-Euler:

$$M = EI\kappa = -EI \frac{d\phi}{ds} \quad (10)$$

En la cual EI se asume como una constante positiva que representa la rigidez del voladizo.

En resumen, se tienen las ecuaciones (5) (6) y (8) con las incógnitas $x(s), y(s), \phi(s), \kappa(s), \mathbf{M}(s)$.

El problema consiste en resolver dichas ecuaciones bajo las siguientes condiciones de frontera:

$$x(L) = y(L) = 0, \quad \phi(L) = 0 \quad (11)$$

Para el extremo empotrado se tiene:

$$M(0) = M_0 \quad (12)$$

En la cual M_0 representa el momento aplicado en el extremo libre de la viga.

2.1.2 FORMA NO DIMENSIONAL DE LAS ECUACIONES EXPUESTAS

Las ecuaciones (5) (6) (7) (8) (9) (10) (11) y (12) tienen 5 parámetros:

- I. F : fuerza aplicada en el extremo libre
- II. M_0 : momento aplicado en el extremo libre
- III. EI : rigidez de la viga
- IV. L : Separación entre los soportes
- V. γ : ángulo entre el *eje x* y la dirección de la fuerza F

Se introduce un parámetro de carga ω definido como:

$$\omega \equiv \frac{FL^2}{EI} \quad (13)$$

La curvatura adimensional en el extremo libre κ_0 se define como:

$$\kappa_0 \equiv \frac{M_0 L}{EI} \quad (14)$$

Y se usa la siguiente normalización de las variables geométricas:

$$\frac{s}{L} \rightarrow s \in [0,1] \quad \frac{x(s)}{L} \rightarrow x(s) \quad \frac{y(s)}{L} \rightarrow y(s) \quad L\kappa(s) \rightarrow \kappa(s) \quad (15)$$

Con el ánimo de obtener una simplificación de las ecuaciones, se introduce un nuevo sistema local de coordenadas $0\xi\eta$, el cual con respecto al sistema de coordenadas $0xy$ se encuentra rotado un ángulo de $-\gamma$, por lo tanto, la línea de acción de \mathbf{F} se convierte en paralela del eje ξ .

Las relaciones entre las coordenadas de los sistemas de posición se muestran en la Fig. 7.

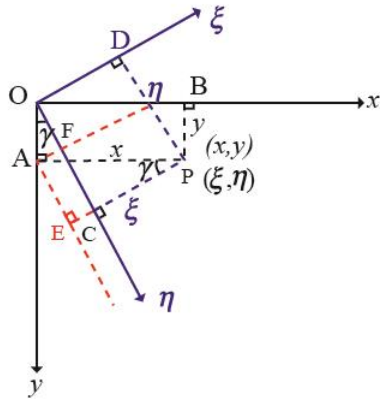


Fig. 7. Relación entre los sistemas de coordenadas $O\xi\eta$ y Oxy

Se desea determinar el valor de las coordenadas ξ y η en términos de $x(s)$ y $y(s)$.

$$\begin{aligned}\xi &= \overline{CP} = \overline{PE} - \overline{CE} = x(s) \cos \gamma - \overline{AF} \\ &= x(s) \cos \gamma - y(s) \sin \gamma\end{aligned}$$

$$\eta = \overline{OP} + \overline{FC} = \overline{OF} + \overline{AE} = y(s) \cos \gamma + x(s) \sin \gamma$$

Finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned}\xi(s) &= x(s)\cos\gamma - y(s)\sin\gamma - \eta(s) \\ &= x(s)\sin\gamma + y(s)\cos\gamma\end{aligned}\quad (16)$$

Y el ángulo $\varphi(s)$ entre la tangente a la curva base y el eje ξ se define como:

$$\varphi(s) = \phi(s) + \gamma \quad (17)$$

Las ecuaciones diferenciales que describen la forma en el sistema de coordenadas $0\xi\eta$ se obtienen diferenciando la ecuación (16) respecto a s , luego usando la ecuación (5) y la (17) el proceso se presenta a continuación:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{ds} &= \frac{d}{ds} [x(s)\cos\gamma - y(s)\sin\gamma] \\ &= \frac{dx(s)}{ds}\cos\gamma + x(s)\frac{d\cos\gamma}{ds} - \frac{dy(s)}{ds}\sin\gamma - y(s)\frac{d\sin\gamma}{ds} \\ &= \cos\gamma(-\cos\phi) - (-\sin\phi)\sin\gamma \\ &= -\cos\gamma\cos\phi + \sin\gamma\sin\phi\end{aligned}$$

$$= -\cos(\gamma + \phi)$$

$$\therefore \frac{d\xi}{ds} = -\cos \varphi$$

$$\frac{d\eta}{ds} = \frac{d}{ds}[x(s) \sin \gamma + y(s) \cos \gamma]$$

$$= \frac{dx}{ds} \sin \gamma + \frac{dy}{ds} \cos \gamma$$

$$= -\sin(\gamma + \phi)$$

$$\therefore \frac{d\eta}{ds} = -\sin \varphi$$

$$\therefore \frac{d\xi}{ds} = -\cos \varphi, \quad \frac{d\eta}{ds} = -\sin \varphi \quad (18)$$

Las condiciones de frontera son:

$$\xi(s) = x(s) \cos \gamma - y(s) \sin \gamma \quad x(L) = y(L) = 0$$

Con la normalización

$$x(1) = y(1) = 0$$

$$\xi(1) = x(1)\cos\gamma - y(1)\sin\gamma = 0$$

$$\eta(s) = x(s)\sin\gamma + y(s)\cos\gamma$$

$$\eta(1) = x(1)\sin\gamma + y(1)\cos\gamma = 0$$

Entonces se concluye:

$$\xi(1) = 0, \quad \eta(1) = 0 \quad (19)$$

Retomando la Ec. (6) :

$$\frac{d\phi}{ds} = -k$$

Y despejando la Ec. (17)

$$\varphi(s) = \phi(s) + \gamma \therefore \phi(s) = \varphi(s) - \gamma$$

Entonces,

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = -k$$

Ahora suponemos:

$$\frac{s}{L} \rightarrow \hat{s} \quad L\kappa \rightarrow \hat{\kappa} \quad \text{Debido a la normalización}$$

Retomando la Ec. (10) y multiplicando L en cada miembro:

$$M = EI\kappa$$

$$LM = LEI\kappa$$

$$\therefore M = \frac{EI}{L}\hat{\kappa}$$

Se deriva la ecuación anterior con respecto a s :

$$\frac{dM}{ds} = \frac{EI}{L} \frac{d\hat{\kappa}}{ds} = \frac{EI}{L} \frac{d\hat{\kappa}}{d\hat{s}} \frac{d\hat{s}}{ds}$$

Pero

$$\frac{d\hat{s}}{ds} = \frac{1}{L}$$

$$\frac{dM}{ds} = \frac{EI}{L} \frac{d\hat{\kappa}}{d\hat{s}} \frac{1}{L} = \frac{EI}{L^2} \frac{d\hat{\kappa}}{d\hat{s}}$$

Retomando la ecuación

$$\frac{dM}{ds} = F \sin(\phi + \gamma) = F \sin \varphi$$

Entonces

$$F \sin \varphi = \frac{EI}{L^2} \frac{d\hat{\kappa}}{d\hat{s}}$$

$$\frac{d\hat{\kappa}}{d\hat{s}} = \frac{FL^2}{EI} \sin \varphi = \omega^2 \sin \varphi$$

Finalmente se obtuvieron:

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\kappa \quad \frac{d\hat{\kappa}}{d\hat{s}} = \omega^2 \sin \varphi \quad (20)$$

Se recuerda que las variables están normalizadas

$$\varphi(s) = \phi(s) + \gamma \quad \phi(L) = 0, \quad \phi(0) = \phi_0$$

$$\varphi(0) = \phi(0) + \gamma = \phi_0 + \gamma = \alpha$$

$$M(s) = EI\kappa(s)$$

$$M(0) = EI\kappa(0) = M(0) = M_0 \quad \kappa(0) = \frac{\hat{\kappa}(0)}{L}$$

Entonces,

$$\hat{\kappa}(0) = \frac{M_0 L}{EI} = \kappa_0$$

Las condiciones de frontera son:

$$\varphi(0) = \alpha, \quad \kappa(0) = \kappa_0 \quad (21)$$

En resumen el problema consisten en resolver las ecuaciones (20) y (21) para determinar las incógnitas $\varphi = \hat{\varphi}(s; \alpha, \omega, \kappa_0)$ y $\kappa = \hat{\kappa}(s; \alpha, \omega, \kappa_0)$

Una vez estas funciones son determinadas se pueden obtener las coordenadas de la curva base del voladizo deformado $\xi = \hat{\xi}(s; \alpha, \omega, \kappa_0)$ y $\eta = \hat{\eta}(s; \alpha, \omega, \kappa_0)$.

Por medio de la integración de las ecuaciones (18):

$$\frac{d\xi}{ds} = -\cos \varphi, \quad \frac{d\eta}{ds} = -\sin \varphi$$

Y las condiciones de frontera de la ecuación (19):

$$\xi(1) = 0, \quad \eta(1) = 0$$

Y teniendo en cuenta la ecuación (17) se obtiene el valor del ángulo tangente ϕ :

$$\phi(s) = \varphi(s) - \gamma \quad (22)$$

Partiendo de la ecuación (16)

$$\begin{aligned} \xi(s) &= x(s)\cos\gamma - y(s)\sin\gamma \quad \eta(s) \\ &= x(s)\sin\gamma + y(s)\cos\gamma \end{aligned}$$

Se puede reescribir como:

$$\begin{pmatrix} \xi(s) \\ \eta(s) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$$

Pero,
$$\begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} = \cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi(s) \\ \eta(s) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x(s) &= \xi(s)\cos\gamma + \eta(s)\sin\gamma, \quad y(s) \\ &= -\xi(s)\sin\gamma + \eta(s)\cos\gamma \end{aligned} \quad (23)$$

La forma del voladizo deformado depende de α, ω, κ_0 , y su posición espacial depende de γ .

La relación entre $\alpha, \omega, \kappa_0, \gamma$ se obtiene de la Ec. (22)

$$\phi(s) = \varphi(s) - \gamma$$

Para $s = 1$

$$\phi(1) = \varphi(1) - \gamma = 0$$

Entonces

$$\gamma = \hat{\varphi}(1, \alpha, \omega, \kappa_0) = \hat{\gamma}(\alpha, \omega, \kappa_0) \quad (24)$$

La relación expresada en la Ec. (24) es fundamental.

2.1.3 SIMETRÍA

Según las condiciones iniciales de la ecuación (21)

$$\varphi(0) = \alpha, \quad \kappa(0) = \kappa_0$$

Y si se reemplaza α por $-\alpha$, y κ_0 por $-\kappa_0$ entonces la viga deformada quedaría según la Fig. 8:

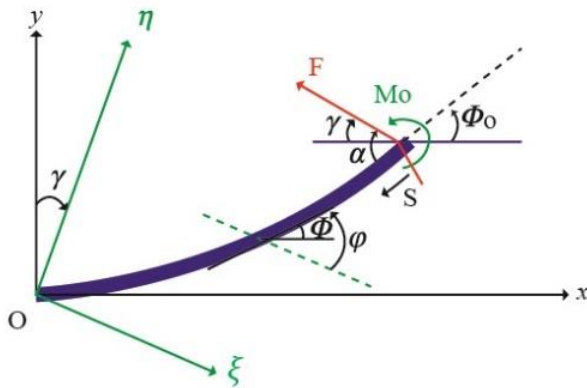


Fig. 8. Rotación

Por lo tanto, se verifica

$$\begin{aligned}
 \kappa(s; -\alpha, -\kappa_0) &= -\kappa(s; \alpha, \kappa_0) & \xi(s; -\alpha, -\kappa_0) &= \xi(s; \alpha, \kappa_0) \\
 \phi(s; -\alpha, -\kappa_0) &= -\phi(s; \alpha, \kappa_0) & y(s; -\alpha, -\kappa_0) &= -y(s; \alpha, \kappa_0) \\
 &= -y(s; \alpha, \kappa_0) \\
 \varphi(s; -\alpha, -\kappa_0) &= -\varphi(s; \alpha, \kappa_0) & \eta(s; -\alpha, -\kappa_0) &= \eta(s; \alpha, \kappa_0) \\
 &= -\eta(s; \alpha, \kappa_0) \\
 x(s; -\alpha, -\kappa_0) &= x(s; \alpha, \kappa_0)
 \end{aligned} \tag{25}$$

Entonces las funciones $\kappa(s), \varphi(s), \phi(s), \eta(s)$ y $y(s)$ son impares. Por otro lado, las funciones $\xi(s)$ y $x(s)$ son funciones pares de α y κ_0 .

Si α y κ_0 cambian de signo, la deformación del voladizo es simétrica con respecto al eje $\xi(s)$ y al eje $x(s)$ lo que facilita el análisis del problema de flexión de los tres puntos.

2.1.4 FORMULACIÓN PARA EL PROBLEMA DE FLEXIÓN DE TRES PUNTOS

Se considera una viga elástica inicialmente inextensible y recta sometida a una fuerza vertical que actúa en el centro de los soportes como se observa en la Fig. 9.

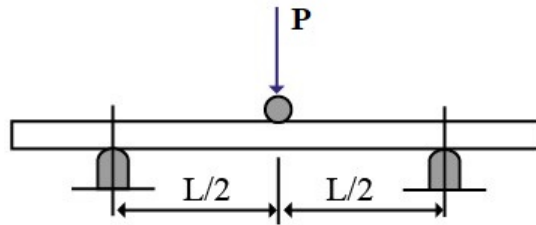


Fig. 9. Geometría y cargas para el caso de flexión a tres puntos

La fuerza produce la deflexión vertical de la viga y los puntos de contacto de la viga con los soportes se desplazan hasta el punto medio [7]. La geometría de la viga deformada se muestra en la Fig. 10.

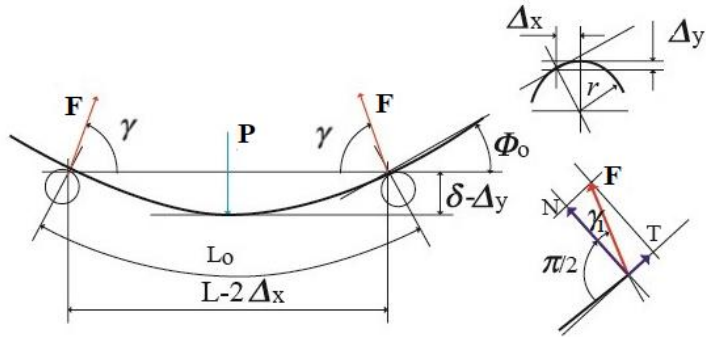


Fig. 10. Diagrama de cuerpo libre para la viga deformada

De la Fig. 9 se puede deducir que, en un soporte circular, cada uno de los puntos de contacto se mueven en las direcciones horizontal y vertical, respectivamente, obedeciendo las ecuaciones:

$$\Delta_x = r \sin \phi_0 \quad \Delta_y = r(1 - \cos \phi_0) \quad (26)$$

Donde r es el radio de los soportes y ϕ_0 es el ángulo tangente a la viga en los soportes. Desde el equilibrio de la viga en la dirección vertical, se encuentra que la fuerza de reacción \mathbf{F} en cada soporte tiene por magnitud:

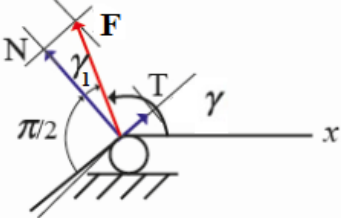
$$F = \frac{P}{2 \operatorname{sen} \gamma} \quad (27)$$

Donde γ es el ángulo director de la fuerza de reacción \mathbf{F} . La reacción \mathbf{F} puede descomponerse en la componente normal \mathbf{N} y la componente tangencial (fuerza de fricción) \mathbf{T} con respecto a la curva de la base de la viga, de manera que:

$$F = \sqrt{N^2 + T^2} \quad \frac{T}{N} = \tan \gamma_1 = \mu \quad (28)$$

Siendo μ el coeficiente de fricción. En la Tabla 3 se resumen los tres casos que pueden suceder:

Tabla 3. Incógnitas según el tipo de soporte

| Tipo de soporte | Incógnitas |  <p data-bbox="715 631 1147 922"> Para el trabajo de investigación propuesto se supuso que el coeficiente de fricción es estático μ_s y se determinó experimentalmente para la realización de la prueba de flexión obteniendo un valor de $\mu_s = 0,509$ [$\gamma_1 = 27^\circ$]. </p> |
|---|---|--|
| Soportes lisos: $T = 0$ y $\mu = 0$, en este caso no hay fricción. | γ, N | |
| Si los soportes son perfectamente ásperos: hay fricción. | γ, N, T (o μ) | |
| Si los soportes son ásperos, entonces se define alguna ley de fricción. | En particular, por la ley de fricción de Coulomb, el equilibrio se mantiene para $\mu \leq \mu_s$, donde μ_s es el coeficiente de fricción estática. Cuando $\mu < \mu_s$ se tienen 3 incógnitas: γ, N, T . Cuando se supera este valor, la viga se desliza sobre los rodillos de soporte y μ se convierte en el coeficiente de fricción cinética μ_k , que tiene un valor aproximadamente constante. | |

Un análisis más preciso debe considerar el momento de flexión equivalente en los puntos de contacto de la viga. Es decir, si se traslada a la fuerza de reacción \mathbf{F} desde el punto de contacto hasta el punto de la curva de base, también se debe añadir el momento de flexión:

$$M_0 = \frac{hT}{2} = \frac{\mu hN}{2} \quad (29)$$

Donde h es el espesor de la viga. Los modelos revisados consideran que h es despreciable y por tanto el momento de flexión es insignificante.

Gracias a la simetría, la situación de estudio planteada es equivalente al problema de una viga en voladizo sujeta a la fuerza \mathbf{F} [16] tal como se ilustra en la Fig. 11.

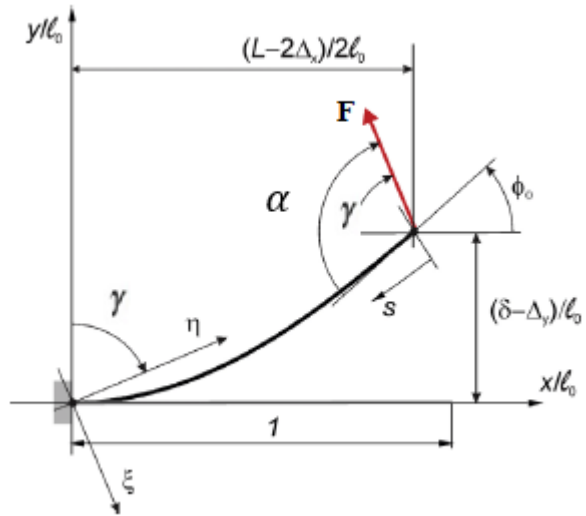


Fig. 11. Geometría y carga para para una viga en voladizo

2.2 SOLUCIÓN GENERAL DEL PROBLEMA

El problema a resolver es:

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\kappa; \quad \frac{d\kappa}{ds} = \omega^2 \sin \varphi, \quad s \in [0,1] \quad (30)$$

con condiciones de frontera:

$$\varphi(0) = \alpha; \quad \kappa(0) = \kappa_0 \quad (31)$$

Y donde

$$\omega^2 = \frac{Fl_0^2}{EI}; \quad l_0 = \frac{L_0}{2}; \quad \kappa_0 = \frac{M_0 l_0}{EI} \quad (32)$$

Usando la regla de la cadena

$$\frac{d\kappa}{ds} = \frac{d\kappa}{d\varphi} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\kappa^2}{2} \right) \quad (33)$$

Se obtiene que

$$\frac{d\varphi}{ds} = \sqrt{2\omega^2(\cos \varphi - \cos \alpha) + \kappa_0^2} = 2\omega \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{\kappa_0^2}{4\omega^2}} \quad (34)$$

Se especificará la solución del sistema para fuerza dominante sin despreciar el espesor dado que la fuerza de reacción en el soporte es mayor que el momento generado.

2.2.1 CASO DE FUERZA DOMINANTE

Si la fuerza es dominante, se verifica que

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{\kappa_0^2}{4\omega^2} < 1 \quad (35)$$

Haciendo la sustitución

$$k \sin \psi = \sin \frac{\varphi}{2} \quad (36)$$

La Ec. (34) se transforma en

$$\frac{d\psi}{\omega ds} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} \quad (37)$$

Donde

$$k = \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{\kappa_0^2}{4\omega^2}} \quad (38)$$

La Ec. (37) bajo la condición de la Ec. (35), de acuerdo a Batista [30], está dada por:

$$\varphi(s) = 2 \sin^{-1}[ksn(\omega s + C, k)] \quad (39)$$

$$\kappa(s) = -2\omega kcn(\omega s + C, k) \quad (40)$$

donde, $sn(x)$ es la función seno elíptica de Jacobi, $cn(x)$ es la función coseno elíptica de Jacobi y la constante C está dada por:

$$C = \begin{cases} sn^{-1}\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{k}, k\right) & \kappa_0 < 0, \\ 2K(k) - sn^{-1}\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{k}, k\right) & \kappa_0 > 0 \end{cases} \quad (41)$$

donde $sn^{-1}(x)$ es la función inversa del seno elíptico de Jacobi y $K(x)$ es la integral elíptica completa de primera especie.

Puesto que la Ec. (38) describe el valor de $\varphi(s)$, el sistema propuesto:

$$\frac{d\xi}{ds} = -\cos \varphi; \quad \frac{d\eta}{ds} = -\sin \varphi \quad (42)$$

Puede ser ahora resuelto, teniendo en cuenta de acuerdo a la Ec. (38) que:

$$\cos \varphi = 1 - 2k^2 sn^2(\omega s + C, k) \quad (43)$$

$$\sin \varphi = 2ksn(\omega s + C, k)dn(\omega s + C, k) \quad (44)$$

donde $dn(x)$ es la función delta elíptico de Jacobi.

La integración de las Ec. (42), Ec. (43) y Ec. (44) lleva a la solución:

$$\xi(s) = \left(\frac{2E(k)}{K(k)} - 1 \right) (1 - s) + \frac{2}{\omega} [Z(\omega + K, k) - Z(\omega s + K, k)] \quad (45)$$

$$\eta(s) = -\frac{2k}{\omega} [cn(\omega + K, k) - cn(\omega s + K, k)] \quad (46)$$

donde $E(x)$ es la integral elíptica completa de segunda clase y $Z(x)$ es la función elíptica zeta de Jacobi.

Las coordenadas de un punto que satisface la curva base están dadas entonces por:

$$x(s) = l_0(\xi(s) \cos \alpha + \eta(s) \sin \alpha) \quad (47)$$

$$y(s) = l_0(-\xi(s) \sin \alpha + \eta(s) \cos \alpha) \quad (48)$$

3 DESARROLLO EXPERIMENTAL

3.1 METODOLOGÍA

El desarrollo experimental de este proyecto de investigación se llevo a cabo en el laboratorio de máquinas de la Universidad Autónoma de Manizales, con apoyo para la fabricación de las probetas en el SENA Regional Huila de la ciudad de Neiva.

3.1.1 HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

El cumplimiento de los objetivos determinados en el capítulo 1, sección 1.3 está directamente relacionado con el rechazo o no rechazo de la siguiente hipótesis de investigación:

- El espesor de la viga influye directamente en la deflexión de la misma bajo una prueba de flexión de tres puntos.

3.1.2 ENFOQUE METODOLÓGICO

La forma en que se recogieron los datos, el cómo fueron analizados e interpretados apunta a que el enfoque metodológico para este caso fuera de tipo **cuantitativo-experimental**. La validación de la hipótesis de investigación se realizó mediante el análisis de la variable cuantitativa espesor, (el momento flector fue tenido en cuenta para el desarrollo de modelo analítico a diferencia de los autores mencionados en la sección de antecedentes).

El desarrollo del proyecto para efectos de la validación de la hipótesis de investigación propuesta se realizó a través de los siguientes pasos:

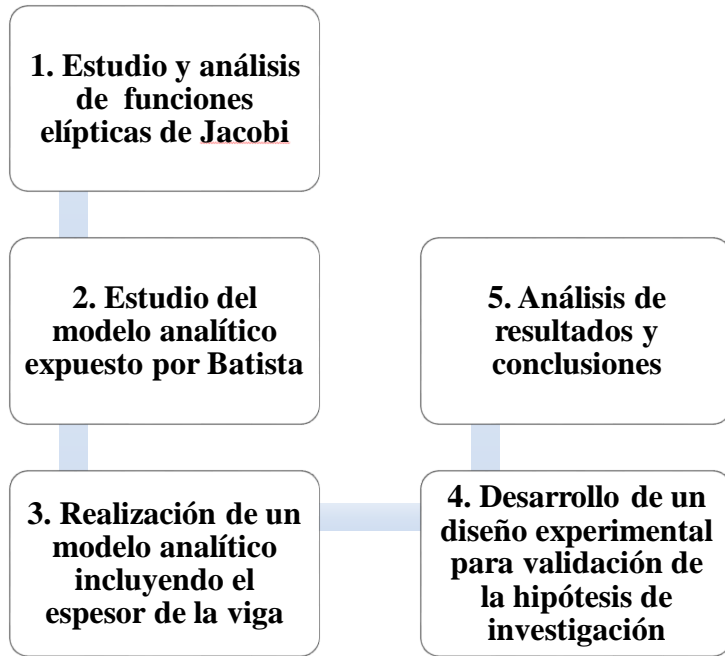


Fig. 12. Diseño de la investigación

El tipo de estudio llevado a cabo durante la ejecución de este proyecto fue correlacional pues se analizaron las interacciones entre varios factores del experimento. Como población o unidad de trabajo se fabricaron probetas de fotopolímero, y la recolección de datos se realizó mediante el ensayo a flexión de tres puntos.

Con el fin de determinar la influencia del espesor en el comportamiento a flexión de vigas simétricas elásticas sujetas a grandes deflexiones se llevó a cabo un diseño experimental utilizando especímenes de fotopolímero. Se escogieron 3 factores con 2 niveles de variación indicando un experimento del orden 2^3 y una variable de respuesta, en este diseño experimental se realizaron 2 réplicas y la hoja de datos se obtuvo por medio de 3 bloques de manera aleatorizada.

A continuación, se describe la metodología empleada durante la preparación de la prueba y toma de datos para el material.

3.1.3 PLANTEAMIENTO DEL DISEÑO

Para realizar el diseño experimental se tuvieron en cuenta los siguientes pasos de la Fig. 13:

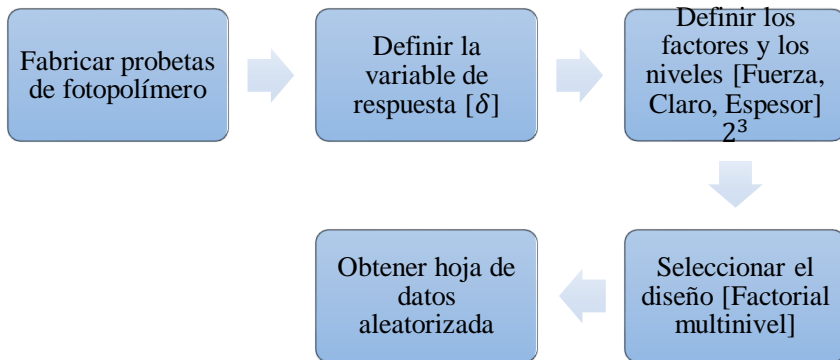


Fig. 13. Planteamiento del diseño experimental

En un diseño factorial de tipo 2^3 indica que se utilizaron 3 factores con 2 niveles de variación para cada factor.

El fotopolímero seleccionado para este diseño experimental fue la referencia VEROBLUE RGD 840 que provee la empresa de suministros de impresión 3D Stratasys.

VEROBLUE, es un fotopolímero PolyJet de color azul opaco, empleado para modelado de conceptos, verificación de diseño y pruebas funcionales de piezas. Con este material se pueden fabricar modelos quirúrgicos, piezas en movimiento y ensambladas, plantillas, accesorios y herramientas de fabricación, modelos de ventas, marketing y exposición y ensamblaje de componentes electrónicos [31]. (Las propiedades de este material se incluyeron en el Anexo A).

Para determinar las dimensiones de las probetas de fotopolímero se utilizó la norma ASTM D 790 [5] y el trabajo realizado por Arnautov[23]. En su trabajo Arnautov utilizó laminados unidireccionales de carbono/epoxy con espesor de 0.5 mm, por esta razón se diseñó mediante el software CAD SOLIDWORKS la geometría de dos tipos de probetas con espesor de 0,95 mm y 1,65 mm buscando obtener espesores mayores a los despreciados por los autores. El ancho de las

probetas se seleccionó según la norma ASTM D 790, la cual especifica que para las muestras de menos de 3,2 mm de espesor su ancho deber ser mínimo 12,7 mm, y para evitar deslizamiento en los apoyos durante la prueba se diseñó de 15 mm. La geometría de las probetas se evidencia en las Fig. 14 y Fig. 15. (las dimensiones aparecen en milímetros).

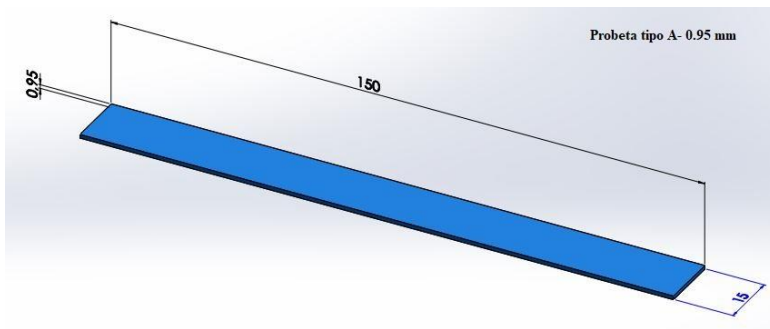


Fig. 14. Dimensiones probeta tipo A 0,95 mm de espesor

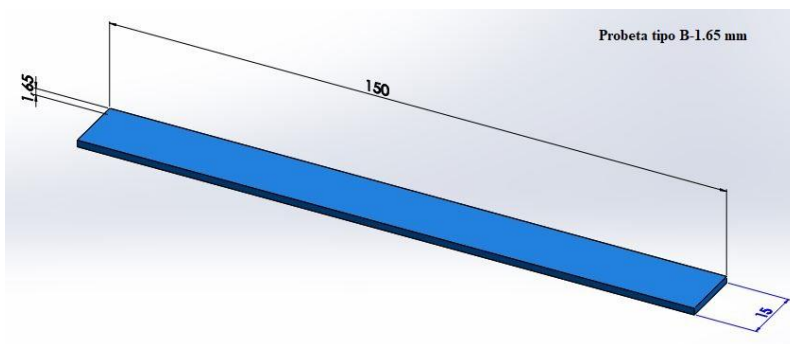


Fig. 15. Dimensiones probeta tipo B 1,65 mm de espesor

Con la geometría modelada, se procedió a fabricar las probetas mediante la impresión 3D (Con la aplicación de 2 réplicas se fabricaron 24 probetas de fotopolímero). En esta tecnología el archivo 3D asociado es enviado a la impresora y el software Objet Studio divide el modelo 3D en una multitud de imágenes numéricas, cada una correspondiente a una capa de la probeta. Las cabezas de impresión poseen cada una varias decenas de boquillas que proyectan micro-gotas de material (VEROBLUE) sobre una plataforma. Durante cada proyección, una luz ultravioleta es emitida y solidifica el material. Estas etapas son repetidas, capa por capa, hasta la obtención de la pieza, la cual no necesita ninguna fase de terminación (cocido, lijado, pulido). Para las geometrías complejas, un material de soporte (un gel fácil a retirar a la mano o con agua) es ajustado por una de las cabezas de impresión [32]. En la Fig. 16 se presenta la impresora Objet Eden 260 V utilizada para la fabricación de las probetas y en la Fig. 17 se observa en detalle la disposición de las probetas durante su etapa de fabricación.



Fig. 16 Proceso de fabricación de probetas fotopolímero



Fig. 17. Vista superior durante el proceso de fabricación de probetas

Para diseñar este experimento se utilizó el software STATGRAPHICS Centurion XV, mediante el módulo asistente de diseño de experimentos (DDE). Para este diseño experimental se registró el valor de la deflexión, representando la variable de respuesta del sistema. La deflexión de la viga δ en cualquier punto a lo largo de su eje es el desplazamiento de ese punto desde su posición original medida en la dirección y . Los valores se registraron en milímetros. Los factores involucrados en el experimento para las vigas de fotopolímero fueron: la fuerza (dN) de aplicación de la carga en el punto medio de la viga, el claro (mm) que es la separación entre los soportes y , finalmente el espesor (mm) de la viga. Cada factor se diseñó con dos niveles de variación como se muestra en la Tabla 4.

Tabla 4. Factores, niveles y variable de respuesta para el experimento del fotopolímero

| Factor | Unidades | Nivel 1 bajo | Nivel 2 alto | Variable de respuesta |
|--------------------------------------|-----------------|-------------------------|-------------------------|----------------------------------|
| Fuerza | dN | 40,01 | 49,03 | Deflexión δ (mm) |
| Claro (separación entre soportes) | mm | 100 | 120 | |
| Espesor | mm | 0,95 | 1,65 | |

Se trató con un diseño factorial de orden 2^3 , en el cual se seleccionaron tres factores con dos niveles de variación cada uno. Se realizaron dos réplicas del experimento, lo cual arrojó 24 observaciones, por tanto, se requirió la fabricación de 24 probetas de fotopolímero (12 probetas con espesor igual a 0,95 mm y 12 probetas con espesor igual a 1,65 mm). Se seleccionó la opción de experimento factorial multinivel. La hoja de datos aleatorizada arrojada por el software fue la siguiente:

Tabla 5. Hoja de datos para fotopolímero

| Fuerza | Claro | Espesor | Identificación |
|---------------|--------------|----------------|----------------------------|
| dN | mm | mm | A=0,95 mm B=1,65 mm |
| 40,01 | 100 | 1,65 | B3 |
| 49,03 | 100 | 0,95 | A8 |
| 49,03 | 120 | 0,95 | A1 |
| 49,03 | 120 | 1,65 | B4 |
| 40,01 | 120 | 1,65 | B1 |
| 40,01 | 120 | 0,95 | A4 |
| 40,01 | 100 | 0,95 | A11 |
| 49,03 | 100 | 1,65 | B8 |
| 49,03 | 100 | 0,95 | A3 |
| 49,03 | 120 | 0,95 | A9 |
| 40,01 | 120 | 0,95 | A7 |
| 40,01 | 100 | 0,95 | A5 |
| 49,03 | 120 | 1,65 | B6 |
| 40,01 | 100 | 1,65 | B7 |
| 49,03 | 100 | 1,65 | B9 |
| 40,01 | 120 | 1,65 | B10 |
| 49,03 | 120 | 0,95 | A6 |
| 49,03 | 120 | 1,65 | B11 |
| 40,01 | 100 | 0,95 | A2 |
| 40,01 | 120 | 1,65 | B5 |
| 40,01 | 100 | 1,65 | B12 |
| 49,03 | 100 | 1,65 | B2 |
| 40,01 | 120 | 0,95 | A10 |
| 49,03 | 100 | 0,95 | A12 |

3.1.4 MONTAJE EXPERIMENTAL

Para efectuar la toma de datos, se llevaron a cabo los pasos de la Fig. 18 que serán explicados uno a uno a continuación:

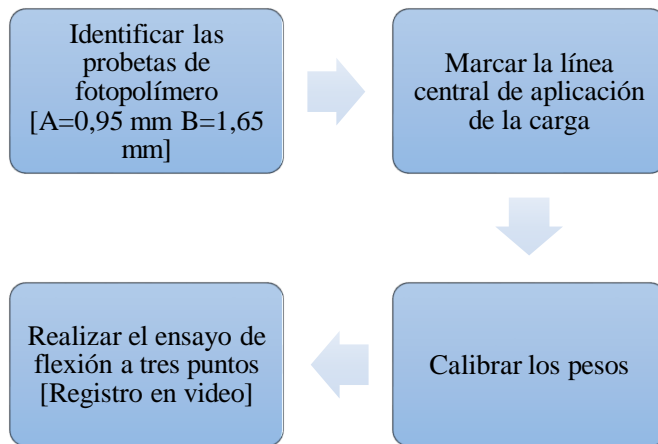


Fig. 18. Pasos para realizar el montaje experimental

Se realizó la identificación de las probetas de fotopolímero con numeraciones a ambos extremos (del 1 al 12). se denotaron con la letra A las probetas de 0,95 mm de espesor y con la letra B a las probetas de 1,65 mm de espesor. también se marcó la línea central para facilitar el punto de

aplicación de la carga. Las probetas se organizaron en el orden de ejecución de la Tabla 5.

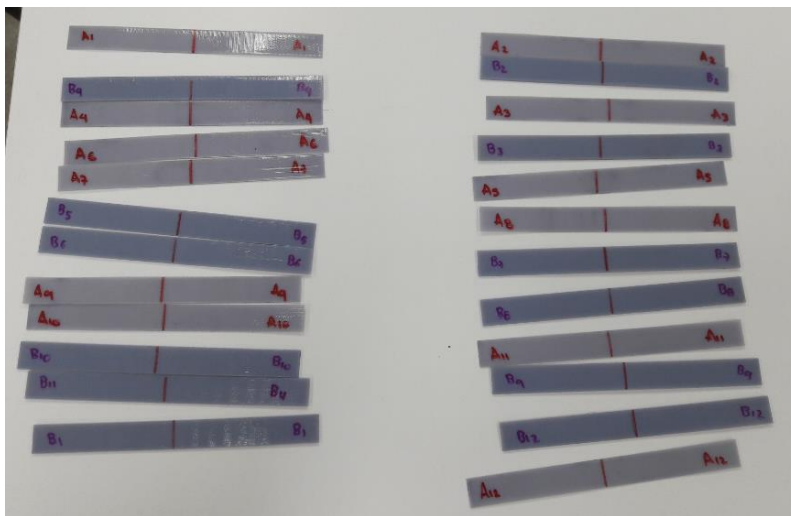


Fig. 19. Marcación probetas de fotopolímero

Se procedió a calibrar los pesos con los que se iba a generar la deflexión en las probetas. Para alcanzar una fuerza de 40,01 dN se empleó una masa de 408 g de plastilina. por otra parte, para probar la fuerza de 49,03 dN se utilizó una masa de 500 g de plastilina (se presentan en la Fig. 20) . Las mediciones de las masas de plastilina se llevaron a cabo mediante una gramera digital.



Fig. 20. Masas utilizadas en el experimento de fotopolímero

El ensayo de flexión a tres puntos se realizó sobre un tablero rotulado fabricado especialmente para esta prueba que se presenta en la Fig. 21 (el experimento se llevó a cabo dentro del laboratorio de máquinas de la Universidad Autónoma de Manizales).

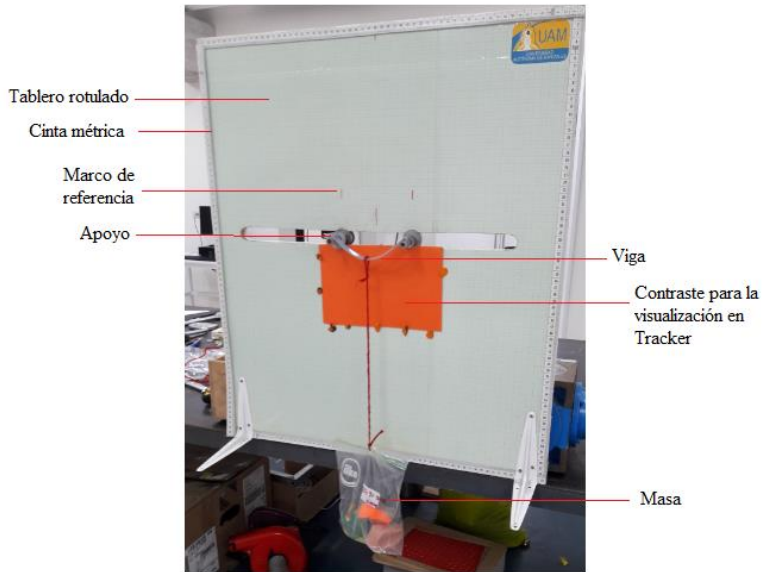


Fig. 21. Partes del tablero rotulado

Con el montaje experimental armado, se procedió a colocar la carga en el centro de cada probeta y se registró en video su comportamiento durante la prueba (la cámara utilizada en la realización de los videos se fijó con ayuda de un trípode). Posteriormente estos videos fueron montados en el software libre de modelado y análisis de video Tracker en su versión 5.0.6 en el cual se realizaron las mediciones de la deflexión

experimental y de los ángulos que describen la fuerza de reacción F en los apoyos de la probeta.

En las Fig. 22, Fig. 23, Fig. 24 y Fig. 25 se presentan los elementos requeridos para realizar el ensayo de flexión de tres puntos para las 24 probetas de fotopolímero.



Fig. 22 Proceso de montaje de los apoyos



Fig. 23. Ajuste de la cámara para la captura de video

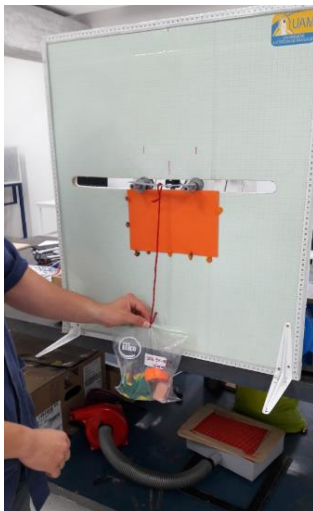


Fig. 24. Desarrollo del experimento para fotopolímero

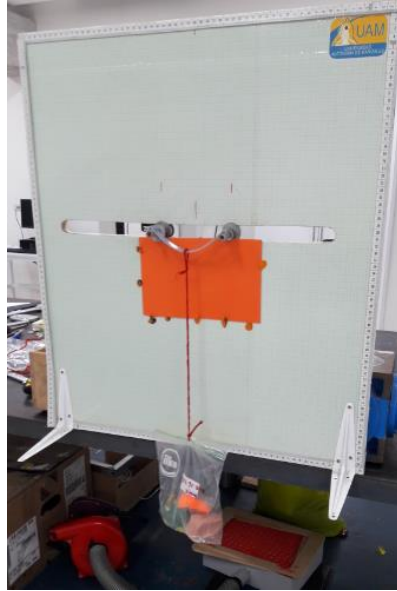


Fig. 25. Probeta de fotopolímero sometida a flexión

Una vez realizado en el ensayo de flexión de tres puntos para cada una de las 24 probetas, fue necesario elaborar un pequeño montaje experimental para determinar el valor del coeficiente de fricción estático μ_s entre el fotopolímero y el material utilizado en los apoyos durante la ejecución de las pruebas (se implementó una muestra de polietileno).



Fig. 26 Polietileno de recubrimiento de los apoyos

Con ayuda de un plano inclinado presente en la Fig. 27 se dispuso material de fotopolímero en el asiento y se ubicó un pedazo del material (Fig. 26), el proceso consistió en inclinar suavemente el plano hasta registrar el ángulo en el que comienza el deslizamiento hacia abajo.



Fig. 27 Plano inclinado para medir fricción

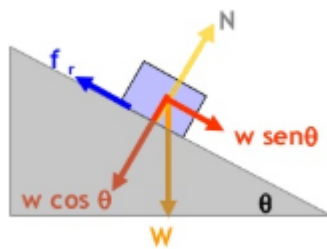


Fig. 28 Diagrama de cuerpo libre en el plano inclinado

Según el diagrama de cuerpo libre de la Fig. 28 se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{f_r}{N} = \tan \gamma_1 = \mu_s \quad (49)$$



Fig. 29 Determinación de la fricción

El valor registrado para el ángulo de deslizamiento fue $\gamma_1 = 27^\circ$, por lo tanto:

$$\tan 27^\circ = \mu_s = 0,509 \quad (50)$$

Con el valor del ángulo γ_1 determinado, se procedió a cargar en el software Tracker cada uno de los videos tomados durante el ensayo a flexión de tres puntos y, a realizar la toma de la deflexión y de los ángulos en un recorte específico de cada video (los valores geométricos se tomaron aproximadamente al segundo 3 de cada toma).

A continuación, se presenta una muestra de la toma de datos geométricos para la probeta A9 en la Fig. 30.

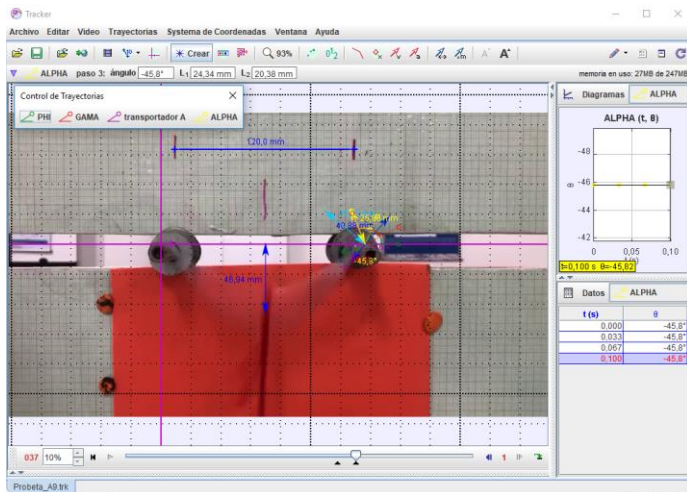


Fig. 30 Cálculo de la deflexión para la probeta A9 con el software Tracker

Para poder realizar el cálculo de la deflexión inicialmente se marcaron las cotas de los valores conocidos, como lo fue la separación entre soportes para este caso de 120 mm. Se trazó una línea horizontal sobre los soportes, y finalmente se trazó una línea vertical en el centro de la misma hasta el punto más bajo de la viga obteniendo así un valor de 46,94 mm como deflexión para la probeta A9.

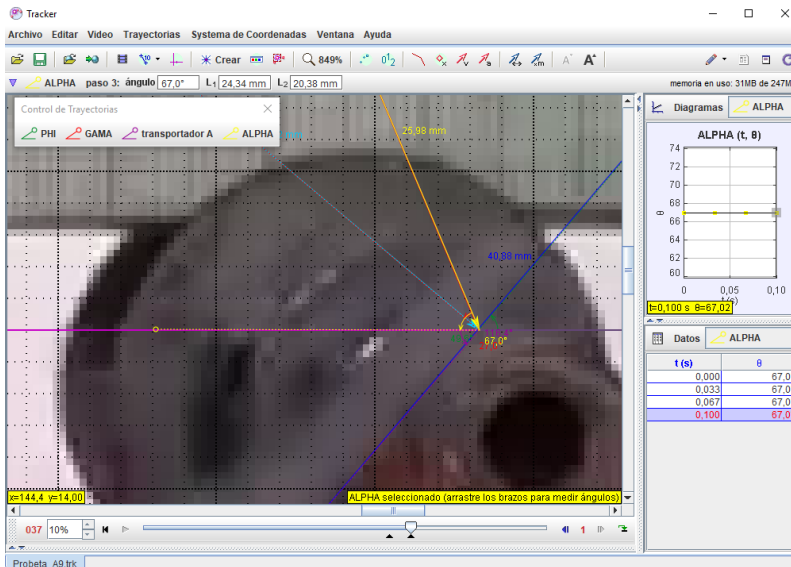


Fig. 31 Cálculo de los ángulos para la probeta A9

Para la toma de ángulos (Fig. 31, Fig. 33) se llevó a cabo un proceso similar al anterior, en este caso conociendo el valor

del ángulo $\gamma_1 = 27^\circ$ de se marcaron los ángulos α , ϕ_0 y γ según la Fig. 32.

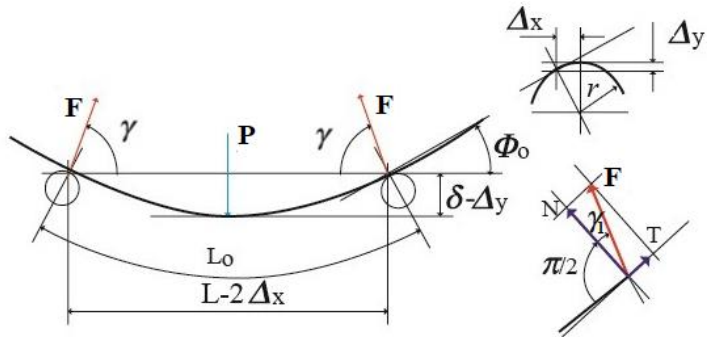


Fig. 32. Ángulos presentes en la deflexión de la viga

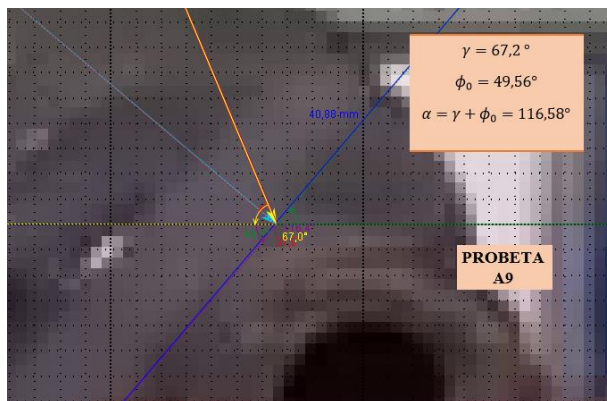


Fig. 33. Toma de ángulos con Tracker probeta A9

Estos procesos se repitieron para cada probeta obteniendo finalmente los siguientes resultados:

Tabla 6. Resultados de deflexión y ángulos para el fotopolímero

| BLOQUE | Fuerza | Claro | Espesor | deflexión | | α | ϕ_0 | γ |
|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----|----------|----------|----------|
| | dN | mm | mm | mm | | ° | ° | ° |
| 1 | 40,01 | 100 | 1,65 | 18,82 | B3 | 117,48 | 28,7 | 88,78 |
| 1 | 49,03 | 100 | 0,95 | 6,664 | A8 | 117,21 | 19,31 | 97,9 |
| 1 | 49,03 | 120 | 0,95 | 55,62 | A1 | 117,65 | 46,8 | 70,85 |
| 1 | 49,03 | 120 | 1,65 | 13,4 | B4 | 117,08 | 17,85 | 99,23 |
| 1 | 40,01 | 120 | 1,65 | 22,14 | B1 | 116,56 | 22,56 | 94 |
| 1 | 40,01 | 120 | 0,95 | 45,07 | A4 | 116,83 | 44,53 | 72,3 |
| 1 | 40,01 | 100 | 0,95 | 60,27 | A11 | 116,61 | 53,11 | 63,5 |
| 1 | 49,03 | 100 | 1,65 | 24,15 | B8 | 116,81 | 30,7 | 86,11 |
| 2 | 49,03 | 100 | 0,95 | 41,82 | A3 | 116,1 | 48,5 | 67,6 |
| 2 | 49,03 | 120 | 0,95 | 46,94 | A9 | 116,58 | 49,56 | 67,02 |
| 2 | 40,01 | 120 | 0,95 | 54,85 | A7 | 116,89 | 43,76 | 73,13 |
| 2 | 40,01 | 100 | 0,95 | 55,31 | A5 | 117,29 | 52,37 | 64,92 |
| 2 | 49,03 | 120 | 1,65 | 25,59 | B6 | 117,29 | 26,1 | 91,19 |
| 2 | 40,01 | 100 | 1,65 | 13,87 | B7 | 116,03 | 23,28 | 92,75 |
| 2 | 49,03 | 100 | 1,65 | 25,42 | B9 | 117,1 | 36,4 | 80,7 |
| 2 | 40,01 | 120 | 1,65 | 20,85 | B10 | 117,25 | 28,1 | 89,15 |

Tabla 6. Resultados de deflexión y ángulos para el fotopolímero –Continuación–

| | | | | | | | | |
|---|-------|-----|------|-------|-----|--------|-------|-------|
| 3 | 49,03 | 120 | 0,95 | 36,87 | A6 | 116,73 | 43 | 73,73 |
| 3 | 49,03 | 120 | 1,65 | 16,36 | B11 | 117,4 | 19,1 | 98,3 |
| 3 | 40,01 | 100 | 0,95 | 54,17 | A2 | 116,53 | 52,33 | 64,2 |
| 3 | 40,01 | 120 | 1,65 | 28,6 | B5 | 117,21 | 31,28 | 85,93 |
| 3 | 40,01 | 100 | 1,65 | 23,61 | B12 | 117,18 | 34,9 | 82,28 |
| 3 | 49,03 | 100 | 1,65 | 9,645 | B2 | 116,7 | 18,7 | 98 |
| 3 | 40,01 | 120 | 0,95 | 36,99 | A10 | 117,06 | 35,7 | 81,36 |
| 3 | 49,03 | 100 | 0,95 | 35,24 | A12 | 117,2 | 39,18 | 78,02 |

4 RESULTADOS

4.1 ANÁLISIS ESTADÍSTICO

Para proceder con el análisis de los datos se consideraron los siguientes supuestos llevados a cabo con un error tipo I (α) de 0,05 haciendo diseño experimental aleatorizado y replicado:

- Los factores del experimento son fijos
- Los diseños son completamente aleatorizados
- Se satisfacen los supuestos de normalidad usuales

Estos supuestos fueron validados mediante la realización de un ANOVA multifactorial de los datos obtenidos (para el análisis de los mismos se usó el software STATGRAPHICS Centurion XV). Se realizó la gráfica de los residuales para cada factor involucrado en el experimento como se presenta a continuación: las Fig. 34, Fig. 35 y Fig. 36 evidencian los residuales del experimento para los factores fuerza, claro y espesor respectivamente.

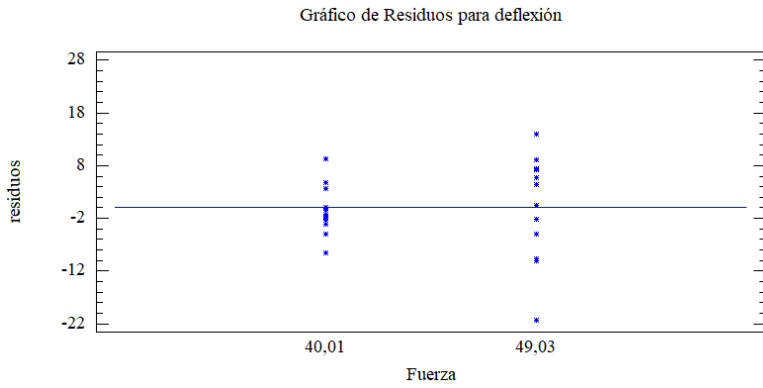


Fig. 34 Residuales para el factor fuerza

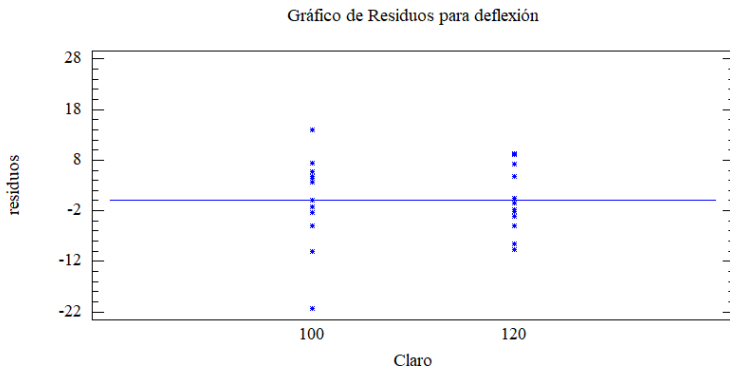


Fig. 35 Residuales para el factor claro

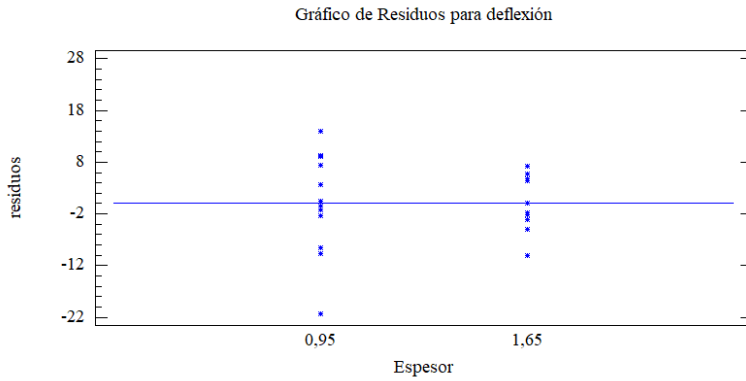


Fig. 36 Residuales para el factor espesor

Para poder verificar el supuesto de normalidad se realizó la gráfica de probabilidad normal de los residuales para el fotopolímero.

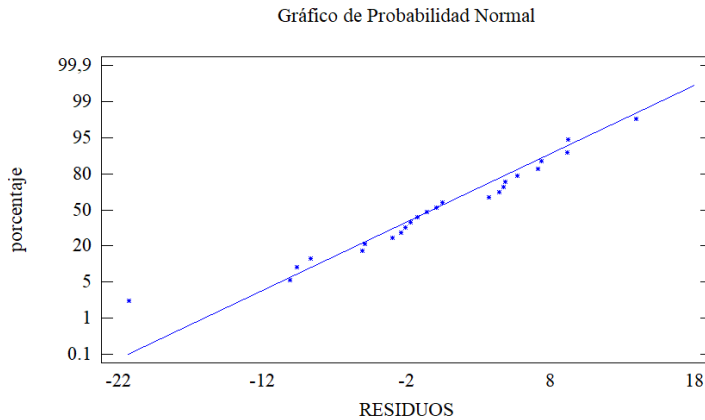


Fig. 37 Probabilidad normal para los residuales del fotopolímero

En la Fig. 37 se puede observar que los puntos de los residuales se aproximan razonablemente bien a la diagonal, por lo que se debe aceptar la hipótesis de normalidad de los residuos.

La homocedasticidad se puede validar con el gráfico de los residuos vs predichos presentado a continuación:

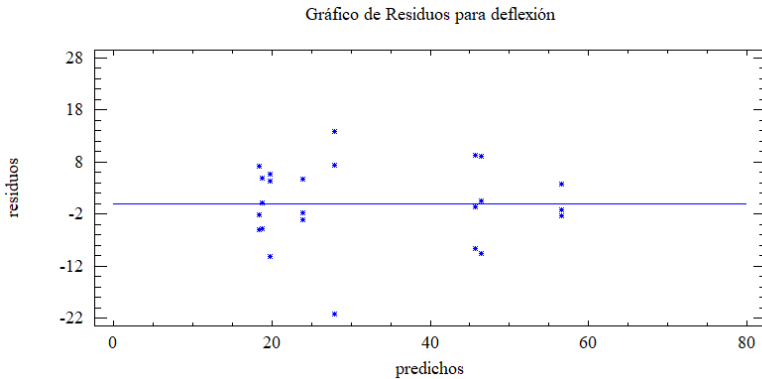


Fig. 38 Homocedasticidad para el experimento con fotopolímero

En la Fig. 38 se observa que los residuos no presentaron estructura definida o patrón alguno, por lo tanto se puede aceptar que se cumple la hipótesis de varianza de los residuos constante.

Con los supuestos validados anteriormente se procedió a analizar las deflexiones a través de un diseño multifactorial

en el software STATGRAPHICS Centurion XV y los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Tabla 7. Efectos estimados para la deflexión (mm)

| Efecto | Estimado | Error Estd. | V.I.F. |
|---------------|-----------------|--------------------|---------------|
| promedio | 32,1779 | 1,8903 | |
| A:Fuerza | -8,06925 | 3,78059 | 1,0 |
| B:Claro | 2,85758 | 3,78059 | 1,0 |
| C:Espesor | -23,9466 | 3,78059 | 1,0 |
| AB | 5,78258 | 3,78059 | 1,0 |
| AC | 5,84842 | 3,78059 | 1,0 |
| BC | -0,953417 | 3,78059 | 1,0 |
| ABC | -8,97508 | 3,78059 | 1,0 |

Errores estándar basados en el error total con 16 g.l.

En la Tabla 7 se presentan las estimaciones para cada uno de los efectos estimados en el experimento con fotopolímero y las interacciones entre ellos. También presenta el error estándar de cada uno de los efectos, el cual mide su error de muestreo. El efecto principal más alto en la tabla corresponde al factor **C:Espesor** con un valor subrayado en rojo de -23,9466. Luego sigue el valor de la interacción entre los tres factores **ABC** con un valor de -8,97508 y finalmente

se presenta el efecto estimado del factor **A: Fuerza** con un valor de -8,06925.

Los efectos B: Claro, AB y AC presentaron valores positivos en sus estimaciones, esto quiere decir por ejemplo que si se incrementa el factor B desde su nivel bajo (100 mm) hasta su nivel alto (120 mm), la variable de salida que es la deflexión δ aumentará.

Por otra parte los factores A: Fuerza, C: Espesor, las interacciones BC y ABC presentaron valores negativos en sus estimaciones, esto quiere decir por ejemplo que si se incrementa el factor A desde su nivel bajo (40,01 dN) hasta su nivel alto (49,03 dN), la variable de salida que es la deflexión δ disminuirá.

El factor de inflación de varianza (V.I.F.) más grande, es igual a 1.0, para un diseño perfectamente ortogonal, todos los factores serían igual a 1.

Las consideraciones anteriores se detallan gráficamente a través del diagrama de Pareto.

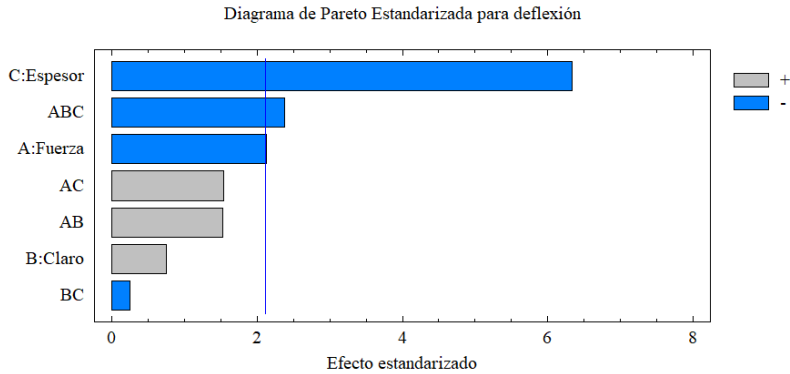


Fig. 39 Diagrama de pareto para el fotopolímero

En el gráfico de Pareto estandarizado para el experimento con fotopolímero presente en la Fig. 39, se puede utilizar la esquina superior derecha para determinar rápidamente qué efectos son los más importantes. La longitud de cada barra es proporcional al valor del estadístico t calculado para el correspondiente efecto. Barras fuera de las líneas verticales son estadísticamente significativas al nivel de confianza seleccionado, situado por defecto al 5%. En este caso hay 3 efectos principales significativos: C: Espesor, ABC y A: Fuerza. En este gráfico también se observó que el efecto menos importante fue la interacción BC.

Tabla 8. Análisis de varianza para el fotopolímero

| Fuente | Suma de Cuadrados | Gl | Cuadrado Medio | Razón-F | Valor-P |
|---------------|-------------------|----|----------------|---------|---------|
| A:Fuerza | 390,68 | 1 | 390,68 | 4,56 | 0,05 |
| B:Claro | 48,99 | 1 | 48,99 | 0,57 | 0,46 |
| C:Espesor | 3440,63 | 1 | 3440,63 | 40,12 | 0,0 |
| AB | 200,63 | 1 | 200,63 | 2,34 | 0,15 |
| AC | 205,22 | 1 | 205,22 | 2,39 | 0,14 |
| BC | 5,45 | 1 | 5,45 | 0,06 | 0,80 |
| ABC | 483,31 | 1 | 483,31 | 5,64 | 0,03 |
| Error total | 1372,12 | 16 | 85,76 | | |
| Total (corr.) | 6147,04 | 23 | | | |

R-cuadrada = 77,6784 por ciento

R-cuadrada (ajustada por g.l.) = 67,9128 por ciento

Error estándar del est. = 9,26052

Error absoluto medio = 5,88478

Estadístico Durbin-Watson = 2,26074 (P=0,7979)

Autocorrelación residual de Lag 1 = -0,149958

En la Tabla 8 se particiona la variabilidad de deflexión en piezas separadas para cada uno de los efectos, esto quiere decir que prueba la significancia estadística de cada efecto comparando su cuadrado medio contra un estimado del error experimental. En este análisis de varianza se puede observar que el factor **C: Espesor** fue el más influyente en la variable de salida deflexión debido a que presentó el valor de Razón-F

más alto con un valor de 40,12. También se observó que en este caso existen 3 efectos que tienen un valor-P menor que 0,05 (subrayados en rojo), indicando que son significativamente diferentes de cero con un nivel de confianza del 95,0%, es decir que fueron muy influyentes el factor **C:Espesor** con un valor P de 0,0 el factor **A:Fuerza** con un valor P de 0,05 y finalmente la interacción **ABC** con un valor P de 0,03.

El estadístico R-Cuadrada indica que el modelo, así ajustado, explica 77,6784% de la variabilidad en deflexión. El estadístico R-cuadrada ajustada, que es más adecuado para comparar modelos con diferente número de variables independientes, es 67,9128%. El error estándar del estimado muestra que la desviación estándar de los residuos es 9,26052. El error medio absoluto (MAE) de 5,88478 es el valor promedio de los residuos. El estadístico de Durbin-Watson (DW) prueba los residuos para determinar si haya alguna correlación significativa basada en el orden en que se presentan los datos en el archivo. Puesto que el valor-P es

mayor que 5,0%, no hay indicación de autocorrelación serial en los residuos con un nivel de significancia del 5,0%.

A continuación se presenta la gráfica de los efectos principales para la deflexión:

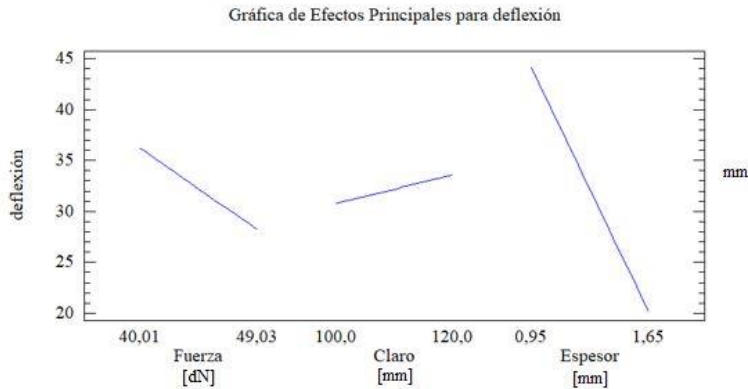


Fig. 40 Efectos principales para la deflexión

En el gráfico de efectos principales para la deflexión de la Fig. 40 se muestra cómo cada factor afecta a la deflexión: Las líneas indican los cambios estimados en la deflexión cuando cada factor se mueve de su nivel bajo a su nivel alto, con todos los otros factores constantes en un valor a mitad de camino entre sus valores bajos y altos. Así, por ejemplo, si el

factor C: Espesor aumenta de si nivel bajo (0,95 mm) a su nivel alto (1,65 mm) el valor de la deflexión disminuirá.

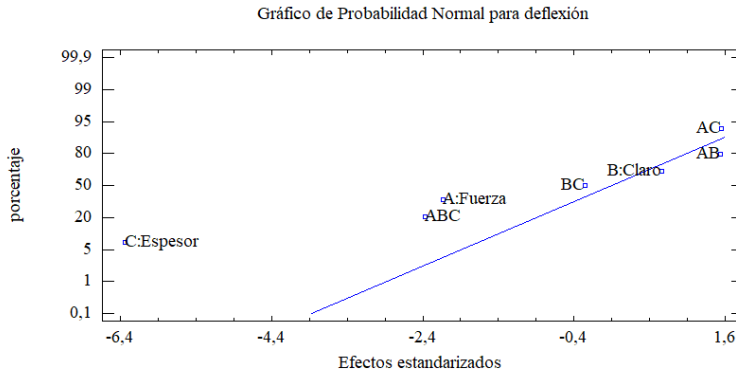


Fig. 41 Probabilidad normal para los efectos

A través de la Fig. 41 se observó que el efecto más alejado de la recta fue el factor C:Espesor lo que corrobora que es bastante influyente en este diseño experimental.

Es de especial interés conocer la interacción entre los factores más influyentes que fueron el factor C: Espesor y el factor A: fuerza como se presenta a continuación:

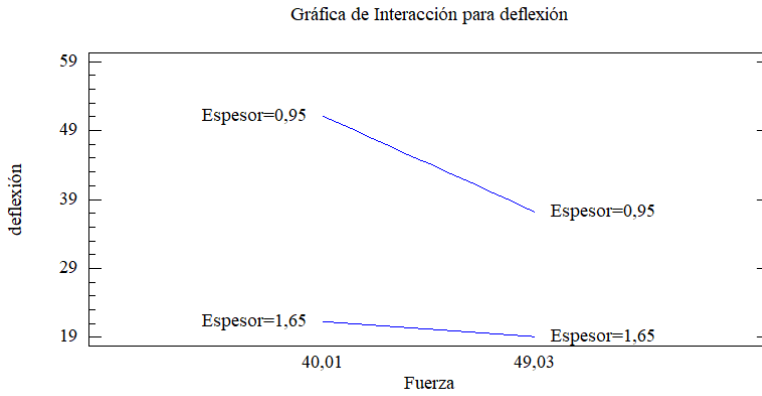


Fig. 42 Interacción entre fuerza y espesor

En la Fig. 42 se muestra la deflexión con el cambio de la fuerza, para cada nivel del espesor. Se debe notar que en el nivel alto de espesor 1,65 mm la fuerza aplicada durante el ensayo obtuvo un efecto pequeño, a diferencia que el en nivel bajo de espesor 0,95 mm en la cual la fuerza obtuvo un efecto significativo.

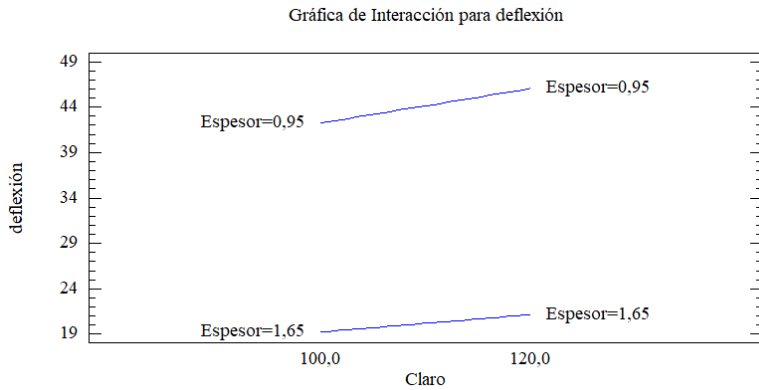


Fig. 43 Interacción entre claro y espesor

En la Fig. 43 se observa que en el nivel bajo de espesor 0,95 mm el cambio en la deflexión es mayor conforme aumenta el claro o separación entre los soporte, a diferencia de cuando el espesor vale 1,65 mm el cambio en la deflexión es menos asentado. Las líneas en esta figura tienden a ser paralelas entre sí, lo cual indica que no hay interacción entre los factores Claro y Espesor.

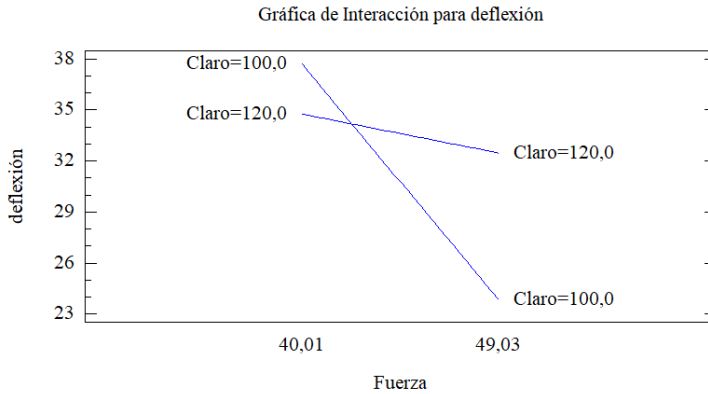


Fig. 44. Interacción entre la fuerza y el claro

En la figura Fig. 44 se presentan líneas que se cruzan, quiere decir que existe interacción entre el factor fuerza y el factor claro. En el nivel bajo de claro (100 mm) , la fuerza juega un papel muy importante. Se muestra una gran variación en la deflexión.

El modelo que describe la deflexión se obtuvo con el coeficiente de regresión presente en la Tabla 9:

Tabla 9. Coeficiente de regresión para la deflexión

| <i>Coeficiente</i> | <i>Estimado</i> |
|--------------------|-----------------|
| constante | 2312,35 |
| A:Fuerza | -51,0085 |
| B:Claro | -18,9878 |
| C:Espesor | -1493,93 |
| AB | 0,433687 |
| AC | 33,1246 |
| BC | 12,5205 |
| ABC | -0,284292 |

La ecuación del modelo es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 \text{deflexión} = & 2312,35 - 51,0085 * \text{Fuerza} - 18,9878 * \text{Claro} - 1493,93 \\
 & * \text{Espesor} + 0,433687 * \text{Fuerza} * \text{Claro} + 33,1246 \\
 & * \text{Fuerza} * \text{Espesor} + 12,5205 * \text{Claro} * \text{Espesor} \\
 & - 0,284292 * \text{Fuerza} * \text{Claro} * \text{Espesor}
 \end{aligned} \tag{51}$$

A continuación, se presentan las gráficas de superficie de respuesta y contorno para el modelo. Puesto que el modelo es de primer orden (es decir, únicamente contiene los efectos principales) la superficie de respuesta ajustada es un plano.

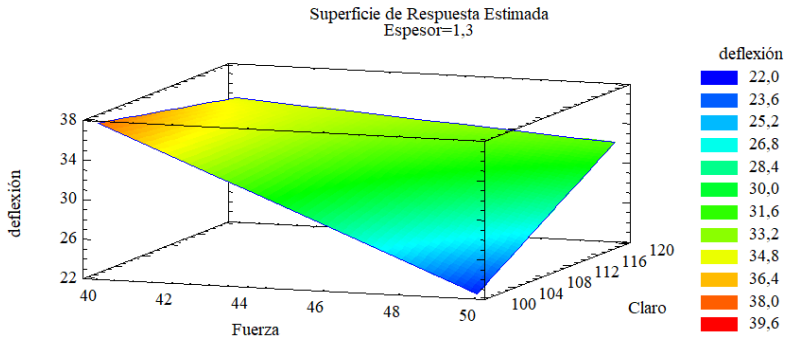


Fig. 45 Superficie de respuesta entre fuerza y claro

En la Fig. 45 se presenta la superficie de respuesta manteniendo los factores fuerza y claro. Se logra evidenciar en la zona de color naranja que las mayores deflexiones se obtuvieron con el nivel bajo de fuerza 40,01 dN, también que las menores deflexiones se lograron con el nivel bajo de claro 100 mm. El valor óptimo de espesor fue 1,3 mm.

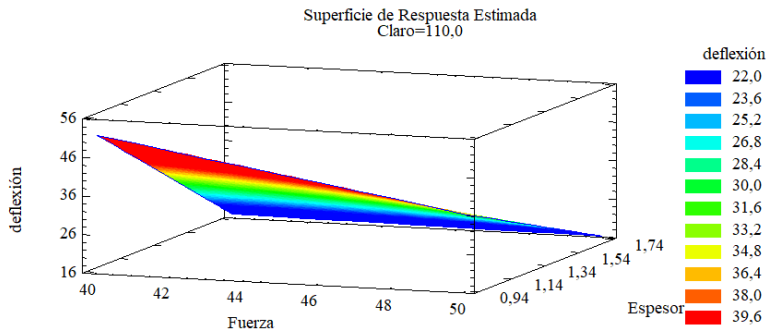


Fig. 46 Superficie de respuesta entre fuerza y espesor

En la Fig. 46 se presenta la superficie de respuesta manteniendo los factores fuerza y espesor. En esta se observa que la deflexión disminuye conforma aumenta el espesor de la probeta. El valor óptimo para el claro fue 110 mm.

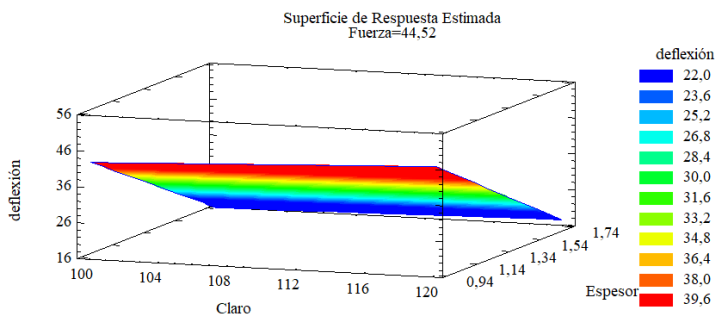


Fig. 47 Superficie de respuesta entre claro y espesor

En la Fig. 47 se presenta la superficie de respuesta manteniendo los factores claro y espesor. Las mayores deflexiones se presentaron para el nivel bajo de espesor 0,95 mm.

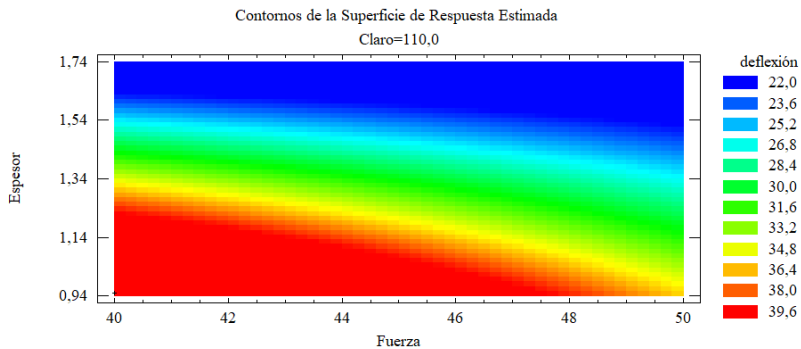


Fig. 48 Contorno de la superficie de respuesta para fuerza y espesor

En la gráfica de contorno Fig. 48 Contorno de la superficie de respuesta para fuerza y espesor Fig. 48 nuevamente se evidencian los hallazgos encontrados en las superficies de respuesta. Un espesor pequeño conduce a una gran deflexión.

4.2 VALIDACIÓN DEL MODELO ANALÍTICO

Para corroborar el modelo analítico planteado en el capítulo 2 el cual describe las coordenadas de la curva base cuando un viga es sometida a flexión de tres puntos se utilizó el software libre Engauge Digitizer.

Esta herramienta de software de digitalización convierte un archivo de imagen que muestra un gráfico o mapa, en números. El archivo de imagen puede provenir de un escáner, cámara digital o captura de pantalla. Los números se pueden leer en la pantalla y se pueden escribir o copiar en una hoja de cálculo.

La herramienta Engauge Digitizer acepta archivos de imagen (como PNG, JPEG y TIFF) que contienen gráficos, y recupera los puntos de datos de esos gráficos. Los puntos de datos resultantes se utilizan generalmente como entrada para otras aplicaciones de software. Conceptualmente, Engauge Digitizer es lo opuesto a una herramienta de gráficos que convierte los puntos de datos en gráficos. A través de este

software, se exportaron las fotos de cada una de las probetas analizadas durante el ensayo a flexión de tres puntos en la posición de máxima deflexión y se obtuvieron las hojas de cálculo con las coordenadas x y y que describen la curva base deformada. Es importante aclarar que dicho análisis no se pudo realizar para las probetas A2 y B2 debido a la poca claridad en la fotografía.

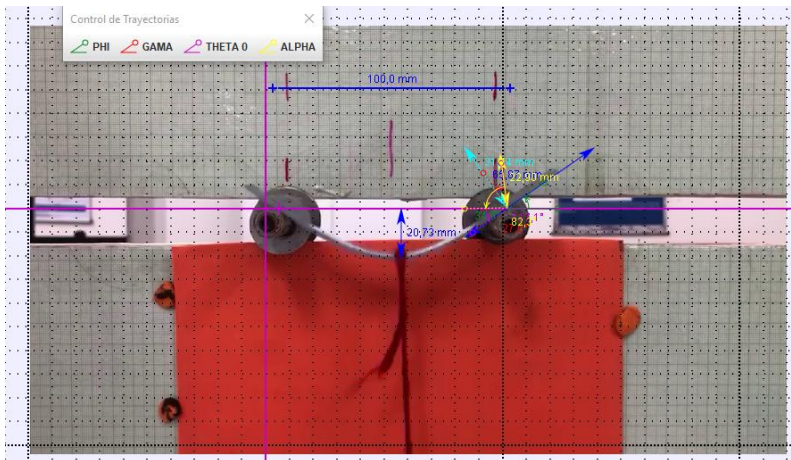


Fig. 49. Fotografía de deflexión para la probeta B12

En la Tabla 10, se presenta como ejemplo los datos obtenidos de la fotografía de deflexión para la probeta B12 (Fig. 49) mediante el análisis con el software Engauge Digitizer .

Tabla 10. Coordenadas en xy para la probeta B12 mediante Engauge Digitizer

| x(mm) | y(mm) |
|--------------|--------------|
| -47,535 | 19,995 |
| -45,07 | 17,375 |
| -43,31 | 15,881 |
| -40,845 | 14,392 |
| -39,437 | 14,025 |
| -36,62 | 11,408 |
| -34,155 | 10,296 |
| -31,69 | 8,807 |
| -29,225 | 8,072 |
| -26,761 | 6,206 |
| -23,592 | 5,099 |
| -20,423 | 3,615 |
| -17,958 | 2,88 |
| -15,845 | 2,519 |
| -13,732 | 1,404 |
| -11,268 | 1,046 |
| -8,803 | 1,064 |
| -6,69 | 0,326 |
| -4,225 | 0,345 |
| -1,761 | 0,364 |
| -0,352 | -0,003 |

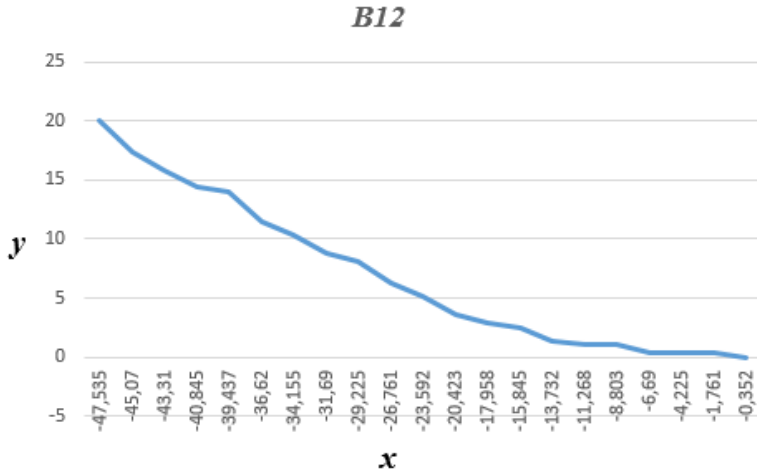


Fig. 50. Gráfica de la curva base para la probeta B12 con los datos de Engauge Digitizer

Una vez obtenidas las 22 gráficas para las probetas (exceptuando la probeta A2 y B2) se debían contrastar con las coordenadas para la curva base según el modelo analítico propuesto en este trabajo. Primero se realizó el cálculo de ω (parámetro de carga) y el cálculo de κ (curvatura de la viga). Los valores de entrada fueron $F, l_0, E, I, \alpha, \kappa_0, M_0$ para obtener $E(\kappa), K(\kappa), Z(\omega s + K, k), cn(\omega s + K, k), \xi(s), \eta(s), x(s), y(s)$.

Tabla 11. Valores para ω y κ

| Probeta | F | l_0 | I | α | κ_0 | M_0 | ω | κ |
|---------|-------|-------|-----------------|----------|------------|---------|----------|----------|
| | N | m | mm ⁴ | ° | | N.m | | |
| B3 | 2,001 | 0,05 | 5,6152E-12 | 117,48 | 0,003 | 0,00075 | 0,5969 | 0,855 |
| A8 | 2,475 | 0,05 | 1,0717E-12 | 117,21 | 0,010 | 0,00053 | 1,5197 | 0,854 |
| A1 | 2,595 | 0,06 | 1,0717E-12 | 117,65 | 0,013 | 0,00056 | 1,8673 | 0,856 |
| B4 | 2,484 | 0,06 | 5,6152E-12 | 117,08 | 0,004 | 0,00093 | 0,7981 | 0,853 |
| B1 | 2,005 | 0,06 | 5,6152E-12 | 116,56 | 0,003 | 0,00075 | 0,7171 | 0,851 |
| A4 | 2,100 | 0,06 | 1,0717E-12 | 116,83 | 0,010 | 0,00045 | 1,6797 | 0,852 |
| A11 | 2,235 | 0,05 | 1,0717E-12 | 116,61 | 0,009 | 0,00048 | 1,4442 | 0,851 |
| B8 | 2,457 | 0,05 | 5,6152E-12 | 116,81 | 0,003 | 0,00092 | 0,6615 | 0,852 |
| A3 | 2,652 | 0,05 | 1,0717E-12 | 116,1 | 0,011 | 0,00057 | 1,5729 | 0,849 |
| A9 | 2,663 | 0,06 | 1,0717E-12 | 116,58 | 0,013 | 0,00057 | 1,8915 | 0,851 |
| A7 | 2,090 | 0,06 | 1,0717E-12 | 116,89 | 0,010 | 0,00045 | 1,6760 | 0,852 |
| A5 | 2,209 | 0,05 | 1,0717E-12 | 117,29 | 0,009 | 0,00048 | 1,4356 | 0,854 |

Tabla 11. Valores para ω y κ –Continuación–

| | | | | | | | | |
|-----|-------|------|------------|--------|-------|---------|--------|-------|
| B6 | 2,452 | 0,06 | 5,6152E-12 | 117,29 | 0,004 | 0,00092 | 0,7930 | 0,854 |
| B7 | 2,003 | 0,05 | 5,6152E-12 | 116,03 | 0,003 | 0,00075 | 0,5972 | 0,848 |
| B9 | 2,484 | 0,05 | 5,6152E-12 | 117,1 | 0,003 | 0,00093 | 0,6651 | 0,853 |
| B10 | 2,001 | 0,06 | 5,6152E-12 | 117,25 | 0,003 | 0,00075 | 0,7163 | 0,854 |
| A6 | 2,554 | 0,06 | 1,0717E-12 | 116,73 | 0,012 | 0,00055 | 1,8524 | 0,851 |
| B11 | 2,477 | 0,06 | 5,6152E-12 | 117,4 | 0,004 | 0,00093 | 0,7971 | 0,854 |
| A2 | 2,222 | 0,05 | 1,0717E-12 | 116,53 | 0,009 | 0,00048 | 1,4399 | 0,850 |
| B5 | 2,006 | 0,06 | 5,6152E-12 | 117,21 | 0,003 | 0,00075 | 0,7172 | 0,854 |
| B12 | 2,019 | 0,05 | 5,6152E-12 | 117,18 | 0,003 | 0,00076 | 0,5996 | 0,853 |
| B2 | 2,476 | 0,05 | 5,6152E-12 | 116,7 | 0,003 | 0,00093 | 0,6640 | 0,851 |
| A10 | 2,023 | 0,06 | 1,0717E-12 | 117,06 | 0,010 | 0,00044 | 1,6489 | 0,853 |
| A12 | 2,506 | 0,05 | 1,0717E-12 | 117,2 | 0,010 | 0,00054 | 1,5292 | 0,854 |

Se recuerda que los valores de entrada $F, l_0, E, I, \alpha, \kappa_0, M_0$ fueron calculados con las ecuaciones (4), (27), (29), (32). El módulo de elasticidad E se tomó de la hoja de datos para el

material VEROBLUE con un valor de 2500 Mpa (ver anexo A). Una vez conocidos ω y κ se procedió a determinar las salidas $E(\kappa), K(\kappa), Z(\omega s + K, k), cn(\omega s + K, k), \xi(s), \eta(s), x(s), y(s)$. A través del software MATLAB, gracias a que posee funciones adecuadas para calcular la integral elíptica completa de primer y segundo orden de Jacobi y la función coseno elíptico de Jacobi para los datos de las 24 probetas. Por la cantidad de las gráficas solo se presenta como ejemplo los resultados de la probeta B12.

Tabla 12. Coordenadas $x(s)$ y $y(s)$ para la probeta B12 mediante funciones elípticas de Jacobi

| s | $Z(\omega s + K, k)$ | $cn(\omega s + K, k)$ | $E(k)$ | $K(\kappa)$ | $\xi(s)$ | $\eta(s)$ | $x(s)$ | $y(s)$ |
|-----|----------------------|-----------------------|--------|-------------|----------|-----------|--------|--------|
| 0 | 0,279 | 0,557 | 2,400 | 1,141 | 1,815 | 0,833 | -0,087 | 0,049 |
| 0,1 | 0,256 | 0,526 | 2,400 | 1,141 | 1,570 | 0,742 | -0,076 | 0,042 |
| 0,2 | 0,228 | 0,494 | 2,400 | 1,141 | 1,344 | 0,653 | -0,066 | 0,035 |
| 0,3 | 0,193 | 0,464 | 2,400 | 1,141 | 1,138 | 0,566 | -0,056 | 0,029 |
| 0,4 | 0,153 | 0,433 | 2,400 | 1,141 | 0,951 | 0,480 | -0,047 | 0,024 |
| 0,5 | 0,108 | 0,404 | 2,400 | 1,141 | 0,780 | 0,395 | -0,039 | 0,020 |
| 0,6 | 0,060 | 0,375 | 2,400 | 1,141 | 0,621 | 0,313 | -0,031 | 0,016 |
| 0,7 | 0,009 | 0,346 | 2,400 | 1,141 | 0,471 | 0,232 | -0,023 | 0,012 |
| 0,8 | -0,043 | 0,319 | 2,400 | 1,141 | 0,321 | 0,153 | -0,016 | 0,008 |
| 0,9 | -0,092 | 0,291 | 2,400 | 1,141 | 0,166 | 0,076 | -0,008 | 0,004 |
| 1 | -0,139 | 0,265 | 2,400 | 1,141 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |

Los datos de las coordenadas $x(s)$ y $y(s)$ fueron graficados también en MATLAB (como ejemplo se presenta la Fig. 51) evidenciando el comportamiento de la curva base para las probetas deformadas según el modelo analítico.

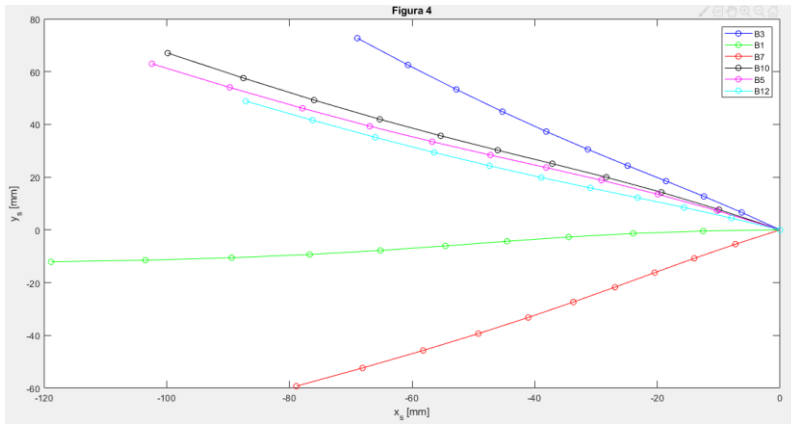


Fig. 51. forma de la curva base según el modelo analítico para la probeta B12

Finalmente, para poder efectuar la contrastación entre los datos experimentales (procesados con el software Enganche Digitizer) y los valores teóricos a través de la aplicación del modelo analítico se efectuó una superposición de las curvas obtenidas mediante los dos procesos. Se decidió graficar 3 probetas por figura para no extender la cantidad de gráficas,

dicha agrupación se realizó teniendo características comunes como el mismo espesor y la misma fuerza aplicada durante el ensayo a flexión de tres puntos. Así por ejemplo en la Fig. 52 se presentan las probetas A8, A1, A3 que mantienen el mismo espesor de 0,95 mm y la fuerza de 40,03 dN. Se aclara que en la figura el valor con el asterisco y la forma en círculos corresponde a los datos experimentales del software Engauge Digitizer (esta notación se replicó en todas las gráficas). La línea continua hace referencia a la curva bajo las ecuaciones del modelo analítico.

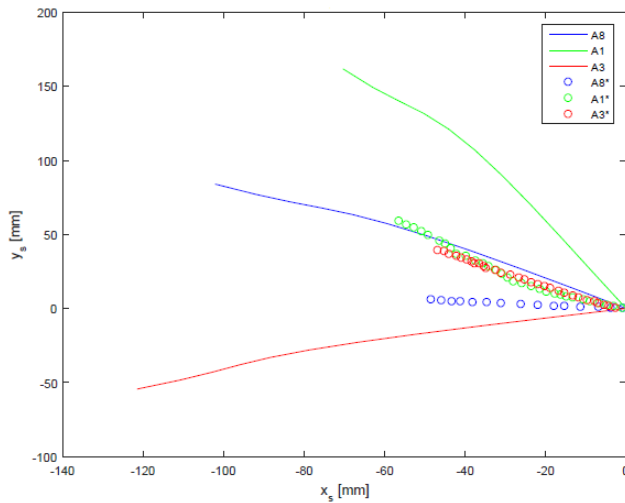


Fig. 52. Comprobación modelo analítico probetas A8, A1, A3

En la Fig. 52 se observa que la probeta con mayor separación entre gráficas superpuestas es la A1.

La Tabla 13 presenta los parámetros de agrupación de las probetas para efectuar la superposición de las gráficas y mejorar la visualización de resultados.

Tabla 13. Distribución de probetas por gráfica

| | Probetas | Constantes |
|-----------|-----------------|-------------------------------|
| Figura 52 | A8,A3,A1 | espesor 0,95- fuerza 49,03 dN |
| Figura 53 | A9,A6,A12 | espesor 0,95- fuerza 49,03 dN |
| Figura 54 | A4,A11,A7 | espesor 0,95- fuerza 40,01 dN |
| Figura 55 | A5,A2**,A10 | espesor 0,95- fuerza 40,01 dN |
| Figura 56 | B4,B8,B6 | espesor 1,95- fuerza 49,01 dN |
| Figura 57 | B9,B11,B2** | espesor 1,95- fuerza 49,01 dN |
| Figura 58 | B3,B1,B7 | espesor 1,95- fuerza 40,01 dN |
| Figura 59 | B10,B5,B12 | espesor 1,95- fuerza 40,01 dN |

** Las probetas A2 y B2 por baja resolución en la calidad de su imagen.

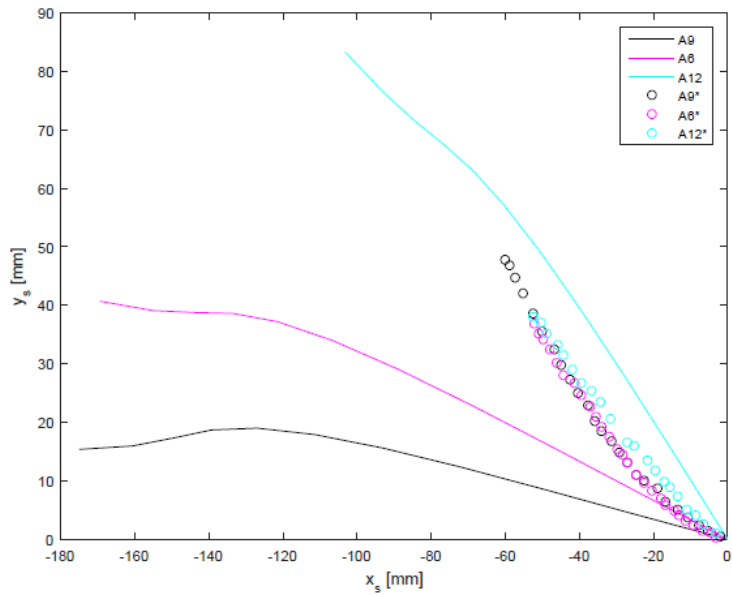


Fig. 53. Comprobación modelo analítico probetas A9, A6, A12

La Fig. 53 evidencia un buen acercamiento entre la gráfica experimental de la probeta A12* y la gráfica analítica A12.

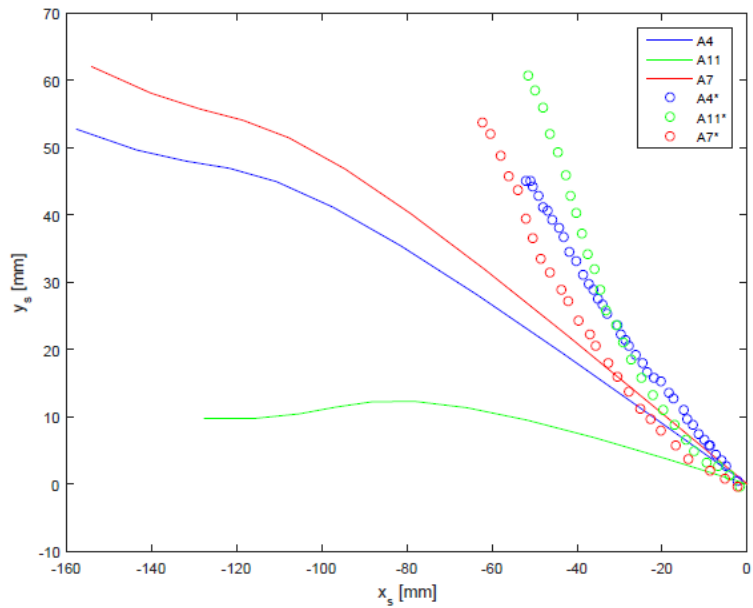


Fig. 54. Comprobación modelo analítico probetas A4, A11, A7

En la Fig. 54 se evidencia un comportamiento casi colineal para los primeros valores de la coordenada $x(s)$ en la probeta A7.

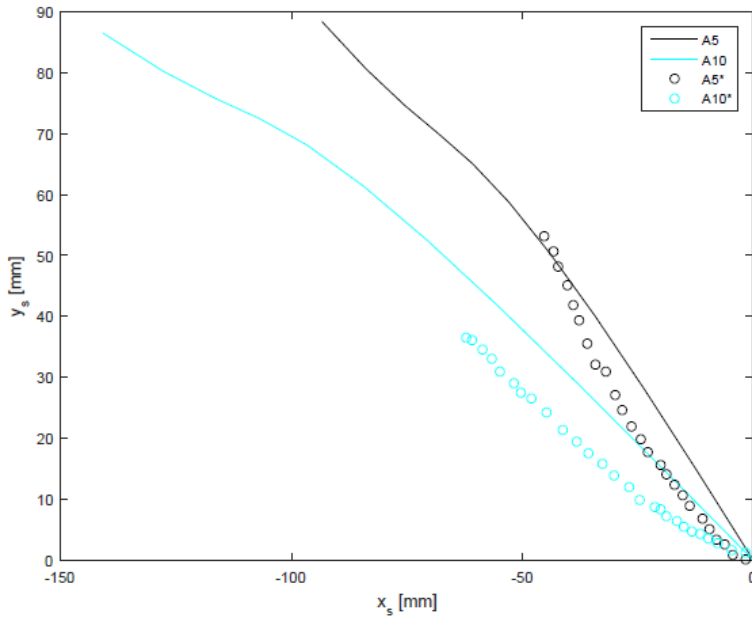


Fig. 55. Comprobación modelo analítico probetas A5, A10

La Fig. 55 presenta un buen acercamiento entre puntos para la probeta A5.

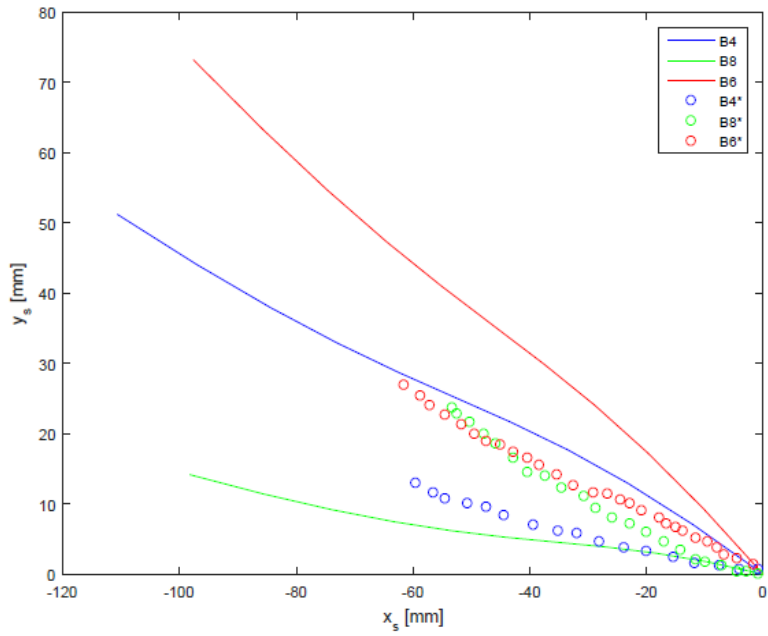


Fig. 56. Comprobación modelo analítico probetas B4, B8, B6

En la Fig. 56 las probetas B4,B8 y B6 presentan separaciones similares y una concavidad hacia arriba.

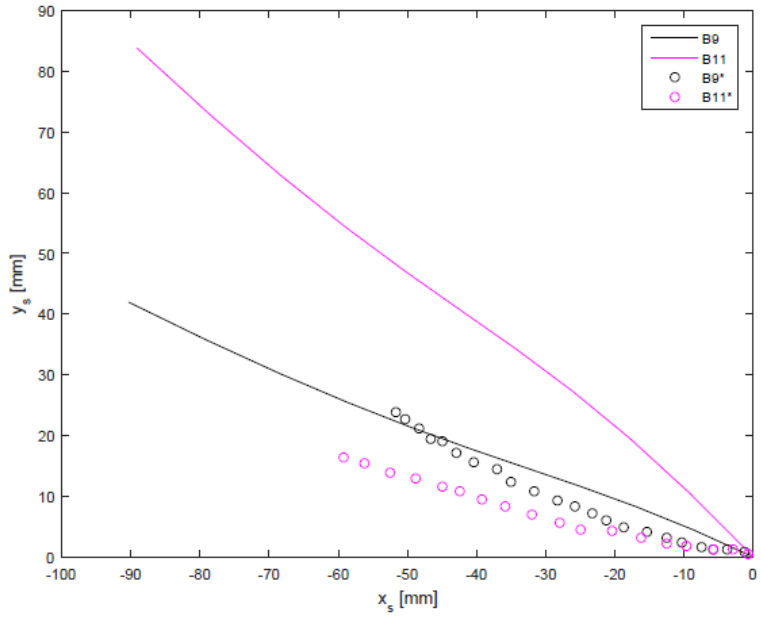


Fig. 57. Comprobación modelo analítico probetas B9, B11

Para la Fig. 57 se observa un buen acercamiento entre puntos de la probeta B9.

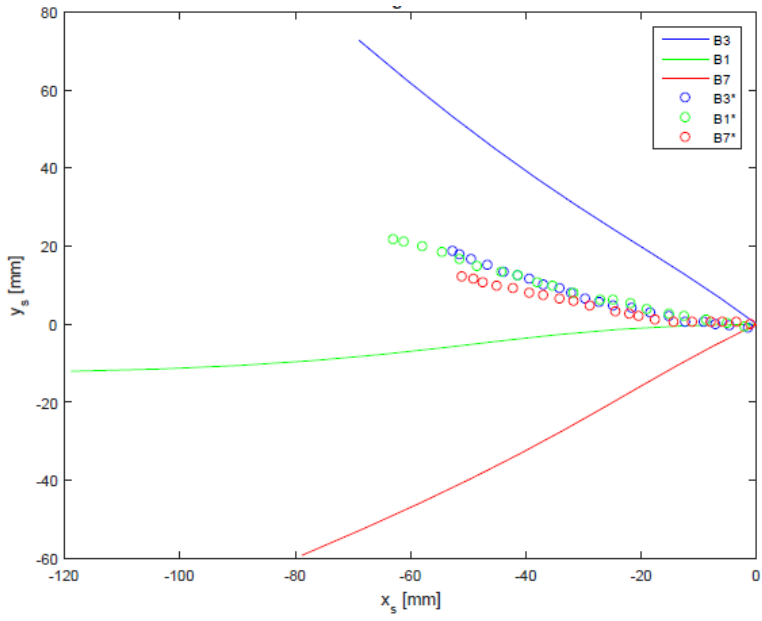


Fig. 58. Comprobación modelo analítico probetas B3, B1, B7

En la Fig. 58 las 3 probetas presentan gran distanciamiento entre puntos.

Se presenta a continuación la última gráfica,

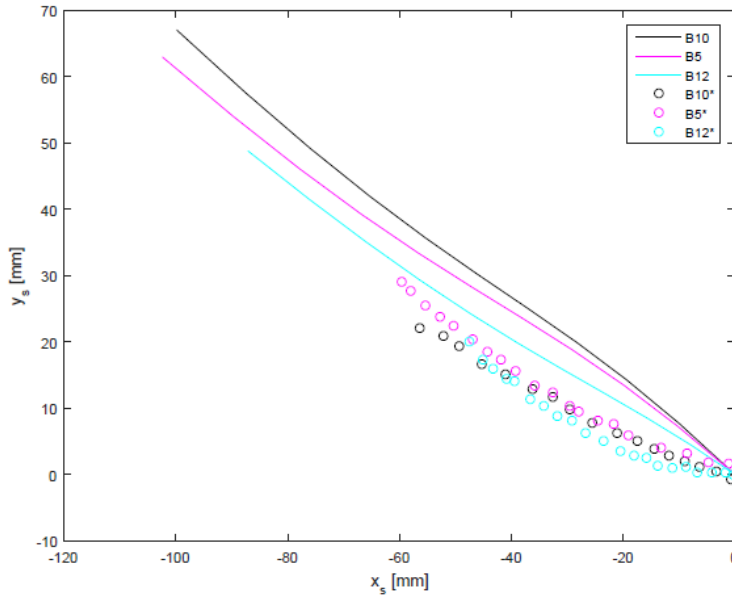


Fig. 59. Comprobación modelo analítico probetas B10, B5, B12

Finalmente, en la Fig. 59 se evidencia la mejor armonía entre los datos, y se presenta un buen acercamiento para la probeta B12.

5 DISCUSIÓN DE RESULTADOS

¿Cómo influye el espesor en el comportamiento a flexión a tres puntos de una viga simétrica elástica sujeta a grandes deflexiones?

Gracias a la realización del diseño experimental para el fotopolímero se pudo deducir la influencia del espesor en el comportamiento a flexión a tres puntos para una viga simétrica elástica. El análisis estadístico de los datos a través del software STATGRAPHICS arrojó que el factor espesor Sí es influyente para el caso de grandes deflexiones. Según la tabla de efectos estimados para la variable de salida deflexión, el factor C: Espesor obtuvo el mayor valor (-23,9466). Por otra parte, Si se incrementa el factor Espesor desde su nivel bajo (0,95 mm) hasta su nivel alto (1,65 mm) la deflexión de la viga disminuirá. Afirmación que es coherente con la E_c

(3), en la cual se evidencia que cuando aumenta el segundo momento de área I (directamente relacionado con la variable espesor), la deflexión de la viga tiene a disminuir.

La importancia del espesor también se reflejó con el análisis de varianza, en el cual se puede observar que el factor fue el más influyente debido a que presentó el valor de Razón-F más alto con un valor de 40,12. También se observó que en este caso existieron 3 efectos que obtuvieron un valor-P menor que 0,05, indicando que son significativamente diferentes de cero con un nivel de confianza del 95,0%, es decir que fueron muy influyentes el factor **C:Espesor** con un valor P de 0,0000, el factor **A:Fuerza** con un valor P de 0,0486 y finalmente la interacción **ABC** con un valor P de 0,0305.

En la gráfica de efectos principales para la deflexión se observó un comportamiento atípico para el factor fuerza, debido a que las menores deflexiones se presentaron con el valor alto de fuerza. En el gráfico de interacción entre el factor Fuerza y el factor Claro se presentó una incoherencia para el valor bajo de fuerza (40,01 dN) y el nivel alto de claro (120 mm) pues se generó una deflexión menor comparada con la combinación del valor bajo de fuerza (40,01 dN) y el nivel bajo de claro (100 mm). Con el diseño experimental también se logró determinar que el factor fuerza es influyente

durante el ensayo a flexión de tres puntos. Al igual que la interacción ABC. (el factor obtuvo un valor P de 0,0486 y la interacción **ABC** un valor P de 0,0305).

Gracias a las figuras obtenidas mediante los datos experimentales (Engauge Digitizer) y los datos teóricos (modelo analítico) se logró evidenciar de manera gráfica la validez del modelo propuesto en este trabajo de investigación teniendo en cuenta el efecto del espesor de la viga. En la sección anterior se evidenció que las probetas A12, A7, A5, B9 Y B12 poseen una tendencia cercana entre puntos, sin embargo, solo representan el 22% de las probetas graficadas (en total 22 probetas), estas 5 probetas no superan la mitad de las probetas que se ajustan al modelo analítico.

Este trabajo de investigación estableció un modelo analítico de flexión a tres puntos incluyendo el espesor de la viga en términos de las funciones elípticas de Jacobi a diferencia de los autores mencionados en la sección de antecedentes. Tener en cuenta esta variable permite aproximar mejor la forma de la curva deformada de la viga para mejorar el diseño de

elementos estructurales que se someten a grandes deflexiones.

Mediante la realización de los cálculos para las coordenadas de la curva base, se observó que el espesor trabajado en este proyecto conduce a un momento de flexión aún muy pequeño que podría ser casi despreciable.

Es de importancia tratar que los autores mencionados en la sección de antecedentes no realizaron un diseño experimental para la obtención de la deflexión de la viga en el caso de grandes deflexiones. Este diseño facilitó conocer los factores influyentes en el ensayo a flexión de tres puntos.

6 CONCLUSIONES

En este trabajo de investigación se ha tenido una discusión sobre la influencia del espesor en el comportamiento a flexión de vigas simétricas elásticas sujetas a grandes deflexiones, los principales resultados obtenidos son los siguientes:

- La solución para la deflexión de la viga teniendo en cuenta el **espesor** ha sido expresada en términos de las funciones elípticas de Jacobi, que tienen una ventaja sobre la solución expresada en integrales elípticas debido a que están definidas para cualquiera valor de argumento y también, están conectadas por simples relaciones de suma y poseen reglas derivativas simples. Esta solución fue expresada en las Ec. (47) y Ec. (48) y graficaron con ayuda del software MATLAB para cada probeta.
- El problema a solucionar tuvo en cuenta el espesor, lo que evidencia la aparición de un momento de flexión en los apoyos de la viga pero, la solución

sigue siendo de fuerza dominante pues este momento es muy pequeño.

- El análisis estadístico del diseño experimental permitió determinar que el espesor es un factor influyente en el comportamiento a flexión de vigas simétricas elásticas sometidas a flexión de tres puntos.
- La validación gráfica del modelo analítico arrojó que sólo el 22% de las probetas ensayadas se ajustan de manera aceptable a los puntos de la deformación obtenida mediante las fotografías con el software Tracker, por lo tanto, se recomienda ajustar el modelo analítico para una investigación futura. La solución de dicho modelo es compleja dada a que se tienen que resolver simultáneamente dos casos no lineales de la ecuación diferencial: fuerza y momento dominantes.
- Cabe mencionar que el ensayo a flexión se realizó mediante un montaje experimental de un tablero rotulado y pesas calibradas pues debido al bajo espesor de las probetas la máquina de ensayos

universal disponible en la universidad Autónoma de
Manizales no generó carga inicial.

7 RECOMENDACIONES

El modelo adaptado de Batista [9] debe ser modificado para dar respuesta general a los casos de fuerza dominante y momento dominante simultáneamente. Situación que requiere fuerte trabajo en el modelado debido a la no linealidad de las soluciones. Este trabajo es necesario para ajustar el modelo a los datos experimentales dadas dos situaciones importantes: i. El dominio de la solución en el intervalo $[0,1]$ y la obtención de deflexiones negativas en algunos casos atípicos. Se recomienda seguir con el proceso de modelización analítica de este problema. Es necesario además hacer evaluaciones de la solución en otros tipos de materiales cuyas ecuaciones de relación constitutiva pueden ser significativamente diferentes y de mayor complejidad a las estudiadas en este trabajo.

8 REFERENCIAS

- [1] C. V. J and P. S. E, “Approximate solution to three point bending equation for a simply supported beam,” *Sci. Res. Essays*, vol. 10, no. 9, pp. 339–347, 2015.
- [2] J. M. Gere, “Mecánica de Materiales -(6ta Ed).” .
- [3] P. Khaneh Masjedi and H. R. Ovesy, “Large deflection analysis of geometrically exact spatial beams under conservative and nonconservative loads using intrinsic equations,” *Acta Mech.*, vol. 226, no. 6, pp. 1689–1706, 2015.
- [4] C. k. k. meyers M.A., *Mechanical Behavior of Materials. 2007.* 2007.
- [5] ASTM, “Standard Test Methods for Flexural Properties of Unreinforced and Reinforced Plastics and Electrical Insulating Materials 1,” in *Annual Book of ASTM Standards*, no. C, 2011, pp. 1–11.
- [6] ASTM, “Standard Test Methods for Bend Testing of

Material for Ductility,” *Annu. B. ASTM Stand.*, no. Reapproved 2004, pp. 1–8, 2004.

- [7] J. G. Freeman, “Mathematical Theory of Deflection of Beam,” *Philos. Mag. Ser.*, p. 855–862., 1945.
- [8] A. Ohtsuki, “An analysis of large deflections in a symmetrical three point bending of beam,” *JSME*, vol. 29, 1986.
- [9] M. Batista, “Large deflections of a beam subject to three-point bending,” *Int. J. Non. Linear. Mech.*, vol. 69, pp. 84–92, 2015.
- [10] A. M. Sharkawi, A. M. Mehriz, E. A. Showaib, and A. Hassanin, “Performance of sustainable natural yarn reinforced polymer bars for construction applications,” *Constr. Build. Mater.*, vol. 158, pp. 359–368, 2018.
- [11] G. Bertocci, A. Thompson, and M. C. Pierce, “Femur fracture biomechanics and morphology associated with torsional and bending loading conditions in an in vitro immature porcine model,” *J. Forensic Leg. Med.*, vol. 52, pp. 5–11, 2017.

- [12] Y. Yamamoto and S. M. Springman, “Three- and four-point bending tests on artificial frozen soil samples at temperatures close to 0 °C,” *Cold Reg. Sci. Technol.*, vol. 134, pp. 20–32, 2017.
- [13] N. Z. Wang, X. Chen, A. Li, Y. X. Li, H. W. Zhang, and Y. Liu, “Three-point bending performance of a new aluminum foam composite structure,” *Trans. Nonferrous Met. Soc. China (English Ed.)*, vol. 26, no. 2, pp. 359–368, 2016.
- [14] S. P. Mai, C. S. Wen, and J. Lu, “Surface-modified steel sheets and corrugated panels in three-point bending,” *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 142–143, no. February, pp. 10–20, 2018.
- [15] H. D. Conway, “The Large Deflection of Simply Supported Beams,” *Philos. Mag. Ser.* , vol. 38, no. 1938, pp. 905–911, 1947.
- [16] R. Frisch-Fay, *FLEXIBLE BARS*. London: Butterworths, 1962.
- [17] D. C. West, “Flexure testing of plastics,” *Exp. Mech.*,

- vol. 4, no. 7, pp. 185–190, 1964.
- [18] S. Theocaris, P.S., Paipetis, S.A., Paolinelis, “THREE-POINT BENDING AT LARGE DEFLECTIONS,” *J. Test. Eval.*, vol. 5, no. 6, pp. 427–436, 1977.
- [19] H. Fukuda, “A new bending test method of advanced composites,” *Exp. Mech.*, vol. 29, no. 3, pp. 330–335, 1989.
- [20] J. W. Joo and B. M. Kwak, “Simulation of three-point bending at large deflections by an elastoplastic contact analysis,” *Exp. Mech.*, vol. 29, no. 4, pp. 460–465, 1989.
- [21] E. E. Gdoutos, I. M. Daniel, K.-A. Wang, and J. L. Abot, “Nonlinear behavior of composite sandwich beams in three-point bending,” *Exp. Mech.*, vol. 41, no. 2, pp. 182–189, 2001.
- [22] H. Yoshihara and S. Tsunematsu, “Feasibility of estimation methods for measuring Young’s modulus of wood by three-point bending test,” *Mater. Struct.*, vol. 39, no. 1, pp. 29–36, 2006.

- [23] A. K. Arnautov, “The method of three-point bending in testing thin high-strength reinforced plastics at large deflections,” *Mech. Compos. Mater.*, vol. 41, no. 5, pp. 467–476, 2005.
- [24] F. Mujika, “On the difference between flexural moduli obtained by three-point and four-point bending tests,” *Polym. Test.*, vol. 25, no. 2, pp. 214–220, 2006.
- [25] J. M. Muñoz-Guijosa, V. R. de la Cruz, D. F. Caballero, A. D. Lantada, and J. E. Otero, “Simple Testing System for Pure Bending Tests with Large Deflections,” *Exp. Mech.*, vol. 52, no. 7, pp. 679–692, 2012.
- [26] H. Tari, “On the parametric large deflection study of Euler-Bernoulli cantilever beams subjected to combined tip point loading,” *Int. J. Non. Linear. Mech.*, vol. 49, pp. 90–99, 2013.
- [27] A. Borboni and D. De Santis, “Large deflection of a non-linear, elastic, asymmetric Ludwick cantilever beam subjected to horizontal force, vertical force and bending torque at the free end,” *Meccanica*, vol. 49,

- no. 6, pp. 1327–1336, 2014.
- [28] F. Mujika, A. Arrese, I. Adarraga, and U. Oses, “New correction terms concerning three-point and four-point bending tests,” *Polym. Test.*, vol. 55, pp. 25–37, 2016.
- [29] S. S. Antman, *Nonlinear problems of elasticity*, vol. 107. 2005.
- [30] M. Batista, “Analytical treatment of equilibrium configurations of cantilever under terminal loads using Jacobi elliptical functions,” *Int. J. Solids Struct.*, vol. 51, no. 13, pp. 2308–2326, 2014.
- [31] Stratasys, “Vero.” [Online]. Available: <http://www.stratasys.com/es/materials/search/vero>. [Accessed: 29-Sep-2018].
- [32] 3Dnatives, “La impresión 3D PolyJet.” [Online]. Available: <https://www.3dnatives.com/es/la-impresion-3d-polyjet23072015/>. [Accessed: 29-Sep-2018].

9 ANEXOS

ANEXO A. PROPIEDADES DEL MATERIAL VEROBLUE

| TYPICAL PHYSICAL PROPERTIES | | | |
|-----------------------------|---------------------|---------------|-----------|
| MECHANICAL PROPERTIES | TEST METHOD | ENGLISH | METRIC |
| Color/Appearance | Visual | Pale Blue | Pale Blue |
| Tensile Strength | ASTM D638 | 7,975 psi | 55 MPa |
| Elongation at Break | ASTM D638 | 15% - 25% | 15% - 25% |
| Modulus of Elasticity | ASTM D638 | 362,500 psi | 2,500 MPa |
| Flexural Strength | ASTM D790 | 9,450 psi | 65 MPa |
| Flexural Modulus | ASTM D790 | 315,000 psi | 2,200 MPa |
| Izod Notched Impact | ASTM D256 | 0.47 ft-lb/in | 25 J/m |
| Shore D Hardness | - | 85 D | 85 D |
| Heat Deflection Temperature | ASTM D648 @ 264 psi | 118°F | 48°C |
| | @ 66 psi | 118°F | 48°C |

The information presented represents typical values intended for reference and comparison purposes only. It should not be used for design specifications or quality control purposes. End-use material performance can be impacted (+/-) by, but not limited to, part design, end-use conditions, test conditions, color etc. Actual values will vary with build conditions. Product specifications are subject to change without notice.

The performance characteristics of these materials may vary according to application, operating conditions, or end use. Each user is responsible for determining that the material is safe, lawful, and technically suitable for the intended application. Stratsys makes no warranties of any kind, express or implied, including, but not limited to, the warranties of merchantability, fitness for a particular use, or warranty against patent infringement.

ANEXO B. CÓDIGO EN MATLAB PARA CÁLCULO DE FUNCIONES ELÍPTICAS DE JACOBI Y GRÁFICAS DEL MODELO ANALÍTICO

Para el cálculo de las funciones elípticas de Jacobi y las gráficas del modelo analítico se crearon 2 ficheros con la extensión .m en el software MATLAB (Prueba_Jacobi_3.m/Calc_Hiper.m) y se utilizó un fichero de acceso público (elliptic12.m).

Prueba_Jacobi_3.m:

```
% Código para la solución de funciones
hiperbólicas de Jacobi
clc; close all; clear all;
%% Se cargan los datos desde un archivo de excel
previamente establecido en
% la misma carpeta de los códigos
l0=xlsread('datos para trabajar tesis final
v2','DESDE FILA 8','E8:E31');
alpha=xlsread('datos para trabajar tesis final
v2','DESDE FILA 8','K8:K31');
k0=xlsread('datos para trabajar tesis final
v2','DESDE FILA 8','W8:W31');
w=xlsread('datos para trabajar tesis final
v2','DESDE FILA 8','X8:X31');
k=xlsread('datos para trabajar tesis final
v2','DESDE FILA 8','AA8:AA31');
delta=xlsread('datos para trabajar tesis final
v2','DESDE FILA 8','J8:J31')*10^-3; % Deflexión
[m]
```

```

s=0:0.1:1; % Variación de s
%% Cálculo para cada uno de los s y para las 5
probetas
for i=1:length(k)
    for j=1:length(s)

[e_s(j,i),n_s(j,i),x_s(j,i),y_s(j,i),Z2(j,i),CN(j
,i),E(j,i),K(j,i)] =
Calc_Hiper(k(i),s(j),w(i),k0(i),l0(i),alpha(i),de
lta(i));
        end
end
[A1]=xlsread('Graficas EXP (1)', 'A1', 'A3:B33');
[A3]=xlsread('Graficas EXP (1)', 'A3', 'A3:B32');
[A4]=xlsread('Graficas EXP (1)', 'A4', 'A3:B41');
[A5]=xlsread('Graficas EXP (1)', 'A5', 'A3:B27');
[A6]=xlsread('Graficas EXP (1)', 'A6', 'A3:B29');
[A7]=xlsread('Graficas EXP (1)', 'A7', 'A3:B27');
[A8]=xlsread('Graficas EXP (1)', 'A8', 'A3:B17');
[A9]=xlsread('Graficas EXP (1)', 'A9', 'A3:B27');
[A10]=xlsread('Graficas EXP (1)', 'A10', 'A3:B29');
[A11]=xlsread('Graficas EXP (1)', 'A11', 'A3:B28');
[A12]=xlsread('Graficas EXP (1)', 'A12', 'A3:B23');
[B1]=xlsread('Graficas EXP (1)', 'B1', 'A3:B22');
[B3]=xlsread('Graficas EXP (1)', 'B3', 'A3:B23');
[B4]=xlsread('Graficas EXP (1)', 'B4', 'A3:B19');
[B5]=xlsread('Graficas EXP (1)', 'B5', 'A3:B22');
[B6]=xlsread('Graficas EXP (1)', 'B6', 'A3:B30');
[B7]=xlsread('Graficas EXP (1)', 'B7', 'A3:B22');
[B8]=xlsread('Graficas EXP (1)', 'B8', 'A3:B24');
[B9]=xlsread('Graficas EXP (1)', 'B9', 'A3:B24');
[B10]=xlsread('Graficas EXP (1)', 'B10', 'A3:B19');
[B11]=xlsread('Graficas EXP (1)', 'B11', 'A3:B20');
[B12]=xlsread('Graficas EXP (1)', 'B12', 'A3:B23');
    %% Conexión con excel para exportar los datos
% xlswrite('Tablas',tabla1,'Tabla 1'); %B3
% xlswrite('Tablas',tabla2,'Tabla 2'); %A8
% xlswrite('Tablas',tabla3,'Tabla 3'); %A1
% xlswrite('Tablas',tabla4,'Tabla 4'); %B4

```

```

% xlswrite('Tablas',tabla5,'Tabla 5'); %B1
% xlswrite('Tablas',tabla6,'Tabla 6'); %A4
% xlswrite('Tablas',tabla7,'Tabla 7'); %A11
% xlswrite('Tablas',tabla8,'Tabla 8'); %B8
% xlswrite('Tablas',tabla9,'Tabla 9'); %A3
% xlswrite('Tablas',tabla10,'Tabla 10'); %A9
% xlswrite('Tablas',tabla11,'Tabla 11'); %A7
% xlswrite('Tablas',tabla12,'Tabla 12'); %A5
% xlswrite('Tablas',tabla13,'Tabla 13'); %B6
% xlswrite('Tablas',tabla14,'Tabla 14'); %B7
% xlswrite('Tablas',tabla15,'Tabla 15'); %B9
% xlswrite('Tablas',tabla16,'Tabla 16'); %B10
% xlswrite('Tablas',tabla17,'Tabla 17'); %A6
% xlswrite('Tablas',tabla18,'Tabla 18'); %B11
% xlswrite('Tablas',tabla19,'Tabla 19'); %A2
% xlswrite('Tablas',tabla20,'Tabla 20'); %B5
% xlswrite('Tablas',tabla21,'Tabla 21'); %B12
% xlswrite('Tablas',tabla22,'Tabla 22'); %B2
% xlswrite('Tablas',tabla23,'Tabla 23'); %A10
% xlswrite('Tablas',tabla24,'Tabla 24'); %A12
%% Pasar x e y a mm para las gráficas
x_s=x_s*10^3;
y_s=y_s*10^3;
%% Gráfica de los resultados
%% Figura 1
% A8 A1 A3
% 2 3 9 10 17 24
figure(1)
plot(x_s(:,2),y_s(:,2),'-b')
hold on
plot(x_s(:,3),y_s(:,3),'-g')
plot(x_s(:,9),y_s(:,9),'-r')
plot(A8(:,1),A8(:,2),'ob')
plot(A1(:,1),A1(:,2),'og')
plot(A3(:,1),A3(:,2),'or')
xlabel('x_s [mm]')
ylabel('y_s [mm]')
title('Figura 1')
legend('A8','A1','A3','A8*','A1*','A3*')

```

```

print('Figura 1 con delta.pdf','-dpdf')

%% Figura 2
% A9 A6 A12
% 6 7 11 12 19 23
figure(2)
plot(x_s(:,10),y_s(:,10),'-k')
hold on
plot(x_s(:,17),y_s(:,17),'-m')
plot(x_s(:,24),y_s(:,24),'-c')
plot(A9(:,1),A9(:,2),'ok')
plot(A6(:,1),A6(:,2),'om')
plot(A12(:,1),A12(:,2),'oc')
xlabel('x_s [mm]')
ylabel('y_s [mm]')
title('Figura 2')
legend('A9','A6','A12','A9*','A6*','A12*')
print('Figura 2 con delta.pdf','-dpdf')

% Figura 3
% A4 A11 A7

figure(3)
plot(x_s(:,6),y_s(:,6),'-b')
hold on
plot(x_s(:,7),y_s(:,7),'-g')
plot(x_s(:,11),y_s(:,11),'-r')
plot(A4(:,1),A4(:,2),'ob')
plot(A11(:,1),A11(:,2),'og')
plot(A7(:,1),A7(:,2),'or')
xlabel('x_s [mm]')
ylabel('y_s [mm]')
title('Figura 3')
legend('A4','A11','A7','A4*','A11*','A7*')
print('Figura 3 con delta.pdf','-dpdf')

% Figura 4
% A5 A2 A10

```

```

figure(4)
plot(x_s(:,12),y_s(:,12),'-k')
hold on
plot(x_s(:,23),y_s(:,23),'-c')
plot(A5(:,1),A5(:,2),'ok')
plot(A10(:,1),A10(:,2),'oc')
xlabel('x_s [mm]')
ylabel('y_s [mm]')
title('Figura 4')
legend('A5','A10','A5*','A10*')
print('Figura 4 con delta.pdf','-dpdf')

% Figura 5
% B4 B8 B6
% 4 8 13 15 18 22
figure(5)
plot(x_s(:,4),y_s(:,4),'-b')
hold on
plot(x_s(:,8),y_s(:,8),'-g')
plot(x_s(:,13),y_s(:,13),'-r')
plot(B4(:,1),B4(:,2),'ob')
plot(B8(:,1),B8(:,2),'og')
plot(B6(:,1),B6(:,2),'or')
xlabel('x_s [mm]')
ylabel('y_s [mm]')
title('Figura 5')
legend('B4','B8','B6','B4*','B8*','B6*')
print('Figura 5 con delta.pdf','-dpdf')

% Figura 6
% B9 B11 B2
figure(6)
plot(x_s(:,15),y_s(:,15),'-k')
hold on
plot(x_s(:,18),y_s(:,18),'-m')
plot(B9(:,1),B9(:,2),'ok')
plot(B11(:,1),B11(:,2),'om')
xlabel('x_s [mm]')

```

```

ylabel('y_s [mm]')
title('Figura 6')
legend('B9', 'B11', 'B9*', 'B11*')
print('Figura 6 con delta.pdf', '-dpdf')
% B3 B1 B7
% 1 5 14 16 20 21
figure(7)
plot(x_s(:,1),y_s(:,1),'-b')
hold on
plot(x_s(:,5),y_s(:,5),'-g')
plot(x_s(:,14),y_s(:,14),'-r')
plot(B3(:,1),B3(:,2),'ob')
plot(B1(:,1),B1(:,2),'og')
plot(B7(:,1),B7(:,2),'or')
xlabel('x_s [mm]')
ylabel('y_s [mm]')
title('Figura 7')
legend('B3', 'B1', 'B7', 'B3*', 'B1*', 'B7*')
print('Figura 4 con delta.pdf', '-dpdf')

% Figura 8
% B10 B5 B12
figure(8)
plot(x_s(:,16),y_s(:,16),'-k')
hold on
plot(x_s(:,20),y_s(:,20),'-m')
plot(x_s(:,21),y_s(:,21),'-c')
plot(B10(:,1),B10(:,2),'ok')
plot(B5(:,1),B5(:,2),'om')
plot(B12(:,1),B12(:,2),'oc')
xlabel('x_s [mm]')
ylabel('y_s [mm]')
title('Figura 8')
legend('B10', 'B5', 'B12', 'B10*', 'B5*', 'B12*')
print('Figura 8 con delta.pdf', '-dpdf')

```

Calc_Hiper.m:

```
function [e_s,n_s,x_s,y_s,Z2,CN2,E,K] =  
Calc_Hiper(k,s,w,k0,l0,alpha,delta)  
%% Cálculo de las integrales elípticas de primer  
y segundo orden  
[E,K]=ellipke(k);  
[SNC,CNC,DNC]=ellipj(sin(alpha/2)/k,k);  
% Cálculo de C  
if k0<0  
    C=1/SNC;  
else  
    C=2*K-1/SNC;  
end  
%% Cálculo de las funciones Z de jacobi  
[F1,E1,Z1]=elliptic12(w+K,k);  
[F2,E2,Z2]=elliptic12(w.*s+K,k);  
%% Cálculo de las funciones SN, DN, CN de Jacobi  
[SN1,CN1,DN1]=ellipj(w+K,k);  
[SN2,CN2,DN2]=ellipj(w.*s+K,k);  
%% Solución para e y n  
e_s=((2*E./K)-1) .* (1-s) + (2./w) .* (Z1-Z2);  
n_s=(-2.*k./w)*(CN1-CN2);  
%% Solución para x e y  
x_s=l0.*(e_s*cos(alpha)+n_s*sin(alpha));  
y_s=l0.*(-e_s*sin(alpha)+n_s*cos(alpha))-delta;  
end
```

elliptic12.m:

```
function [F,E,Z] = elliptic12(u,m,tol)
% ELLIPTIC12 evaluates the value of the
% Incomplete Elliptic Integrals
% of the First, Second Kind and Jacobi's Zeta
% Function.
%
%   [F,E,Z] = ELLIPTIC12(U,M,TOL) where U is a
%   phase in radians, 0<M<1 is
%   the module and TOL is the tolerance
%   (optional). Default value for
%   the tolerance is eps = 2.220e-16.
%
%   ELLIPTIC12 uses the method of the Arithmetic-
%   Geometric Mean
%   and Descending Landen Transformation
%   described in [1] Ch. 17.6,
%   to determine the value of the Incomplete
%   Elliptic Integrals
%   of the First, Second Kind and Jacobi's Zeta
%   Function [1], [2].
%
%       F(phi,m) = int(1/sqrt(1-m*sin(t)^2),
%   t=0..phi);
%       E(phi,m) = int(sqrt(1-m*sin(t)^2),
%   t=0..phi);
%       Z(phi,m) = E(u,m) - E(m)/K(m)*F(phi,m).
%
%   Tables generating code ([1], pp. 613-621):
%       [phi,alpha] = meshgrid(0:5:90, 0:2:90);
%   modulus and phase in degrees
%       [F,E,Z] = elliptic12(pi/180*phi,
%   sin(pi/180*alpha).^2); % values of integrals
%
%   See also ELLIPKE, ELLIPJ, ELLIPTIC12I,
%   ELLIPTIC3, THETA, AGM.
%
%   References:
```

```

% [1] M. Abramowitz and I.A. Stegun, "Handbook
of Mathematical Functions",
%   Dover Publications", 1965, Ch. 17.1 -
17.6 (by L.M. Milne-Thomson).
% [2] D. F. Lawden, "Elliptic Functions and
Applications"
%   Springer-Verlag, vol. 80, 1989

% GNU GENERAL PUBLIC LICENSE Version 2, June 1991
% http://www.gnu.org/licenses/gpl.html
% Everyone is permitted to copy and distribute
verbatim copies of this
% script under terms and conditions of GNU
GENERAL PUBLIC LICENSE.
%
% Copyright (C) 2007 by Moiseev Igor. All rights
reserved.
% 34106, SISSA, via Beirut n. 2-4, Trieste,
Italy
% For support, please reply to
%   moiseev[at]sissa.it,
moiseev.igor[at]gmail.com
%   Moiseev Igor,
%   34106, SISSA, via Beirut n. 2-4, Trieste,
Italy
%
% The code is optimized for ordered inputs
produced by the functions
% meshgrid, ndgrid. To obtain maximum performace
(up to 30%) for singleton,
% 1-dimensional and random arrays remark call of
the function unique(.)
% and edit further code.

if nargin<3, tol = eps; end
if nargin<2, error('Not enough input
arguments.');
```

```

if ~isreal(u) || ~isreal(m)
    error('Input arguments must be real. Use
ELLIPTIC12i for complex arguments.');
```

```

end

if length(m)==1, m = m(ones(size(u))); end
if length(u)==1, u = u(ones(size(m))); end
if ~isequal(size(m),size(u)), error('U and M must
be the same size.');
```

```

end

F = zeros(size(u));
E = F;
Z = E;
m = m(:).';    % make a row vector
u = u(:).';

if any(m < 0) || any(m > 1), error('M must be in
the range 0 <= M <= 1.');
```

```

end

% check whether we've been asked to evaluate the
integrals for values
% smaller than eps = 2.220446049250313e-16, if so
we suppose it equal zero
m(m<eps) = 0;

I = uint32( find(m ~= 1 & m ~= 0) );
if ~isempty(I)
    [mu,J,K] = unique(m(I));    % extracts unique
values from m
    K = uint32(K);
    mumax = length(mu);
    signU = sign(u(I));

    % pre-allocate space and augment if needed
    chunk = 7;
    a = zeros(chunk,mumax);
    c = a;

```

```

b = a;
a(1,:) = ones(1,mumax);
c(1,:) = sqrt(mu);
b(1,:) = sqrt(1-mu);
n = uint32( zeros(1,mumax) );
i = 1;
while any(abs(c(i,:)) > tol)
% Arithmetic-Geometric Mean of A, B and C
    i = i + 1;
    if i > size(a,1)
        a = [a; zeros(2,mumax)];
        b = [b; zeros(2,mumax)];
        c = [c; zeros(2,mumax)];
    end
    a(i,:) = 0.5 * (a(i-1,:) + b(i-1,:));
    b(i,:) = sqrt(a(i-1,:) .* b(i-1,:));
    c(i,:) = 0.5 * (a(i-1,:) - b(i-1,:));
    in = uint32( find((abs(c(i,:)) <= tol) &
(abs(c(i-1,:)) > tol)) );
    if ~isempty(in)
        [mi,ni] = size(in);
        n(in) = ones(mi,ni)*(i-1);
    end
end

end

mmax = length(I);
mn = double(max(n));
phin = zeros(1,mmax);    C = zeros(1,mmax);
Cp = C;  e = uint32(C);  phin(:) =
signU.*u(I);
i = 0;  c2 = c.^2;
while i < mn
% Descending Landen Transformation
    i = i + 1;
    in = uint32(find(n(K) > i));
    if ~isempty(in)
        phin(in) =
atan(b(i,K(in))./a(i,K(in)).*tan(phin(in))) + ...

```

```

                                pi.*ceil(phin(in)/pi - 0.5) +
phin(in);
                                e(in) = 2.^(i-1) ;
                                C(in) = C(in) +
double(e(in(1)))*c2(i,K(in));
                                Cp(in)= Cp(in) +
c(i+1,K(in)).*sin(phin(in));
                                end
                                end

                                Ff = phin ./ (a(mn,K).*double(e)*2);
                                F(I) = Ff.*signU;
% Incomplete Ell. Int. of the First Kind
                                Z(I) = Cp.*signU;
% Jacobi Zeta Function
                                E(I) = (Cp + (1 - 1/2*C) .* Ff).*signU;
% Incomplete Ell. Int. of the Second Kind
                                end

% Special cases: m == {0, 1}
m0 = find(m == 0);
if ~isempty(m0), F(m0) = u(m0); E(m0) = u(m0);
Z(m0) = 0; end

m1 = find(m == 1);
um1 = abs(u(m1));
if ~isempty(m1),
    N = floor( (um1+pi/2)/pi );
    M = find(um1 < pi/2);

    F(m1(M)) = log(tan(pi/4 + u(m1(M))/2));
    F(m1(um1 >= pi/2)) = Inf.*sign(u(m1(um1 >=
pi/2)));

    E(m1) = ((-1).^N .* sin(um1) +
2*N).*sign(u(m1));

```

```
Z(m1) = (-1).^N .* sin(u(m1));  
end
```

