



**LA REGULACIÓN METACOGNITIVA EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS  
DE ORDEN MULTIPLICATIVO TIPOLOGIA VERGNAUD**

**DEYANIRTH DEL ROSARIO IBARRA GUEVARA  
PEDRO NEL JOJOA CHAVES**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES  
FACULTAD ESTUDIOS SOCIALES Y EMPRESARIALES  
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS  
MANIZALES**

**2020**

**LA REGULACIÓN METACOGNITIVA EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS  
DE ORDEN MULTIPLICATIVO TIPOLOGIA VERGNAUD**

**Autor(es)**

**DEYANIRTH DEL ROSARIO IBARRA GUEVARA**

**PEDRO NEL JOJOA CHAVES**

**Proyecto de grado para optar al título de Magister en Enseñanzas de las Ciencias**

**Tutor**

**Mg. JUAN PABLO MARÍN GRISALES**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES  
FACULTAD ESTUDIOS SOCIALES Y EMPRESARIALES  
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS  
MANIZALES**

**2020**

## **DEDICATORIA**

A nuestros dos hijos, por ser nuestra fuente de motivación e inspiración, quienes supieron pacientemente cedernos el tiempo de su niñez y su comprensión para alcanzar una meta más en nuestras vidas.

A nuestra pequeña Anthonella quien con sus preguntas curiosas nos impulsó en la búsqueda del conocimiento.

A nuestro hijo mayor Matías, quien con su buen humor hizo ligeros nuestros días en los momentos más difíciles.

## **AGRADECIMIENTOS**

A Dios por permitirnos alcanzar un logro más en nuestras vidas, otorgándonos fortaleza, sabiduría y apoyo incondicional en todo momento.

A nuestros maestros de la Universidad Autónoma de Manizales que en convenio con EDUPOL nos dio la oportunidad de enriquecernos en conocimiento y en experiencias gratificantes para nuestra formación, aportando a nuestro crecimiento personal y profesional.

A nuestro asesor, el Mgr. Juan Pablo Marín Grisales quien con su conocimiento, empatía, organización y experiencia supo orientarnos día a día en la construcción de esta investigación.

A los estudiantes del grado 7° de la institución Educativa San Ignacio que formaron parte fundamental de este proceso investigativo, demostrando una participación activa y compromiso, aun en estos tiempos difíciles.

## **RESUMEN**

Estas acciones se encuentran dentro del proceso de resolución de problemas multiplicativos mediado por la regulación metacognitiva, para facilitar en el estudiante la reconstrucción de su saber teórico matemático, que le permita potencializar sus habilidades cuando se enfrenta a la solución de las estructuras conceptuales de cada categoría de problemas multiplicativos tipología Vergnaud y que va alineando en su pensamiento. De esta manera el estudiante no extrapola una situación a otra a menos que él lo considere útil para resolver el problema, en este sentido no es posible pensar en la formación de conceptos de forma mecánica, sino de la adaptación de estrategias de acuerdo a las necesidades metacognitivas del estudiante.

Por lo tanto, se evidencia la necesidad de desarrollar un proyecto de investigación que intervenga las dificultades de los estudiantes al enfrentar problemas de estructura multiplicativa tipo Vergnaud utilizando elementos de las estrategias propias de la regulación metacognitiva. Ya que los estudiantes necesitan asumir un rol diferente en la actividad matemática, menos algorítmico, mecánico y memorístico, un rol que lo lleve a procesos más consientes en cuanto a la solución de problemas que le permita planificar, validar, articular el contexto y evaluar su aprendizaje desde el contexto escolar y social.

Palabras claves: Modelos didácticos, conocimiento didáctico del contenido

## **ABSTRACT**

These actions are within the process of solving multiplicative problems mediated by metacognitive regulation, to facilitate in the student the reconstruction of their mathematical theoretical knowledge, which allows them to potentiate their skills when faced with the solution of the conceptual structures of each category of multiplicative problems Vergnaud typology and that he is aligning in his thought. In this way, the student does not extrapolate one situation to another unless he considers it useful to solve the problem, in this sense it is not possible to think about the formation of concepts in a mechanical way, but about the adaptation of strategies according to the needs metacognitive of the student.

Therefore, there is evidence of the need to develop a research project that intervenes the difficulties of the students when facing problems of multiplicative structure type Vergnaud using elements of the strategies of metacognitive regulation. Since students need to assume a different role in mathematical activity, less algorithmic, mechanical and memory, a role that leads them to more aware processes in terms of problem solving that allows them to plan, validate, articulate the context and evaluate their learning from the school and social context.

**Keywords:** Didactic models, didactic content knowledge

## TABLA DE CONTENIDO

1	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN.....	15
1.1	DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA .....	15
1.2	PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN .....	17
2	JUSTIFICACIÓN.....	18
3	OBJETIVOS .....	20
3.1	OBJETIVO GENERAL .....	20
3.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	20
4	ANTECEDENTES Y MARCO CONCEPTUAL .....	21
4.1	ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN .....	21
4.1.1	Antecedentes Internacionales .....	21
4.1.2	Antecedentes Nacionales.....	24
4.2	MARCO TEÓRICO.....	26
4.2.1	Procesos De Regulación (o control) Metacognitivo.....	26
4.2.2	Resolución De Problemas .....	32
4.2.3	Estructura Multiplicativa De Problemas .....	34
4.2.4	Problemas De Estructura Multiplicativa Tipo Vergnaud .....	36
4.2.5	Isomorfismo De Medida.....	36
4.2.6	Comparación Multiplicativa Ó De Único Espacio De Medidas.....	37
4.2.7	Producto De Medidas .....	38
4.2.8	Estrategias Didácticas De Resolución De Problemas Basadas En La Metacognición.....	39
5	METODOLOGÍA .....	41
5.1	ENFOQUE DE INVESTIGACIÓN .....	41
5.2	DESCRIPCIÓN DEL CONTEXTO .....	44
5.3	UNIDAD DE TRABAJO.....	44
5.4	DISEÑO METODOLÓGICO .....	45
5.5	CONSIDERACIONES ÉTICAS.....	47
5.6	UNIDAD DE ANÁLISIS.....	48
5.6.1	Procesos De Regulación Metacognitiva.....	49
5.6.2	Elementos De Cada Estrategia .....	50

5.6.3	Estructura Multiplicativa Problemas Tipo Vergnaud.....	54
5.6.4	Categoría Resolución De Problemas .....	56
5.6.5	Codificación .....	58
5.6.6	Técnicas Y Fuentes De Recolección De La Información .....	59
5.6.6.1	Cuestionario de ideas previas (Exploración).....	59
5.6.6.2	Cuestionario de práctica guiada .....	59
5.6.6.3	Cuestionario de evaluación final .....	60
5.7	FASES DEL PROYECTO .....	60
5.7.1	Fase 1- Ideas Previas (Exploración).....	60
5.7.2	Fase 2- Modelado Metacognitivo.....	62
5.7.3	Fase 3- Práctica Guiada Y Autorregulación.....	64
5.7.4	Fase 4- Evaluación Final (EF).....	68
6	ANÁLISIS DE DATOS .....	70
6.1	ANÁLISIS FASE DE EXPLORACIÓN (FE)-IDEAS PREVIAS (IP) .....	70
6.1.1	Análisis Procesos De Regulación Metacognitiva.....	70
6.1.2	Análisis De Los Procesos De Regulación Metacognitiva Frente A La Estructura Multiplicativa De Problemas Tipología Vergnaud. ....	71
6.1.3	Casos De Evidencia Frente A La Categoría De Problema Multiplicativo Con Mayor Dificultad De Los Procesos De Regulación Metacognitiva. ....	75
6.1.4	Análisis De Los Niveles De Resolución De Problemas En Cada Estructura Multiplicativa De Problemas Tipología Vergnaud. ....	79
6.1.5	Relación De Los Procesos De Regulación Metacognitiva Y Porcentaje De Los Niveles De Resolución Por Cada Estructura Multiplicativa De Tipología Vergnaud .....	85
6.2	ANÁLISIS FASE MODELADO METACOGNITIVO (MM) Y PRÁCTICA GUIADA (PG) .....	88
6.2.1	Análisis Proceso Regulación Metacognitiva (PRM).....	88
6.2.2	Análisis De Evolución En Procesos De Regulación Metacognitiva Entre Fase De Exploración Y Práctica Guiada.....	90
6.2.3	Análisis De Evolución De Los Procesos De Regulación Metacognitiva Frente A La Estructura Multiplicativa De Problemas Tipología Vergnaud Entre Exploración Y Práctica Guiada. ....	92

6.2.4	Casos De Evidencia Frente A La Categoría De Problema Multiplicativo Que Logro Mayor Evolución En Los Proceso De Regulación Metacognitiva Durante La Práctica Guiada. ....	94
6.2.5	Análisis De Evolución De Los Niveles De Resolución De Problemas En Cada Estructura De Problema Multiplicativo Tipología Vergnaud-Exploración Y Práctica Guiada.	99
6.2.6	Análisis Evolución De Los Procesos De Regulación Metacognitiva Y Porcentaje De Los Niveles De Resolución De Problemas Multiplicativos Tipología Vergnaud-Exploración Y Práctica Guiada. ....	105
6.2.7	Análisis Fase De Evaluación Final Y Comparación Con Fase De Exploración Y Evaluación Final. ....	109
6.2.8	Análisis PRM Fases De Exploración-Práctica Guiada-Evaluación Final Y Evolución De Los Mismos. ....	123
6.3	ANÁLISIS COMPARATIVO Y EVOLUCIÓN DE LOS PROCESOS DE REGULACIÓN METACOGNITIVA Y PORCENTAJE DE LOS NIVELES DE RESOLUCIÓN POR CADA CATEGORÍA DE PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS TIPOLOGÍA VERGNAUD DURANTE EXPLORACIÓN Y EVALUACIÓN FINAL. ....	140
7	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....	146
7.1	CONCLUSIONES .....	146
7.2	RECOMENDACIONES .....	148
8	REFERENCIAS .....	150

## LISTA DE TABLAS

Tabla 1 Estructura general de problemas de isomorfismo de medidas .....	37
Tabla 2 Estructura general problemas comparación multiplicativa .....	37
Tabla 3 Estructura general de problemas producto de medidas .....	38
Tabla 4 Clasificación de los problemas de estructura multiplicativa tipología Vergnaud	39
Tabla 5 Categoría y subcategorías de análisis .....	49
Tabla 6. Elementos de cada estrategia, fase 1 de exploración.....	50
Tabla 7. Elementos de cada estrategia, fase 3-práctica guiada y fase 4-evaluación final .	52
Tabla 8 Niveles de resolución de problemas .....	57
Tabla 9 Codificación de unidad de análisis .....	58
Tabla 10 Caracterización Niveles de resolución de problemas 1 fase-Exploración.....	79
Tabla 11 Caracterización Niveles de resolución de problemas 3 fase-Práctica guiada...	100
Tabla 12 Evolución procesos de regulación metacognitiva y relación con niveles de resolución de problema multiplicativo, fase 1-exploración y fase 3-práctica guiada .....	106
Tabla 13 Evolución procesos de regulación metacognitiva por categoría de problemas multiplicativos, fase 1-exploración y fase 4-evaluación final .....	114
Tabla 14 Caracterización Niveles de resolución de problemas 4 fase-Evaluación final.	128
Tabla 15 Evolución procesos de regulación metacognitiva y relación con niveles de resolución por categoría de problemas multiplicativos, fase 1-exploración y fase 4-evaluación final.....	140

## INDICE DE FIGURAS

Figura 1 Caso problema IMDM –fase 1 exploración –E4.....	73
Figura 2 Caso problema PMD-fase 1 exploración-E6.....	73
Figura 3 Caso problema PMM, fase 1-exploración-E2.....	75
Figura 4 Caso problema PMD, fase 1 exploración-E5.....	76
Figura 5 Caso problema PMM, fase 1 exploración- E5.....	77
Figura 6 Caso problema IMDP, fase 1 exploración- E1.....	83
Figura 7 Caso problema PMM, fase 1 exploración- E1.....	84
Figura 8 Caso problema PMM, fase 3 practica guiada- E4.....	95
Figura 9 Caso problema PMM, fase 3 practica guiada- E4.....	96
Figura 10 Caso problema PMD, fase 3 –práctica guiada- E6.....	97
Figura 11 Caso problema PMM, fase 3 –práctica guiada- E5.....	104
Figura 12 Caso problema PMD, fase 3 –práctica guiada- E1.....	108
Figura 13 Caso problema CMM, fase 4 –evaluación final – E6.....	113
Figura 14 Caso problema PMD, fase 4 –evaluación final – E4.....	115
Figura 15 Caso problema PMM, fase 4 –evaluación final – E5.....	116
Figura 16 Caso problema PMD, fase 4 –evaluación final – E4.....	118
Figura 17 Caso problema CMM, fase 4 –evaluación final – E6.....	120
Figura 18 Caso problema IMDP, fase 4 –evaluación final – E5.....	131
Figura 19 Caso problema CMD2, fase 4 –evaluación final – E4.....	134
Figura 20 Figura 22 Caso problema PMM, fase 4 –evaluación final – E1.....	137

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 Porcentajes de procesos de regulación metacognitiva que implementan estudiantes al solucionar problemas de orden multiplicativo-F1- exploración (IP).....	70
Gráfico 2 Porcentajes procesos de regulación metacognitiva en cada estructura de problemas de orden multiplicativo- F1- exploración (IP) .....	72
Gráfico 3 Porcentajes de niveles de resolución de problemas de estructura multiplicativa tipo Vergnaud –F1-exploración (IP).....	81
Gráfico 4 Porcentaje proceso de regulación metacognitiva y porcentaje del menor nivel de resolución de problemas multiplicativos-F1-exploración (IP). .....	86
Gráfico 5 Porcentajes de procesos de regulación metacognitiva que implementan estudiantes al solucionar problemas de orden multiplicativo- F3-práctica guiada.....	89
Gráfico 6 Porcentajes procesos de regulación metacognitiva en cada categoría de problemas de orden multiplicativo- F3- práctica guiada (PG) .....	92
Gráfico 7 Porcentaje de los procesos de regulación metacognitiva que implementan los estudiantes al solucionar problemas de estructura multiplicativa tipología Vergnaud y porcentajes sobresalientes niveles de resolución de problemas. -F3-práctica guiada (PG). .....	106
Gráfico 8 Porcentajes de procesos de regulación metacognitiva que implementan estudiantes al solucionar problemas de orden multiplicativo-F4-Evaluación final.....	110
Gráfico 9 Porcentajes procesos de regulación metacognitiva en cada categoría de problemas de orden multiplicativo-F4-Evaluación final .....	112
Gráfico 10 Porcentajes de procesos de regulación metacognitiva que implementan estudiantes al solucionar problemas de orden multiplicativo durante fase de exploración-práctica guiada-evaluación final. ....	123
Gráfico 11 Porcentajes de evolución procesos de regulación metacognitiva que implementan estudiantes al solucionar problemas de orden multiplicativo durante fase de exploración-práctica guiada-evaluación final.....	123

Gráfico 12 Porcentajes de niveles de resolución de problemas de estructura multiplicativa tipo Vergnaud —F4-evaluación Final. ....	129
Gráfico 13 Porcentajes de procesos de regulación metacognitiva que implementan los estudiantes al solucionar problemas de estructura multiplicativa tipología Vergnaud y porcentajes sobresalientes niveles de resolución de problemas.-F4-Evaluación final (EF) .....	136
Gráfico 14 Relación proceso de regulación metacognitiva y porcentaje de niveles de resolución de isomorfismo de medidas en exploración y evaluación final (EF).....	141
Gráfico 15 Relación proceso de regulación metacognitiva y porcentaje de niveles de resolución de comparación multiplicativa en exploración (IP) y evaluación final (EF) .	142
Gráfico 16 Relación proceso de regulación metacognitiva y porcentaje de niveles de resolución de producto de medidas en exploración (IP) y evaluación final (EF).....	143

## LISTA DE ANEXOS

Anexo 1 Carta de consentimiento informado para proyectos de investigación educativa .....	157
Anexo 2 instrumento inicial cuestionario aplicado a estudiantes, fase 1- exploración. ..	158
Anexo 3 Instrumento listo de cotejo tratada por docente, fase 1- fase inicial-exploración .....	161
Anexo 4 Instrumento modelado metacognitivo, fase 2- problema producto de medidas por multiplicación PMM .....	164
Anexo 5 Instrumento cuestionario aplicado a estudiantes, fase 3- práctica guiada .....	177
Anexo 6 Instrumento listo de cotejo tratada por docente, fase 3- práctica guiada.....	184
Anexo 7 Instrumento lúdico “el vendedor”, fase 3- práctica guiada.....	189
Anexo 8 Instrumento cuestionario aplicado a estudiantes, fase 4- evaluación final. ....	191
Anexo 9 Instrumento listo de cotejo tratada por docente, fase 4- evaluación final.....	193

# **1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN**

## **1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA**

Desde el ámbito escolar el aprendizaje de las matemáticas usualmente presenta dificultades relacionadas con el manejo de heurísticas y estrategias inadecuadas en la resolución de problemas. Ya que los estudiantes requieren combinar técnicas y saberes provenientes de diferentes sectores y diferentes áreas del conocimiento (Martínez, 2008).

Teniendo en cuenta lo anterior, se logró evidenciar que los estudiantes de grado séptimo de la institución Educativa San Ignacio también se enfrentan a este tipo de dificultades, especialmente cuando tienen que solucionar problemas de orden multiplicativo en el conjunto de los números enteros positivos ya que no identifican la estructura del problema multiplicativo, es decir, si es una operación cartesiana de dos espacios de medidas con respecto a otro espacio de medida, desconocen la estructura operacional del problema para dividirlo en componentes más básicos y establecer relaciones entre las unidades de medida y las magnitudes.

Este tipo de dificultades está relacionado con la poca planificación, monitoreo y evaluación de sus razonamientos que además conllevan a inconsistencias en la organización de los datos, el diseño del plan y la utilización incorrecta de algoritmos. Provocando procedimientos incorrectos y limitaciones para asociar el problema con el contexto. Es decir, los estudiantes no organizan ni codifican el plan o procedimiento a seguir, no aplican ninguna estrategia general en la solución del problema, no tienen claro si los datos del enunciado del problema son suficientes y se les dificulta simplificar el problema hasta concretarlo y tener la posibilidad de abordarlo. Por otro lado, tampoco realizan representaciones gráficas o tabulaciones del procedimiento o datos del problema y en ningún momento realizan acciones para controlar, revisar la validez del proceso de resolución y/o de los datos obtenidos que le permita detectar posibles errores.

En este sentido Buitrago & García (2012) (como se citó en Gómez y Castillo, 2009) plantean que:

*En el proceso de resolución de problemas se genera el escenario propicio para inspeccionar los procesos cognitivos en la resolución de problemas, ya que en este momento el estudiante desarrolla procesos de regulación metacognitiva; bajo esta circunstancia, el estudiante debe atravesar etapas: antes, durante y después, para aproximarse a resolver un problema. Durante esas etapas se presenta la posibilidad de formular y replantear las estrategias utilizadas para luego validarlas y así promover la eficacia metacognitiva, más que la misma capacidad intelectual. (p.57)*

Estas acciones se encuentran dentro del proceso de resolución de problemas multiplicativos mediado por la regulación metacognitiva, para facilitar en el estudiante la reconstrucción de su saber teórico matemático, que le permita potencializar sus habilidades cuando se enfrenta a la solución de las estructuras conceptuales de cada categoría de problemas multiplicativos tipología Vergnaud y que va alineando en su pensamiento. De esta manera el estudiante no extrapola una situación a otra a menos que él lo considere útil para resolver el problema, en este sentido no es posible pensar en la formación de conceptos de forma mecánica, sino de la adaptación de estrategias de acuerdo a las necesidades metacognitivas del estudiante.

Por lo tanto, se evidencia la necesidad de desarrollar un proyecto de investigación que intervenga las dificultades de los estudiantes al enfrentar problemas de estructura multiplicativa tipo Vergnaud utilizando elementos de las estrategias propias de la regulación metacognitiva. Ya que los estudiantes necesitan asumir un rol diferente en la actividad matemática, menos algorítmico, mecánico y memorístico, un rol que lo lleve a procesos más consientes en cuanto a la solución de problemas que le permita planificar, validar, articular el contexto y evaluar su aprendizaje desde el contexto escolar y social.

## **1.2 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN**

¿Cuál es la incidencia de la regulación metacognitiva en la resolución de estructuras multiplicativas de los problemas tipo Vergnaud en los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa San Ignacio de Buesaco-Nariño?

## 2 JUSTIFICACIÓN

Este proyecto permitirá que los estudiantes organicen, planifiquen y validen la información, de los procesos de regulación metacognitiva, en situaciones de estructura multiplicativa tipo Vergnaud de tal manera que no tengan que basarse específicamente en la metodología propuesta por el docente. En relación con esta implicación se espera que el educando adquiera un discernimiento singular desde sus capacidades metacognitivas que lo conlleven a un aprendizaje en profundidad, sin seguir un mismo “formato” dando oportunidad a nuevas estrategias y alternativas de solución. En este sentido promover el desarrollo de estos procesos metacognitivos, incidirá en alcanzar altos niveles de resolución de problemas multiplicativos tipo Vergnaud.

Desde esta perspectiva se pretende promover dentro del aula de clases el fortalecimiento de habilidades y procesos de regulación metacognitiva que lleven al estudiante a un pensamiento más reflexivo y crítico, permitiéndole ser autónomo, constructor y regulador de su propio aprendizaje. “Los estudiantes, aunque pueden interpretar en forma adecuada sus experiencias cotidianas, no son conscientes necesariamente de los procesos metacognitivos que realizan. La ausencia de este tipo de consciencia les impide comprender que sus ideas pueden ser cuestionadas y, a su vez, favorece la creación de concepciones alternativas” (Tamayo, 2006, p.276).

Por otro lado, permitirles a los estudiantes el reconocimiento de otras estrategias de resolución de problemas en el campo de las estructuras multiplicativas, que apreciadas desde Schoenfeld (1992) partirían del dominio del conocimiento de las diversas categorías y subcategorías de problemas tipo Vergnaud (1997); Isomorfismo de medidas, espacio de medidas y producto de medidas, usando estrategias cognoscitivas que incluyan métodos heurísticos como descomponer el problema y utilizar gráficos o diagramas; aplicar estrategias metacognoscitivas de planeación, control y evaluación que les posibilite seleccionar un camino y saber cuándo requiere cambiarlo y considerar los

sistemas de creencias basados en sus ideas previas y contexto con respecto a cómo resolver el problema.

De esta manera se pretende abordar diversas situaciones para avanzar en estos procesos, y que los educandos reflexionen críticamente sobre sus propias prácticas y detecten de forma autónoma sus errores y debilidades. Por lo tanto, se hace necesario incentivar a un pensamiento más formal dotado de significado para explorar diferentes alternativas de solución y retomar algunos significados propios de la aritmética.

Es de resaltar que una de las principales motivaciones en este proyecto es lograr evidenciar de qué manera inciden los procesos de regulación metacognitiva al momento de resolver problemas de estructura multiplicativa y la forma como estos favorecen la evolución conceptual de las estructuras multiplicativas tipología Vergnaud.

### **3 OBJETIVOS**

#### **3.1 OBJETIVO GENERAL**

Describir cuál es la incidencia de los procesos de regulación metacognitiva en la resolución de problema de estructura multiplicativa tipo Vergnaud en los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa San Ignacio de Buesaco-Nariño.

#### **3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

1. Identificar las dificultades en los procesos de regulación metacognitiva en la resolución de problemas de estructura multiplicativa tipo Vergnaud.
2. Interpretar la evolución conceptual de los procesos de regulación metacognitiva en las diversas estructuras de problemas multiplicativos tipo Vergnaud.
3. Caracterizar los niveles de resolución de problemas tipo Vergnaud y su relación con los procesos de regulación metacognitiva posterior a la intervención didáctica.

## 4 ANTECEDENTES Y MARCO CONCEPTUAL

### 4.1 ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

Determinar los antecedentes teóricos de la investigación acerca de la incidencia de los procesos de regulación metacognitiva en la solución de problemas multiplicativos, requiere enmarcar trabajos relacionados con estrategias que susciten los procesos de planeación, monitoreo y evaluación y la relación estrecha de estos con los desempeños que los estudiantes realizan frente a los problemas multiplicativos con números enteros, enfatizando en los de tipo Vergnaud, coligados a nivel de básica secundaria (grado séptimo).

#### 4.1.1 Antecedentes Internacionales

Sobre la base de esta consideración se encontró en el ámbito internacional una tesis de Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Catamarca-nivel doctorado titulada “*La metacognición en el aprendizaje de la matemática*”, en la que Curotto (2010) concibe un análisis a priori de estrategias que permitan desarrollar la metacognición en los estudiantes durante las clases de matemática, estrategias que posibiliten en el alumno el control de sus concepciones epistemológicas, en el de la propia comprensión, formulando preguntas, resolviendo problemas, regulando y evaluando su propio aprendizaje. En esta investigación se plantearon, tareas de enseñanza, en las que el profesor permitió que el educando adquiriera una idea más acertada de su actuación metacognitiva e identificar las herramientas para resolver una situación problema.

La línea relacional con el presente proyecto se enfoca en la exploración de estrategias metacognitivas por parte de los estudiantes que permitan favorecer la formulación de nuevos caminos ó procedimientos para enfrentar la resolución de un problema de tipo multiplicativo, estableciendo sus propios interrogantes y cuestionamientos frente a los procesos que usan.

En consideración el artículo científico “*Metacognición un camino para aprender a aprender*” de la Universidad Austral de Chile, Osses y Jaramillo (2008) abordan el tema de la metacognición como una alternativa viable para formar estudiantes autónomos sobre la base de una educación que potencia la conciencia sobre los propios procesos cognitivos y la autorregulación de los mismos por parte de los alumnos, de manera tal, que les conduzca a un “aprender a aprender”, es decir, a auto dirigir su aprendizaje y transferirlo a otros ámbitos de su vida, pero que parte primero del proceso metacognitivo del docente evidenciado mediante prácticas pedagógicas adecuadas en el aula de clase.

La relevancia pedagógica de este artículo para la presente investigación se encamina en el hecho de que el conocimiento metacognitivo juega un papel importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje, permitiendo visualizar mejor la metodología que se llevará a cabo cuando se realice el modelado y la práctica guiada posibilitando por una parte la apropiación teórica acerca de la metacognición por parte del docente y sus múltiples miradas y por otra parte se visibilice la manera de orientar la enseñanza de elementos de las estrategias metacognitivas a los estudiantes.

Con respecto a la solución de problemas multiplicativos, la Universidad Pedagógica Nacional de México en su tesis de pregrado “Problemas de estructura multiplicativa: Una propuesta psicopedagógica con estudiantes de 5 grado de primaria de una escuela pública del distrito federal” Ríos (2010) identifica las dificultades que presentan los niños en el aprendizaje de los problemas de estructura multiplicativa, específicamente en relación al modelo matemático cardinal, en la idea de combinatoria. En este sentido Sanz (1994) menciona que cuando el problema carece de palabras claves los estudiantes no saben qué operación utilizar, por lo que se vuelve necesario que estos comprendan los problemas y las ideas matemáticas, así como el contexto de resolución de problemas; en lo que respecta a la idea de combinatoria en la resolución de estos problemas, pone de relevancia la importancia de retomar los conocimientos previos de los alumnos a través del trabajo con pares de estudiantes y con la ayuda de algunas estrategias aplicadas con la psicología educativa.

En referencia a la actual investigación se tendrá en cuenta los conocimientos previos y la estructura de cada uno de los tipos de problema de tipología Vergnaud tratados durante la intervención del modelado metacognitivo, resaltando palabras claves durante los cuestionarios que permiten al docente caracterizar los niveles de resolución del problema que presenta el estudiante y determinar la forma como evolucionan los procesos de regulación metacognitiva frente a cada estructura multiplicativa, permitiéndole identificar simultáneamente las unidades de medida, la magnitud y el tipo de relación entre dichas unidades en los problemas de producto de medidas, de comparación multiplicativa o de isomorfismo.

Se considera importante además para fines pertinentes retomar tesis de maestría titulada “*Procesos de regulación metacognitiva en la resolución de problemas cognitivos.*”, en la que Buitrago y García (2012), plantean la indagación de la existencia y la forma en que se dan los procesos de regulación metacognitiva en los estudiantes al momento de resolver situaciones asociadas a problemas matemáticos. Entre sus aportes más significativos esta considerar que los procesos de regulación metacognitiva generan un impacto positivo sobre la resolución de problemas. Por tanto, las estrategias de regulación metacognitivas se pueden optimizar con el uso de otras estrategias. Lo anterior es de gran utilidad para afianzar la conceptualización de los procesos de regulación metacognitiva y sus subcategorías, sus alcances en la educación y el apoyo que puede brindar como soporte en la estructuración de los referentes teóricos en la solución de problemas con números enteros.

Sobre la base de las consideraciones anteriores, la actual investigación orientará una indagación a los estudiantes sobre los procesos de regulación, mediante el seguimiento de las acciones metacognitivas de planeación, control y evaluación durante la aplicación de los diversos instrumentos en las fases propuestas, que posibilitan asumir una hipótesis inicial en la que se evidencie una relación entre los procesos de regulación metacognitiva y los niveles positivos en la resolución de problemas, avanzando simultáneamente en el conocimiento de dominio específico de estructuras multiplicativas en problemas de

tipología Vergnaud; ya que quienes logran un mayor acercamiento a la solución son los estudiantes que presentan mayor fortaleza en tales acciones.

#### **4.1.2 Antecedentes Nacionales**

Considerando la particularidad del proceso investigativo, resulta oportuno señalar en el contexto nacional que los procesos de regulación metacognitiva, se han constituido en una práctica no solo del dominio del docente, sino también del estudiante, materializándose en el aula de clase. Sin embargo, investigaciones relacionadas con las dimensiones de la regulación metacognitiva en la solución de problemas multiplicativos tipología Vergnaud para estudiantes de secundaria no expresan una literatura específica y profunda. Dada esta condición, en la búsqueda de antecedentes teóricos afines a la naturaleza de la presente investigación, se estableció como referente teórico aquellos trabajos de investigación en donde se utiliza la regulación metacognitiva en la solución de problemas multiplicativos de forma general y de tipología Vergnaud, como también problemas con otro tipo de operaciones en niños de básica primaria y/o secundaria.

Se destaca la tesis para otorgar título de maestría “*regulación metacognitiva en la resolución de problemas matemáticos con esquema aditivo*” de la Universidad Autónoma de Manizales de Córdoba (2018) en la que se logra establecer que los problemas matemáticos pueden ser superados gracias al desarrollo de competencias lógico matemáticas derivadas de las acciones propias de la regulación metacognitiva tales como planeación monitoreo y evaluación que junto con la unidad didáctica minimizaron el bajo desempeño académico de los estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa Las Lajas.

Se aprecia que dicha investigación pone de relevancia los procesos de regulación metacognitiva, frente a las acciones de verificación y replanteamiento de la estrategia que genera resultados positivos sobre la solución de problemas; articulando con la actual investigación a través de la cual los estudiantes de grado séptimo logren establecer un plan antes de iniciar un problema, organizando los datos mediante tablas o esquemas,

entiendan claramente el enunciado, monitoreen la solución del problema multiplicativo, proponiendo otros procedimientos, tengan claro si la resolución es correcta o incorrecta y puedan evaluar estableciendo si los datos del enunciado son suficientes o que procedimientos de los usados son más eficaces para encontrar la solución del mismo.

La tesis de maestría “*Enseñanza y aprendizaje de los problemas multiplicativos en la escuela primaria*” en la que Ibarra (2012) hace una propuesta didáctica que parte de las concepciones de la enseñanza, las confronta, las modifica y las enriquece a partir del enfoque de la tipología de problemas multiplicativos, identificando las concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de los problemas multiplicativos, observando las características de este tipo de problemas y las condiciones didácticas necesarias para diseño de situaciones problema, acercando a los alumnos al aprendizaje de los problemas multiplicativos (en los que establece la relación ternaria o cuaternaria), orientándolos a la representación gráfica de multiplicaciones y divisiones, caracterizando la tipología de problemas tipo Vergnaud y la forma de modificarlos dentro de una misma categoría, conllevándolos a formular problemas a partir de ciertos datos.

El aporte relevante al actual proyecto investigativo se fundamenta en la hipótesis de que los estudiantes al solucionar problemas multiplicativos establecerán la estructura de cada categoría y subcategoría Vergnaud, vinculando a los datos del enunciado las unidades de medida y magnitudes involucradas y el tipo de relación ternaria o cuaternaria entre las mismas; de tal forma que se le facilite identificar en el enunciado la operación y los algoritmos a utilizar y el proceso de regulación metacognitiva sea más efectivo.

La tesis de maestría “*regulación metacognitiva en la resolución de problemas de longitud en estudiantes de básica primaria*” de la Universidad Autónoma de Manizales en la que Villamizar (2006) en su proceso investigativo establece una relación estrecha entre la metacognición y la resolución de problemas y el desempeño de los estudiantes en tareas relacionadas con el uso de las medidas de longitud, evidenciando la conciencia metacognitiva cuando los estudiantes se sienten seguros en el desarrollo de las tareas y

procesos planteados desde la resolución de problemas, que mejoró notablemente a medida que se familiarizaron con la propuesta de trabajo en el aula y los instrumentos aplicados, se vincula inherentemente a este trabajo la transformación que el alumno hace del concepto de medida de longitud al trabajar situaciones prácticas que lo orientan a construir los conocimientos, diseñar un planeación metacognitiva clara, que favorezca sus saberes previos, la indagación en el aula de clase, la búsqueda de ayudas apropiadas para resolver las dificultades; garantizándole un aprendizaje autónomo y estableciendo que la autorregulación metacognitiva como un elemento fundamental en la enseñanza, que resulta provechosa al ir de la mano de la resolución de problemas por tanto permitieron plantear situaciones en la práctica de aula pertinentes para el desarrollo del pensamiento crítico; tal como lo dice Tamayo (2015) "...solución de problemas, metacognición y argumentación, las cuales se consideran constituyentes del pensamiento crítico en los estudiantes" (p. 1).

En el marco de la tesis propuesta se establece una relación con el proyecto de investigación ya que los estudiantes al solucionar los cuestionarios con problemas multiplicativos y preguntas metacognitivas en las diferentes fases podrán interrelacionar simultáneamente los diferentes procesos de regulación en cada una de sus acciones, visualizando que mientras se planea, también se regula y se evalúa.

## **4.2 MARCO TEÓRICO**

### **4.2.1 Procesos De Regulación (o control) Metacognitivo**

La autora Brown (como se citó en Cadavid, 2014) relaciona tres elementos esenciales en la regulación de los procesos cognitivos: la planificación, el control y la evaluación, dejando claro que los procesos de regulación metacognitiva potencian el desempeño de los estudiantes al determinar el proceso que sigue antes, durante y después de la resolución de un problema; estableciendo el antes como el hecho de planificar una estrategia con la cual desarrollará el proceso de búsqueda de la solución del problema; el durante como la acción de monitorear la ejecución de la estrategia y el después inherente

a la evaluación del desarrollo de la estrategia diseñada, a fin de detectar la pertinencia, contrastando los resultados con los propósitos, tanto de la estrategia en sí como de los resultados obtenidos para determinar su eficacia.

En concordancia a lo anterior los procesos de regulación metacognitiva en el estudiante generaran habilidades metacognitivas basadas en un procedimiento de interrogatorio introspectivo y/o retrospectivo (analizar sus experiencias pasadas) a fin de seleccionar la estrategia o método de solución de la tarea mientras se enfrenta con ella, permitiéndoles encontrar la estrategia adecuada para solucionar un problema y partiendo del conocimiento de sus propias fortalezas y debilidades.

Conviene subrayar que la regulación (o control) metacognitivo se refiere al conjunto de actividades que ayudan al estudiante a controlar su aprendizaje, dentro de las cuales el estudiante debe tomar decisiones antes, durante y después de enfrentar una tarea de aprendizaje, lo que inherentemente conlleva a mejorar el rendimiento, que se hace evidente cuando el alumno avanza en su atención, presenta una mayor conciencia de las dificultades en la comprensión y mejora las estrategias ya existentes, encontrándose un incremento significativo del aprendizaje cuando se vinculan, como parte de la enseñanza el proceso de regulación y la comprensión frente a las tareas que se deben ejecutar Schraw (como se citó en Tamayo, 2006). De acuerdo a lo anterior es necesario tener en claro, que para este proyecto de investigación es necesario tomar la regulación metacognitiva y analizar como intervienen desde sus tres elementos: la planificación, el monitoreo y la regulación, en la solución de problemas multiplicativos y la manera como el avance del proceso regulativo incide en el buen desempeño frente a cada categoría multiplicativa.

Debe examinarse la solución como un paso conveniente para realizar una revisión del proceso seguido, para analizar si es o no correcto el modo como se ha llevado a cabo la resolución. Es preciso contrastar el resultado obtenido para saber si efectivamente da una respuesta válida a la situación planteada, reflexionar sobre si se podía haber llegado a esa

solución por otras vías, utilizando otros razonamientos (Tamayo 2006). Dicho proceso metacognitivo favorece al estudiante en cuanto a sus procesos cognitivos de atención, comprensión y diseño de estrategias, además de potenciar aspectos afectivos y actitudinales de su aprendizaje como son la autovaloración de sus capacidades, la responsabilidad dentro de las actividades y la autonomía tanto en el aprendizaje como en el cumplimiento de sus tareas.

Brown (citada por Tamayo, 2006, p.3) señala los tres procesos cognitivos esenciales:

“1. Planeación: es un proceso que se realiza antes de enfrentar una tarea o meta escolar, implica la selección de estrategias apropiadas y la localización de factores que afectan el rendimiento; la predicción, las estrategias de secuenciación y la distribución del tiempo o de la atención selectiva antes de realizar la tarea; consiste en anticipar las actividades, prever resultados, enumerar pasos”.

2. Monitoreo: se refiere a la posibilidad que se tiene, en el momento de realizar la tarea, de comprender y modificar su ejecución, por ejemplo, realizar auto-evaluaciones durante el aprendizaje, para verificar, rectificar y revisar las estrategias seguidas.

3. Evaluación: Realizada al final de la tarea, se refiere a la naturaleza de las acciones y decisiones tomadas por el aprendiz; evalúa los resultados de las estrategias seguidas en términos de eficacia” (Tamayo, 2006, p.3).

La planeación consiste en anticipar las actividades prediciendo posibles resultados haciendo referencia al término anticipación que refleja la transposición de las representaciones de la tarea y el contexto por parte del sujeto quien se orienta según metas. Esta transposición le permite lograr grados diversos de precisión y se encuentra guiada por la intencionalidad (Tamayo (2006). Que adquiere en el nuevo trabajo investigativo un sentido de previsibilidad por parte del estudiante al realizar una relectura del problema multiplicativo organizando y codificando el plan o procedimiento de resolución del problema teniendo claro qué tipo de operación y algoritmo matemático usará y a la vez determinar otras acciones para llegar a la resolución del mismo.

Tamayo (2006) diseña un plan como la parte fundamental del proceso de resolución de problemas. Una vez comprendida la situación planteada y teniendo clara cuál es la meta a la que se quiere llegar, es el momento de planificar las acciones que llevarán a ella, es necesario abordar cuestiones como para qué sirven los datos que aparecen en el enunciado, qué puede calcularse a partir de ellos, qué operaciones utilizar y en qué orden se debe proceder. La planeación hace referencia a la evaluación de la estrategia seleccionada mientras que la ejecución elabora el plan de manera ordenada y; la verificación corresponde a la evaluación de todo lo ejecutado durante el evento de resolución

Considerando que la planeación es una estrategia vital para tener en cuenta antes de comprender y/o solucionar el ejercicio que se le plantea al sujeto que aprende, en este proceso es necesario pensar el tiempo de duración de la tarea, los recursos para su realización, los procedimientos y el lugar o espacios a desarrollar la actividad. Para la estrategia de planeación se debe determinar los medios y las metas, previo a la elaboración de la tarea, de esta manera, el docente puede pensar las formas de manejar todo tipo de inconvenientes previos, organizando un plan que guie el proceso cognitivo y así regular la efectiva ejecución de la tarea. (Flavell 1981).

Dado este entramado, el aporte a la actual investigación establece la relación estrecha entre la forma como los estudiantes realizan un plan cuando se enfrentan a la solución de un problema multiplicativo, determinando la estructura de cada categoría de problema, organizando los datos ya sea en forma numérica, en tablas o dibujos, determinando el tiempo que gastara en resolverlo y el tipo de operaciones y estrategias que requiere para llegar a la solución.

El control incluye tomar decisiones respecto al plan utilizado, la selección de metas o submetas, monitoreo de soluciones y su evolución, además de la revisión o abandono del plan basado en una evaluación (Faria ,2006). Al respecto Tamayo (2006) afirma:

*El espacio de reflexión donde el estudiante inspecciona, examina cómo está solucionando el problema y esto lo logra por medio de la auto regulación y auto chequeo durante el desarrollo del mismo. Este proceso a su vez cuenta con tres indicadores: a) clarificar: claridad por parte del estudiante en los elementos, vocabulario, datos desconocidos, etc. b) revisión: exploración constante que lleva a cabo el estudiante en su actividad, direccionando el contenido, la disposición y lógica y c) estrategia remedial: espacio de correcciones por parte del estudiante con el fin de identificar y remediar errores durante el desarrollo del problema y lo realiza con una estrategia diferente a la antes utilizada.(p.76)*

La contribución significativa a la propuesta investigativa permite que al resolver el problema multiplicativo los estudiantes se hacen conscientes de su propia dinámica cognitiva; es decir, de los procesos de pensamiento que desarrollan cuando llevan a cabo la actividad resolutoria; permitiendo durante el control o monitoreo tener claridad sobre los datos del enunciado y de la coherencia de estos, verificar si el plan propuesto inicialmente es válido para una resolución efectiva, direccionando el resultado a través de otros procedimientos y donde el resolutor pueda monitorear y regular su propio accionar cognitivo mediante un procedimiento de auto-interrogatorio que le permita a la vez generar correcciones sobre los algoritmos y operaciones matemáticas formuladas.

Al respecto Villamizar (2016) afirma que “el monitoreo: se refiere a la posibilidad que se tiene, en el momento de realizar la tarea, de comprender y modificar su ejecución, por ejemplo, realizar autoevaluaciones durante el aprendizaje, para verificar, rectificar y revisar las estrategias seguidas” (p.30).

Este referente servirá para identificar la supervisión constante del proceso de solución del problema multiplicativo que parte desde la ejecución del plan previamente diseñado, llevando a cabo el plan estructurado, realizando una valoración de la utilidad de la estrategia, determinando si esta le permite alcanzar la respuesta o conducir a que se elabore ajustes al plan e incluso definir si es necesario cambiar por completo el mismo,

posibilitando la ejecución de algunos cambios sobre la marcha para optimizar la estrategia primaria así como la obtención de una respuesta a partir de sus procedimientos.

**Por otro lado** la evaluación admite que enseñar y aprender sea un proceso de regulación continua de los aprendizajes, regulación en el sentido de adecuación de los procedimientos utilizados por el profesorado a las necesidades y dificultades que el alumnado encuentra en su proceso de aprendizaje (y que se detectan al evaluar).

Gairin y Sanmartín (1998) afirman que:

*Por ello es necesario enseñar al alumnado a autoevaluarse y autorregularse. Un estudiante que quiera aprender a aprender deberá llegar a saber cómo detectar sus dificultades o incoherencias, comprender por qué las tiene, y tomar decisiones para superarlas. Un enseñante que quiera ayudar a sus estudiantes en este proceso de aprendizaje deberá promover esta evaluación y facilitar la aplicación de estrategias autorregulativas. En otras palabras, la evaluación del profesorado debería facilitar fundamentalmente la autoevaluación del alumnado. (p.5)*

En este punto la evaluación retoma los resultados de las estrategias anteriores, las acciones y decisiones en términos de eficacia, siendo continua durante todo el aprendizaje y paralela a todas las actividades, no es únicamente un proceso que se mire al final, por lo tanto, es necesario una revisión y la verificación de los temas.

De igual manera, implica la reflexión sobre las operaciones mentales que se están elaborando, examinando sus consecuencias y evaluando continuamente cerca a los objetivos planeados en la primera estrategia de regulación (Labatut, 2004). En este punto la evaluación como aporte al proceso investigativo es tomada como una estrategia de control de los resultados, pero también de los procesos de aprendizaje, no únicamente ubicándose al final sino paralelo a las otras dos estrategias de regulación; es necesario

hacer una evaluación de los resultados alcanzados para comprobar si los objetivos fijados se cumplieron o no.

La metacognición al tener en cuenta el proceso reflexivo permite que la resolución de problemas se haga efectiva (Davinson y Sternberg, 1998). Al tener un conocimiento sobre los procesos metacognitivos de manera particular acerca de la resolución de problemas matemáticos, permite que el docente solucione más fácilmente los percances, para que a tiempo se logre reconocer estratégicamente la naturaleza del problema, logrando planear una guía efectiva que aporte al aprendizaje autónomo. La dimensión metacognitiva en el proceso de aprendizaje implica, en definitiva, enseñar a los estudiantes a planificar, supervisar y evaluar su ejecución, lo cual favorece el uso espontáneo y autónomo de las estrategias y facilita su generalización a nuevos problemas.

#### **4.2.2 Resolución De Problemas**

La resolución de problemas es un objetivo general en la enseñanza de la Matemática, ya que ésta se justifica por su aplicación y utilidad en la vida real. Es un proceso del pensamiento, pues al resolver un problema se aplican conocimientos previos a situaciones nuevas o poco conocidas y se intenta reorganizar datos y conocimientos precedentes en una nueva estructura mediante un proceso secuencial; en este sentido son tan importantes los procedimientos y métodos empleados como el resultado final. Además, es una destreza básica cuando se consideran los contenidos específicos, los tipos de problemas y sus métodos de solución, de este modo se pueden organizar el trabajo escolar de enseñanza de conceptos y aprendizaje de destrezas.

Un primer acercamiento entre la resolución de problemas y la Metacognición en matemáticas nos arroja pistas sobre las dificultades que los estudiantes presentan cuando se enfrentan a ellos, al respecto (Davidson y Sternberg, 1998), establecen que: “En el área de matemáticas, un gran número de cuestiones permanecen sin respuesta sobre qué acciones cognitivas y metacognitivas realizan los estudiantes mientras hacen frente a problemas.”(p.35). De esta forma las estructuras teóricas que competen al proceso

investigativo convergen y adquieren sentido, cuando se toma en consideración los procesos de regulación metacognitiva que se llevan a cabo para desarrollar o resolver un tipo específico de problema (en este caso los multiplicativos de tipo Vergnaud) y se hace necesario una mayor exploración desde el punto de vista de las interacciones entre la estructura multiplicativa de cada uno y el rol de los procesos metacognitivos dentro de la resolución de problemas.

La solución de problemas matemáticos implica llevar a los estudiantes a tener autonomía, pero debe considerarse que estos deben incorporar estrategias para aprender a leer el enunciado, tener claro los conceptos que requiere para su solución y argumentar el proceso resolutivo. Esto significa que cuando los estudiantes se enfrentan a la solución de problemas reportan que los intentos de enseñar a los estudiantes el empleo de las heurísticas no ha sido exitoso, que una razón para esta falta de éxito podría ser que las heurísticas de Polya (1965) representaban nombres de una categoría larga o extensa de procesos que incluían otras sub-estrategias que los estudiantes no reconocían o accedían en sus intentos de resolución de problemas; propone ir más allá de una descripción de las estrategias y ofrecer oportunidades para que los estudiantes desarrollen el poder prescriptivo relacionado con su uso.

En particular sugiere (a) ayudar a los estudiantes a desarrollar un gran número de estrategias de resolución de problemas más específicas y que relacionen de forma clara clases específicas de problemas, (b) enseñar estrategias de monitoreo que permitan a los estudiantes aprender cuándo pueden utilizar estrategias apropiadas y el contenido matemático relevante en la resolución de problemas, y (c) desarrollar formas de robustecer las creencias de los estudiantes sobre la naturaleza de las matemáticas, la resolución de problemas, y sobre sus propias competencias o formas de interactuar con situaciones matemáticas ( Schoenfeld,1992).

Con base a lo expuesto, la presente investigación se centra en los aspectos de control y uso de heurísticas frente a las diferentes categorías de problemas multiplicativos y la aplicación de procedimientos específicos relacionados con la estructura de los mismos

ante un determinado problema, donde el estudiante no solo aprenda reglas y memorice procedimientos, si no que busque soluciones, explorando patrones sin necesidad de memorizar formulas, realizar argumentos y no solo aprender a desarrollar ejercicios.

La resolución de problemas matemáticos se constituye en un método para el aprendizaje metacognitivo del estudiante que pretende orientar en lo posible de una manera sistemática los procesos de pensamiento eficaz y autónomo que el estudiante asume cuando se enfrenta en la resolución del mismo. “La enseñanza por resolución de problemas pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en lo absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces.

Se trata de considerar como lo más importante que el alumno: manipule los objetos matemáticos, active su propia capacidad mental, ejercite su creatividad, reflexione sobre su propio proceso de pensamiento a fin de mejorarlo conscientemente, haga transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental, adquiera confianza en si mismo, se divierta con su propia actividad mental, se prepare para los nuevos retos de la tecnología y la ciencia” (Guzmán, 2007, p.35).

El aporte a la actual investigación se enmarca en que el estudiante se familiarice con la parte conceptual del problema y con la estructura multiplicativa, pueda plantear no solo una, sino varias estrategias posibles para la solución y pueda hacer un control metacognitivo sobre la estrategia que le parece más adecuada y logre reflexionar de forma segura y autónoma sobre el proceso que ha seguido.

### **4.2.3 Estructura Multiplicativa De Problemas**

Los problemas de estructura multiplicativa son situaciones que para su solución requieren una multiplicación, división, regla de tres, porcentajes, sumas o restas que son conceptualizadas previamente por los estudiantes. Razón por la cual:

“El aprendizaje de la estructura multiplicativa inicia con la multiplicación y división, mismas que requieren que el estudiante haga uso y dominio de los números, que conozca su simbolización y que haya adquirido la estructura aditiva (suma y resta); esto tiene su justificación, en virtud de que multiplicar en un sentido más intuitivo es sumar de forma reiterada una cantidad, mientras que dividir es una resta reiterada de una cantidad” (Ríos, 2010, p.27). Esto quiere decir que al enfrentar al estudiante en la solución de problemas multiplicativos, debe contarse con un campo conceptual de adición y sustracción que facilite la aplicación de los algoritmos de estas dos operaciones y pueda establecer en forma particular que multiplicar es una suma abreviada de sumandos iguales, donde el multiplicando es el número que se repite y el multiplicador son las veces que se repite y por su parte la división consiste en la resta consecutiva de cantidades iguales o en repartir una cantidad en partes iguales; donde el dividendo es la cantidad a repartir y se trata de un número cardinal(cantidad) expresado mediante objetos concretos, y el divisor es. El número de partes, siendo una cantidad, pero más abstracta y se pasa a escribir simbólicamente.

Los problemas de estructura multiplicativa se basan en la aditiva, por lo que se conceptualiza la estructura multiplicativa como una serie de situaciones problema en las que se aplica la multiplicación o la división según cada caso específico muestra que los problemas simples de este tipo se citan en el marco de dos grandes categorías mismas (Vergnaud,1997).

*Vergnaud (como se citó en Trejos y Paz 2017) da a conocer la estructura multiplicativa como término que hace referencia al campo conceptual en el cual es necesaria una multiplicación, una división o una combinación de ambas, para resolver determinado problema. Dentro de este campo conceptual se entiende la multiplicación como una operación donde las relaciones de base no son ternarias sino cuaternarias, porque los problemas más sencillos de multiplicación y de división implican la proporción simple de dos variables una en relación a la otra.*

#### **4.2.4 Problemas De Estructura Multiplicativa Tipo Vergnaud**

En el campo de las estructuras multiplicativas, Vergnaud (1997) (como se citó en Ivars y Fernández, 2016) identifica tres tipos de problemas multiplicativos diferentes:

1. Isomorfismo de medidas, problemas cuya estructura consiste en una proporción entre dos espacios de medidas  $M1$  y  $M2$ .
2. Comparación multiplicativa en un solo espacio de medidas, problemas en los que se establece una correspondencia entre dos cantidades y un operador escalar designado por la palabra “veces”.
3. Producto de medidas, problemas cuya estructura consiste en la composición cartesiana de dos espacios de medidas  $M1$  y  $M2$  en un tercero,  $M3$ .

#### **4.2.5 Isomorfismo De Medida**

El isomorfismo pone en juego cuatro cantidades, pero en los problemas más simples se sabe que una de éstas es igual a uno. Hay entonces tres grandes clases de problemas, según que la incógnita sea alguna de las otras tres cantidades e ilustramos estas tres clases por medio de esquemas ( $X$  representa la incógnita). (Vergnaud, 1991, p.17) tabla 1.

En esta categoría se pueden distinguir tres tipos de problemas Vergnaud (1997): multiplicación, división partitiva, división medida. (...) En los problemas de multiplicación (tabla 1), por ejemplo: Si un kilogramo de plátanos vale 2 euros. ¿Cuánto valen 5 kilogramos?, se debe trasladar la relación entre 1 y 2 a la relación entre 5 y  $x$  para encontrar la incógnita (que es el total de objetos).

En los problemas de división partitiva, por ejemplo: Vanesa compra 4 fichas para la feria que le cuestan 8 euros. Si todas tienen el mismo precio, ¿cuánto le ha costado cada ficha?, hay que encontrar el valor de la unidad (o número de objetos por grupo). En los problemas de división medida, por ejemplo: Julia ha puesto los 20 lápices de las bandejas dentro de unos botes. Si ha puesto 4 lápices en cada bote, ¿cuántos botes ha utilizado?, la incógnita es el número de grupos que se forman de una determinada medida

Tabla 1 Estructura general de problemas de isomorfismo de medidas

Kg	Euros	Fichas	Euros	Botes	Lápices
1	2	1	X	1	4
5	X	4	8	X	20

*1a. Problema de multiplicación    1b. Problema de división partitiva    1c. Problema de división medida*

**Fuente:** Ivars y Fernández (2016)

#### 4.2.6 Comparación Multiplicativa Ó De Único Espacio De Medidas

Al solucionar los problemas de comparación multiplicativa el estudiante verificará que según Vergnaud (como se citó en Ivars y Fernández 2016) los problemas denominados de un único espacio de medidas (Vergnaud, 1997) o de comparación multiplicativa (Nesher, 1992) aparecen dos cantidades de una única magnitud o espacio de medidas que se ven afectadas por un escalar  $b$  (tabla 2), que normalmente viene designado por la expresión lingüística veces. Una de estas cantidades actúa como referente y la otra como comparado, y la comparación entre ambas se realiza mediante un escalar. La dirección de la comparación puede ser veces más que y veces menos que. En esta categoría establecerán tres espacios de medida con una relación ternaria. La estructura general de este tipo de problemas, en función de cuál sea la incógnita que presentan, se muestra en la tabla 2.

Tabla 2 Estructura general problemas comparación multiplicativa

Magnitud	Magnitud	Magnitud
$a$	$X$	$a$
$X$	$c$	$c$
<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"><math>b</math></span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"><math>b</math></span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"><math>X</math></span>

*Problemas tipo multiplicación (incógnita cantidad comparada)    Problemas tipo división (incógnita cantidad referente)    Problemas tipo división (incógnita escalar)*

**Fuente:** Ivars y Fernández (2016)

Vergnaud (como se citó en Ivars y Fernández 2016) en los problemas de multiplicación de esta categoría, por ejemplo: Para realizar una pancarta la clase A utiliza 2 metros de tela.

La clase B utiliza 3 veces más tela que la clase A. ¿Cuánta tela utiliza la clase B?, la cantidad incógnita  $X$  es una medida (la cantidad comparada). En este tipo de problemas, cuando la cantidad incógnita  $X$  es la cantidad referente: Para realizar una pancarta la clase B utiliza 6 metros de tela. La clase B utiliza 3 veces más tela que la clase A. ¿Cuánta tela utiliza la clase A?, o cuando la incógnita es el escalar: Para realizar una pancarta la clase A ha utilizado 2 metros de tela mientras que la clase B ha utilizado 6 metros. ¿Cuántas veces más tela ha utilizado la clase B que la clase A? se generan dos problemas de dividir.

#### 4.2.7 Producto De Medidas

Está formada por estructuras en las que la relación multiplicativa entre dos medidas elementales ( $M1$  y  $M2$ ) da como resultado la creación de una nueva medida producto ( $M3$ ). De esta manera y en función de la incógnita que se deba encontrar, Vergnaud (1997) distingue dos tipos de problemas:

- Los problemas de multiplicación en los que se conocen las dos medidas iniciales ( $a$ ,  $b$ ) y se busca la medida producto  $X$ , como por ejemplo: A las clases de baile asisten 6 chicas y 4 chicos. ¿Cuántas parejas de baile diferentes se pueden formar?
- Los problemas de división en los que se conoce la medida producto  $c$  y una de las dos medidas iniciales (por ejemplo  $a$ ) y se busca la otra medida  $X$ , como en: La empresa del comedor ofrece 20 menús diferentes formados por un primer y un segundo plato. Si la empresa cocina 5 primeros platos diferentes, ¿cuántos segundos platos cocina? (tabla 3).

*Tabla 3 Estructura general de problemas producto de medidas*

		$a$	M2
M1	$b$	$X$	M3

*Problemas tipo multiplicación*

		$a$	M2
M1	$X$	$c$	M3

*Problemas tipo división*

**Fuente:** Ivars y Fernández (2016)

Tabla 4 *Clasificación de los problemas de estructura multiplicativa tipología*

*Vergnaud*

<b>Categoría</b>	<b>Tipo</b>	<b>Incógnita</b>
<b>Isomorfismo de medidas</b>	Multiplicación. División partitiva. División medida.	Total de objetos Número de objetos por grupo Número de grupos
<b>Comparación multiplicativa. Un único espacio de medidas</b>	Multiplicación. División. División.	Una medida (comparado) Una medida (referente) Un escalar
<b>Producto de medidas</b>	Multiplicación.	Medida producto (cantidad compuesta. Se conocen las dos medidas elementales o componentes)
	División.	Una medida elemental(uno de los componentes)

*Fuente: Ivars y Fernández (2016)*

El proyecto investigativo se enmarca en las acciones regulativas de Schoenfeld (1985), las categorías multiplicativas de Vergnaud (1997) y estrategias de resolución de problemas matemáticos propuesta por Pifarré y Sanuy (2001), que toman como punto inicial las estrategias heurísticas de Polya pero incorporan la enseñanza-aprendizaje de estrategias metacognitivas de planificación, de regulación y de control del proceso de resolución del problema multiplicativo.

#### **4.2.8 Estrategias Didácticas De Resolución De Problemas Basadas En La Metacognición**

El proyecto de investigación toma en consideración y adapta la perspectiva de las estrategias didácticas con enfoque metacognitivo. Para entrar en el abordaje de las estrategias didácticas, iniciemos por las estrategias del cómo aprenden los estudiantes, de las cuales dependen las anteriores, según Monereo (2000) se define “una estrategia de aprendizaje como un proceso de decisiones, consiente e intencional, que consiste en seleccionar los conocimientos, conceptuales, procedimentales y actitudinales, necesarios para complementar un determinado objetivo, siempre en función de las condiciones de la situación educativa en que se produce la acción” (como se citó en Pifarré y Sanuy 2001, p. 27). Por consiguiente, las estrategias didácticas implementadas en el aula deberán estar dirigidas a potenciar el aprendizaje autónomo. Es decir, el aprender a aprender, entre

algunas de estas estrategias, utilizadas en esta investigación para orientar a los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos, se encuentran:

1. Uso de cuestionarios con problemas multiplicativos tipo Vergnaud con preguntas metacognitivas que generan evidencias de los elementos de las estrategias de regulación metacognitiva.
2. Aplicación de lúdica encaminada a fortalecer el trabajo cooperativo.
3. Clases de modelado metacognitivo con cada estructura de problemas tipo Vergnaud, en la que se fortalece parte conceptual y procesos de regulación metacognitiva.
4. Ejecución de práctica guiada con trabajo cooperativo e implementación hacia la autonomía del estudiante al enfrentarse en la resolución de problemas multiplicativos.

## 5 METODOLOGÍA

Este capítulo enmarca elementos relevantes asociados con la metodología del presente trabajo de investigación. Se aborda en primera instancia el enfoque del método utilizado en esta investigación, el alcance del mismo y el contexto donde se aplica. Luego, se especifican las características de la unidad de trabajo, diseño metodológico con el plan de análisis e intervención, categorías y subcategorías involucradas, las técnicas e instrumentos de recolección de información y para finalizar, se da a conocer el análisis, la triangulación y resultados.

### 5.1 ENFOQUE DE INVESTIGACIÓN

Dentro del carácter cualitativo de la investigación se tiene en cuenta la unidad de análisis que contempla las categorías abordadas y las fases en el trabajo de investigación.

Desde esa perspectiva, Driessnack, Sousa y Costa (2007) señalan que la triangulación “Se refiere a la convergencia o corroboración de los datos recolectados e interpretados al respecto del mismo fenómeno” (p. 4). Donde el método de recolección y o interpretación de los datos, bien podría ser diferente

La investigación se realiza a través de un enfoque cualitativo descriptivo-interpretativo ya que el resultado investigativo produce por un lado datos descriptivos que se sustentan en los propios aportes del estudiante, de forma escrita y oral y en la conducta observable que el docente realiza.

Quecedo y Castaño (2002) afirman:

*Los estudios cualitativos intentan describir sistemáticamente las características de las variables y fenómenos (con el fin de generar y perfeccionar categorías conceptuales, descubrir y validar asociaciones entre fenómenos o comparar los constructos y postulados generados a partir de fenómenos observados en distintos*

*contextos), así como el descubrimiento de relaciones causales, pero evita asumir constructos o relaciones a priori. Intentan descubrir teorías que expliquen los datos las hipótesis creadas inductivamente, o las proposiciones causales ajustadas a los datos y los constructos generados, pueden posteriormente desarrollarse y confirmarse. La recolección de datos puede preceder a la formulación final de la hipótesis o los datos pueden obtenerse con fines descriptivos y de análisis en estudios de tipo exploratorio. (p. 12)*

Desde esta perspectiva la actual investigación se centra, en particular en el estudio de las relaciones entre las categorías de análisis de regulación metacognitiva y la resolución de problemas de estructura multiplicativa tipo Vergnaud enfatizando en su nivel de resolución y la evolución de dichos procesos, todo esto unido a una teoría que lo precede. “En este sentido el diseño cualitativo, está unido a la teoría, en cuanto que se hace necesario una teoría que explique, que informe e integre los datos para su interpretación” (Quecedo y Castaño, 2002, p.12). Acción importante al analizar y triangular la información que se obtenga.

Al formularse en la investigación estudios cualitativos-descriptivos estos buscan especificar propiedades características y rasgos importantes de cualquier fenómeno que se analice, en esta clase de estudios se determinan una serie de instrumentos que sirven para recopilar y poder describir la información. Según (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). En el caso del presente proyecto de investigación se definirán los procesos de regulación metacognitiva que implementan los estudiantes de grado séptimo a nivel general y en cada categoría de acuerdo a la clasificación de los problemas de estructuras multiplicativas, determinando la aplicación de un instrumento de ideas previas sobre como aplican los estudiantes los procesos de regulación metacognitiva en la solución de problemas multiplicativos tipología Vergnaud, la aplicación de una guía de modelado metacognitivo, de práctica guiada y de evaluación final o postprueba.

El enfoque cualitativo interpretativo es racionalista, más flexible, se instrumenta para conocer qué piensa, se fundamenta en las ideas del sujeto y puede partir de hipótesis o preguntas científicas, de las teorías, definiciones y puntos de vista científicos.

*Este enfoque comprende la interpretación y análisis una vez obtenida toda la información, teniendo en cuenta los objetivos de la investigación que pueden haber variado en el transcurso de la ejecución del mismo. Es uno de los momentos más importantes del proceso e implica trabajar con los datos, ordenarlos, sintetizarlos, homogenizarlos en unidades manejables y descubrir qué aportan para la investigación. El sentido de esta etapa consiste en reducir, categorizar, clarificar, sintetizar y comparar información con el fin de contar con una visión lo más completa posible de la realidad objeto de estudio. Con este análisis se pretende poder interpretar y representar la investigación de manera numérica y a través de gráficos. Debemos recordar que desde el comienzo los estudios cualitativos deben ser orientados de manera flexible. Esta etapa no es realizada al final del estudio, se realiza durante el desarrollo completo del mismo, en la medida que se va desarrollando la investigación, de esta manera el investigador puede ir adaptando sus objetivos en base a las nuevas perspectivas que se puedan presentar en la evolución del estudio. (Guerrero, 2016, p.8)*

*La recolección de datos cualitativos responde, tanto a la naturaleza misma del contexto estudiado, como al proceso, a partir del cual, quien investiga va profundizando en el entendimiento de los significados y experiencias de las personas. Esto infiere en el hecho de que tal como señalan Hernández, Baptista y Fernández (2010) “no se inicia la recolección de los datos con instrumentos preestablecidos, sino que el investigador comienza a aprender por observación y descripciones de los participantes y concibe formas para registrar los datos que se van refinando conforme avanza la investigación” (p.11).*

## **5.2 DESCRIPCIÓN DEL CONTEXTO**

La investigación se desarrolló en la Institución Educativa San Ignacio de Buesaco (Nariño), ubicado en zona rural a 17 Km del casco urbano por carretera destapada, la Institución es de carácter oficial. En la actualidad cuenta con 94 estudiantes (preescolar básica primaria, secundaria y media) en la sede principal y 60 estudiantes correspondientes a los 6 centros educativos asociados.

Las características sociodemográficas de los participantes vienen determinadas por el estrato social y la situación económica, todos pertenecen al estrato 1 y su economía se basa en la agricultura incipiente, la explotación de especies menores y algunos padres laboran como moto taxistas; su estructura familiar es de carácter disfuncional, con promedio de núcleos familiares de 5 miembros, los estudiantes presentan dificultades de acceso a la sede principal de la institución ya que sus viviendas se localizan a dos horas de distancia por caminos de herradura en malas condiciones. Cuentan con medios de comunicación limitados ya que existen redes de telefonía, pero carecen de conectividad.

La sede principal se encuentra localizada en zona de reserva y zona de alto riesgo, presenta construcción moderna de sus aulas, pero carece de laboratorios, bibliotecas, sala de juegos, sala de profesores y cafetería, las aulas se estructuran en oficinas por departamentos de las diversas disciplinas del conocimiento.

Se encuentran vinculados a la institución Un rector, 3 administrativos, 10 docentes de diferentes especialidades y en los centros asociados se focaliza un docente por cada una de las sedes, la educación por grados es personalizada ya que existe un solo grupo por grado, el mayor número de estudiantes por grupo es de 14 y el menor número por grupo es de 6.

## **5.3 UNIDAD DE TRABAJO**

Este estudio se realizará con 6 estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa San Ignacio en el Corregimiento del mismo nombre, municipio de Buesaco, departamento de Nariño, con edades que oscilan entre los doce y trece años, representando el 100% de la muestra. El grupo de participantes está conformado por 4 mujeres y 2 hombres quienes para el análisis de los datos serán E1, E2, E3, E4, E5, E6., quienes corresponden a la totalidad el grupo, la cobertura educativa es mínima por lo que la orientación en la asignatura por grupo es de carácter personalizada.

#### **5.4 DISEÑO METODOLÓGICO**

La investigación se inicia en la primera fase de exploración con ideas previas de los estudiantes abarcando los estudios cualitativos-descriptivos e interpretativos, que se fundamentan en un cuestionario escrito con problemas multiplicativos tipo Vergnaud y preguntas metacognitivas, evaluado mediante lista de cotejo y la matriz de niveles de resolución de problemas tratadas por el docente.

Posteriormente se ejecuta la segunda fase del modelado metacognitivo en el que el docente modela cada categoría de estructura multiplicativa aplicando estrategias de regulación metacognitiva, seguida de la tercera fase de práctica guiada en el que se aplica con orientación del docente y aportes de pares un cuestionario de problemas multiplicativos tipo Vergnaud con preguntas metacognitivas, acompañado de una lúdica y trabajo cooperativo; durante la segunda y tercera fase se recolectan datos a través de la lista de cotejo y la matriz de niveles de resolución de problemas tratadas por el docente.

De la misma forma se continúa con la fase 4 en la que el estudiante desarrolla de forma autónoma un nuevo cuestionario con problemas multiplicativos tipología Vergnaud y preguntas metacognitivas, recolectando datos con lista de cotejo y la matriz de niveles de resolución de problemas.

Simultáneamente se enfocará la investigación con el método cualitativo descriptivo e interpretativo en la que se harán inferencias y contrastaran las categorías involucradas a través de oraciones con sentido y se interpretara con base a porcentajes de qué manera los estudiantes mejoran los procesos de planeación, monitoreo y evaluación que implementan a nivel general en cada categoría de acuerdo a la clasificación de los problemas de estructuras multiplicativas, identificando los avances y las dificultades persistentes en dichos procesos.

Durante la fase 4 de evaluación final se hará un análisis general infiriendo con los elementos de las estrategias de planeación, monitoreo y evaluación la forma como los estudiantes evolucionan en los procesos de regulación metacognitiva y como esto contribuye a la caracterización de los niveles de resolución de los problemas de orden multiplicativo, estableciendo los avances perceptibles entre fase de exploración - práctica guiada y fase de exploración -evaluación final.

El proyecto de investigación está dirigido a definir los procesos de regulación metacognitiva que implementan los estudiantes en cada categoría de los problemas de estructuras multiplicativas, analizando en cuál de ellas los estudiantes presentan mayor dificultad en los procesos de regulación metacognitiva e identificando de qué manera mejoran estos y como esto contribuye a la caracterización d los niveles de resolución altos o bajos de dichos problemas.

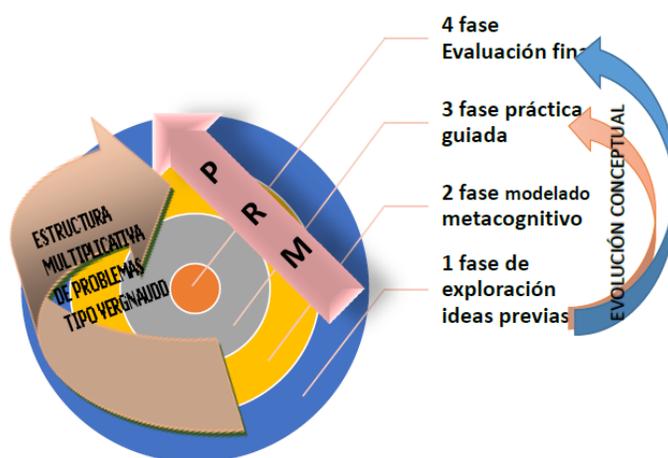
La información y los datos recolectados durante las diferentes fases de la investigación tendrán en cuenta las estrategias de muestreo para la parte descriptiva.

El trabajo de campo determina un muestreo secuencial, el investigador al entrar al campo observa de una forma amplia el contexto, los sucesos, las conductas(...) a medida que avanza en el estudio se va centrando en una gama más restringida, a la vez que puede encontrar otros centros de interés dentro del contexto. En este proceso va adquiriendo nociones cada vez más claras respecto a los procesos, las conductas... más pertinentes

para su estudio y por lo tanto haciendo una selección en el que centra su foco de atención. (Erickson, 1989, p.255)

A lo largo del proceso investigativo se espera que el trabajo dentro del aula de clase sea verificable y observable por el docente a través del modelado metacognitivo, la práctica guiada y la evaluación final con el uso de listas de cotejo; centrando en las dificultades que puedan surgir en los procesos de regulación metacognitiva cuando el estudiante enfrenta la resolución de problemas de orden multiplicativo tipo Vergnaud, analizando en cuál de ellos presenta mayores dificultades con base en los niveles de resolución que alcancen los estudiantes después de la intervención didáctica.

*Esquema 1 Diseño metodológico de investigación*



*Fuente: Elaboración propia*

## 5.5 CONSIDERACIONES ÉTICAS

Todo proceso de investigación que trabaje con seres vivos y menores de edad debe exponer las consideraciones y regulación ética para investigación con seres humanos, dentro del marco jurídico de la investigación científica y tecnológica en Colombia se tiene en cuenta la Constitución Política (CP) de 1991, la resolución 008430 del Ministerio

de Salud, Resolución 002378 del Ministerio de la Protección Social, ley 1374, ley 1098 de infancia y adolescencia y decreto 2737 código del menor. En el presente caso, tomando en circunspección que nuestro trabajo investigativo se realiza con menores de edad y se hace necesario comprometernos a apoyar la investigación ética de alta calidad respetuosa de la dignidad humana y en aras de garantizar la protección de sus identidades, los derechos y el bienestar de los niños, así como los datos recolectados; considerando la situación de los estudiantes y valorando la evolución de sus facultades y la diversidad de sus aportes, de tal forma que los beneficios y las cargas que impliquen su participación se distribuyan de manera equitativa, que los niños no sean excluidos de forma injusta y se suprima todo obstáculo discriminatorio a su participación.

Esperando que el resultado investigativo obtenga los máximos beneficios para los niños vinculados, de forma individual y/o como grupo social, con la responsabilidad primordial de reflexionar sobre la pertinencia de la investigación, previniendo todo riesgo potencial que pueda causar daño a los niños.

Teniendo en cuenta lo anterior, se presenta en anexo 1, el formato de consentimiento informado, que garantiza la protección de los menores y la autorización por parte de padres y/o sus acudientes para el manejo de toda la información obtenida durante el tratamiento de datos, la recolección, almacenamiento, uso, circulación, conservación, transferencia y/o transmisión de material impreso, cuestionarios, entrevistas videos e imágenes obtenidas del registro durante el proceso investigativo.

## **5.6 UNIDAD DE ANÁLISIS**

Para llevar a cabo el análisis del estudio se abordaron dos grandes categorías los procesos de regulación metacognitiva y problemas de estructura multiplicativa tipología Vergnaud. (tabla 5)

Tabla 5 Categoría y subcategorías de análisis

CATEGORIAS	SUBCATEGORIAS	REFERENCIAS
<b>PROCESOS DE REGULACIÓN METACOGNITIVA</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Planeación o planificación</li> <li>• Monitoreo o control.</li> <li>• Evaluación.</li> </ul>	Tamayo (2006) Brown (1987) Soto (2011) Villamizar (2016) Gairin y Sanmartí(1998) Schoenfeld (1985)
<b>ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA PROBLEMAS TIPOLOGIA VERGNAUD</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Isomorfismo de medidas.</li> <li>• Comparación multiplicativa o solo un espacio de medidas.</li> <li>• Producto de medidas o de composición cartesiana.</li> </ul>	Vergnaud (1991). Ivars y Fernández (2016) Pifarré y Sanuy (2001),
<b>RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Niveles de resolución de problemas.</li> </ul>	Tamayo (2014)

*Fuente: Camayo (2016)*

### 5.6.1 Procesos De Regulación Metacognitiva

En el momento que el estudiante se enfrenta a la solución de un problema multiplicativo tipología Vergnaud, a través de los diversos instrumentos aplicará los elementos de cada estrategia metacognitiva de planeación o planificación, monitoreo ó control y evaluación, cuyas evidencias serán recopiladas por el docente en lista de cotejo.

Lo que se pretende alcanzar en el estudiante, con la aplicación de las estrategias de planeación, monitoreo y evaluación en las diferentes fases (tabla 6 y 7) cuando se enfrenta a un problema multiplicativo es que en la planeación pueda tener claro cuáles son los datos del problema y la estructura conceptual de los mismos (unidades de medida, magnitudes, número entero), estableciendo si estos son suficientes o si el enunciado tiene la información necesaria y estructurar en la misma medida al menos un plan ó un camino para la resolución del problema multiplicativo.

Se espera que en la aplicación de los elementos de la estrategia de monitoreo el alumno realice un análisis de sus propios procesos cognitivos, logrando revisar la validez

del proceso de resolución del problema en cuanto a la validación de las operaciones y algoritmos planteados durante el o los procedimientos.

Por otra parte, cuando el alumno aplique los elementos de la estrategia de evaluación deberá tener claro si los resultados obtenidos fueron correctos o incorrectos determinando la eficacia del procedimiento planteado inicialmente, proponiendo de forma autónoma si es posible resolver el problema multiplicativo de otra manera. Debe considerarse que este proceso de regulación metacognitiva no solo se presenta al final en la solución del problema multiplicativo, sino que está presente en todos los momentos de su resolución.

### 5.6.2 Elementos De Cada Estrategia

*Tabla 6. Elementos de cada estrategia, fase 1 de exploración*

Estrategias	Elementos de cada estrategia	Evidencias
<b>Planeación o planificación</b>	Organiza el proceso de resolución del problema	1. Leer cuantas veces sea necesario el enunciado del problema multiplicativo para luego e entenderlo se pueda identificar los datos del mismo 1. Anotar los datos del problema 2. Representar los datos del problema en forma numérica y/o usando tablas y/o dibujos.
	Realiza acciones como: seleccionar la estrategia general de resolución del problema.	3. Tener claro qué tipo de operación(es) utiliza para resolver el problema. 4. Encuentra la estrategia más confiable para él. 5. Buscar patrones, es decir buscar datos, números, eventos, problemas similares que se repiten.
	Explicita un conjunto de procedimientos ordenados para ejecutar; organizar los datos o las acciones que realizará para resolver el problema	6. Utilizar dibujos para representar el procedimiento que llevará a cabo. 7. Organizar paso a paso como piensa resolver el problema. 8. Prever el tiempo en minutos que gastara en la solución.
<b>Monitoreo o control</b>	Realiza acciones para revisar la validez del proceso de resolución del problema	1. El estudiante verifica si los datos del enunciado lo llevarán a la solución del

		<p>problema.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Representa el procedimiento mediante dibujos, esquemas o gráficas. (Semiótica).</li> <li>2. El estudiante establece otras operaciones para comprobar si la solución es correcta o incorrecta.</li> </ol>
	Demuestran un conocimiento sobre sus propios procesos cognitivos	<ol style="list-style-type: none"> <li>3. Tomar el plan y sintetizar el procedimiento de solución en pocos pasos.</li> <li>4. Comparar el procedimiento usado en la solución del problema con otros problemas ya conocidos.</li> <li>5. Demuestra con argumentos si la solución del problema es correcta o incorrecta</li> </ol>
	Busca errores de forma sistemática; en los datos del problema, en los procedimientos de resolución y los algoritmos matemáticos utilizados	<ol style="list-style-type: none"> <li>6. El estudiante sabe que los datos del enunciado están completos o si requiere de más información para solucionar el problema.</li> <li>7. Solucionar el problema proponiendo más de una alternativa</li> <li>8. Estar seguro de que utilizó la operación matemática correcta (multiplicación o división) en la solución del problema.</li> </ol>
<b>Evaluación</b>	Identifica si las operaciones y algoritmos multiplicativos aplicados en la solución del problema se desarrollan como lo tenía previsto	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. El estudiante verifica si la planeación del problema le permitió usar una estrategia clara.</li> <li>2. El estudiante tiene claridad sobre los pasos y operaciones necesarias para solucionar el problema de acuerdo a lo planeado</li> </ol>
	Determina que correctivos se pueden tomar sobre la marcha de la solución del problema	<ol style="list-style-type: none"> <li>3. El estudiante es consciente de los avances y dificultades que ha tenido durante el procedimiento del problema multiplicativo</li> <li>4. El estudiante establece si logro un aprendizaje autónomo y de que manera lo realizó</li> </ol>
	Demuestra que si es posible resolver el problema multiplicativo de otra manera.	<ol style="list-style-type: none"> <li>5. Establece que procedimientos de los usados eran más eficaces para encontrar la solución del problema.</li> <li>6. El estudiante determina si fue más fácil el desarrollo del problema cuando ha resuelto previamente un problema semejante</li> </ol>
	El estudiante está seguro de que la solución del	<ol style="list-style-type: none"> <li>7. El alumno establece con</li> </ol>

	problema es correcta o incorrecta.	<p>seguridad si la operación multiplicativa usada le ayuda a solucionar el problema y lo sustenta con argumentos.</p> <p>8. El estudiante es consciente de los avances y dificultades que ha tenido durante el procedimiento del problema multiplicativo.</p> <p>9. Revisa si las operaciones usadas en la solución del problema son las correctas.</p>
--	------------------------------------	---

*Fuente: Elaboración propia*

*Tabla 7. Elementos de cada estrategia, fase 3-práctica guiada y fase 4-evaluación final*

<b>Estrategias</b>	<b>Elementos de cada estrategia</b>	<b>Evidencias</b>
<b>Planeación o planificación</b>	El alumno divide el problema multiplicativo tipología Vergnaud en componentes más básicos, examina y busca las relaciones entre los diferentes elementos que forman parte del problema (si la relación entre unidades de medida es cuaternaria, es terciaria, si existe una proporción entre dos espacios de medidas, si hay correspondencia entre dos medidas y un operador escalar, designado por la palabra veces, si es una composición cartesiana de dos espacios de medidas con respecto a otro espacio de medidas)	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Definir cuáles son las unidades de medida del problema.</li> <li>2. Establecer la relación ternaria o cuaternaria del problema multiplicativo.</li> <li>3. Establecer la existencia de una proporción entre dos espacios de medidas, si hay correspondencia entre dos medidas y un operador escalar, designado por la palabra veces o si es una composición cartesiana de dos espacios de medidas con respecto a otro espacio de medida</li> </ol>
	El estudiante realiza acciones como: lectura, relectura, seleccione datos, anote datos del enunciado, representa datos del enunciado (uso de tablas o dibujos).	<ol style="list-style-type: none"> <li>4. Leer cuantas veces sea necesario el problema multiplicativo para luego de entenderlo se pueda identificar los datos del mismo.</li> <li>5. Representar los datos del problema en forma numérica y/o usando tablas y/o dibujos, planos cartesianos, diagramas de ven.</li> </ol>
	El estudiante organiza y codifica el plan o procedimiento de resolución del problema, teniendo claro que tipo de operación debe usar	<ol style="list-style-type: none"> <li>6. Identificar las magnitudes ó cantidades que intervienen en la operación matemática que va a utilizar.</li> </ol>
	El estudiante tiene claridad sobre el tiempo que requiere para solucionar el problema y lo distribuye de acuerdo al plan propuesto	<ol style="list-style-type: none"> <li>7. Prever el tiempo en minutos que gastara en la solución del problema.</li> <li>8. Tener claro que tipo de operaciones y heurísticas</li> </ol>

		<p>aplicaran y el tiempo que se gastará en cada una de ellas</p>
	<p>El estudiante realiza acciones como: seleccionar la estrategia general de resolución del problema; tantear o explorar posibles acciones para resolver el problema; explicar un conjunto de procedimientos ordenados a ejecutar.</p>	<p>9. Proponer uno o más caminos adecuados para resolver el problema en forma ordenada (algoritmos)</p> <p>10. Buscar patrones, es decir buscar datos, números, eventos, problemas similares que se repiten</p>
<b>Monitoreo o control</b>	<p>El estudiante tiene claro si los datos propuestos en el enunciado del problema son suficientes.</p>	<p>1. El estudiante sabe que los datos del enunciado están completos o si requiere de más información para solucionar el problema.</p> <p>2. El estudiante verifica si el procedimiento que usa lo llevará a la solución del problema.</p>
	<p>Simplifica el problema, concretándolo hasta tener la posibilidad de abordarlo.</p>	<p>3. Toma el plan y sintetiza el procedimiento de solución en pocos pasos</p> <p>4. El Estudiante establece con argumentos frente a sus pares si esta de acuerdo o no en la forma como se soluciona el problema.</p> <p>5. Usa tabulaciones para sintetizar el enunciado del problema.</p>
	<p>El estudiante ejecuta un procedimiento matemático (correcto o incorrecto) y aplica otros posibles procedimientos matemáticos para resolver el problema.</p>	<p>6. Tiene claro los conceptos matemáticos necesarios que uso para resolver el problema.</p> <p>7. El estudiante comprende y modifica frente a sus pares la ejecución del problema multiplicativo, proponiendo otro u otros procedimientos para la solución del mismo, diferente al propuesto por el docente.</p> <p>8. Compara el problema multiplicativo con otros ya conocidos</p>
	<p>Hace representación gráfica, dibuja o hace un esquema del procedimiento de solución del problema</p>	<p>9. Representa el procedimiento mediante dibujos, esquemas o gráficas. (semiótica).</p> <p>10. Representa el procedimiento mediante mapas conceptuales y/o cuadros sinópticos.</p>

<b>Evaluación</b>	El estudiante realiza acciones para controlar, revisar la validez del proceso de resolución y/o de los resultados obtenidos y detectar posibles errores.	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. El estudiante tiene claro si la solución del problema multiplicativo es correcta o incorrecta y lo sustenta con argumentos.</li> <li>2. El alumno establece con seguridad los componentes básicos y las relaciones entre los diferentes elementos que forman parte del problema multiplicativo.</li> <li>3. El estudiante es consciente de los avances y dificultades que ha tenido durante el procedimiento del problema multiplicativo.</li> <li>4. El estudiante establece si logro un aprendizaje autónomo y de qué manera lo realizó.</li> <li>5. El estudiante verifica si la planeación del problema le permitió usar una estrategia clara.</li> </ol>
	El estudiante realiza acciones como: cuestionar la validez de algún resultado o del procedimiento de resolución; revisa de manera sistemática los datos introducidos, los algoritmos de resolución utilizados y los cálculos matemáticos realizados y si estos están de acuerdo a lo planeado	<ol style="list-style-type: none"> <li>6. El estudiante establece si los datos planteados inicialmente son suficientes para la solución del problema.</li> <li>7. Establece que procedimientos de los usados eran más eficaces para encontrar la solución del problema.</li> <li>8. Revisa si las operaciones usadas en la solución del problema son las correctas.</li> <li>9. El estudiante determina si fue más fácil el desarrollo del problema cuando ha resuelto previamente un problema semejante.</li> <li>10. Verifica que el aporte de sus pares le permite retroalimentar la solución del problema</li> </ol>

*Fuente: Elaboración propia*

### 5.6.3 Estructura Multiplicativa Problemas Tipo Vergnaud

Una vez realizado el modelado metacognitivo los estudiantes evidenciaran al solucionar los diferentes problemas multiplicativos, que estos poseen estructuras y relaciones específicas de acuerdo a la estructura que pertenezcan (tabla 4) y que en esa

medida los datos y las operaciones u algoritmos matemáticos que se utilicen tanto en la práctica guiada como en la evaluación final dependerán de lo anteriormente mencionado.

Al modelar los problemas multiplicativos se espera que el estudiante pueda establecer la diferencia básica de cada estructura de acuerdo a la tipología Vergnaud; de tal forma que en los problemas de isomorfismo de medidas el estudiante determine una proporcionalidad simple directa entre dos unidades de medida involucradas, estableciendo mediante tablas de correspondencia la relación cuaternario de las cantidades o magnitudes que forman parte de los datos; pretendiendo que al enfrentar la resolución del problema tenga definido que las subcategorías de isomorfismo contemplan problemas de multiplicación en los que deberá encontrar la totalidad de los objetos involucrados en el enunciado, problemas de división partitiva en la que deberá hallar el número de objetos por grupo y los de división partitiva en los que definirá que la solución se enfoca en encontrar el número de grupos.

En la misma medida el alumno logrará evidenciar que cuando se enfrenta en la solución de problemas de comparación multiplicativa de un único espacio de medidas aparecen dos cantidades de una única magnitud o espacio de medidas que se ven afectadas por un escalar y que este hecho proporciona la existencia de tres subcategorías; la de multiplicación, en la que deberá establecer una medida (cantidad comparada), en la división 1 establecerá una medida que es la cantidad referente y en la división 2 definirá cual es el escalar que se requiere para la solución del problema.

Por otro lado el alumno se enfrentará a los problemas de producto de medidas determinando que estos engloban tres unidades de medida, sobre las cuales podrán definir con los datos del enunciado que la unidad obtenida o medida tres, es el producto cartesiano de las otras dos; de igual forma explicará que se presenta una relación ternaria entre las tres cantidades y que bajo esta categoría se vinculan otras dos subcategorías por multiplicación y división. En los problemas producto de medidas por multiplicación (PMM) el estudiante deberá encontrar la medida producto, siempre y cuando conozca las

medidas que lo componen y en los problemas de división (PMD) se debe encontrar una de las cantidades elementales que se componen conociendo la otra y la cantidad compuesta

Se espera que al conocer la estructura de cada problema multiplicativo los estudiantes logren tener un mejor desempeño y mejorar sus niveles de éxito en cada una de las categorías de problemas multiplicativos tipo Vergnaud.

Dentro de esta tipología de problema multiplicativo la propuesta investigativa contiene:

**Problemas de isomorfismo de medida**

Por multiplicación (IMM), división partitiva (IMDP), división medida (IMDM).

**Problemas de comparación multiplicativa**

Por multiplicación (CMM), división 1 (CMD1), división 2 (CMD2)

**Problemas de producto de medidas**

Por multiplicación (PMM), por división (PMD)

#### **5.6.4 Categoría Resolución De Problemas**

La identificación y resolución de problemas es un constituyente importante del pensamiento crítico Tamayo, Zona y Loaiza (2014) establecen que ha sido implementado desde algunos modelos pedagógicos, desde una habilidad que potencia otras habilidades o desde una actitud que poseen los pensadores críticos.

García (2003 citado por Tamayo et al., 2014) reconoce que la resolución de problemas genera cambios en la forma de ver y pensar el mundo desde diferentes esferas, como la cognitiva, afectiva y psicomotora, en las cuales se produce adquisición y dominio de saberes de forma autónoma, buscando el significado y comprensión de esos conocimientos y en nuestro caso los saberes, o conocimientos necesarios en el aprendizaje de las ciencias.

El autor reconoce que para que se pueda resolver un problema es necesario que la situación genere en el individuo algún tipo de dificultad, a la vez, el individuo debe encontrar, diseñar y organizar los caminos utilizados para resolver el problema, según el objetivo, según los procesos cognitivos necesarios y según las particularidades mismas de los procesos de resolución

#### 5.6.4.1 Niveles de resolución de problemas

De acuerdo a Tamayo (2014) los niveles de resolución de problemas se enfocan a las ciencias naturales, por esta razón, se requiere una adaptación de dichos niveles (tabla 8), con el fin de relacionar específicamente a la resolución de problemas en la matemática, permitiendo identificar los niveles iniciales y los alcanzados en los estudiantes después de la intervención didáctica.

*Tabla 8 Niveles de resolución de problemas*

<b>Niveles de resolución de problemas.</b>			
<b>Categoría</b>	<b>Subcategoría</b>	<b>Nivel</b>	<b>Items</b>
Resolución de problemas	Niveles de resolución de problemas	Nivel 0	No utiliza datos del enunciado y tampoco demuestra una posible solución del mismo.
		Nivel 1	Redescribe la situación y utiliza datos del enunciado del problema para justificar las respuestas.
		Nivel 2	Cumple el nivel anterior y reconoce problemas similares resueltos con anterioridad.
		Nivel 3	Identifica las variables del problema sin establecer relaciones entre estas.
		Nivel 4	Resuelve el problema de manera inadecuada relacionando variables y justificándolo algorítmicamente.
		Nivel 5	Resuelve el problema acertadamente, relaciona

*Fuente: Adaptación de niveles de resolución de problemas según Tamayo (2014)*

### 5.6.5 Codificación

*Tabla 9 Codificación de unidad de análisis*

Fase de exploración	<b>FE</b>
Ideas previas ó preprueba	<b>IP</b>
Código estudiante 1, 2, 3, 4, 5,6.	<b>E1, E2, E3, E4, E5, E6.</b>
Modelado metacognitivo	<b>MM</b>
Procesos de regulación metacognitivos	<b>PRM</b>
Planeación	<b>P</b>
Monitoreo ó control	<b>M</b>
Evaluación	<b>E</b>
Practica guiada	<b>PG</b>
Evaluación final	<b>EF</b>
Pruebas tipología Vergnaud	<b>PSTV</b>
Problemas Isomorfismo de medidas por multiplicación	<b>IMM</b>
Problemas Isomorfismo de medidas por división partitiva	<b>IMDP</b>
isomorfismo de medidas por división medida	<b>IMDM</b>
comparación multiplicativa por multiplicación	<b>CMM</b>
comparación multiplicativa por división 1	<b>CMD1</b>
comparación multiplicativa por división 2	<b>CMD2</b>
producto de medidas por multiplicación	<b>PMM</b>
producto de medidas por división	<b>PMD</b>

*Fuente: Elaboración propia*

## **5.6.6 Técnicas Y Fuentes De Recolección De La Información**

Para llevar a cabo el proceso de investigación se hace uso de los instrumentos y heurísticas propuestos por (Iriarte y Sierra, 2011, p.82) Schoenfeld (1985), Vergnaud (1997), Pifarré y Sanuy (2001), Monereo (como se citó en Pifarre y Sauny 2001), Ivars y Fernández (2015), Pifarre (1998), Brown y Polincsar (1989).

### **5.6.6.1** Cuestionario de ideas previas (Exploración).

Consta de un enunciado con problema multiplicativo tipología Vergnaud y 7 preguntas metacognitivas contenidas dentro de las evidencias, se aplicó en la fase uno de exploración a cada estudiante. (anexo 2), a través del cual se realiza un diagnóstico sobre los PRM donde existe mayor dificultad en la solución de problemas multiplicativos tipología Vergnaud, que permitió inferir en cual categoría multiplicativa existe un menor desempeño, estableciendo la relación existente entre los PRM con los resultados en la solución de problemas de orden multiplicativo. Se tomó en consideración las estrategias de resolución de problemas matemáticos propuesta por Pifarré y Sanuy (2001), que toman como punto inicial las estrategias heurísticas de Polya pero incorporan la enseñanza-aprendizaje de estrategias metacognitivas de planificación, de regulación y de control del proceso de resolución del problema multiplicativo.

### **5.6.6.2** Cuestionario de práctica guiada

Como adaptación del modelo usado por Pifarré (1998), en el que aplico una guía que el denomino “la hoja para pensar el problema”, fundamentada como instrumento de apoyo al estudiante en el momento en que se enfrenta a una situación problema, y en la que el docente a su vez va proporcionándoles a los estudiantes la retroalimentación del proceso.

El instrumento (anexo 5) se ejecutó por los alumnos de forma individual en la fase dos, consta de un enunciado con nuevos problemas multiplicativos de cada categoría y 10 evidencias de los elementos de estrategia, tanto para planeación, monitoreo y evaluación

Mediante el instrumento de la práctica guiada (anexo 5) se permite a los estudiantes aprovechar el andamiaje que les ofrece el docente, y que de esta manera puedan enfrentarse a tareas más complejas que aquellas que realizan rutinariamente, enfatizado en los problemas con mayores obstáculos y fortaleciendo los PRM que se les dificultó avanzar a los estudiantes.

#### **5.6.6.3 Cuestionario de evaluación final**

Consta de un enunciado con problema multiplicativo tipología Vergnaud y 12 preguntas metacognitivas contenidas dentro de las evidencias, se aplicó a los estudiantes de manera individual en la fase 4 de evaluación final del proceso investigativo. (anexo 8), se busca determinar que procesos de regulación metacognitiva siguen implementando los estudiantes y en cuales logran mayor evolución con respecto a la fase de exploración y practica guiada, a la vez se define de qué manera los estudiantes mejoraron los procesos de regulación metacognitiva y como esto contribuyo en el buen desempeño de los problemas de orden multiplicativo.

### **5.7 FASES DEL PROYECTO**

#### **5.7.1 Fase 1- Ideas Previas (Exploración)**

Es una fase de exploración que permite determinar en forma general cual es el proceso de regulación metacognitiva con mayor dificultad para los estudiantes, estableciendo simultáneamente cual es el problema multiplicativo tipología Vergnaud que presenta mayores obstáculos en su solución y determinar la relación entre los procesos de planeación, monitoreo y evaluación con el desempeño de cada uno de estos problemas.

En el desarrollo de esta fase se aplicó un cuestionario (Anexo 2) en la que cada estudiante de forma individual, en presencia del docente, pero sin intervención de este último deberá resolver problemas de cada una de las categoría de problema multiplicativo de tipología Vergnaud acompañado de preguntas metacognitivas que están vinculadas a

elementos de estrategias que serán analizadas en la lista de cotejo tratada por el docente durante esta fase, conformada por 3 elementos de la estrategias de planeación, 3 de monitoreo y 4 de evaluación; existiendo 9 evidencias por proceso de regulación metacognitiva, que se verificaron en cada uno de los estudiantes (anexo 3), permitiendo determinar las dificultades en los procesos de regulación metacognitiva, en qué tipo de problema existen mayores dificultades y la relación entre los proceso metacognitivos con el desempeño frente a cada categoría de problema multiplicativo.

Cabe considerar que el total de evidencias por cada proceso de regulación metacognitiva para cada problema multiplicativo durante la fase I exploración (IP) fue:

Proceso regulación metacognitiva en forma general para planeación: 432 evidencias, monitoreo: 432 evidencias y evaluación 432 evidencias.

Total de evidencias por cada proceso de regulación metacognitiva para cada problema multiplicativo durante esta fase fue: isomorfismo de medidas:486 evidencias, comparación multiplicativa 486 evidencias, producto de medida 324 evidencias con el número de respuestas totales por categoría en los problemas multiplicativos tipología Vergnaud de isomorfismo de medidas 18 respuestas, Comparación multiplicativa 18 respuestas, Producto de medidas 12 respuestas.

De tal forma que las fuentes de datos determinaran:

- a. Indicadores con su respectivo número de evidencias por proceso de
- b. regulación metacognitiva de planeación, monitoreo y evaluación.
- c. Porcentaje de evidencias procesos de regulación metacognitiva a nivel general.
- d. Porcentajes de evidencias procesos de regulación metacognitiva en cada
- e. categoría de problemas de orden multiplicativo
- f. Porcentajes de desempeño en cada categoría problemas multiplicativos
- g. tipología Vergnaud.
- h. Porcentaje de los procesos de regulación metacognitiva y porcentaje de los
- i. desempeños (respuestas acertadas) por categoría (anexo 4).

Los resultados y análisis de esta primera fase se constituyen en la base para la aplicación de las tres siguientes fases.

### **5.7.2 Fase 2- Modelado Metacognitivo**

Durante esta fase juega un papel importante el docente como agente orientador, bajo el cual realizó una instrucción metacognitiva sobre el campo conceptual de los problemas multiplicativos tipo Vergnaud y de las diversas formas de asumir los procesos de regulación en la resolución de problemas multiplicativos.

*En el modelado metacognitivo el docente ha de servir de “modelo” para los estudiantes en cómo resolver problemas matemáticos, haciendo uso de los procesos metacognitivos de planeación, control y evaluación, pero no solo muestra cómo resolver los problemas correctamente, sino que también comete deliberadamente (o no) errores que va corrigiendo; y de esta manera muestra a los estudiantes el modo de autorregularse durante la solución de problemas. (Iriarte y Sierra, 2011, p.80)*

Durante esta fase el docente solucionó cada categoría de problema multiplicativo paso a paso (anexo 4) ,haciendo una reflexión metacognitiva , demostrando la estructura del problema, los datos del enunciando, caracterizando las unidades de medida, las magnitudes o cantidades, diversos procedimientos para su solución y la forma de organizar, tabular y/o graficar los datos y/o procedimientos, es decir demostrando acciones y verbalizando las operaciones mentales en cada uno de ellos, dando cuenta a su vez de las decisiones que va tomando en el proceso.

Monereo (2000) al respecto afirma:

*El objetivo básico de estas ayudas es dotar al alumno de una imagen precisa de él mismo como aprendiz que le permita regular mejor sus procesos de aprendizaje; supone conocer las estrategias y procedimientos que optimicen sus procesos cognitivos comprensión, atención, recuerdo sus preferencias para estudiar y*

*aprender, aquello que le motiva y le interesa, la forma en que emocionalmente afronta los problemas y dificultades).* (p.49)

Dicho de otra manera, se buscó proporcionarle al alumno un modelo del cómo enfrentarse a los problemas matemáticos, utilizando un vocabulario adecuado y apropiado con respecto a la situación planteada, una metodología de trabajo ordenada y lógica, y una actitud positiva hacia la tarea que el estudiante deberá aprender para luego ponerla en práctica, no solo en el contexto matemático o en las otras disciplinas, sino también en su vida diaria.

Este momento de intervención se aplicó dos meses después de la aplicación del instrumento de exploración y fue orientado por el docente a partir de los resultados de la fase 1. Se estructura en ocho clases de 2 horas cada una, retomando una categoría de problema multiplicativo por sesión, enfatizando en la categoría multiplicativa y en el proceso de regulación metacognitiva con mayor dificultad para el estudiante (anexo 4).

En el modelado metacognitivo se realizó una instrucción particular por parte del docente acerca de cada categoría de problema multiplicativo en relación a la estructura, conceptos matemáticos y representaciones (semiótica) tanto de los datos como del procedimiento dentro del campo conceptual de números naturales pequeños, permitiendo que el estudiante valide a través del modelado la multiplicidad de estrategias que lo pueden conllevar a encontrar la solución de un problema multiplicativo tipología Vergnaud, conllevando al alumno a su aprendizaje autónomo a través de la práctica guiada y el trabajo cooperativo concertado con la lúdica.

Durante el modelado metacognitivo el docente ejecutó cada una de las evidencias de los elementos de la estrategia de planeación, monitoreo, y evaluación en la solución de los diferentes problemas multiplicativos (anexo 4).

Dentro del modelado metacognitivo se integraron las siguientes estrategias para la resolución de problemas multiplicativos tipología Vergnaud en relación con los procesos de regulación metacognitiva, como son:

Estrategias de planeación (predicción, secuenciación, distribución del tiempo),

Estrategias de monitoreo (modificación, rectificación, revisión constante)

Estrategias de evaluación (validez de las acciones y decisiones tomadas).

En el desarrollo de esta fase no se obtuvieron fuente de datos, hasta que se desarrolló la fase 3 de práctica guiada.

### **5.7.3 Fase 3- Práctica Guiada Y Autorregulación**

*Práctica Guiada.* En esta fase del proceso se buscó que los estudiantes practiquen el uso del procedimiento para resolver problemas, utilizando los procesos metacognitivos, aumentando progresivamente el nivel de complejidad de las situaciones planteadas, proponiendo la utilización de los procedimientos aprendidos para trabajar diferentes contenidos y situaciones diversas; se aplicará en 8 sesiones de 2 horas cada una (anexo 5).

Esto significa que, tanto el profesor y los alumnos resuelven conjuntamente el problema. A criterio del profesor y de manera periódica, cuando la mayoría de los estudiantes han realizado una de las estrategias propuestas en la guía, el profesor y los alumnos discuten y valoran las diferentes acciones realizadas y la respuesta a las preguntas propuestas en la guía (anexo5). Finalmente, por consenso entre todo el grupo-clase, se anotan o definen las respuestas más adecuadas. Para el desarrollo de este método de enseñanza son muy importantes las preguntas y el guiaje que realice el profesor. (Pifarré y Sanuy, 2001, p.303)

En este momento adquiere una función primordial la mediación docente, el cual proporcionó a los estudiantes la guía necesaria para ir alcanzando progresivamente un nivel más elevado de autonomía.

Para guiar esta práctica es necesario contemplar algunas condiciones Brown y Palincsar, (1989) adaptar la ayuda a las necesidades de los alumnos en un momento determinado, aumentar la ayuda cuando se incrementa la dificultad de la tarea y viceversa, Disminuir gradualmente la ayuda a medida que aumenta la habilidad de los estudiantes y orientar la ayuda a corregir los errores y mejorar el nivel de competencia. La práctica guiada permite a los estudiantes aprovechar el andamiaje que les ofrece el docente, y que de esta manera puedan enfrentarse a tareas más complejas que aquellas que realizan rutinariamente, teniendo en consideración la evaluación de resultados de esta fase que se realizó usando una lista de cotejo (anexo 6) tratada por el docente, conformada por 5 elementos de la estrategias de planeación, 4 de monitoreo y 2 de evaluación; existiendo 10 evidencias por proceso de regulación metacognitiva, que se verificaron en cada uno de los estudiantes, permitiendo analizar cada proceso de regulación metacognitiva y cada problema multiplicativo.

Este instrumento (anexo 5) se aplica con el objetivo de favorecer la resolución del problema multiplicativo teniendo en cuenta los elementos de cada estrategia metacognitiva que uso previamente el docente y lograr de esta forma la reflexión y discusión sobre los procedimientos que hay que utilizar antes, durante y después del proceso de resolución, esta fase se trata con tres instrumentos; un taller que se aplica al estudiante(anexo 5), una lúdica (anexo 7)y una lista de cotejo tratada por el docente (anexo 6).

El profesor y los alumnos resuelven conjuntamente un problema multiplicativo tipología Vergnaud a través de un taller de acuerdo a la categoría y ciertas evidencias que deberá alcanzar los elementos de estrategias de los procesos de regulación metacognitiva y participar de una lúdica denominada “el vendedor”(anexo 7).

Cuando los estudiantes han aplicado los elementos de cada indicador de planeación, monitoreo y evaluación orientada en la segunda parte de la instrucción metacognitiva, el profesor y los estudiantes discuten y valoran las diferentes acciones realizadas y la

respuesta a las preguntas propuestas en la guía. Finalmente, por consenso entre todo el grupo-clase, se anotan mediante una lista de cotejo tratada por el docente (anexo 6) si cumplieron con los elementos de cada estrategia y obtuvieron las respuestas más adecuadas. Para el desarrollo de este método de enseñanza son muy importantes las preguntas y orientación que realice el docente.

Durante el desarrollo de la práctica guiada y la aplicación de la lúdica se desarrolla en los estudiantes el aprendizaje cooperativo.

*Aprendizaje Cooperativo.* El objetivo principal de esta estrategia es el de promover la realización conjunta de diferentes tareas de la práctica guiada, promoviendo el aprendizaje personal y grupal en relación a los diferentes procesos metacognitivos. Es importante resaltar que para trabajar esta estrategia se tuvo en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes respecto al contenido que se quería abordar, en este caso lo relacionado con los problemas multiplicativos tipo Vergnaud.

El aprendizaje cooperativo facilitó la discusión, entre los estudiantes y el docente, permitiendo a su vez negociar las propias opiniones y poner énfasis en los aspectos metacognitivos, favoreciendo la reflexión y la autoevaluación.

En este sentido se tomará en consideración por una parte a Rugarcía (como se citó en Oberto, 2014) establece: “El Aprendizaje en equipo puede concebirse como una estrategia cooperativa, estructurada y sistemática para estimular la educación de los alumnos, en la que grupos pequeños de estudiantes trabajan juntos para lograr un objetivo de aprendizaje. Difiere de otras técnicas grupales en su recia estructuración, que asegura una efectiva interacción entre los miembros del grupo y en su “insistencia” de que cada alumno tiene que aprender al interactuar con sus compañeros”. (p. 61).

Se espera que durante la lúdica aplicada el trabajo cooperativo de los estudiantes les permita potencializar la acción de los procesos de regulación metacognitiva a través de

los elementos que forman parte de los indicadores, se buscará alcanzar el consenso con los otros que tienen un punto de vista opuesto y puedan llegar a un desempeño positivo en la resolución con el aporte de un aprendizaje metacognitivo y conceptual inherente a cada uno de los participantes.

Entre algunos principios que fundamentan el aprendizaje por grupos cooperativos planteados por los hermanos Johnson y Johnson (como se citó en Oberto, 2014) se tiene:

1. Brindar ayuda efectiva y eficaz.
2. Intercambiar los recursos necesarios, tales como la información y los materiales y procesar la información con mayor eficacia.
3. Proporcionar realimentación para que pueda mejorar el futuro desempeño de sus actividades y sus responsabilidades.
4. Desafiar las conclusiones del otro y razonar para favorecer una toma de decisiones de mayor calidad y una mayor comprensión de los problemas.
5. Promover el esfuerzo para alcanzar objetivos mutuos.
6. Influir en los esfuerzos del otro para alcanzar objetivos grupales.
7. Actuar de maneras confiadas y confiables.
8. Estar motivado para esforzarse por el beneficio mutuo.
9. Tener un nivel de excitación moderado, caracterizado por un bajo nivel de ansiedad y estrés. (p.64)

Pretendiendo alcanzar en el proceso investigativo favorecer la interdependencia positiva entre los estudiantes de grado séptimo, permitiéndoles hacer aportes de orden individual al grupo que los lleve a favorecer la solución adecuada de cada categoría de problema multiplicativo y la estructuración consensuada de los elementos de cada indicador, en la planeación, monitoreo y evaluación; además es importante resaltar que durante el trabajo cooperativo el docente ofrecerá retroalimentación a todo el grupo conjuntamente, teniendo en cuenta esta responsabilidad compartida, se espera que cada miembro del grupo lleve a cabo el trabajo que se le ha asignado y colabore con los compañeros cuando lo necesiten.

Esta colaboración incluye participar en el proceso de toma de decisiones, en la resolución de dudas que surgen al realizar la actividad de práctica guiada, será necesario que durante la lúdica el grupo tengan tiempo de discutir, si el trabajo que está efectuando

cada miembro del grupo se complementa con el de los otros y si están alcanzando los objetivos propuestos. Por lo tanto, se trata de una estrategia que busca la interacción entre pares, en el que dentro de su desarrollo los miembros del grupo identifican tareas específicas y asignan roles para responder por dichas tareas.

#### **5.7.4 Fase 4- Evaluación Final (EF).**

La aplicación de esta fase implica realizar previamente el análisis de los procesos de regulación metacognitiva que los estudiantes alcanzaron durante el modelado metacognitivo y la practica guiada, al igual que los avances frente a la solución de los problemas multiplicativos tipo Vergnaud, se parte de un cuestionario de evaluación final (anexo 7) aplicado a los estudiantes y el instrumento de la lista de cotejo (anexo 8) llevado por el docente. Esta fase se ejecuta dos semanas después de aplicada la fase dos y tres.

Esta fase concentra los resultados finales del proyecto investigativo, permitiendo determinar el avance positivo o las dificultades persistentes de los estudiantes en los procesos de regulación metacognitiva en la solución de problemas de orden multiplicativo, caracterizar de la misma forma que procesos de regulación metacognitiva implementan o se les dificulta a los estudiantes de grado séptimo a nivel general y en cada una de las categorías, identificando de qué manera mejoran los procesos de regulación metacognitiva y como esto contribuye en la solución o desempeño positivo de este tipo de problemas.

La particularidad de esta fase radica potencialmente en el trabajo autónomo que el estudiante realice al enfrentarse a la solución de problemas multiplicativos de tipología Vergnaud, sin guía, ni orientación del profesor.

Mediante la lista de cotejo operada por el profesor se estableció el grado de evolución del proceso de planeación, monitoreo y evaluación a nivel general y en cada una de las categorías de problemas multiplicativos tipología Vergnaud, los niveles de desempeño

por categoría entre la fase de exploración y la práctica guiada, la fase de exploración y la evaluación final y las tres fases antecedentes. Anexo 9, dicha lista se conformó por 5 elementos de las estrategias de planeación, 4 de monitoreo y 2 de evaluación; existiendo 10 evidencias por proceso de regulación metacognitiva, que se verificaron en cada uno de los estudiantes.

Gairin y Sanmartí (1998) afirman que:

*Por ello es necesario enseñar al alumnado a autoevaluarse y autorregularse. Un estudiante que quiera aprender a aprender deberá llegar a saber cómo detectar sus dificultades o incoherencias, comprender por qué las tiene, y tomar decisiones para superarlas. Un enseñante que quiera ayudar a sus estudiantes en este proceso de aprendizaje deberá promover esta evaluación y facilitar la aplicación de estrategias autorregulativas. En otras palabras, la evaluación del profesorado debería facilitar fundamentalmente la autoevaluación del alumnado. (p.5)*

El cuestionario aplicado a los alumnos constó de un tipo de problema multiplicativo tipología Vergnaud y una serie de preguntas metacognitivas que fueron contempladas dentro de las evidencias de los distintos elementos de las estrategias de planeación, monitoreo y evaluación; se desarrolla en 8 sesiones de 2 horas en las que los estudiantes desarrollan cada actividad con cada una de las categorías de problemas multiplicativos.

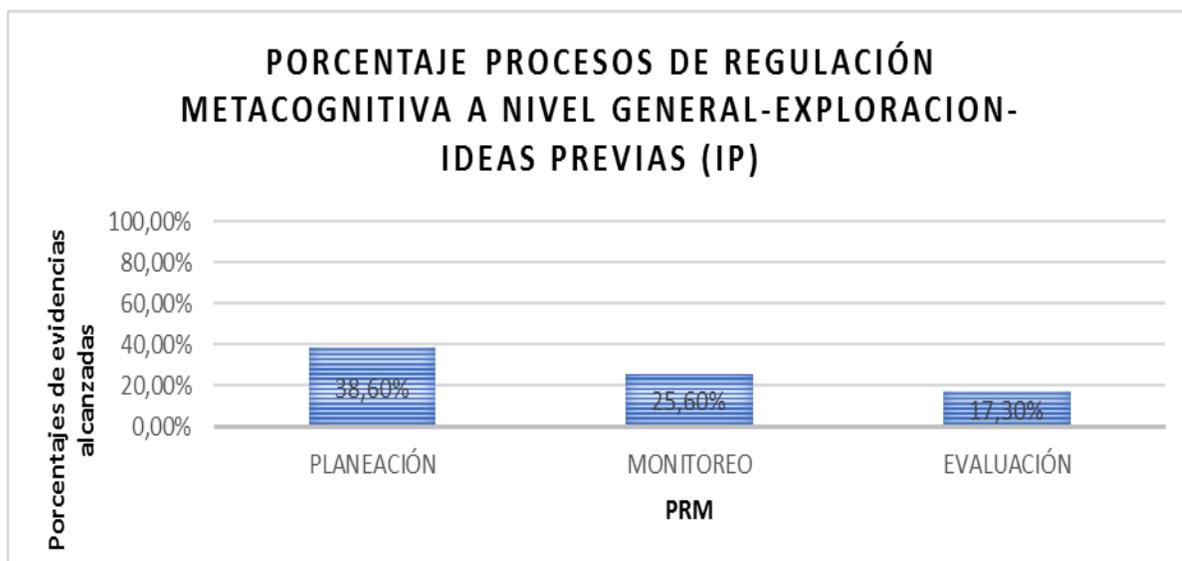
## 6 ANALISIS DE DATOS

### 6.1 ANÁLISIS FASE DE EXPLORACIÓN (FE)-IDEAS PREVIAS (IP)

#### 6.1.1 Análisis Procesos De Regulación Metacognitiva

El objetivo de la primera presentación del análisis esta direccionado en describir los procesos de regulación metacognitiva implementados por los estudiantes en la solución de problemas de orden multiplicativo. En este análisis se examinaron detalladamente cada una de las intervenciones presentes en el cuestionario escrito y se seleccionaron oraciones con sentido que aludieran al uso de estos procesos, catalogándose como evidencias, plasmadas en una lista de cotejo. La tendencia frente a cada proceso de regulación metacognitiva se puede apreciar en los siguientes gráficos:

*Gráfico 1 Porcentajes de procesos de regulación metacognitiva que implementan estudiantes al solucionar problemas de orden multiplicativo-F1- exploración (IP)*



Como se puede observar en el gráfico 1 se evidencia que a nivel general la mayoría de estudiantes de grado séptimo cumplen con los siguientes elementos de las estrategias de planeación: organizan el proceso de resolución del problema, seleccionan la estrategia

general de resolución del problema y explicitan un conjunto de procedimientos para organizar los datos o las acciones que realizará para resolver el problema. lo cual es parte fundamental del proceso de resolución de problemas (Tamayo 2006).

Por otro lado se observa que solo un 25,6% de las evidencias corresponden al monitoreo y tan solo un 17,3% a la evaluación, lo cual demuestra que los estudiantes presentan cierta dificultad para realizar acciones que le den valor a la solución de los problemas, dificultándoseles simultáneamente realizar una revisión del proceso que llevaron.

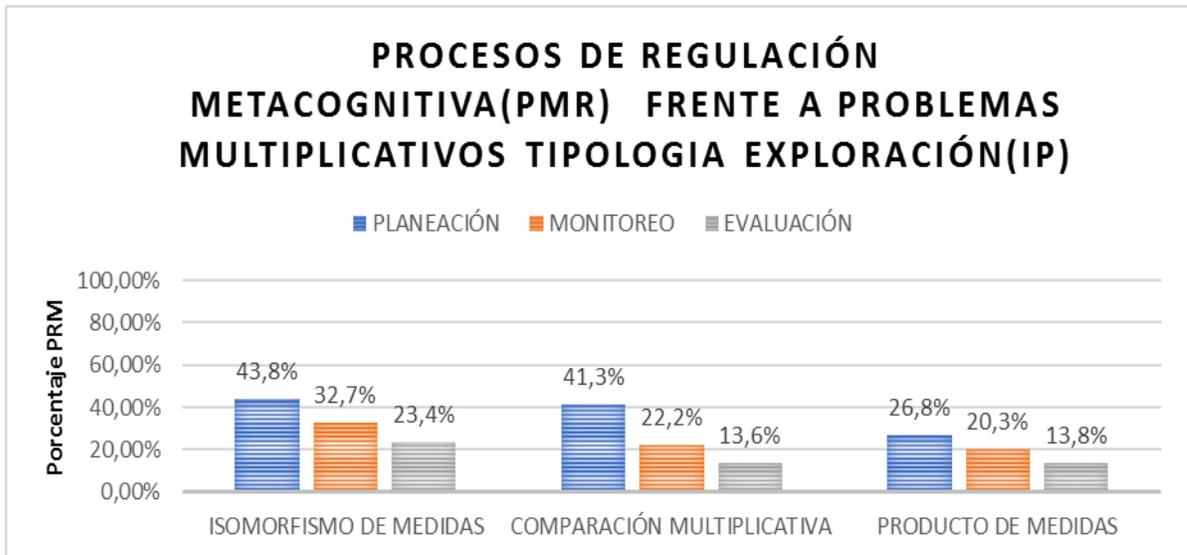
De igual manera se visualiza que los estudiantes presentan deficiencias para identificar si las operaciones y algoritmos multiplicativos aplicados en la solución del problema de orden multiplicativo se desarrollan de manera correcta, el proceso de evaluación al parecer no es suficiente para determinar que correctivos se pueden tomar y definir otros posibles caminos de solución.

Se concluye que los estudiantes de grado séptimo no tienen la fundamentación suficiente para abordar sus procesos de regulación metacognitiva en la resolución de problemas multiplicativos, lo que indica la necesidad de entablar acciones de intervención sobre estos procesos.

### **6.1.2 Análisis De Los Procesos De Regulación Metacognitiva Frente A La Estructura Multiplicativa De Problemas Tipología Vergnaud.**

De acuerdo a lo anterior y teniendo en cuenta que los problemas de orden multiplicativo están subdivididos por categorías se realiza un análisis para examinar en cuál de estas se presentan mayores dificultades en los procesos de regulación metacognitiva. El siguiente grafico muestra los resultados obtenidos.

Gráfico 2 Porcentajes procesos de regulación metacognitiva en cada estructura de problemas de orden multiplicativo- F1- exploración (IP)



En el gráfico 2 es posible notar que los estudiantes presentan mejores resultados en cuanto al uso de proceso de regulación metacognitiva en el isomorfismo de medidas y también mayor dificultad en los problemas de producto de medidas. Esto tiene que ver con que al resolver los problemas multiplicativos de isomorfismo de medida los estudiantes se enfrentan a dos clases de relaciones entre los datos presentados en el enunciado, una de tipo cuaternario y otra de tipo ternario.

Sin embargo la mayoría de estudiantes establecen más fácilmente una relación ternaria ya sea dividiendo o multiplicando dos unidades de medidas y obteniendo una tercera unidad de medida, observándose mejores procesos de regulación metacognitiva tanto en la planeación, el monitoreo y la evaluación, ya que identifican de forma acertada los datos (magnitudes), tienen claro cuál es el procedimiento posible para la solución del problema y realizan algunas acciones para revisar la validez del proceso de resolución del problema tal como verificar con el uso de la multiplicación si la respuesta obtenida es la correcta, siendo más evidente en los problemas de isomorfismo de medidas por división partitiva y medida (IMDP e IMDM) como lo indica la figura 1

**Figura 1** Caso problema IMDM –fase 1 exploración –E4

<b>F1E-IP-E4</b>	
<p><b>Problema IMDM:</b> En un tren van a viajar 900 personas, si tiene 36 vagones.¿ Cuántas personas viajarán en cada uno?</p>	<b>PREGUNTAS METACOGNITIVAS</b>
	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. ¿Cuáles son los datos que se requiere para solucionar el problema?</li> <li>2. Muéstranos el procedimiento ó los procedimientos posibles y resuelve el problema. Si requieres apoyarte en un gráfico o dibujo lo puedes hacer.</li> <li>3. De que manera podemos verificar si la respuesta es correcta? Muéstranos.</li> </ol>
<b>Tratamiento F1E-IP-E4 –IMDM en el registro-Lenguaje común</b>	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. DATOS: 900 personas 36 vagones</li> <li>1. Puedo hacerlo con una división, dividiendo las 900 personas entre los 36 bagones así: <math>900 \div 36 = 25</math> . entonces en cada bagon van 25 personas</li> <li>5. para saber si la respuesta es correcta solo hago una multiplicación de las 25 personas por los 36 bagones y me debe dar las 900 personas que van a viajar en el tren, Así: <math>36 \times 25 = 900</math>. Entonces esta bien hecho el problema. (Discurso tomado de anexo 5 F1E-IP. Problema 3)</li> </ol>	

**Fuente:** elaboración propia

Por otra parte al solucionar los problemas de productos de medidas por multiplicación y división (PMM y PMD) se evidencia que los estudiantes presentan mayores dificultades en los procesos de regulación metacognitiva a la hora de solucionar los problemas producto de medidas por división (PMD) ya que en este punto deben establecer una relación de división entre una unidad de medida producto (resultado) y la unidad elemental conocida, para encontrar la unidad elemental desconocida o uno de sus componentes, como lo muestra la figura 2 .

**Figura 2** Caso problema PMD-fase 1 exploración-E6

<b>F1E-IP-E6</b>	
<p><b>Problema PMD:</b> Natalia combinando las blusas y pantalones de su guarda ropa obtiene 15 pintas diferentes. Si hay 3 blusas de distinto modelo. ¿Cuántos pantalones tiene Natalia ?</p>	<b>PREGUNTAS METACOGNITIVAS</b>
	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. ¿Cuáles son los datos que se requiere para solucionar el problema?</li> <li>3. ¿Los datos propuestos en el problema son suficientes?. SI___NO___ ¿Por qué?</li> <li>4. Muéstranos el procedimiento ó los procedimientos posibles y resuelve el problema. Si requieres apoyarte en un gráfico o dibujo lo puedes hacer.</li> <li>5. De que manera podemos verificar si la respuesta es correcta? Muéstranos.</li> </ol>
<b>Tratamiento F1E-IP-E6 –PMD en el registro-Lenguaje común</b>	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 3 blusas 15 pintas Pantalone?</li> <li>3. No se talves si</li> </ol>	

- |  |
|--|
| <p>4. puede que sea multiplicando <math>3 \times 15 = 45</math> y da 45 pantalones o tal vez dividido <math>15 \div 3 = 5</math> y me da 5 pantalones<br/>5. no lo tengo bien claro.<br/>(Discurso tomado de anexo 5 F1E-IP. Problema 8)</p> |
|--|

*Fuente: elaboración propia*

En este caso se evidencia que los estudiantes identifican los datos ó magnitudes involucrados en el problema, es decir pueden determinar que la medida uno es 3 blusas, la medida dos se desconoce y la medida tres que equivale al producto ó resultado de las dos anteriores es 15; sin embargo, no pueden determinar si estos datos son suficientes, no aplican procedimientos ordenados para organizarlos o las acciones necesarias para resolver el problema (planeación).

De igual forma demuestran poco conocimiento sobre sus propios procesos cognitivos, existiendo solo 6 evidencias (monitoreo), ya que no tienen claro si usan una multiplicación o una división o que unidades de medida se involucran en la operación ; si tienen que dividir por ejemplo  $15 \div 3$  o multiplicar  $15 \times 3$  o usar una regla de tres para obtener la medida dos que se desconoce , se aprecia que no pueden verificar si la respuesta obtenida en la solución del problema es correcta o incorrecta , por ejemplo comprobando que al multiplicar 3 blusas con 5 pantalones me da como producto las 15 combinaciones que aparecen en el enunciado del problema y que por lo tanto la respuesta correcta sería 5 pantalones.

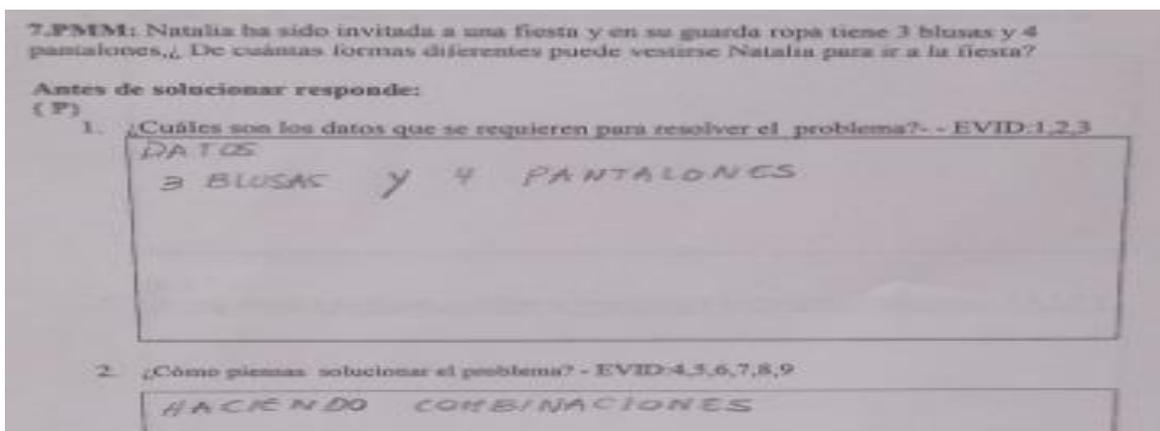
A los estudiantes se les limita identificar si las operaciones y algoritmos multiplicativos aplicados en la solución del problema se desarrollan como lo tenía previsto, tampoco está seguro de que la solución del problema sea correcta o incorrecta (evaluación)

### 6.1.3 Casos De Evidencia Frente A La Categoría De Problema Multiplicativo Con Mayor Dificultad De Los Procesos De Regulación Metacognitiva.

#### 6.1.3.1 Problemas producto de medidas.

#### 6.1.3.2 Planeación -Caso Problemas producto de medidas por multiplicación.

**Figura 3** Caso problema PMM, fase 1-exploración-E2



<b>F1E-IP-E2</b>	
<p><b>Problema PMM:</b> Natalia ha sido invitada a una fiesta y en su guarda ropa tiene 3 blusas y 4 pantalones. ¿De cuántas formas diferentes puede vestirse Natalia para ir a la fiesta?</p>	<p><b>PREGUNTAS METACOGNITIVAS</b></p>
	<p>1.¿Cuáles son los datos que se requiere para solucionar el problema?</p> <p>2.¿Cómo piensas solucionar el problema?</p>
<p><b>Tratamiento F1E-IP-E2 –PMM en el registro-Lenguaje común</b></p> <p>1 DATOS: 3 BLUSAS Y 4 PANTALONES</p> <p>2. HACIENDO COMBINACIONES</p> <p>(Discurso tomado de anexo 5 F1E-IP. Problema 7)</p>	

**Fuente:** elaboración propia

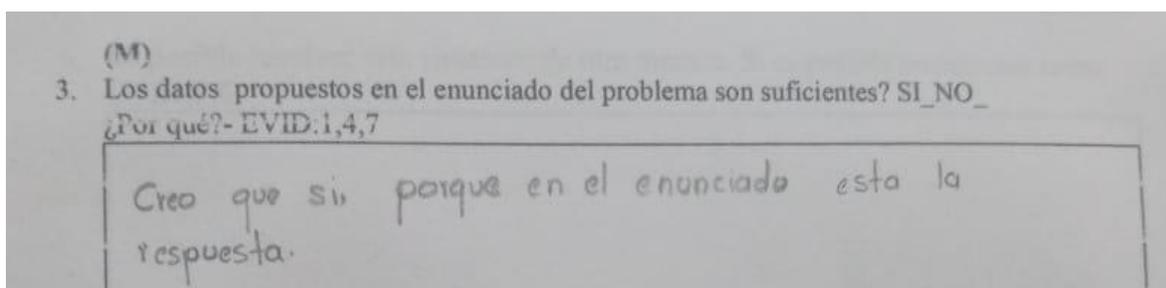
En la figura 3 se demuestra que el estudiante **E2** presenta dificultades durante el proceso metacognitivo de planeación ya que identifica los datos para resolver el problema producto de medidas por multiplicación, estableciendo que los datos son “3 blusas y 4 pantalones para combinar”, sin embargo a través de las evidencias se identificó la dificultad para explicar de forma ordenada los procedimientos necesarios para resolver el problema, ya que anota: “haciendo combinaciones”, pero no establece la relación operacional que puede existir entre las unidades de medidas y las magnitudes “3 y 4”, es

decir, si para solucionar el problema requiere una multiplicación, una división o un producto cartesiano.

Al respecto Tamayo (2006), diseña un plan como la parte fundamental del proceso de resolución de problemas. Una vez comprendida la situación planteada y teniendo clara cuál es la meta a la que se quiere llegar, es el momento de planificar las acciones que llevarán a ella, es necesario abordar cuestiones como para qué sirven los datos que aparecen en el enunciado, qué puede calcularse a partir de ellos, qué operaciones utilizar y en qué orden se debe proceder.

### 6.1.3.3 Monitoreo -Caso Problemas producto de medidas por división.

**Figura 4** Caso problema PMD, fase 1 exploración-E5



<b>F1E-IP-E5</b>	
<p><b>Problema PMD:</b> Natalia combinando las blusas y pantalones de su guarda ropa obtiene 15 pintas diferentes .Si hay 3 blusas de distinto modelo. ¿Cuántos pantalones tiene Natalia?</p>	<b>PREGUNTAS METACOGNITIVAS</b>
	<p>3. Los datos propuestos en el enunciado del problema son suficientes? SI_NO__¿Porqué?</p> <p>4. Muéstranos el procedimiento o los procedimientos posibles y resuelve el problema. Si requieres apoyarte en un gráfico o dibujo lo puedes hacer.</p>
<p><b>Tratamiento F1E-IP-E5 –PMD en el registro-Lenguaje común</b></p> <p>3.Creo que si, porque en el enunciado esta la respuesta</p> <p>4. No contesta</p> <p>(Discurso tomado de anexo 5 F1E-IP. Problema 8)</p>	

**Fuente:** elaboración propia

Como se aprecia en la figura 4 , basándose en los elementos de estrategias de monitoreo y las evidencias, los estudiantes no revisan la validez del proceso de resolución del problema, tampoco buscan errores de forma sistemática en los datos del problema, en los procedimientos de resolución y tienen limitaciones a la hora de determinar sus propios

procesos cognitivos en la solución de los problema, ya que les es imposible determinar en el problema de medidas por división que existe una unidad medida o producto c ( 15 combinaciones) y una de las unidades de medida iniciales a (3 blusas) y que se requiere hallar otra unidad de medida b ( 5 pantalones), además no puede determinar los algoritmos matemáticos necesarios para resolverlo, ya que solo requiere efectuar una división de  $15 \div 3 = 5$  pantalones o buscar un número que multiplicado por 3 de como resultado 15 combinaciones.

Schoenfeld (como se citó en Barrantes, 2006) subraya:

*La importancia de que el estudiante o la persona que está resolviendo el problema tenga una habilidad para monitorear y evaluar el proceso. En cuanto a eso, Schoenfeld (1985) señala que es, también, conocimiento de sí mismo: la persona que está resolviendo el problema debe saber qué es capaz de hacer, con qué cuenta, o sea, conocerse en cuanto a la forma de reaccionar ante esas situaciones. (p.3)*

#### 6.1.3.4 Evaluación -Caso Problemas producto de medidas por multiplicación.

**Figura 5** Caso problema PMM, fase 1 exploración- E5

The figure shows three sections of a handwritten evaluation form. The first section is titled 'EVALUACIÓN' and contains question 5: 'De qué manera podemos verificar si la respuesta es correcta. Muéstranos'. The student's response is 'talvez sumando las combinaciones'. The second section contains question 6: 'Es posible resolver esta situación de otra manera. Si es posible muéstranos como:'. The student's response is 'Pueda que no'. The third section contains question 7: '¿Cuáles pasos y operaciones aplicaste en la solución del problema de acuerdo a lo que planeaste inicialmente?'. The student's response is 'Es complicado explicarlo'.

<b>F1E-IP-E5</b>	
<p><b>Problema PMM:</b> Natalia ha sido invitada a una fiesta y en su guarda ropa tiene 3 blusas y 4 pantalones. ¿De cuántas formas diferentes puede vestirse Natalia para ir a la fiesta?</p>	<p style="text-align: center;"><b>PREGUNTAS METACOGNITIVAS</b></p> <p>5. De qué manera podemos verificar si la respuesta es correcta. Muéstranos</p> <p>6. Es posible resolver esta situación de otra manera. Si es posible muéstranos como:</p> <p>7. ¿Cuáles pasos y operaciones aplicaste en la solución del problema de acuerdo a lo que planeaste inicialmente?</p>
<p><b>Tratamiento F1E-IP-E5 –PMM en el registro-Lenguaje común</b></p> <p>5. tal vez sumando las combinaciones</p> <p>6. Pueda que no</p> <p>7. Es complicado explicarlo</p> <p>(Discurso tomado de anexo 5 F1E-IP. Problema 7)</p>	

***Fuente: elaboración propia***

Considerando el proceso de evaluación, la figura 5 nos muestra que los estudiantes de acuerdo a los elementos de las estrategias de evaluación no identifican si las operaciones y algoritmos multiplicativos aplicados en la solución del problema se desarrollaron como lo planeo inicialmente, y aunque tengan claros los datos no tiene un plan definido sobre qué operación debe aplicar entre las dos medidas elementales M1(3 blusas) y M2( 4 pantalones) para la creación de una nueva medida o producto M3(12 combinaciones), por lo tanto tampoco es consciente de los avances y dificultades que ha tenido durante el procedimiento del problema multiplicativo, se le dificulta establecer que correctivos se puede tomar sobre la marcha de la solución del mismo y no está seguro si la solución es correcta o incorrecta.

La observación general de los casos en la solución de los problemas de productos de medida permite determinar que a pesar de que los estudiantes presentan claridad sobre los datos involucrados en esta categoría multiplicativa, no pueden verificar si estos los llevará a la solución del problema, simplemente ejecutan las tareas que creen convenientes para dar una respuesta sin tener en cuenta un plan elaborado, sin determinar si la solución es correcta o incorrecta o proponer otras estrategias para llegar a la solución del mismo, esto se evidencia en el grafico 1 en los procesos de monitoreo y evaluación.

Adicionalmente cuando el estudiante tiene conocimiento sobre los procesos metacognitivos con respecto a la solución de problemas matemáticos, permite que este reconozca más fácilmente la naturaleza del problema, logrando planear una guía efectiva

que aporte al aprendizaje autónomo, lo que conlleva que al estudiante debe enseñársele a planificar, controlar y evaluar la ejecución del problema, que conlleve a que este realice un uso espontáneo de las estrategias y se le facilite generalizarlas en la solución de otros problemas (Jaramillo y Simbaña, 2014).

De esta forma las estructuras teóricas que competen al problema de investigación convergen y adquieren sentido, al ser una situación viable para investigar. Así mismo, los procesos meta-cognitivos que se llevan a cabo para desarrollar o resolver un tipo de problema dependen, del tipo de problema (en este caso los relacionados con los productos de medida) y se hace necesario una mayor exploración desde el punto de vista de las interacciones entre los procesos de regulación metacognitiva y la resolución de este tipo de problemas.

#### 6.1.4 Análisis De Los Niveles De Resolución De Problemas En Cada Estructura Multiplicativa De Problemas Tipología Vergnaud.

Durante la primera fase se caracterizó de acuerdo a ítem (tabla 8) el nivel inicial en el que se encontraban cada uno de los estudiantes respecto a la resolución de problemas, como se observa en tabla 10.

*Tabla 10 Caracterización Niveles de resolución de problemas 1 fase-Exploración*

Estudiante	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6	Problema 7	Problema 8
	ISOMORFISMO DE MEDIDAS			COMPARACIÓN MULTIPLICATIVA			PRODUCTO DE MEDIDAS	
	IM M	IMDP	IMD M	CMM	CMD 1	CMD 2	PMM	PMD
E1	0	2	1	2	1	2	0	0
E2	0	1	1	0	0	0	0	1
E3	0	0	0	1	0	0	0	0
E4	0	3	3	0	0	2	2	0
E5	0	0	0	2	0	0	0	0
E6	2	4	3	3	0	0	3	0

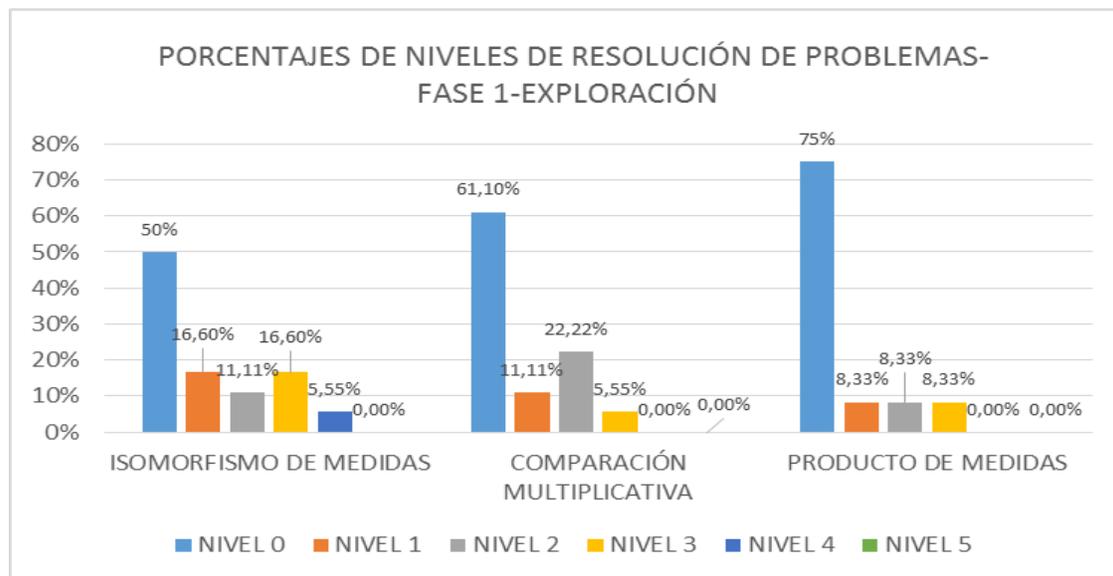
Porcentaje s de niveles por cada estructura multiplicativa								
<b>Nivel 0</b>	50 %			61,1%			75%	
<b>Nivel 1</b>	16,6 %			11,11 %			8,33%	
<b>Nivel 2</b>	11,1 1%			22,22 %			8,33%	
<b>Nivel 3</b>	16,6 %			5,55%			8,33%	
<b>Nivel 4</b>	5,55 %			0,0%			0,0%	
<b>Nivel 5</b>	0,0 %			0,0%			0,0%	

*Fuente: Elaboración propia*

El objetivo de la segunda presentación del análisis esta direccionado a establecerlos los resultados porcentuales procedentes de los niveles de resolución para cada estructura multiplicativa de problemas tipología Vergnaud y la caracterización de cada uno de ellos.

La caracterización de dichos niveles fue analizada considerando los ítems de tabla 8. Se asignó el nivel 0 cuando los estudiantes no utilizan los datos del enunciado y tampoco proponen una mínima solución del problema y se asignó el nivel 5, como el máximo nivel alcanzado por los estudiantes cuando resuelven el problema acertadamente, relacionando las magnitudes y unidades de medida, estableciendo relaciones entre los datos y justificando el algoritmo usado con sustento conceptual. Los resultados se aprecian en el gráfico 3.

Gráfico 3 Porcentajes de niveles de resolución de problemas de estructura multiplicativa tipo Vergnaud  
 –F1-exploración (IP)



*Fuente: elaboración propia*

En el gráfico 3 y tabla 10 se pudo observar que en mayor porcentaje los estudiantes al enfrentarse a la resolución de problemas de productos de medidas no utilizaron datos del enunciado y tampoco expresaron alguna propuesta de resolución, alcanzando solo el nivel 0, aunque se caracterizó que el 8,33% de resoluciones alcanzaron el nivel 1, reescribiendo la situación del enunciado y utilizando datos para justificar las respuestas; solo un caso de resolución equivalente al 8,33% alcanza el nivel 2 en el que se evidencia que el estudiante E4 cumplió el nivel anterior y reconoció problemas similares resueltos con anterioridad y solo el estudiante E6 alcanzó el nivel 3, identificando las variables del problema sin establecer relaciones entre estas.

Al resolver los problemas tipo Vergnaud se resalta la resolución de los problemas de isomorfismo de medidas ya que solo un 50% alcanza el nivel 0 caracterizando la utilización nula de los datos del enunciado del problema y el planteamiento de una posible solución; sin embargo se aprecia que un 16,6% de las resoluciones permitió que se organicen los datos para poder planear una posible resolución alcanzando el nivel 1; y los estudiantes E1 y E6 alcanzan el nivel 2 en la que cumplen el nivel anterior y comparan los diversos problemas de isomorfismo de medidas desarrollados previamente;

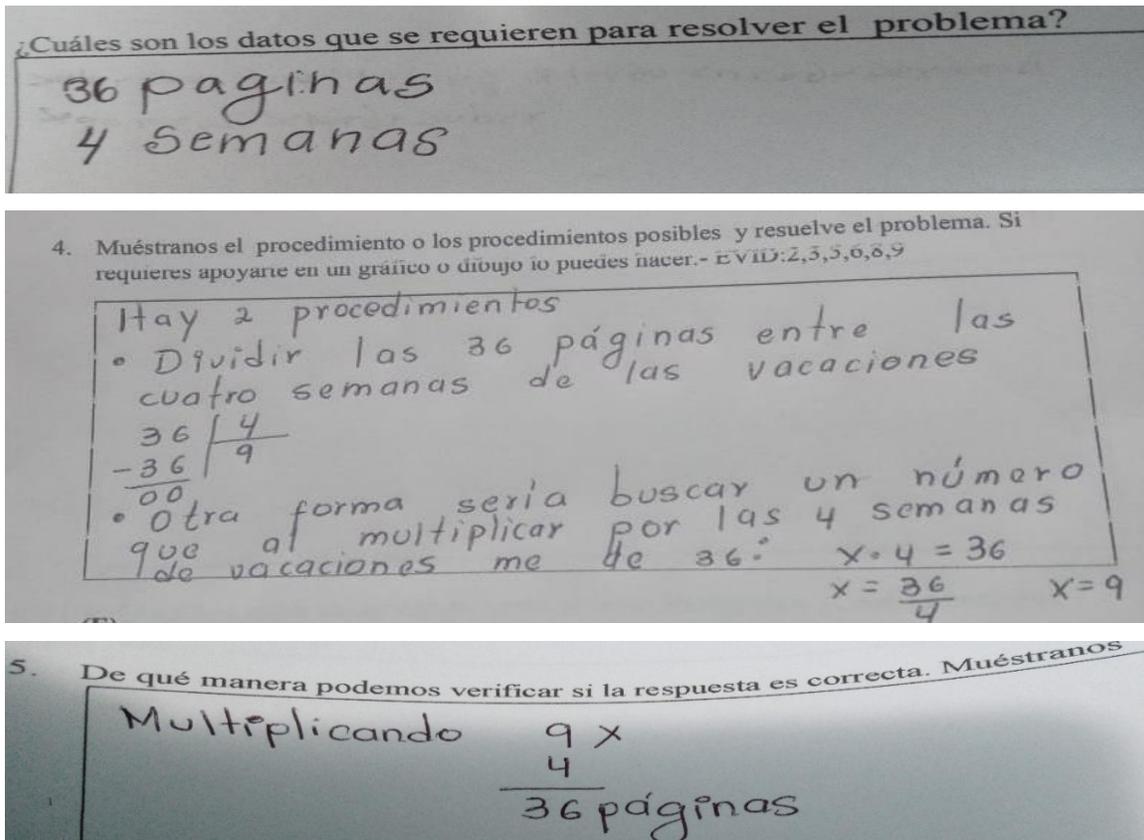
los estudiantes E4 y E6 alcanzan el nivel 3 logrando identificar los datos involucrados en el problema, pero no alcanzaron establecer las relaciones entre los datos del enunciado; se resalta a diferencia de los problemas de comparación multiplicativa y producto de medidas, que en los problemas de isomorfismo de medidas un estudiante resolvió el problema de manera inadecuada, pero logró relacionar las variables y justificó el procedimiento de solución de forma algorítmica, alcanzando el nivel 4.

De acuerdo a lo anterior se alcanzan mejores niveles de resolución frente a los problemas de isomorfismo de medidas mientras que hay mayores dificultades en los problemas de productos de medida, algunas investigaciones han mostrado que los problemas de estructura multiplicativa presentan diferente nivel de dificultad, considerando grupos particulares de problemas y tipos de números usados (naturales o decimales). Neshier (1992) estableció que, de manera general los problemas de isomorfismo de medidas eran los más fáciles de resolver, los de producto de medidas (a los que denomina de producto cartesiano) eran los más difíciles y los de comparación multiplicativa se hallarían entre ambos (Ivars y Fernández, 2016).

Aunque se alcanzó mejores niveles de resolución a los problemas multiplicativos de isomorfismo de medidas, se requiere mejorar los procesos de regulación metacognitiva para obtener mejores resultados en la solución de este tipo de problemas, no obstante de forma general los estudiantes usaron el algoritmo de la división como una relación ternaria y en algunos casos como el estudiante **E1**, (Figura 6) establecieron una relación cuaternaria de la multiplicación usando ecuaciones lineales, evidenciándose que el estudiante tiene en cuenta otros procedimientos posibles para resolver el problema, verificando mediante una operación inversa (multiplicación) si la respuesta que obtuvo es correcta.

Al respecto se consideró el siguiente ejemplo:

**Figura 6** Caso problema IMDP, fase 1 exploración- E1



F1E-IP-E1	
<p><b>Problema IMDP:</b> Eva quiere leer un cuento de treinta y seis páginas en vacaciones, si estas duran cuatro semanas. ¿Cuántas páginas debe leer cada semana?</p>	<p><b>PREGUNTAS METACOGNITIVAS</b></p> <p>1. P. Cuáles son los datos que se requiere para solucionar el problema?</p> <p>4. M. Muéstranos el procedimiento o los procedimientos posibles y resuelve el problema. Si requieres apoyarte en un gráfico o dibujo lo puedes hacer.</p> <p>5. E. De qué manera podemos verificar si la respuesta es correcta. Muéstranos.</p>
	<p><b>Tratamiento F1E-IP-E1 –IMDP en el registro-Lenguaje común</b></p> <p>1. 36 páginas 4 semanas.</p> <p>4. Hay 2 procedimientos</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Dividir las 36 páginas entre las cuatro semanas de las vacaciones <math>36 \div 4 = 9</math></li> <li>• Ó otra forma sería buscar un número que al multiplicar por las 4 semanas de vacaciones me de 36: <math>X \cdot 4 = 36</math>    <math>X = 36/4</math>    <math>X = 9</math></li> </ul> <p>5. Multiplicando <math>9 \times 4 = 36</math> (Discurso tomado de anexo 5 F1E-IP. Problema 2)</p>

**Fuente:** elaboración propia

Como se estableció en el gráfico 3, la estructura multiplicativa de menor nivel de resolución fue producto de medidas, Si bien los estudiantes tienen claridad sobre los datos del problema, no pueden establecer una relación multiplicativa o cartesiana del mismo y esto conlleva a que el procedimiento planteado se limite a crear una relación

combinatoria uno a uno obteniendo una respuesta incorrecta. Los estudiantes no evidencian que existe una multiplicación conmutativa y una relación ternaria entre las dos medidas M1 (3 blusas) y M2 (4 pantalones):  $3 \times 4$  ó  $4 \times 3$  que les permita obtener otra medida M<sub>3</sub> (12 combinaciones).

De igual forma se les dificulta usar otros procedimientos para solucionar el problema, por ejemplo, el resultado de multiplicar  $3 \times 4$ , habría de considerarse un conjunto A de tres blusas o elementos (b1, b2, b3) y un conjunto B de cuatro pantalones o elementos (P1, P2, P3, P4). Que le permitan representar el producto cartesiano de A y B .. Hallando el cardinal de este producto A x B se obtendría el resultado 12.

Para Vergnaud (1991), define este tipo de situaciones multiplicativas como “una relación ternaria entre tres cantidades de las cuales una es el producto de las otras dos, tanto en el plano numérico, como en el plano dimensional”. Al no tener claridad en cómo resolver el problema, los estudiantes no pueden verificar si la respuesta obtenida es correcta. De acuerdo a la figura 7 el desempeño en el caso del estudiante **E1** frente a esta categoría de problemas, está relacionado directamente con las dificultades presentes en los procesos de regulación metacognitiva (planeación, monitoreo y evaluación).

Todos estos aspectos se aprecian en el siguiente ejemplo:

*Figura 7 Caso problema PMM, fase 1 exploración- E1*

7.PMM: Natalia ha sido invitada a una fiesta y en su guarda ropa tiene 3 blusas y 4 pantalones. ¿ De cuántas formas diferentes puede vestirse Natalia para ir a la fiesta?

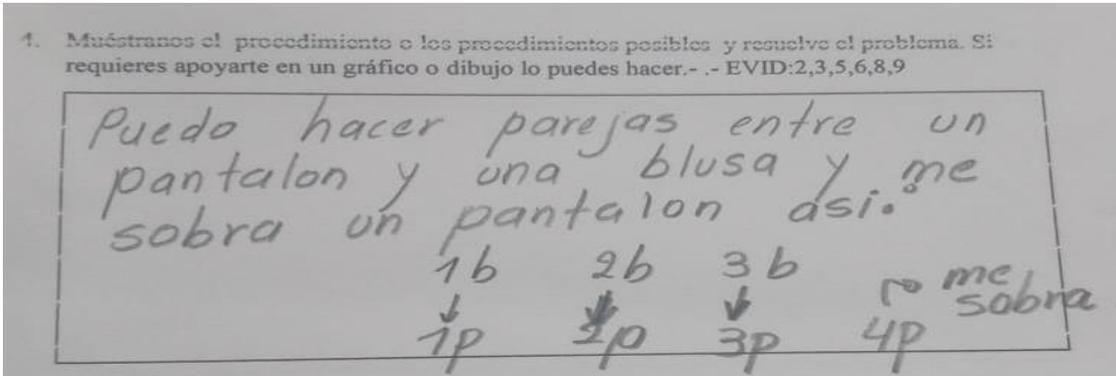
Antes de solucionar responde:

(P)

1. ¿Cuáles son los datos que se requieren para resolver el problema?- - EVID:1,2,3

Datos  
3 blusas y 4 pantalones

4. Muéstranos el procedimiento o los procedimientos posibles y resuelve el problema. Si requieres apoyarte en un gráfico o dibujo lo puedes hacer. - EVID:2,3,5,6,8,9



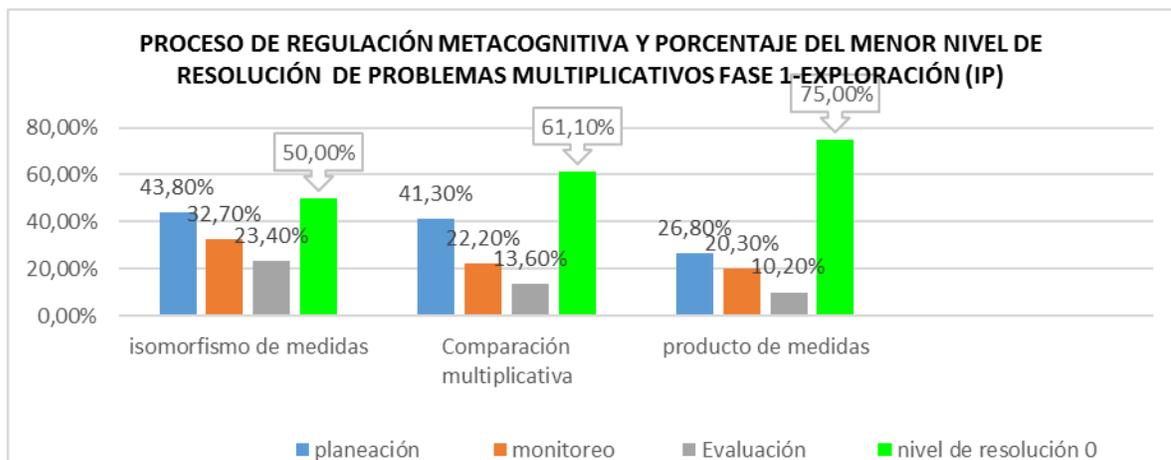
<b>F1E-IP-E1</b>	
<p><b>Problema PMM:</b> Natalia ha sido invitada a una fiesta y en su guarda ropa tiene 3 blusas y 4 pantalones.¿ De cuántas formas diferentes puede vestirse Natalia para ir a la fiesta?</p>	<p><b>PREGUNTAS METACOGNITIVAS</b></p> <p>1 <b>P.</b> Cuáles son los datos que se requiere para solucionar el problema?</p> <p>3. <b>M.</b> Muéstranos el procedimiento o los procedimientos posibles y resuelve el problema. Si requieres apoyarte en un gráfico o dibujo lo puedes hacer.</p> <p>5. <b>E.</b> De qué manera podemos verificar si la respuesta es correcta. Muéstranos- Evaluación</p>
<p><b>Tratamiento F1E-IP-E1 –PMM en el registro-Lenguaje común</b></p> <p>1. 3 blusas y 4 pantalones</p> <p>3. Puedo hacer parejas entre un pantalon y una blusa y me sobra un pantalón. Asi:</p> <div style="text-align: center; margin: 10px 0;"> <p>1b    2b    3b</p> <p>↓    ↓    ↓</p> <p>1p   2p   3p   4p   me sobra →</p> </div> <p>5. No responde (Discurso tomado de anexo 5 F1E-IP. Problema 7)</p>	

*Fuente: elaboración propia*

### 6.1.5 Relación De Los Procesos De Regulación Metacognitiva Y Porcentaje De Los Niveles De Resolución Por Cada Estructura Multiplicativa De Tipología Vergnaud

Esta parte final del análisis se orienta a mostrar la relación entre los procesos de planeación, monitoreo y evaluación con el porcentaje proporcional del menor nivel de resolución de los problemas multiplicativos. Lo anterior se aprecia en el siguiente gráfico:

Gráfico 4 Porcentaje proceso de regulación metacognitiva y porcentaje del menor nivel de resolución de problemas multiplicativos-F1-exploración (IP).



**Fuente:** elaboración propia

De acuerdo a la gráfica 4 se evidenció que hay una mayor relación entre la dificultad para identificar los datos del enunciado del problema y proponer un camino de resolución con las limitaciones en los procesos de regulación metacognitiva. Como se pudo observar en los problemas de producto de medidas, al parecer los estudiantes no comprendían el problema y no estaban seguros de que tipo de operación usar a la hora de resolver el problema (sumar, multiplicar, dividir, hacer combinatoria), o que unidades de medida estaban involucradas, verificándose que nivel 0 alcanzó el mayor porcentaje en los problemas de productos de medidas, seguido de comparación multiplicativa y en menor proporción porcentual en los problemas de isomorfismo de medidas.

Retomando el caso con el estudiante **E1** (figura 7) se observa que no existe claridad a la hora de escoger las estrategias o procedimientos para solucionar el problema multiplicativo, el estudiante **E1** presenta un procedimiento desordenado.

La autora Brown(citada por Cadavid, 2014) relaciona (...), los procesos de regulación metacognitiva potencian el desempeño de los estudiantes al determinar el proceso que sigue antes, estableciendo que en esta etapa de la resolución de problemas se contemplan múltiples estrategias para decidir cuáles se adaptan más a la situación específica, diseñando así el rumbo a seguir para llegar del estado inicial al hallazgo de la solución,

sin embargo el estudiante no organiza por pasos la estrategia necesaria para llegar a la solución del problema solo establece una relación combinatoria al azar que no relaciona con ninguna acción operativa.

Los estudiantes al enfrentarse al problema del producto de medidas no realizan acciones para revisar la validez del proceso, presentan limitaciones sobre sus propios procesos cognitivos y no buscan errores de forma sistemática; en los datos del problema, en los procedimientos de resolución y los algoritmos matemáticos utilizados. Se les dificulta mostrarnos al menos un procedimiento claro en los problemas PM (producto de medidas).

Se observa que los estudiantes no pueden identificar si las operaciones y algoritmos aplicados en la solución del problema se desarrollan como lo tenía previsto, es decir como en el caso del estudiante **E1**, se observa según la gráfica 4 y figura 7 que presenta mayor dificultad durante el monitoreo y la evaluación ya que no realizan acciones para revisar la validez del proceso y de resolución del problema. Tampoco ejecuta intervenciones sobre los resultados que va obteniendo, ni busca errores de forma sistemática; en los datos del problema, en los procedimientos de resolución y los algoritmos matemáticos utilizados (monitoreo); tampoco identifica si las operaciones y algoritmos multiplicativos aplicados a la solución del problema se desarrollan como lo tenía previsto.

Puede afirmarse que el resultado del análisis permite determinar que la categoría de problema multiplicativo con mayor dificultad a la que se enfrentan los estudiantes es Producto de medidas, y los procesos regulativos que deben fortalecerse en los estudiantes corresponden al monitoreo y evaluación.

Se espera que una vez ejecutada la unidad de intervención el estudiante realice una constante supervisión del proceso de solución de los problemas producto de medidas PM; partiendo desde la ejecución del plan previamente diseñado, estableciendo un orden

lógico en la secuencia desarrollada, llevando a cabo el plan estructurado, y haciendo una valoración de la utilidad de la estrategia, determinando si esta le permite alcanzar la respuesta, de lo contrario elaborará ajustes al plan o incluso tendrá que cambiar por completo el mismo, también aprenderá a hacer algunos cambios sobre la marcha para optimizar la estrategia primaria así como la obtención de una respuesta a partir de sus procedimientos, al respecto es importante decir que la metacognición al tener en cuenta el proceso reflexivo, permite que la resolución de problemas se haga efectiva (Davinson y Sternberg, 1998).

## **6.2 ANÁLISIS FASE MODELADO METACOGNITIVO (MM) Y PRÁCTICA GUIADA (PG)**

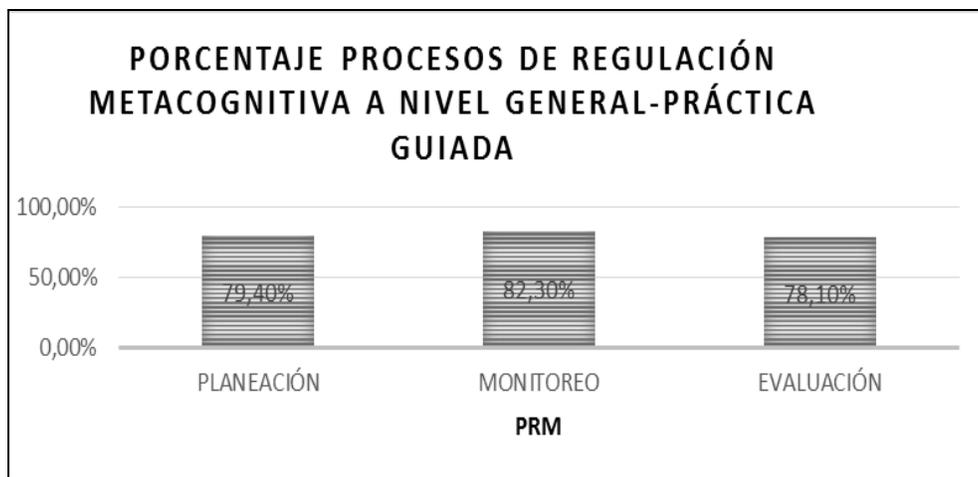
### **6.2.1 Análisis Proceso Regulación Metacognitiva (PRM).**

El objetivo de la primera presentación del análisis de fase 2 y 3 se orienta a describir como los estudiantes mejoraron los procesos de regulación metacognitiva y como optimizaron los resultados en la solución de problemas de orden multiplicativo una vez aplicada la intervención del modelado metacognitivo y práctica guiada (junto con lúdica de trabajo cooperativo).

En este análisis se examinó la incidencia del modelado metacognitivo frente a cada intervención de los problemas multiplicativos tipología Vergnaud efectuados mediante cuestionarios escritos de la práctica guiada que fueron desarrollados por los estudiantes con base a una lúdica en el que cada pregunta correspondía a oraciones con sentido que formaban parte de las evidencias de los diversos elementos de estrategias en los diferentes procesos de regulación metacognitiva, y cuyas evidencias se recolectaron mediante instrumento lista de cotejo , llevada por el docente en 8 intervenciones de la práctica guiada.

La tendencia frente a proceso de regulación metacognitiva durante la práctica guiada se puede apreciar en los siguientes gráficos:

Gráfico 5 Porcentajes de procesos de regulación metacognitiva que implementan estudiantes al solucionar problemas de orden multiplicativo- F3-práctica guiada.



*Fuente: elaboración propia*

Como se puede observar en el gráfico 5 se evidencia que durante la práctica guiada a nivel general la mayoría de estudiantes de grado séptimo mejoran notablemente los procesos de monitoreo alcanzando un 82,3% cumpliendo con las siguientes elementos de las estrategias de dicho proceso: El estudiante tiene claro si los datos propuestos en el enunciado del problema son suficientes, simplifica el problema hasta tener la posibilidad de abordarlo, de igual manera ejecuta un procedimiento matemático (correcto o incorrecto) y aplica otros posibles procedimientos matemáticos para resolver el problema y hace representación gráfica, dibuja o hace un esquema del procedimiento de solución del problema.

Al respecto Brown citado por Tamayo (2006), examina la solución como un paso conveniente para realizar una revisión del proceso seguido, para analizar si es o no correcto el modo como se ha llevado a cabo la resolución. Es preciso contrastar el resultado obtenido para saber si efectivamente da una respuesta válida a la situación planteada, reflexionar sobre si se podía haber llegado a esa solución por otras vías, utilizando otros razonamientos.

Debe caracterizarse que los estudiantes en los procesos de regulación metacognitiva (PRM) de planeación durante la práctica guiada (PG) alcanzaron un porcentaje de 79,40%, evidenciándose en la lista de cotejo y durante la lúdica que los estudiantes identifican los datos del problema multiplicativo, estableciendo de manera puntual, unidades de medida, magnitudes y el tipo de relación, al igual que comprende y modifica frente a sus pares la ejecución del problema multiplicativo, proponiendo otro u otros procedimientos para la solución del mismo.

En cuanto a la evaluación alcanzaron un porcentaje de 78,10%, apreciándose que el estudiante ya tiene claro si la solución del problema es correcta o incorrecta y lo sustenta con argumentos, es consciente de los avances y dificultades que ha tenido durante el procedimiento y verifica si la planeación del problema le permitió usar una estrategia clara.

### **6.2.2 Análisis De Evolución En Procesos De Regulación Metacognitiva Entre Fase De Exploración Y Práctica Guiada**

Si bien durante la práctica guiada el porcentaje de evidencias en monitoreo alcanzadas fue del 82,3% con respecto a un 25,6%, durante la fase de exploración; se registra una diferencia porcentual de 56,7%. Por otro lado se observa que durante la práctica guiada la planeación alcanzó un 79,4% con respecto a un 38,6% durante la fase de exploración, con un mejoramiento del 40,8% y en el proceso de evaluación las evidencias alcanzadas fueron 78,1% con respecto a un 16,4% en la exploración, registrándose una diferencia de 61,7%, observables en gráfica 5 y gráfica 1

El avance significativo durante la práctica guiada de los procesos de regulación metacognitiva (PRM) se fundamenta en el modelado metacognitivo por cada categoría multiplicativa, que se basó en los resultados de las ideas previas de la fase de exploración, en dicho modelado el docente diseñó y generó heurísticas y campos conceptuales específicos por categoría de problema multiplicativo, orientando a que el estudiante sea consciente y crítico frente a la solución de problemas multiplicativos. En torno a esto, en

el caso de la aplicación del modelado metacognitivo el experto, además de resolver paso a paso, demostrando acciones, verbaliza las operaciones mentales que va considerando en cada uno de ellos, dando cuenta a su vez las decisiones que va tomando en el proceso. (Mateos, 2001)

A través de la lúdica y la práctica guiada los estudiantes logran recibir retroalimentación por parte de sus pares y docente. De acuerdo con Lester (1983) básicamente, el profesor ha de desempeñar tres funciones en la enseñanza de estrategias de resolución de problemas: *a)* ha de facilitar el aprendizaje de estrategias, bien con su instrucción directa o bien con el diseño de los materiales didácticos adecuados; *b)* ha de ser un modelo de pensamiento para sus alumnos; y *c)* ha de ser un monitor externo del proceso de aprendizaje de los alumnos, aportando, en un primer momento, las ayudas necesarias que faciliten la ejecución por parte del alumno de determinadas actuaciones cognitivas que sin esta ayuda externa no podría realizar y que, en un segundo momento, irá retirando gradualmente a medida que el alumno sea capaz de utilizarlas de manera autónoma.

Los resultados alcanzados durante la práctica guiada (PG) permitió durante la planeación: definir por parte del estudiante cuáles son las unidades de medida del problema, establecer la relación ternaria o cuaternaria del problema multiplicativo, identificar las magnitudes o cantidades que intervienen en la operación, tener claro que tipo de operaciones y heurísticas aplicaron y buscar problemas similares; con respecto al proceso de evaluación se evidenció que el estudiante realizó acciones para controlar, revisar la validez del proceso de resolución y/o de los resultados obtenidos y detectar posibles errores, de igual forma revisó de forma sistemática los datos introducidos, los algoritmos y cálculos matemáticos de resolución utilizados.

Se concluye que los estudiantes de grado séptimo en esta fase alcanzaron la fundamentación suficiente para abordar sus procesos de regulación metacognitiva cuando el profesor mostró qué acciones cognitivas realiza y qué variables (referidas a la persona,

la tarea y el contexto) son relevantes en la toma de decisiones sobre la utilización de una determinada estrategia y a través de la práctica guiada los estudiantes modelaron el aprendizaje de estrategias de resolución de problemas, que le permitieron hacer uso independiente de las mismas, resolviendo con éxito los nuevos problemas propuestos.

### 6.2.3 Análisis De Evolución De Los Procesos De Regulación Metacognitiva Frente A La Estructura Multiplicativa De Problemas Tipología Vergnaud Entre Exploración Y Práctica Guiada.

De acuerdo a lo anterior y teniendo en cuenta que los problemas de orden multiplicativo están subdivididos por categorías se realiza un análisis para examinar en cuál de estas se presentó un mayor grado de evolución en los procesos de regulación metacognitiva. El siguiente grafico muestra los resultados obtenidos en cada categoría durante la práctica guiada:

#### 6.2.3.1 Análisis procesos de regulación metacognitiva frente a los problemas multiplicativos tipología Vergnaud-práctica guiada.

Gráfico 6 Porcentajes procesos de regulación metacognitiva en cada categoría de problemas de orden multiplicativo- F3- práctica guiada (PG)



*Fuente: elaboración propia*

Considerando el grafico 6 de práctica guiada en relación a gráfica 2 de la fase de exploración, es posible notar que los estudiantes presentan mejores resultados con

respecto a la primera fase en todas las categorías multiplicativas de tipología Vergnaud,, en cuanto al uso de proceso de regulación metacognitiva ,sobresaliendo el monitoreo en comparación multiplicativa con un 85,5%, seguido de producto de medidas con un 80,8% y por último isomorfismo de medidas con un 80%, existiendo un diferencia porcentual mínima .

Sin embargo se enfocará el análisis en la categoría de productos medidas ya que al comparar la gráfica 3 con la gráfica 8 se observó que durante la exploración la categoría con menores porcentajes de evidencias fue producto de medidas, con una planeación del 26,8%, control ó monitoreo del 20,3 % y evaluación del 10,2%, en tanto que durante la práctica guiada , después del modelado metacognitivo los estudiantes alcanzaron en esta categoría 75,8% en planeación , 80,8% en monitoreo y 79,2% en evaluación.

El porcentaje de evolución de estos procesos durante la fase de práctica guiada en la planeación fue de 49%, en el monitoreo de 60,5% y en la evaluación del 69%, pero debe destacarse que a pesar de la evolución favorable de los procesos de regulación metacognitiva a los estudiantes se les facilita aplicar los elementos de las estrategias de regulación metacognitiva en los problemas de PMM en relación a los problemas de PMD.

Considerando el modelado metacognitivo y la instrucción guiada del docente, se logró evidenciar con la lista de cotejo que en la planeación la mayoría de estudiantes definen cuales son las unidades de medida del problema, establecen la relación ternaria o cuaternaria del problema multiplicativo, , representaron los datos del problema en forma numérica y usando tablas, dibujos, planos cartesianos en algunos casos, identificaron las magnitudes o cantidades que intervienen en la operación matemática que utilizaron.

Durante el monitoreo los estudiantes definieron si los datos del enunciado estaban completos o si requerían de más información, verificaron si el procedimiento que usaron los llevó a la solución del problema, tenían claro los conceptos matemáticos necesarios

para resolver el problema, compararon el problema multiplicativo con otros ya conocidos y modificaron ante sus pares la ejecución del problema multiplicativo.

En la evaluación el estudiante tuvo claro si la solución del problema multiplicativo fue correcta o incorrecta y lo sustentó con argumentos, también establecieron que los datos planteados inicialmente fueron suficientes para la solución del problema y que procedimientos de los usados fueron más eficaces para encontrar la solución del problema y a través del aporte de sus pares retroalimentaron el desarrollo del mismo.

Según Sierra, (2011) establece:

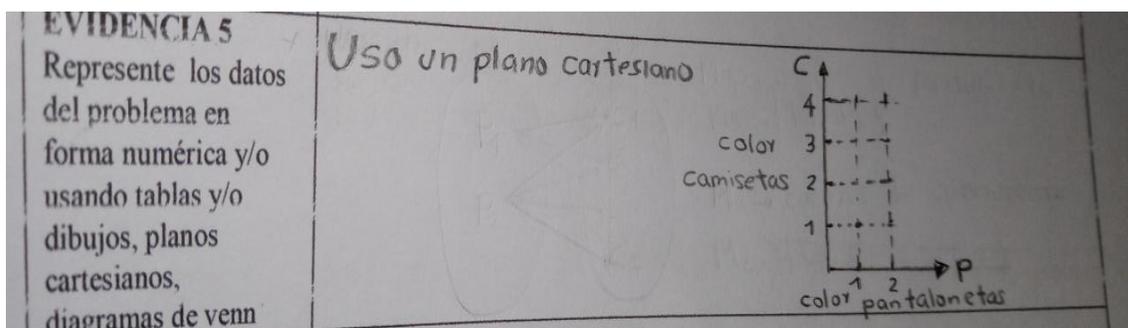
*Una didáctica eficaz al guiar el proceso de aprendizaje de las matemáticas, relacionado con la resolución de problemas, desde una concepción metacognitiva, implica ayudar a los estudiantes a aprender sobre el aprendizaje, a comprender su propia postura frente a la estructura de los problemas, ( hoy matemáticos, mañana rutinarios o de la vida social o profesional ), a decantar desde los hechos y datos explícitos, las posibles alternativas, a reflexionar y a interactuar con otros, pares y maestros, sobre el proceso de producción de la solución para que puedan transferir esas habilidades a situaciones diversas y generar nuevas estrategias cuando se detecten variaciones que así lo requieran. (p. 18)*

#### **6.2.4 Casos De Evidencia Frente A La Categoría De Problema Multiplicativo Que Logro Mayor Evolución En Los Proceso De Regulación Metacognitiva Durante La Práctica Guiada.**

6.2.4.1 Problemas producto de medidas.

6.2.4.2 Planeación -Caso Problemas producto de medidas por multiplicación.

Figura 8 Caso problema PMM, fase 3 practica guiada- E4



**Primera intervención Instrucción guiada**  
**PROBLEMAS PRODUCTO DE MEDIDAS POR MULTIPLICACIÓN (PMM)**

<b>PROBLEMA</b> MULTIPLICATIVO PMM	Para determinar el uniforme de un equipo de fútbol se debe elegir entre 2 colores de pantalóneta y 4 colores de camiseta. Todas las combinaciones de pantalónetas y camisetas son posibles. ¿Cuántos uniformes diferentes se pueden obtener?
<b>ELEMENTOS ESTRATEGIAS DE (P)</b>	
<b>EVIDENCIA 1</b> Defina cuáles son las unidades de medida del problema.	Las unidades de medida del problema son: $M_1 = \text{colores de pantalóneta}$ $M_2 = \text{colores de camiseta}$ $M_3 = \text{uniformes posibles}$

<b>F3-PG-E4</b>	
<b>Problema PMM:</b> Para determinar el uniforme de un equipo de fútbol se debe elegir entre 2 colores de pantalóneta y 4 colores de camiseta. Todas las combinaciones de pantalónetas y camisetas son posibles. ¿Cuántos uniformes diferentes se pueden obtener?	<b>PREGUNTAS METACOGNITIVAS</b>
	<b>EVD1P.</b> Defina cuáles son las unidades de medida del problema. <b>EVD5P.</b> Represente los datos del problema en forma numérica y/o usando tablas y/o dibujos, planos cartesianos, diagramas de ven.
<b>Tratamiento F3 -PG -E4 –PMM en el registro-Lenguaje común</b>	
<b>EVD1P.</b> Las unidades de medida del problema son $M_1 = \text{colores de pantalóneta}$ $M_2 = \text{colores de la camiseta}$ $M_3 = \text{uniformes posibles}$ <b>EVD5P.</b> Uso un plano cartesiano( estudiante gráfica) (Discurso tomado de anexo 6 <b>F3-PG-E4.</b> Problema 1)	

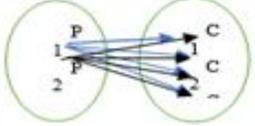
*Fuente: elaboración propia*

En la figura 8 se observó que los estudiantes fundamentados en el modelado metacognitivo demuestran en el desarrollo de la práctica guiada que presentaron mejores procesos de regulación metacognitiva tanto en la planeación, el monitoreo y la evaluación.

Tomando el caso del estudiante **E4** se evidenció que durante la planeación tiene claro que están involucradas 3 unidades de medida M1 color de pantaloneta, M2 color de la camiseta, M3 uniformes posibles; igualmente determinó la magnitudes (datos) 2, 4 y X , estableciendo la relación ternaria del problema multiplicativo de las dos unidades de medidas y obteniendo una tercera unidad de medida ( $2 \times 3 = 6$ ), estableciendo una relación operacional , lo que le permitió determinar qué tipo de operación utilizara para resolver el problema, igualmente el estudiante realizó algunas acciones como representar los datos en un plano cartesiano.

### 6.2.4.3 Monitoreo -Caso Problemas producto de medidas por multiplicación.

**Figura 9** Caso problema PMM, fase 3 practica guiada- E4

<b>PROBLEMA MULTIPLICATIVO PMM</b>	Para determinar el uniforme de un equipo de fútbol se debe elegir entre 2 colores de pantaloneta y 4 colores de camiseta. Todas las combinaciones de pantalonetas y camisetas son posibles. ¿Cuántos uniformes diferentes se pueden obtener?
<b>ELEMENTOS ESTRATEGIAS DE (M)</b>	
<b>EVIDENCIA 1</b> Determine si los datos del enunciado están completos o si requiere de más información para solucionar el problema.	Los datos de problema si están completos $M_1 = \text{color de pantaloneta} = 2$ $M_2 = \text{color de camiseta} = 4$ $M_3 = \text{uniformes diferentes} = X$
<b>EVIDENCIA 2</b> Solucione el problema y Verifique si el procedimiento que usa lo llevará a la solución del mismo.	Para encontrar la solución del problema use un diagrama de <u>benm</u> .  Se forman 6 combinaciones $[(P_1, C_1) (P_1, C_2) (P_1, C_3) (P_1, C_4) (P_2, C_1) (P_2, C_2) (P_2, C_3) (P_2, C_4)]$ El resultado es 8 uniformes porque $2 \times 4 = 8$
<b>EVIDENCIA 3</b> Distinga el tipo de medida	
<b>F3-PG-E4</b>	
<b>Problema PMM:</b> Para determinar el uniforme de un equipo de fútbol se debe elegir entre 2 colores de pantaloneta y 4 colores de camiseta. Todas las combinaciones de pantalonetas y camisetas son posibles. ¿Cuántos uniformes diferentes se pueden obtener?	<b>PREGUNTAS METACOGNITIVAS</b> <b>EVD1M.</b> Determine si los datos del enunciado están completos o si requiere de más información para solucionar el problema <b>EVID2M.</b> Solucione el problema y Verifique si el procedimiento que usa lo llevará a la solución del mismo.
<b>Tratamiento F3 -PG -E4 -PMM en el registro-Lenguaje común</b>	
<b>EVD1M.</b> Los datos de problema si están completos. $M_1 = \text{color de la pantaloneta} = 2$ $M_2 = \text{color de camiseta} = 4$ $M_3 = \text{uniformes diferentes} = X$ <b>EVID2M.</b> Para encontrar la solución del problema uso un diagrama de <u>benm</u> .  Se forma 6 combinaciones $[(P_1, C_1) (P_2, C_2) (P_1, C_3) (P_2, C_4) (P_2, C_1) (P_2, C_2) (P_2, C_3) (P_2, C_4)]$ El resultado es 8 uniformes. porque $2 \times 3 = 6$ (Discurso tomado de anexo 6. F3-PG-E4. Problema 1)	

*Fuente: elaboración propia*

Como se considera en la figura 9, basándose en los elementos de estrategias de monitoreo y las evidencias, el estudiante **E4** determinó que los datos del enunciado estaban completos y lo expresó relacionando las unidades con las magnitudes, que  $M1=2$ , que  $M2=4$  y  $M3=X$ , solucionó el problema indicando la multiplicación como una relación combinatoria usando diagrama de Venn y verificando el proceso a través de las parejas ordenadas y la multiplicación directa, tiene claro los conceptos matemáticos necesarios que uso para resolver el problema al establecer combinación entre 2 pantalonetas y 4 camisas y multiplicando  $M1 \times M2 = M3$ , comparó los problemas con otros ya conocidos; de igual forma se observó en la discusión grupal una retroalimentación en la solución del problema.

**Evaluación-Caso Problemas producto de medidas por división.**

Figura 10 Caso problema PMD, fase 3 –práctica guiada- E6

<b>PROBLEMA MULTIPLICATIVO PMD</b>	Un vendedor de helados quiere poner a disposición de los clientes 15 variedades de helados cubiertos de chocolate. Si dispone de tres variedades de chocolate cuantas variedades de helados debe tener?
<b>ELEMENTOS ESTRATEGIAS DE (E)</b>	
<b>EVIDENCIA 1</b> Cree que resolvió correctamente el problema? SI ___ NO ___ Justifique	Creo que si por que tenia clara las unidades de medida y las magnitudes y que tenia que dividir $\frac{m_3}{m_1}$ para que me de $m_2$ .
<b>EVIDENCIA 3</b> Tuvo dificultades en la solución del problema multiplicativo? Si ___ NO ___ Anota que dificultades.	Si, porque primero pense que multiplicaba $m_3=15$ por $m_2=3$ pero luego me di cuenta que era dividir $15 \div 3=5$ porque no queria hallar el total, si no una de las partes.
docente?. Porque? <b>EVIDENCIA 5</b> ¿Consideras que el plan que usaste para resolver el problema multiplicativo te sirvió para determinar una estrategia correcta? Explica	si porque primero halle las unidades de medida, luego hube que las cantidades, luego busque la operation que necesitaba, luego aplique la operation y dividi el total entro una de las unidades mas pequeñas y obtuve las variedades de helado

<b>F3-PG-E6</b>	
<p><b>Problema PMD:</b> Un vendedor de helados quiere poner a disposición de los clientes 15 variedades de helados cubiertos de chocolate. Si dispone de tres variedades de chocolate cuantas variedades de helados debe tener?</p>	<p><b>PREGUNTAS METACOGNITIVAS</b></p> <p><b>EVID1E.</b> Cree que resolvió correctamente el problema? SI_ NO__ Justifique</p> <p><b>EVID3E</b> Tuvo dificultades en la solución del problema multiplicativo? SI__ NO__. Anota que dificultades.</p> <p><b>EVID 5E</b> ¿Consideras que el plan que usaste para resolver el problema multiplicativo te sirvió para determinar una estrategia correcta?. Explica</p>
<p><b>Tratamiento F3 -PG –E6 –PMD en el registro-Lenguaje común</b></p> <p><b>EVD1E.</b> Creo que si porque tenia claro las unidades e medida y las magnitudes y que tenía que dividir <math>m3/m1</math> para que me de <math>m2</math></p> <p><b>EVD3E.</b> si porque primero pensé que multiplicaba <math>m3=15</math> por <math>m1=3</math>, pero luego me di cuenta que era dividir <math>15/3=5</math> porque no quería hallar el total si no una de las partes.</p> <p><b>EVD5E.</b> si porque primero halle las unidades de medida, luego hubique las cantidades, luego busque la operación que necesitaba, luego aplique la operación dividi el total entre una de las unidades mas pequeñas y obtuve las variedades de helado.</p> <p>(Discurso tomado de anexo 6 <b>F3-PG-E6.</b> Problema 2)</p>	

En relación al proceso de evaluación, la figura 10 nos muestra que los estudiantes de acuerdo a los elementos de las estrategias de evaluación tenían claro que la solución del problema multiplicativo era correcto o incorrecto y lo sustentaron con argumentos, también fue consciente de los avances y dificultades que tuvo durante el procedimiento, verificó si la planeación del problema le permitió usar una estrategia clara y si los datos planteados inicialmente fueron suficientes para solucionar el problema, al igual que si las operaciones usadas en la solución del mismo son las correctas.

La observación general de los casos en la solución de los problemas de productos de medida permite determinar que cuando a los estudiantes durante el modelado metacognitivo se les indica que acciones cognitivas debe realizar para resolver un problema multiplicativo y se les orienta en que variables (referidas a la persona, la tarea y el contexto) , estas resultan relevantes en la toma de decisiones sobre la utilización de una determinada estrategia, que se puso en evidencia durante la práctica guiada con la que a través de la autorregulación se les proporcionó simultáneamente a los estudiantes la guía necesaria para ir alcanzando progresivamente un mayor nivel de autonomía en la solución de los problemas multiplicativos tipología Vergnaud.

Se logró que los estudiantes tuvieran un mejor avance, ya que el docente explicó y modeló la solución de cada problema en cada intervención sujeta a una guía con preguntas metacognitivas, que desarrollaron los estudiantes en forma individual y retroalimentándola en forma grupal, usando determinadas estrategias a través del diseño de la lúdica que generó situaciones interpersonales de aula, en las que el docente y los pares mediante el diálogo y el diseño de diferentes ayudas pedagógicas, orientaron el aprendizaje de estrategias de resolución de problemas. La reducción y la retirada progresiva de estas ayudas permitirán al alumno el uso independiente de estas estrategias y la resolución con éxito de nuevos problemas.

En referencia a esto Brown (1987) afirma que la evaluación retoma los resultados de todas las estrategias, acciones y decisiones en términos de eficacia. Labatut (2004), resalta que la evaluación no solamente es un proceso que se mire al final, estableciendo que esta debe darse de manera constante y en paralelo a las actividades, por lo tanto, es necesario una revisión y la verificación de los temas.

#### **6.2.5 Análisis De Evolución De Los Niveles De Resolución De Problemas En Cada Estructura De Problema Multiplicativo Tipología Vergnaud-Exploración Y Práctica Guiada.**

El objetivo de la segunda presentación del análisis de la práctica guiada está direccionado a establecer los resultados porcentuales procedentes de la evolución o el mejoramiento de los niveles de resolución de los problemas tipo Vergnaud para cada estructura multiplicativa. Examinando cada estructura de forma general y estableciendo un porcentaje proporcional a los niveles de resolución, caracterizados de acuerdo a ítem (tabla 8), el nivel alcanzado por los estudiantes en la resolución de problemas se observa en tabla 11.

Tabla 11 Caracterización Niveles de resolución de problemas 3 fase-Práctica guiada

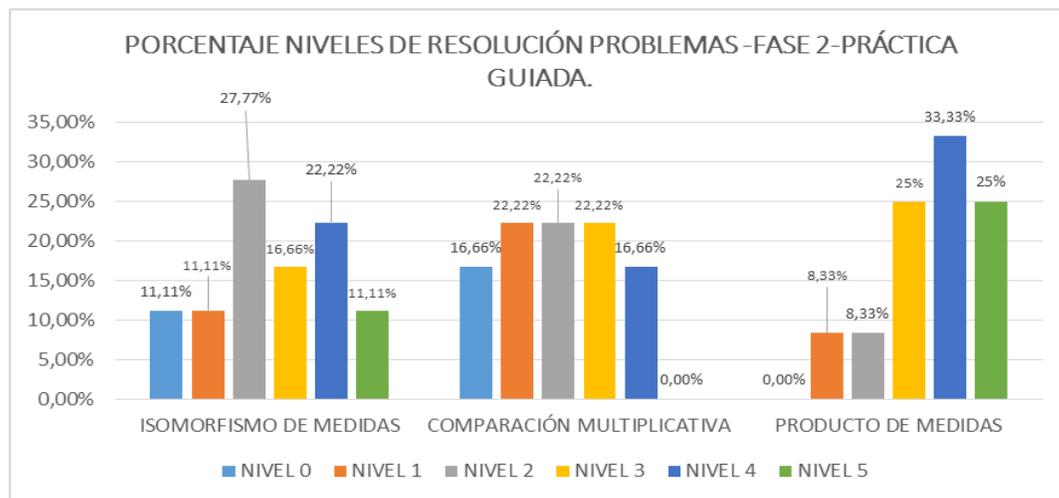
Estudiante	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6	Problema 7	Problema 8
	ISOMORFISMO DE MEDIDAS			COMPARACIÓN MULTIPLICATIVA			PRODUCTO DE MEDIDAS	
	IM M	IMDP	IMD M	CMM	CMD 1	CMD 2	PMM	PMD
E1	3	2	0	2	3	2	5	4
E2	4	1	2	3	1	1	3	1
E3	1	2	0	0	0	2	4	3
E4	3	4	2	0	2	1	4	2
E5	5	2	4	4	4	1	5	3
E6	4	5	3	3	3	4	5	4
<b>Porcentajes de niveles por cada estructura multiplicativa</b>								
<b>Nivel 0</b>	11,11%			16,66%			0,00%	
<b>Nivel 1</b>	11,11%			22,22%			8,33%	
<b>Nivel 2</b>	27,77%			22,22%			8,33%	
<b>Nivel 3</b>	16,66%			22,22%			25%	
<b>Nivel 4</b>	22,22%			16,66%			33,33%	
<b>Nivel 5</b>	11,11%			0,00%			25%	

*Fuente: Elaboración propia*

El objetivo de la segunda presentación del análisis esta direccionado a establecerlos los resultados porcentuales procedentes de los niveles de resolución para cada estructura multiplicativa de problemas tipología Vergnaud y la caracterización de cada uno de ellos.

La caracterización de dichos niveles fue analizada considerando los ítems de tabla 8. Se observó que los estudiantes avanzaron notablemente en los niveles 3, 4 y 5 ; en los problemas de producto de medidas seguido de isomorfismo de medidas y por ultimo sobresale los problemas de comparación multiplicativo; disminuyendo el nivel 0 en los tres tipos de problema

Gráfico 7 Porcentajes de niveles de resolución de problemas de estructura multiplicativa tipo Vergnaud –F3-práctica guiada (PG).



Se destaca en gráfico 3 en la fase de exploración que los estudiantes al enfrentarse a los problemas de productos de medida, seguido de comparación multiplicativa e isomorfismo de medidas alcanzaron un nivel de resolución “0” en proporción de 75%, 61,10% y 50% respectivamente ya que no utilizaron datos presentes en el enunciado del problema y tampoco propusieron alguna alternativa de resolución frente al mismo.

En ese mismo contexto se apreció que en la resolución de este tipo de problemas los estudiantes presentan un porcentaje menor en los niveles 3, 4 y 5 evidenciándose que los problemas de isomorfismo de medidas presentan en el nivel 3 un 16,60%, en el nivel 4 un 5,55% y en el nivel 5 un 0,00% ; mientras que los problemas de producto de medidas el nivel 3 alcanza el 8,33%, nivel 4 y 5 el 0,00%, debido a esto se establece que durante la exploración a los estudiantes se les dificultó identificar las variables del problema y establecer las relaciones entre estas, en la mayoría de casos resolvieron los problemas de manera inadecuada sin justificar su desarrollo en forma algorítmica.

En paralelo a esto durante la práctica guiada con base al modelado metacognitivo de cada una de estas estructuras multiplicativas de los problemas tipología Vergnaud, realizada en ocho intervenciones, se observó que los problemas de producto de medidas, seguido de isomorfismo de medidas y por último los problemas de comparación

multiplicativa evolucionan en sus niveles de resolución alcanzando un mayor porcentaje en los niveles 4 y 5, con porcentajes en el nivel 4 de 33,3%. 22,2% y 16,66% respectivamente y en relación al nivel 5 se verifica en el mismo orden 25%,11,11% y 0,00% (gráfico 7) ; lo que permite inferir que una vez aplicado el modelado metacognitivo, los estudiantes durante la práctica guiada algunos resuelven el problema acertadamente relacionando las variables y lo justificaron algorítmicamente.

Alcanzando en el nivel 4 en el problema de isomorfismo de medidas (gráfico 7) una evolución del 16,67%; en los de producto de medidas un 33,33% y en comparación multiplicativa 16,66%; en relación al nivel 5 en los problema de isomorfismo de medidas se logró una evolución del 11,11%; en los de producto de medidas un 25% y en comparación multiplicativa 0,00%.

De forma general puede afirmarse que los estudiantes resolvieron más fácilmente los problemas multiplicativos de isomorfismo de medidas y productos de medidas obteniendo mejores resultados durante la práctica guiada, como se observa en gráfico 9; debido en gran parte a las intervenciones del modelado metacognitivo y práctica guiada en la que los estudiantes recibieron durante el modelado una instrucción de estrategias heurísticas que les permitió incorporar estrategias metacognitivas en los procesos de regulación de planeación, monitoreo y evaluación y relacionarlos con los procesos matemáticos y operativos implicados en la resolución de cada problema multiplicativo.

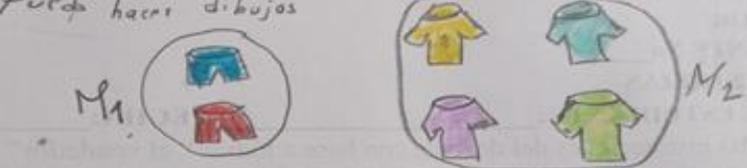
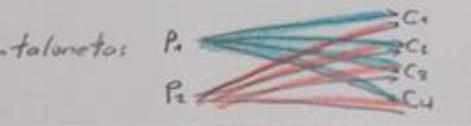
De igual forma unido a esto la práctica guiada permitió a través del desarrollo de la guía y la lúdica que la instrucción se centrara en el estudiante , favoreciendo el aprendizaje de determinadas estrategias a partir del intercambio de información que tiene lugar en la lúdica con participación de los seis estudiantes, permitiendo una colaboración mutua en la resolución de la tarea, de negociar, nuevos significados, de desarrollar nuevas estrategias y de construir nuevo conocimiento que permitió fortalecer el desarrollo de cada una de estas categorías multiplicativas.

Para conseguir este objetivo, diferentes autores destacan la organización y la estructuración de los procesos de interacción entre iguales a partir de la formulación de preguntas y respuestas sobre el proceso de resolución del problema entre los miembros del grupo como instrumento que puede favorecer que los procesos de interacción entre éstos versen sobre aspectos relevantes de la tarea y de su resolución, aspectos que no aparecen espontáneamente en todos los grupos de iguales y que pueden repercutir positivamente en el aprendizaje de los alumnos (King, 1991, 1997; Shaw, 1997).

En forma general los estudiantes dividieron el problema multiplicativo en componentes más básicos, examinándolo y buscando relaciones entre los diferentes elementos que forman parte del problema, organizaron y codificaron el plan de resolución del problema, teniendo claro el tipo de operación que necesitaban usar, establecieron de igual forma si los datos del problema eran suficientes, haciendo representaciones gráficas o dibujos durante el procedimiento y aplicando otros procedimientos de solución y detectando errores en el enunciado.

En la figura 11 se muestra en el caso del estudiante **E5** definió claramente cuáles son las unidades de medida del problema M1(color de pantaloneta), M2 (color de camiseta), M3 (Uniformes diferentes), estableció la relación ternaria afirmando que hay dos datos conocidos y uno desconocido, representó los datos organizados mediante dibujos, identificó las magnitudes que intervienen en la operación matemática (2 y 4), tubo claro que la operación matemática involucrada en el problema matemático era una multiplicación directa, estableció los conceptos matemáticos necesarios que uso para la resolución del problema y modifico de acuerdo a la retroalimentación del docente y sus pares la ejecución del problema multiplicativo proponiendo otro procedimiento, consideró que el plan usado le permitió determinar una estrategia correcta y considero que los datos planteados eran suficientes para solucionar el problema. Al respecto se consideró el siguiente ejemplo:

Figura 11 Caso problema PMM, fase 3 –práctica guiada- E5

<b>PROBLEMA</b> <b>MULTIPLICATIVO</b> <b>PMM</b>	Para determinar el uniforme de un equipo de fútbol se debe elegir entre 2 colores de pantaloneta y 4 colores de camiseta. Todas las combinaciones de pantalonetas y camisetas son posibles. ¿Cuántos uniformes diferentes se pueden obtener?
<b>ELEMENTOS ESTRATEGIAS DE (P)</b>	
<b>EVIDENCIA 1</b> Defina cuáles son las unidades de medida del problema.	En este problema las unidades de medida son. $M_1 = \text{color de pantaloneta}$ $M_2 = \text{color de camiseta}$ $M_3 = \text{uniformes diferentes}$
<b>EVIDENCIA 2</b> Establezca la relación ternaria o cuaternaria del problema multiplicativo	Aquí se presenta una relación ternaria porque hay dos datos conocidos y uno desconocido.
<b>EVIDENCIA 5</b> Represente los datos del problema en forma numérica y/o usando tablas y/o dibujos, planos cartesianos, diagramas de venn	Puedo hacer dibujos 
<b>EVIDENCIA 6</b> Describa los conceptos matemáticos necesarios que uso para resolver el problema	Las unidades de medida $M_1$ , $M_2$ y $M_3$ Los datos 2, 4 y X La multiplicación El resultado 8
<b>EVIDENCIA 7</b> De que forma puede proponer ante sus compañeros otro u otros procedimientos para la solución del mismo, diferente al propuesto por el docente.	Formando parejas de cada pantaloneta con cada camiseta y luego contando todas las parejas.  8 parejas
Para la solución del problema fue necesario la ayuda de tus compañeros y/o tu docente?. Porque?	.
<b>EVIDENCIA 5</b> ¿Consideras que el plan que usaste para resolver el problema multiplicativo te sirvió para determinar una estrategia correcta?. Explica	Si, porque al ir en orden pude solucionar el problema paso a paso y llegar a la respuesta
<b>EVIDENCIA 6</b> Cree que los datos planteados inicialmente son suficientes para la solución del problema? NO. Justifique su respuesta	Si, porque solo se debe conocer cuantas pantalonetas hay y cuantas camisetas y después hacer una multiplicación.

<b>F3-PG-E5</b>	
<p><b>Problema PMM:</b> Para determinar el uniforme de un equipo de fútbol se debe elegir entre 2 colores de pantaloneta y 4 colores de camiseta. Todas las combinaciones de pantalonetas y camisetas son posibles. ¿Cuántos uniformes diferentes se pueden obtener?</p>	<p><b>PREGUNTAS METACOGNITIVAS</b></p> <p><b>EVID1P.</b> Defina cuáles son las unidades de medida del problema.  <b>EVID5P.</b> Represente los datos del problema en forma numérica y/o usando tablas y/o dibujos, planos cartesianos, diagramas de venn  <b>EVID6M.</b> Describa los conceptos matemáticos necesarios que uso para resolver el problema  <b>EVID7M.</b> De que forma puede proponer ante sus compañeros otro u otros procedimientos para la solución del mismo, diferente al propuesto por el docente  <b>EVID5E.</b> ¿Consideras que el plan que usaste para resolver el problema multiplicativo te sirvió para determinar una estrategia correcta?. Explica  <b>EVID6E.</b> Cree que los datos planteados inicialmente son suficientes para la solución del problema? SI__ NO__. Justifique su respuesta</p>
<p><b>Tratamiento F3 -PG -E5 -PMM en el registro-Lenguaje común</b></p> <p><b>EVID1P.</b> En este problema las unidades de medida son: M1=color de pantaloneta M2=color de camiseta M3= Uniformes diferentes.  <b>EVID5P.</b> puedo hacer dibujos(estudiante dibuja)  <b>EVID6M.</b> Las unidades de medida M1, M2 y M3  Los datos 2,4 y X  La multiplicación  El resultado 8  <b>EVID7M.</b> Formando parejas de cada pantaloneta con cada camiseta y luego contando todas las parejas (estudiante dibuja un esquema)  <b>EVID5E.</b> si , porque al ir en orden pude solucionar el problema paso a paso y llegar a la respuesta  <b>EVID6E.</b> si porque solo se debe conocer cuántas pantalonetas hay y cuántas camisetas y después hacer una multiplicación .  (Discurso tomado de anexo 6 <b>F3-PG-E5.</b> Problema 1)</p>	

*Fuente: elaboración propia*

De acuerdo a la figura 11 el desempeño en el caso del estudiante **E5** frente a esta categoría de problemas, está relacionado directamente con los avances logrados en los procesos de regulación metacognitiva (planeación, monitoreo y evaluación).

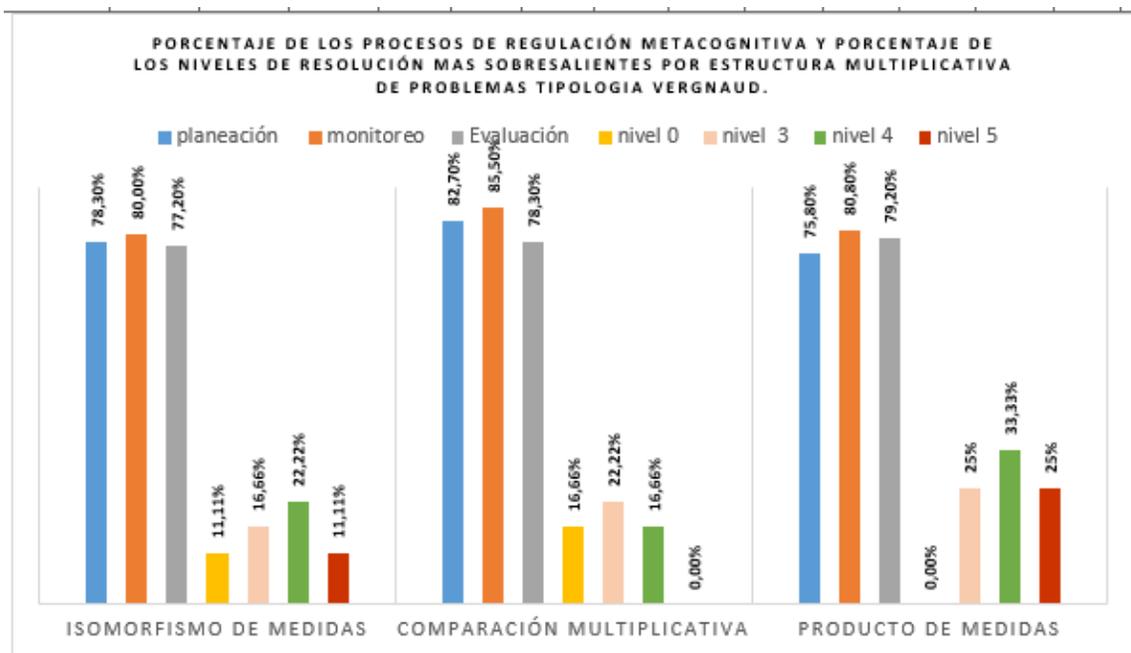
## **6.2.6 Análisis Evolución De Los Procesos De Regulación Metacognitiva Y**

### **Porcentaje De Los Niveles De Resolución De Problemas Multiplicativos**

#### **Tipología Vergnaud-Exploración Y Práctica Guiada.**

Esta parte final del análisis de la práctica guiada se orienta a mostrar la relación entre los procesos de planeación, monitoreo y evaluación con el porcentaje proporcional de niveles de resolución de los problemas multiplicativos. Lo anterior se aprecia en el siguiente gráfico:

Gráfico 7 Porcentaje de los procesos de regulación metacognitiva que implementan los estudiantes al solucionar problemas de estructura multiplicativa tipología Vergnaud y porcentajes sobresalientes niveles de resolución de problemas. -F3-práctica guiada (PG).



Fuente: elaboración propia

Tabla 12 Evolución procesos de regulación metacognitiva y relación con niveles de resolución de problema multiplicativo, fase 1-exploración y fase 3-práctica guiada

Estructura multiplicativa tipo Vergnaud	Porcentaje de niveles de resolución de problemas multiplicativos Exploración (IP)						Porcentaje de niveles de resolución de problemas multiplicativos práctica guiada (PG)						Evolución de PRM Exploración Vs Práctica guiada		
	N0	N1	N2	N3	N4	N5	N0	N1	N2	N3	N4	N5	P	M	E
Isomorfismo de medidas	50%	16,6%	11,11%	16,66%	5,55%	0,00%	11,1%	11,11%	27,77%	16,66%	22,22%	11,11%	34,5%	47,3%	53,8%
Comparación multiplicativa	61,1%	11,11%	22,22%	5,55%	0,00%	0,00%	16,6%	22,22%	22,22%	22,22%	16,6%	0,00%	41,4%	63,3%	64,7%
Producto de medidas	5%	8,33%	8,33%	8,33%	0,00%	0,00%	0,00%	8,33%	8,33%	25%	33,33%	25%	49%	60,5%	5,4%

Fuente: Elaboración propia

De acuerdo a la gráfica 7 y tabla 12 se evidencia que hay una estrecha relación entre el alcance de los niveles de resolución y los avances en los procesos de regulación

metacognitiva en problemas de productos de medidas e isomorfismo de medidas , los problemas de comparación multiplicativa arrojan resultados intermedios entre las otros dos categorías, ya que los estudiantes con base al modelado metacognitivo y práctica guiada solucionan de manera más acertada los de producto de medidas e isomorfismo de medidas, ya que tiene claro las unidades de medida, magnitudes, operaciones apropiadas, otras formas de solucionar el problema, compara con otros problemas ya conocidos y están seguros de si la respuesta obtenida es la correcta.

En gráfica 7 y tabla 12 sobresale durante esta fase el proceso de monitoreo de los estudiantes , alcanzando en producto de medidas un 80,8%, en comparación multiplicativa 85,5% y en isomorfismo de medidas un 80%, que comparado con la fase de exploración tabla 12 se aprecia que el monitoreo de los estudiantes , alcanzó en producto de medidas un 20,3%, en comparación multiplicativa 22,2% y en isomorfismo de medidas un 32,7%, generando una evolución conceptual de 60,5%; 63,3% y 47,3% respectivamente.

Con respecto a los niveles de resolución frente a los problemas de estructura multiplicativa tabla 12 se aprecia que durante la práctica guiada con respecto a la fase de exploración se produce en los problemas de isomorfismo de medidas una disminución porcentual significativa en los niveles 0 y 1, alcanzando un avance porcentual en los niveles 3,4 y 5 , verificándose que los estudiantes pasaron de no utilizar datos del enunciado y tampoco demostrar una posible solución del mismo en el nivel 0 a intentar resolver el problema relacionando variables y justificándolo algorítmicamente en el nivel de resolución 4 pasando de un 5,55 a un 22,22% y resolviendo el problema acertadamente en un 11,11% relacionando correctamente sus variables y justificando su procedimiento paso a paso en el nivel 5.

Existió mayor notoriedad en los problemas de productos de medida que paso durante la exploración de un 75% en el nivel de resolución 0 a un 0,00%; en el nivel 4 de un 0,00% a un 33,33% y en el nivel 5 de un 0,00% aun 25%, lo que sugirió como en el caso

del estudiante E1 (figura 12) que pasó de no representar, ni organizar los datos, ni proponer alguna alternativa de solución durante la fase de exploración a representar los datos del problema usando representaciones semióticas diferentes, definir el procedimiento paso a paso y establecer de forma concreta las operaciones necesarias.

Figura 12 Caso problema PMD, fase 3 –práctica guiada- E1

<b>F3-PG-E1</b>																				
<p><b>Problema PMD:</b> Un vendedor de helados quiere poner a disposición de los clientes 15 variedades de helados cubiertos de chocolate. Si dispone de tres variedades de chocolate cuantas variedades de helados debe tener?</p>	<p><b>PREGUNTAS METACOGNITIVAS</b></p> <p><b>EVID5P.</b> Represente los datos del problema en forma numérica y/o usando tablas y/o dibujos, planos cartesianos, diagramas de ven</p> <p><b>EVID8P.</b> Escriba que tipo de operaciones y estrategias aplicaran y el tiempo que se gastará en cada una de ellas</p> <p><b>EVID2M.</b> Solucione el problema y Verifique si el procedimiento que usa lo llevará a la solución del mismo.</p> <p><b>EVID6M.</b> Describa los conceptos matemáticos necesarios que uso para resolver el problema</p> <p><b>EVID1E.</b> Cree que resolvió correctamente el problema? SI_ NO_ Justifique</p> <p><b>EVID9E.</b> Compare este problema con otro(s) ya conocidos y encuentra las semejanzas entre sus unidades de medida, magnitudes y estructura del problema.</p>																			
<p><b>EVID5P.</b></p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 33%;">M1</th> <th style="width: 33%;">M2</th> <th style="width: 33%;">M3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">VARIEDA DES DE CHOCOLATE</td> <td style="text-align: center;">VARIEDA DES DE HELADOS</td> <td style="text-align: center;">VARIEDADES DEHELDO CUBIERTO DE CHOCOL</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">‘</td> <td style="text-align: center;">15</td> </tr> </tbody> </table> <p><b>EVID8P,</b>”HAGO UNA DIVISIÓN ENTRE M3 Y M1 Y HALLO M2.CREO QUEME GASTO CUATRO MINUTOS.”</p> <p><b>EVID2M.</b> 1. M1 =3 VARIEDADES DE CHOCOLATE M2= ? VARIEDADES DE HELADO M3= 15 VARIEDADES DE HELADO CUBIERTO DE CHOCOLATE</p> <p>2.</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 33%;">M1</th> <th style="width: 33%;">M2</th> <th style="width: 33%;">M3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">VARIEDA DES DE CHOCOLATE</td> <td style="text-align: center;">VARIEDA DES DE HELADOS</td> <td style="text-align: center;">VARIEDADES DEHELDO CUBIERTO DE CHOCOL</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">‘</td> <td style="text-align: center;">15</td> </tr> </tbody> </table> <p>3.. DIVIDO M3/M1=M2 4.. 15/3=5</p> <p><b>EVID6M.</b> UNIDADES DE MEDIDA CANTIDADES 3, ?,15 RELACIÓN TERNARIA OPERACIÓN: DIVISIÓN</p> <p><b>EVID1E.</b> SI PORQUE AL DIVIDIR 15/3 ME DIO 5 VARIEDADES DE HELADO. ENTONCS SI PRUEBO 5X3 VARIEDADES DE CHOCOLATE= 15 VARIEDADES DE HELADOS CUBIERTOS CHOCOLATE</p> <p><b>EVID9E.</b> ESTE PROBLEMA SE PARECE A UN PROBLEMA EXPLICADO ANTES, DONDE HABLA DE GRUPOS AY B Y DONDE SE JUGARON 10 PARTIDOS Y SE SABIA EL NUMERO DE EQUIPOS DE B Y TENIA QUE HALLAR NUMERO DE EQUIPOS DE A</p> <p style="text-align: center;">(Discurso tomado de anexo 6 <b>F3-PG-E1.</b> Problema 2)</p>			M1	M2	M3	VARIEDA DES DE CHOCOLATE	VARIEDA DES DE HELADOS	VARIEDADES DEHELDO CUBIERTO DE CHOCOL	3	‘	15	M1	M2	M3	VARIEDA DES DE CHOCOLATE	VARIEDA DES DE HELADOS	VARIEDADES DEHELDO CUBIERTO DE CHOCOL	3	‘	15
M1	M2	M3																		
VARIEDA DES DE CHOCOLATE	VARIEDA DES DE HELADOS	VARIEDADES DEHELDO CUBIERTO DE CHOCOL																		
3	‘	15																		
M1	M2	M3																		
VARIEDA DES DE CHOCOLATE	VARIEDA DES DE HELADOS	VARIEDADES DEHELDO CUBIERTO DE CHOCOL																		
3	‘	15																		

*Fuente: elaboración propia*

Retomando el caso con el estudiante E1 -Figura 12, se observó que existió mayor claridad a la hora de resolver el problema, ya que el estudiante tabuló en forma ordenada las unidades y magnitudes, determino el tipo de operación que necesitaba, tenía claro los conceptos matemáticos que requería y estaba seguro de que resolvió correctamente el problema y lo argumenta, verificó si el procedimiento que usó lo llevo a la solución del problema estableciendo en la misma medida una comparación del problema con otros ya conocidos. Según (Davinson; Sternberg, 1998; Domenech, 2004); “(...) *las habilidades metacognitivas son usadas para codificar el problema, determinar lo que hace falta saber para su resolución, establecer sus condiciones iniciales, estrategias de solución, identificar obstáculos, y evaluar los resultados (...)*” (p. 755).

En conclusión puede afirmarse que se logró avanzar en los PRM y los niveles de resolución de los problemas multiplicativos en las diferentes categorías debido a la aplicación del modelado metacognitivo y la práctica guiada como estrategias de intervención educativa que promovieron el uso de determinadas estrategias metacognitivas a través del diseño de situaciones interpersonales de aula, en las que como docentes , mediante el diálogo y el diseño de diferentes ayudas pedagógicas, se modelo el aprendizaje de estrategias de resolución de la diferentes categorías de problemas multiplicativos. Se espera que cuando se retire estos procesos de orientación y acompañamiento de forma progresiva el estudiante solucionará de forma independiente y autónoma a este tipo de problemas durante la fase de evaluación final.

## **6.2.7 Análisis Fase De Evaluación Final Y Comparación Con Fase De Exploración Y Evaluación Final.**

### *6.2.7.1 Análisis procesos de regulación metacognitiva.*

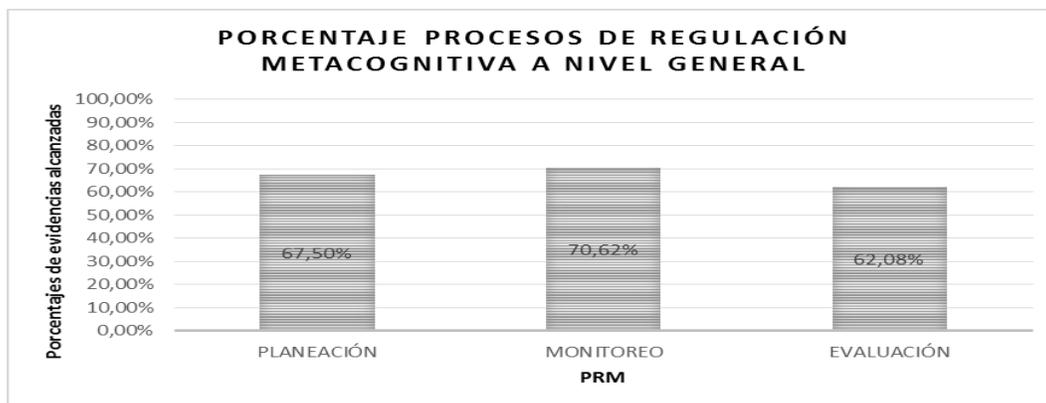
Esta parte del análisis se enfoca en establecer los procesos de regulación metacognitiva que los estudiantes aplicaron una vez realizado el modelado metacognitivo y la práctica guiada en la solución de problemas multiplicativos tipología Vergnaud,

partiendo de un cuestionario de evaluación final aplicado a los estudiantes y el instrumento de la lista de cotejo llevado por el docente.

Se examinaron elementos de cada una de las estrategias de los procesos de regulación metacognitiva, catalogándose como evidencias. La tendencia frente a cada proceso de regulación metacognitiva se puede apreciar en los siguientes gráficos:

#### 6.2.7.2 Análisis proceso de regulación metacognitiva a nivel general evaluación final.

Gráfico 8 Porcentajes de procesos de regulación metacognitiva que implementan estudiantes al solucionar problemas de orden multiplicativo-F4-Evaluación final



*Fuente: elaboración propia*

Como se puede evidenciar en el gráfico 8 el 67,5% de las evidencias corresponden a planeación, el 70,40% a monitoreo y el 62,08% a evaluación, lo cual demuestra que los estudiantes de grado séptimo mejoraron notablemente en el proceso de monitoreo cumpliendo con los siguientes elementos de las estrategias:

Tener claro si los datos propuestos en el enunciado del problema eran suficientes, simplificar el problema, concretándolo hasta tener la posibilidad de abordarlo; aplicar más de un procedimiento matemático para resolver el problema y representarlo mediante gráficas, dibujos o esquemas.

Al respecto Villamizar (2016) afirma que el monitoreo: se refiere a la posibilidad que se tiene, en el momento de realizar la tarea, de comprender y modificar su ejecución, por

ejemplo, realizar autoevaluaciones durante el aprendizaje, para verificar, rectificar y revisar las estrategias seguidas. (p.30).

Le sigue en porcentaje planeación con 67,5%, evidenciándose que los estudiantes dividieron el problema multiplicativo en componentes más básicos, estableciendo a través de los datos las unidades de medida, magnitudes y el tipo de relación ternaria o cuaternaria existente, caracterizando la proporción de dos espacios de medida y la correspondencia entre dos medidas y un operador escalar, además representaron los datos organizados en tablas y/o dibujos.

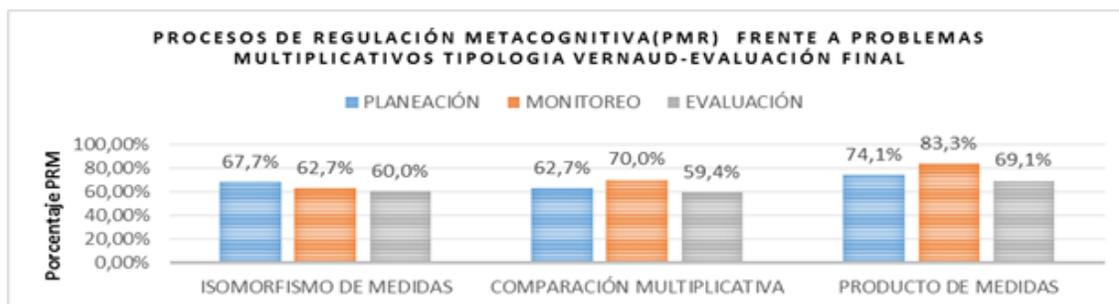
En la parte de evaluación se aprecia que los estudiantes realizan acciones para controlar, revisar la validez del proceso de resolución y/o de los resultados obtenidos, detectando algunos errores, revisa si las operaciones usadas en la solución del problema son las correctas; estableciendo que procedimientos de los usados eran más eficaces para encontrar la solución del problema.

#### *6.2.7.3 Análisis Procesos de regulación metacognitiva frente a los problemas multiplicativos tipología Vergnaud-Evaluación final.*

Con base al análisis general de los procesos de regulación metacognitiva (PRM) en la solución de las diferentes categorías de los problemas multiplicativos de tipología Vergnaud se verifica que los estudiantes avanzaron de forma autónoma en dichos procesos.

El siguiente grafico muestra los resultados obtenidos en cada categoría:

Gráfico 9 Porcentajes procesos de regulación metacognitiva en cada categoría de problemas de orden multiplicativo-F4-Evaluación final



*Fuente: elaboración propia*

En el gráfico 9 es posible notar que los estudiantes obtuvieron mejores resultados en cuanto al uso de procesos de regulación metacognitiva en todas las categorías de problemas multiplicativos en relación a la fase de exploración, logrando un avance significativo en el proceso de monitoreo o control, tal como se muestra en la tabla 13.

En figura 13 se percibe que los estudiantes realizan comparaciones entre las diversas categorías multiplicativas tipología Vergnaud, estableciendo en la categoría de isomorfismo de medidas durante la planeación que la relación entre las magnitudes es cuaternaria, y esta puede darse por multiplicación como en el caso de IMM encontrando el total de objetos; por división partitiva IMDP encontrando el número de objetos por grupo o por división medida IMDM hallando el número de grupos y establecen una diferencia entre unidades de medidas y magnitudes.

Cuando se enfrentan a la resolución de problemas por comparación multiplicativa, en la subcategoría CMM evidencian que aparece dos cantidades de una única magnitud que se ven afectadas por un escalar, usando la expresión “veces”, como lo expresa el estudiante **E6**; en la resolución de CMD1 el estudiante divide la magnitud comparada entre el escalar y encuentra la cantidad o magnitud referente CMD1 y en CMD2 sabe que tiene que dividir la cantidad o magnitud comparada entre la cantidad referente y encontrar el escalar.

Se observa que el porcentaje de evolución en las evidencias de planeación, monitoreo y evaluación de producto de medidas mejoró notablemente, considerando que los estudiantes a pesar de realizar en esta última fase un trabajo autónomo, se sustentaron bajo los campos conceptuales tomados en el modelado metacognitivo y la práctica guiada, en referencia a esto Schoenfeld (1985) también destaca que los programas de instrucción de estrategias heurísticas que incorporan la enseñanza de estrategias metacognitivas de gestión, planificación, regulación y evaluación de los procesos implicados en la resolución del problema obtienen mejores resultados.

Figura 13 Caso problema CMM, fase 4 –evaluación final – E6

<b>F4-EF-E6</b>	
<b>Problema CMM:</b>	<b>PREGUNTAS METACOGNITIVAS</b>
Para recorrer cierta distancia Vanesa gasto 15 horas. Miguel utilizo 3 veces más de tiempo que Vanesa. ¿Cuántas horas gasto Miguel?	<p><b>1.P.</b> Cuáles son las unidades de medida del problema y el tipo de relación que existe entre ellas?</p> <p><b>2.P.</b> ¿Cuáles son los datos que se requiere para resolver el problema?. Representa los datos usando números, tablas ó dibujos.</p> <p><b>5. P.</b> Cuéntanos paso a paso como piensas solucionar el problema</p>
<p><b>Tratamiento F4 -EF -E6 CMM en el registro-Lenguaje común</b></p> <p>1.Las unidades de medida son <math>m_1</math>=tiempo conocido, <math>m_2</math>= tiempo desconocido, <math>escalar</math>= numero de veces el tiempo conocido. Aquí se establece la relación ternaria <math>m_1, m_2</math> y el escalar</p> <p>2.</p> <p>.Vanesa.                    15 horas</p> <p style="margin-left: 40px;">—A—————B→</p> <p>Miguel</p> <p style="margin-left: 40px;">—A—————B→</p> <p style="margin-left: 40px;">3X15</p> <p style="margin-left: 100px;">las cantidades que se operan son 15 y 3 En una multiplicación.</p> <p>5. 1. Hallo las unidades de medida    2. encuentro las magnitudes</p> <p>3. ago una tabla                    4. escojo la operación</p> <p>5. aplico la operación                6. escribo el resultado</p> <p>7. comparo con mis compañeros    8.Reviso si estoy bien</p> <p>9. Escribo la respuesta que sea correcta</p> <p>(Discurso tomado de anexo 7 <b>F4-EF-E6</b>. Problema 3)</p>	

**Fuente:** elaboración propia

En la gráfica 9 y tabla 13 se observa que en la categoría de producto de medidas mejoró el proceso de monitoreo con respecto a la fase de exploración con un avance en porcentaje de evidencias del 63,0% y evaluación con un 55,3%; en la lista de cotejo se valora que los estudiantes durante el monitoreo saben que los datos del problema están completos o si requerían de más información para solucionar el problema, tenían claro los conceptos matemáticos que usaron para resolver el problema, representaron en algunos casos el procedimiento mediante dibujos, esquemas o gráficos, verificaron si el

procedimiento aplicado los llevó a la solución del problema, hicieron algunas tabulaciones para sintetizar el problema y compararon el problema con otros ya conocidos o desarrollados.

*Tabla 13 Evolución procesos de regulación metacognitiva por categoría de problemas multiplicativos, fase 1-exploración y fase 4-evaluación final*

Categoría multiplicativa	PRM Exploración-ideas previas(IP)			PRM Evaluación final (EF)			Evolución de los procesos de regulación metacognitiva(PRM)		
	P	M	E	P	M	E	P	M	E
Isomorfismo de medidas	43,8%	32,7%	23,4%	67,7%	62,7%	60,0%	23,9%	30,0%	36,6%
Comparación multiplicativa	41,3%	22,2%	13,6%	62,7%	70,0%	59,4%	21,4%	47,8%	45,8%
Producto de medidas	26,8%	20,3%	13,8%	74,1%	83,3%	69,1%	47,3%	63,0%	55,3%

*Fuente: Elaboración propia*

Los estudiantes están seguros de cuáles son los datos que requerían para resolver el problema y que estos están formados por unidades de medida, magnitudes y en algunos casos escalares como lo indica la figura 13, en la que el estudiante **E6** tiene claro que las unidades de medida son  $m_1$ =tiempo conocido,  $m_2$ = tiempo desconocido, definiendo e claramente el escalar como “número de veces el tiempo conocido” , además establece el tipo de relación ternaria existente entre las unidades de medida  $m_1$  y  $m_2$ .,usando dibujos para representar los datos y estableciendo algoritmos generales para la solución del problema.

Se comprobó que el estudiante **E4** durante la evaluación en la subcategoría PMD es consciente de los avances y dificultades que tuvo durante el procedimiento del problema multiplicativo, cuando escribe: “ una dificultad fue que al principio pensaba que era una multiplicación , pero luego escoji la division  $18 \div 6 = 3$  y asi tuve la respuesta” y revisa si las operaciones usadas en la solución del mismo son las correctas, estableciendo si los datos del problema eran suficientes para solucionarlo al responder: “. Como resolví el problema con una división  $18 \div 6 = 3$  Ago la prueba de la división multiplico el 6 que

conozco por un número que me de 18 entonces es 3 porque  $3 \times 6 = 18$  y así creo que el problema está bien hecho.”

Como lo indica la figura 14

*Figura 14 Caso problema PMD, fase 4 –evaluación final – E4*

<b>F4-EF-E4</b>	
<b>Problema PMD:</b> En una presentación de danzas de los estudiantes de grado séptimo se pueden formar 18 parejas posibles, si hay 6 niñas, cuántos niños tiene el grado séptimo?	<b>PREGUNTAS METACOGNITIVAS</b>
	<p><b>9. E.</b> ¿De qué manera podemos verificar si la respuesta que obtuviste del problema es correcta?. Muéstranos.</p> <p><b>10. E.</b> ¿Cuáles fueron las dificultades que tuviste durante el procedimiento del problema multiplicativo?</p>
<b>Tratamiento F4 -EF –E4 PMD en el registro-Lenguaje común</b>	
<p><b>9. E.</b> Como resolví el problema con una división <math>18 \div 6 = 3</math> Ago la prueba de la division multiplico el 6 que conozco por un numero que me de 18 entonces es 3 porque <math>3 \times 6 = 18</math> y asi creo que el problema esta bien hecho.</p> <p><b>10. E.</b> una dificultad fue que al principio pensaba que era una multiplicación , pero luego escoji la division <math>18 \div 6 = 3</math> y asi tuve la respuesta. (Discurso tomado de anexo 7 <b>F4-EF-E4</b>. Problema 2)</p>	

De forma general de acuerdo a tabla 13 y Gráfico 10, se establece que el problema multiplicativo con mejores procesos de regulación metacognitiva fue Producto de medidas que alcanzó 74,1% en planeación, monitoreo 83,3% y evaluación 69,1% y si consideramos los avances adquiridos por los estudiantes desde el momento de exploración –fase I hasta la evaluación final(EF) se aprecia que durante el monitoreo mejoraron un 63% de evidencias, seguido de evaluación con un 55,3% y por último planeación con 47,3% .

Cabe destacarse que este avance en los distintos procesos de regulación metacognitiva de los problemas multiplicativos tipología Vergnaud se presentó gracias al modelado metacognitivo y práctica guiada. Durante la práctica supervisada, el profesor cumple una acción mediadora. (Vygotsky, 1995). En esta fase ayuda y apoya al alumno en la selección y aplicación de las estrategias aprendidas para su toma de decisiones. De este modo, de manera paulatina logra una práctica independiente, momento del proceso de aprendizaje en que como lector debe resolver los problemas que el enunciado le presenta.

6.2.7.4 Casos de evidencia frente a las categorías de problemas multiplicativos que mejoraron proceso de regulación metacognitiva-Evaluación final.

6.2.7.5 Problemas productos de medida y comparación multiplicativa.

6.2.7.6 Planeación -Caso Problemas producto de medidas por multiplicación

Figura 15 Caso problema PMM, fase 4 –evaluación final – E5

(PMM) El menú escolar está formado por dos platos principales, el primero y el segundo. Si la empresa que realiza el menú escolar tiene 2 primeros platos y 3 segundos. ¿Cuántos menús diferentes puede realizar?					
ANTES DE SOLUCIONAR RESPONDE LAS SIGUIENTES PREGUNTAS METACOGNITIVAS (P)					
¿Cuáles son las unidades de medida del problema y el tipo de relación que existe entre ellas?"	¿Cuáles son los datos que se requiere para resolver el problema?. Representa los datos usando números, tablas ó dibujos.	¿Qué tipo de operación necesita para resolver el problema?. Argumente.	¿Cuánto tiempo cree que gastará en resolver el problema?	¿Cuéntanos paso a paso como piensas solucionar el problema?	TOTAL
EVID: 1,2,3 RTA/	EVID: 4,5,6 RTA/	EVID: 8 RTA/	EVID: 7 RTA/	EVID: 9,10 RTA/	
Las unidades de medida son: los datos. y presentan relación ternaria unidades. M <sub>1</sub> = primeros platos principales M <sub>2</sub> = segundos platos principales M <sub>3</sub> = cuantos menús.	Datos son: 2 primeros platos 3 segundos platos 	necesito 1 multiplicar 2 primeros platos y 3 segundos platos para saber cuantos menús diferentes puedo realizar	1 minuto	1. Voy a entender el problema. 2. Voy a sacar los datos 3. Voy a multiplicar 2 primeros platos y 3 segundos platos. 4. Hago operación multiplicativa	

F4-EF-E5	
Problema PMM:	PREGUNTAS METACOGNITIVAS
El menú escolar está formado por dos platos principales, el primero y el segundo. Si la empresa que realiza el menú escolar tiene 2 primeros platos y 3 segundos. ¿Cuántos menús diferentes puede realizar?	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. P. Cuáles son las unidades de medida del problema y el tipo de relación que existe entre ellas?"</li> <li>2. P. ¿Cuáles son los datos que se requiere para resolver el problema?. Representa los datos usando números, tablas ó dibujos.</li> <li>3. P. Qué tipo de operación necesita para resolver el problema?. Argumente.</li> <li>4. P. ¿cuéntanos paso a paso como piensas solucionar el</li> </ol>

problema	
<b>Tratamiento F4 -EF –E5 PMM en el registro-Lenguaje común</b>	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Las unidades de medida son los datos y presentan relación ternaria Unidades M1= primeros platos principales M2= segundos platos principales M3= cuantos menus</li> <li>2. Datos son: 2 primeros platos 3 segundos platos</li> </ol>	 
<ol style="list-style-type: none"> <li>3. Necesito multiplicar 2 primeros platos y tres segundos platos para saber cuantos menus diferentes puedo realizar</li> </ol>	
<ol style="list-style-type: none"> <li>5.. 1.Voy a entender el problema</li> <li>2. voy a sacar los datos</li> <li>3. voy a multiplicar dos primeros platos y 3 segundos platos</li> <li>4. hago operación multiplicativa</li> </ol>	
(Discurso tomado de anexo 7 <b>F4-EF-E5</b> . Problema 1)	

***Fuente:** elaboración propia*

En la figura 15 se demuestra que el estudiante **E5** mejoró durante el proceso metacognitivo de planeación ya que identifica los datos para resolver el problema producto de medidas por multiplicación, estableciendo que los datos son “2 primeros platos y 3 segundos platos” y los representó por medio de dibujos, a través de las evidencias definió claramente las unidades de medida del problema M1= primeros platos principales, M2= segundos platos principales y M3=cuantos menús y la relación ternaria que existe entre ellos , estableció las magnitudes o cantidades que intervienen en la operación matemática 2 y 3 , propuso al menos un camino adecuado(algoritmo) para resolver el problema en forma ordenada, estableciendo que requería de una operación multiplicativa entre 2 y 3.

Al respecto Tamayo (2006), diseña un plan como la parte fundamental del proceso de resolución de problemas. Una vez comprendida la situación planteada y teniendo clara cuál es la meta a la que se quiere llegar, es el momento de planificar las acciones que llevarán a ella, es necesario abordar cuestiones como para qué sirven los datos que aparecen en el enunciado, qué puede calcularse a partir de ellos, qué operaciones utilizar y en qué orden se debe proceder.

6.2.7.7 Monitoreo -Caso Problemas producto de medidas por división.

Figura 16 Caso problema PMD, fase 4 –evaluación final – E4

(EVID) En una presentación de danzas de los estudiantes de grado séptimo se pueden formar 18 parejas posibles, si hay 6 niñas, cuántos niños tiene el grado séptimo?												
ANTES DE SOLUCIONAR RESPONDE LAS SIGUIENTES PREGUNTAS METACOGNITIVAS (M)												
¿Los datos propuestos en el enunciado del problema son suficientes? SI <input checked="" type="checkbox"/> NO <input type="checkbox"/> . Porque?	¿Puedes reorganizar los datos del problema en una tabla?	Muéstranos el procedimiento o los procedimientos posibles y resuelve el problema. Si requieres apoyarte en un gráfico o dibujo lo puedes hacer.	T C T A L									
EVID: 1,2,6 RTA/ Los datos si son suficientes porque se conoce M3, M2 y haciendo una división de M3 con M2 encuentro M1 Para hacer esta operación ubico los datos $M_3 = \text{cantidad de parejas} = 18$ $M_2 = \text{cantidad de niñas} = 6$ $M_1 = \text{cantidad de niños} = ?$ realizo la división $\begin{array}{r} 18 \ 6 \\ -18 \ 3 \\ \hline 00 \end{array}$	EVID: 3, 4, 5 RTA/ los datos los puedo escribir en una tabla <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>M3</td> <td>M2</td> <td>M1</td> </tr> <tr> <td>Parejas</td> <td>niñas</td> <td>niños</td> </tr> <tr> <td>18</td> <td>6</td> <td>?</td> </tr> </table> $\begin{array}{r} 18 \ 6 \\ -18 \ 3 \\ \hline 00 \end{array}$ niños = 3	M3	M2	M1	Parejas	niñas	niños	18	6	?	EVID: 7,8,9,10 RTA/ Puedo dibujar los 6 niñas y los 3 niños para hacer las 18 parejas 	
M3	M2	M1										
Parejas	niñas	niños										
18	6	?										

F4-EF-E4	
<b>Problema PMD:</b> En una presentación de danzas de los estudiantes de grado séptimo se pueden formar 18 parejas posibles, si hay 6 niñas, cuántos niños tiene el grado séptimo?	<b>PREGUNTAS METACOGNITIVAS</b> 6. M. Los datos propuestos en el enunciado del problema son suficientes? SI_ NO____. Porque? 6. M. ¿Puedes reorganizar los datos del problema en una tabla? 7. M. Muéstranos el procedimiento o los procedimientos posibles y resuelve el problema. Si requieres apoyarte en un gráfico o dibujo lo puedes hacer.
<b>Tratamiento F4 -EF -E4 PMD en el registro-Lenguaje común</b>	
6. M. Los datos si son suficientes porque se conoce M3,M2 y haciendo una división de M3 con M2 encuentro M1 Para hacer esta operación ubico los datos $M_3 = \text{cantidad de parejas} = 18$ $M_2 = \text{cantidad de niñas} = 6$ $M_1 = \text{cantidad de niños} = ?$ realizo la división $18 \div 6 = 3$	
7. M. los datos los puedo escribir en una tabla	

M	M	M
3	2	1
pa rejas	n iñas	n iños
18	6	?

$18 \div 6 = 3$   
Niños=3

8. M. Puedo dibujarlas 6 niñas y los 3 niños para las 18 parejas (Estudiante dibuja)  
(Discurso tomado de anexo 7 **F4-EF-E4**. Problema 2)

*Fuente: elaboración propia*

Como se aprecia en la figura 16, basándose en los elementos de estrategias de monitoreo y las evidencias, durante la fase final se observó que **E4** sabe que los datos del enunciado están completos o si requiere de más información para solucionar el problema, tenía claro los conceptos matemáticos necesarios que uso para resolver el problema como las unidades de medida, las magnitudes o cantidades, la medida producto  $M1 = \text{cantidad de parejas} = 18$ , las medidas elementales  $M2 = \text{cantidad de niñas} = 6$  y  $M1 = \text{cantidad de niños} = ?$  y concretó la operación de división que requiere en este tipo de problema; reorganizo los datos usando tabulaciones y representó el procedimiento mediante dibujos, estableciendo una combinación de las unidades de medida.

Al respecto Villamizar (2016) afirma que el monitoreo: “se refiere a la posibilidad que se tiene, en el momento de realizar la tarea, de comprender y modificar su ejecución, por ejemplo, realizar autoevaluaciones durante el aprendizaje, para verificar, rectificar y revisar las estrategias seguidas” (p.30).

***Evaluación -Caso Problemas comparación multiplicativa por multiplicación.***

Figura 17 Caso problema CMM, fase 4 –evaluación final – E6

(CMM) Para recorrer cierta distancia Vanesa gasto 15 horas . Miguel utilizo 3 veces más de tiempo que Vanesa. ¿Cuántas horas gasto Miguel?									
ANTES DE SOLUCIONAR RESPONDE LAS SIGUIENTES PREGUNTAS METACOGNITIVAS (E)									
¿De qué manera podemos verificar si la respuesta que obtuviste del problema es correcta?. Muéstranos.	¿Cuáles fueron las dificultades que tuviste durante el procedimiento del problema multiplicativo?	¿Cuáles pasos y operaciones aplicaste en la solución del problema de acuerdo a lo que planeaste inicialmente?	¿Las operaciones usadas en la solución del problema son las apropiadas o puedes usar otro tipo de operación?. Cuál o cuáles?						
EVID: 1,5 RTA/ Haciendo una multiplicación de la unidad m1 por un escalor $m_1 = \text{tiempo} = 15 \text{ horas}$ Escalar = número de veces = 3 $m_1 \times 3 = ?$ $m_1 \times 3 = X$ $15 \times 3 = X$ $45 = X$	EVID: 3,4 RTA/ Cuando lei el problema creí que las unidades de medida eran la distancia, pero luego lei nuevamente y me di cuenta que las unidades de medida eran el tiempo en horas	EVID: 2,7,9 RTA/ - escribo las unidades de medida m1 y el escalor - Ay una relación ternaria entre los datos - saco los datos tiempo conocido 15 horas , Escalar 3 - la operación es una multiplicación	EVID: 6,8,10 RTA/ la operación que aplique que es la multiplicación si o la apropiada para el escalor 3 veces o multiplicar por 3 <table border="1"> <tr> <td>m1</td> <td>escalar</td> <td>X</td> </tr> <tr> <td>15</td> <td>3</td> <td>45</td> </tr> </table> $15 \times 3 = 45$ prueba $45 \div 3 = 15$	m1	escalar	X	15	3	45
m1	escalar	X							
15	3	45							

F4-EF-E6	
Problema CMM:	PREGUNTAS METACOGNITIVAS
Para recorrer cierta distancia Vanesa gasto 15 horas. Miguel utilizo 3 veces más de tiempo que Vanesa. ¿Cuántas horas gasto Miguel?	9. E. ¿De qué manera podemos verificar si la respuesta que obtuviste del problema es correcta?. Muéstranos. 10. E. ¿Cuáles fueron las dificultades que tuviste durante el procedimiento del problema multiplicativo? 11. E. ¿cuáles pasos y operaciones aplicaste en la solución del problema de acuerdo a lo que planeaste inicialmente? 12. E. ¿Las operaciones usadas en la solución del problema son la apropiadas puedes usar otra operación?
Tratamiento F4 -EF –E6- CMM en el registro-Lenguaje común	
8. E haciendo una multiplicación de la unidad .m1 por un escalor .m1=tiempo = 15 horas Escalar= número de veces =3 $.m_1 \times 3 = X$ $15 \times 3 = X$ $45 = X$	9. E. cuando lei el problema creí que las unidades de medida eran la distancia, pero luego lei nuevamente y me di cuenta que las unidades de medida eran el tiempo en horas 10. E.- escribo la unidades de medida m1 y escalor - Ay una relación ternaria entre los datos - Saco los datos tiempo conocido 15 horas , escalor 3 - La operación es una multiplicación 11. E. la operación que aplique es la multiplicación

Si es la apropiada porque el escalar tres veces es multiplicar por 3		
m1	escalar	X
15	3	45
<p>15X3=45  Prueba: 45÷3=15  (Discurso tomado de anexo 7 <b>F4-EF-E6</b> . Problema 3)</p>		

***Fuente:** elaboración propia*

Considerando el proceso de evaluación, la figura 17 nos muestra que el estudiante **E6** de acuerdo a los elementos de las estrategias de evaluación y las evidencias respectivas tenía claro si la solución del problema multiplicativo era correcta o incorrecta y lo sustenta con argumentos al establecer qué tipo de operaciones se aplica entre las unidades de medida ( m1) por el escalar y obtener la solución y con ello alcanza a definir que los datos son suficientes para la solución del problema, el estudiante es consciente de los avances y dificultades que ha tenido durante el procedimiento del problema multiplicativo cuando estableció “ creí que las unidades de medida eran la distancia, pero luego lei nuevamente y me dí cuenta que las unidades de medida eran el tiempo en horas”.

De igual forma se apreció que el estudiante **E6** estableció con seguridad los componentes básicos y las relaciones entre los diferentes elementos que formaban parte del problema multiplicativo cuando afirma:” escribo la unidad de medida m1 y escalar, ay una relación ternaria entre los datos”. Revisa si las operaciones usadas en la solución del problema son las correctas al escribir:” la operación que aplique es la multiplicación...Si es la apropiada porque el escalar tres veces es multiplicar por 3” y hace una prueba dividiendo  $45 \div 3 = 15$ .

La observación general frente a como mejoraron (evolucionaron porcentaje de evidencias) durante la fase final los procesos de regulación metacognitiva en los problemas multiplicativos de tipología Vergnaud permitió establecer un avance significativo en producto de medidas y comparación multiplicativa, en el que se evidenció que producto de medidas alcanzo un avance en los procesos de planeación del 47,3%, en monitoreo 63,0% y en evaluación del 55,3%; con respecto a comparación

multiplicativa que mejoró en un 21,4%; 63,0% y 55,3% en planeación. Monitoreo y evaluación respectivamente. Esto se evidencia en la tabla 13.

El avance en los procesos de regulación metacognitiva se debe en gran parte a la intervención educativa de fase dos con modelado metacognitivo en la que mediante 8 intervenciones se mostró qué acciones metacognitivas deben realizarse cuando los estudiantes se enfrentan a la solución de un problema multiplicativo, teniendo en cuenta algunos elementos de las estrategias de los PRM y fase tres práctica guiada que posibilitó desde esta perspectiva de trabajo, generar en los estudiantes la utilización de algunas estrategias, que se realizaron a través de una guía metacognitiva y una lúdica que permitió el trabajo cooperativo.

Además, se diseñó situaciones interpersonales de aula, en las que el profesor, mediante el diálogo y la aplicación de diferentes ayudas pedagógicas, modela el aprendizaje de estrategias de resolución de problemas. Logrando que en la fase cuatro al retirar estas ayudas el alumno asumiera de forma autónoma e independiente la solución de los problemas multiplicativos.

Al respecto, Iriarte & Sierra. (2011). Afirman que:

*Una didáctica eficaz al guiar el proceso de aprendizaje de las matemáticas, relacionado con la resolución de problemas, desde una concepción metacognitiva, implica ayudar a los estudiantes a aprender sobre el aprendizaje, a comprender su propia postura frente a la estructura de los problemas, ( hoy matemáticos, mañana rutinarios o de la vida social o profesional ), a decantar desde los hechos y datos explícitos, las posibles alternativas, a reflexionar y a interactuar con otros, pares y maestros, sobre el proceso de producción de la solución para que puedan transferir esas habilidades a situaciones diversas y generar nuevas estrategias cuando se detecten variaciones que así lo requieran. (p. 18)*

## 6.2.8 Análisis PRM Fases De Exploración-Práctica Guiada-Evaluación Final Y Evolución De Los Mismos.

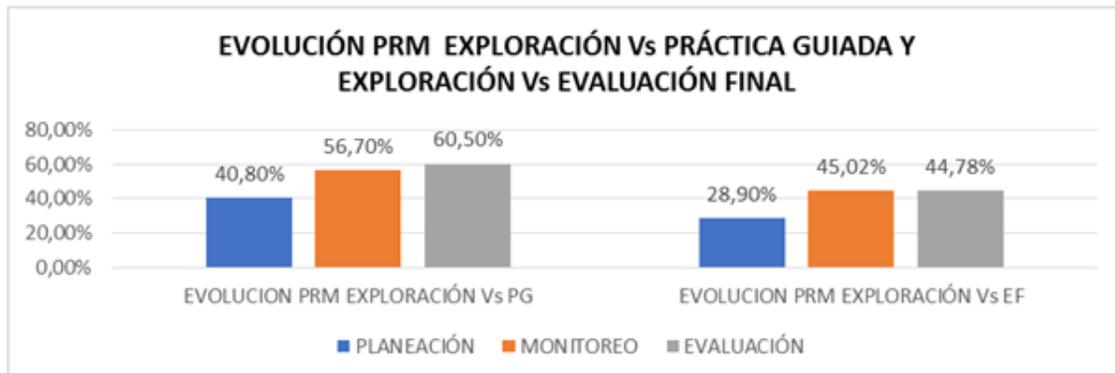
En esta parte del analisis se realizará una comparación de los PRM en las fases de intervención, verificando el porcentaje de evolución de los mismos en los estudiantes al solucionar los problemas multiplicativos tipología Vergnaud.

*Gráfico 10 Porcentajes de procesos de regulación metacognitiva que implementan estudiantes al solucionar problemas de orden multiplicativo durante fase de exploración-práctica guiada-evaluación final.*



*Fuente: elaboración propia*

*Gráfico 11 Porcentajes de evolución procesos de regulación metacognitiva que implementan estudiantes al solucionar problemas de orden multiplicativo durante fase de exploración-práctica guiada-evaluación final*



*Fuente: elaboración propia*

En la gráfica 10 se aprecia que en la fase de exploración, el proceso de regulación metacognitiva que presenta mayor dificultad es la evaluación con un 17,3% de evidencia lo que permitió concluir que a los estudiantes se les dificultaba identificar si las operaciones y algoritmos multiplicativos aplicados en la solución del problema se desarrollaba como lo tenían previsto, presentaban dificultad para determinar que correctivos podían tomar sobre la marcha del mismo, no demostraron si podían resolver el problema multiplicativo de otra manera y no estaban seguros si la solución era correcta o incorrecta.

Le seguía en grado de dificultad el proceso de monitoreo en la que los estudiantes alcanzaron un 25,6% de las evidencias, lo que colocó de manifiesto que estos no realizan acciones para revisar la validez del proceso de resolución del problema, demuestran poco conocimiento sobre sus propios procesos cognitivos y se les dificultó buscar errores de forma sistemática en los datos del problema, en los procedimientos y algoritmos matemáticos utilizados.

Sin embargo en la gráfica 10 y 11 los resultados alcanzados en la práctica guiada en los procesos de regulación metacognitiva dejan en evidencia que el modelado metacognitivo, acompañado de la práctica guiada propuesta por Pifarré (1998) y la lúdica aplicada que facilitó el aprendizaje cooperativo de los estudiantes, permitió una evolución significativa en todos los **PRM**, alcanzando la planeación un 79,4% de evidencias con respecto al 38,6% de la fase de exploración, es decir mejoró un **40,8%**; en el monitoreo se observa un 82,30% en relación al 25,60%, evolucionando el proceso en un **56,7%**, en cuanto a la evaluación durante la práctica guiada los estudiantes alcanzan un 78,10% en concordancia al 17,3% de la fase de exploración, mejorando en un **60,5%**.

Si bien durante la práctica guiada se les facilitó a los estudiantes en mayor proporción el proceso de regulación metacognitivo monitoreo, evidenciándose que estos verificaban si los datos del enunciado estaban completos o si requerían de más información para la solución del problema, representaron el procedimiento mediante dibujos y/o gráficas,

usaron otras operaciones para comprobar si la solución era correcta o incorrecta, compararon el procedimiento usado con otros problemas ya conocidos, solucionaron el problema proponiendo más de una alternativa.

Debe resaltarse que en relación a la forma como evolucionaron los procesos de regulación metacognitiva desde la exploración hasta la práctica guiada se observa que el proceso que mejoró notablemente en la solución de problemas multiplicativos fue la evaluación en un porcentaje de **60,57%**.

Los estudiantes pasaron de presentar deficiencias para identificar si las operaciones y algoritmos multiplicativos aplicados en la solución del problema de orden multiplicativo se desarrollaron de manera correcta o si el proceso de evaluación fue suficiente para saber que correctivos se tomaran sobre la marcha de solución del problema y de la dificultad para definir otros posibles caminos de solución a aplicar durante la práctica guiada más elementos de las estrategias de evaluación que se evidenciaron cuando el estudiante verificó por ejemplo si la planeación del problema le permitió usar una estrategia clara, siendo consciente de los avances y dificultades que tuvo durante el procedimiento del problema multiplicativo.

De igual forma el estudiante adquirió claridad sobre los pasos y operaciones necesarias para solucionar el problema de acuerdo a lo planeado, en este punto estableció que procedimientos de los usados eran más eficaces para encontrar la solución del problema y definió con seguridad si la operación multiplicativa usada le ayudo a solucionar el problema y lo sustentó con argumentos.

Bajo el análisis de la fase 4 ó evaluación final se aprecia en la gráfica 10 y 11 que en comparación con la fase de exploración, los procesos de regulación metacognitiva evolucionan tanto en la planeación, monitoreo y la evaluación. Durante la fase de exploración la planeación de los problemas multiplicativos contaba con un 38,60% de evidencias y en la fase 4 de evaluación final contaba con un 67,5% de evidencias,

mejorando en un **28,9%**; el monitoreo contaba durante la exploración con 25,60% y alcanzó durante la fase 4 el 70,62% de evidencias, mejorando en un **45,02%**, el proceso de evaluación tenía un 17,3% de evidencias en la primera fase y alcanzó durante la última fase un 62,08% generando un avance en este proceso del **44,78%**.

Se destaca que durante la fase 4 –evaluación final (EF) al realizar los estudiantes un desarrollo autónomo de las intervenciones en la solución de problemas multiplicativos se les facilitó en mayor proporción el proceso de regulación metacognitivo monitoreo, seguido de la planeación y evaluación. Gráfica 10; debe resaltarse que en relación a la forma como evolucionaron los procesos de regulación metacognitiva con respecto a la fase de exploración se observa que este alcanza un 45,02%, Gráfica 11 a diferencia de la práctica guiada donde el PRM con mayor avance fue la evaluación metacognitiva.

Se coteja en la última fase de evaluación final que durante el proceso de monitoreo se evidencia que los estudiantes verificaban si los datos del enunciado estaban completos o si requerían de más información para la solución del problema, representaron el procedimiento mediante dibujos y/o gráficas, usaron otras operaciones para comprobar si la solución era correcta o incorrecta, compararon el procedimiento usado con otros problemas ya conocidos, solucionaron el problema proponiendo más de una alternativa.

También se presentó un avance significativo en la evaluación del 44,78% en la evaluación final con respecto a la exploración, según gráfica 11 en la lista de cotejo se apreció que el estudiante verificó por ejemplo si los datos planteados inicialmente le fueron suficientes para la solución de problemas, determinó si le fue más fácil el desarrollo del problema cuando previamente ha resuelto un problema semejante o si la planeación del problema le permitió usar una estrategia clara, siendo consciente de los avances y dificultades que tuvo durante el procedimiento del problema multiplicativo.

Se concluye que los estudiantes de grado séptimo mejoraron de forma notable en los procesos de monitoreo y evaluación al enfrentarse de forma autónoma a la solución de

problemas multiplicativos tipología Vergnaud, de igual forma al analizar la línea de tendencia de los PRM en cada fase. Gráfica 10 con respecto a la exploración se observa que la planeación, monitoreo y evaluación de los problemas multiplicativos tipología Vergnaud se orientan al mejoramiento continuo.

Según lo anterior se evidenció que el estudiante durante el monitoreo y evaluación sabe que los datos del enunciado están completos o si requiere de más información para solucionar el problema, verifica si el procedimiento algorítmico lo llevará a la solución del problema, define con claridad las unidades de medida de cada problema, establece las cantidades o magnitudes involucradas, organiza los datos en tablas o gráficos, está seguro de que utilizó la operación correcta, retroalimenta la solución del problema, verifica los resultados de la solución del problema, sabe que conceptos matemáticos requiere y el tiempo que gasta en la solución del problema.

#### *6.2.8.1 Análisis de evolución de los niveles de resolución de problemas en cada estructura multiplicativa de los problemas de tipología Vergnaud-evaluación final.*

Esta parte del análisis pretende establecer los resultados porcentuales procedentes de los niveles de resolución para cada estructura de problema multiplicativo tipología Vergnaud durante la fase de evaluación final, considerando que los niveles de resolución de los estudiantes frente a cada categoría de problema multiplicativo se realizan después de aplicado el modelado metacognitivo y práctica guiada. Al respecto Schoenfeld (1988) sugirió que el principal objetivo de la instrucción matemática es ayudar a los estudiantes a ser autónomos (...) indicó que la instrucción matemática debe incorporar estrategias para aprender a leer, conceptualizar y escribir argumentos matemáticos.

Se realiza el análisis de forma general estableciendo un porcentaje proporcional al número de niveles alcanzados por categoría multiplicativa. Los niveles de resolución de los problemas fueron analizados considerando los ítems propuestos en tabla 8. Se asignó

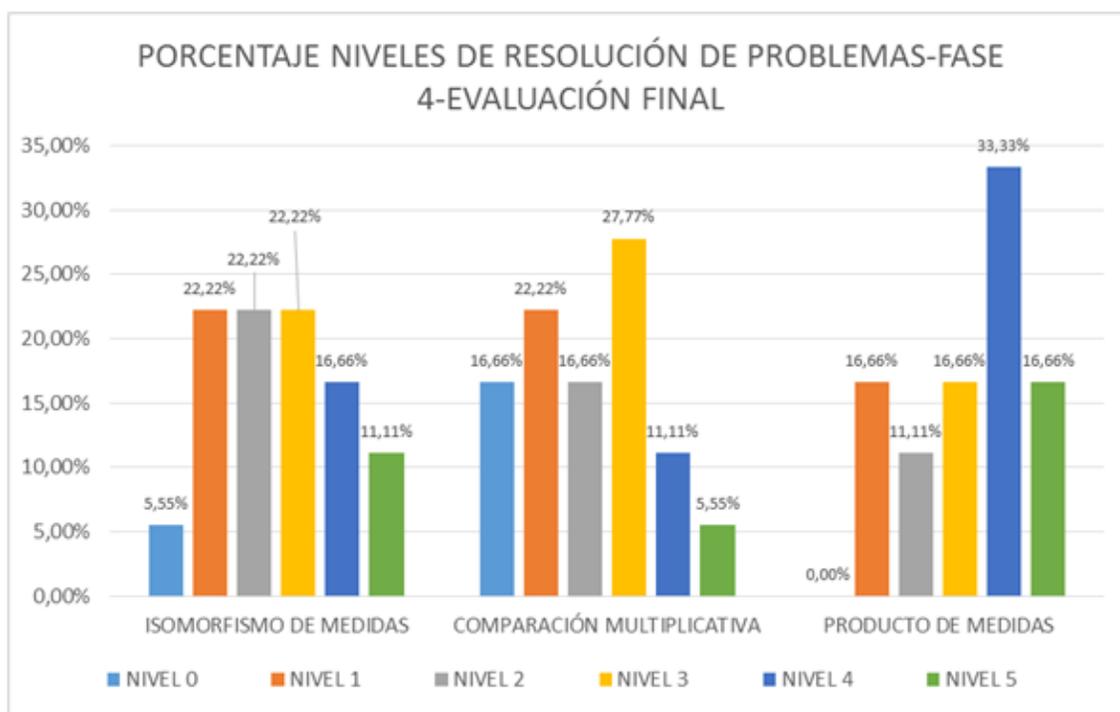
el nivel 0, 1 y 2 como los niveles resolutivos con mayores dificultades y limitaciones a la hora de enfrentarse al problema multiplicativo y los niveles 3,4 y 5 como los niveles resolutivos en los que los estudiantes identifican y relacionan los datos, realizan propuestas para resolver el problema sean o no las correctas, alcanzando en algunos casos a resolver acertadamente justificando su respuesta con base a un plan específico paso a paso. Este proceso se aplicó para cada tipo de problema mediante 8 intervenciones con manejo de cuestionario aplicado a estudiantes y lista de cotejo llevada por el docente; generalizando los problemas de estructura multiplicativa tipología Vergnaud en isomorfismo de medidas, comparación multiplicativa y producto de medidas. (Ver gráfico 13)

*Tabla 14 Caracterización Niveles de resolución de problemas 4 fase-Evaluación final.*

Estudiante	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6	Problema 7	Problema 8
	ISOMORFISMO DE MEDIDAS			COMPARACIÓN MULTIPLICATIVA			PRODUCTO DE MEDIDAS	
	IMM	IMDP	IMDM	CMM	CMD1	CMD2	PMM	PMD
E1	3	1	1	3	2	3	4	4
E2	1	2	5	4	1	1	1	1
E3	1	2	0	0	0	0	3	2
E4	4	2	3	1	3	1	4	2
E5	5	3	2	5	3	2	5	4
E6	4	3	4	4	2	3	5	3
<b>Porcentajes de niveles por cada estructura multiplicativa</b>								
<b>Nivel 0</b>	5,55%			16,66%			0,00%	
<b>Nivel 1</b>	22,22%			22,22%			16,66%	
<b>Nivel 2</b>	22,22%			16,66%			11,11%	
<b>Nivel 3</b>	22,22%			27,77%			16,66%	
<b>Nivel 4</b>	16,66%			11,11%			33,33%	
<b>Nivel 5</b>	11,11%			5,55%			16,66%	

*Fuente: elaboración propia*

Gráfico 12 Porcentajes de niveles de resolución de problemas de estructura multiplicativa tipo Vergnaud —F4-evaluación Final.



*Fuente: elaboración propia*

En el gráfico 12 se pudo observar que durante la evaluación final los problemas que más se les facilitó resolver a los estudiantes son los que pertenecen a la categoría de isomorfismo de medidas, seguido de los problemas de productos de medida, mientras que comparación multiplicativa tuvo un desempeño intermedio entre estos dos tipos de problema multiplicativo.

En los problemas de isomorfismo de medidas, nuestros resultados complementan los estudios con estudiantes de 11 a 16 años de Hart (1981), quien afirmaba que los alumnos identifican más fácilmente un problema de división que uno de multiplicación, en nuestra investigación se aprecia que existieron 6 desempeños positivos con respecto a los problemas multiplicativos (IMM) y 7 desempeños positivos en relación a los problemas de división partitiva y medida (IMDP e IMDM) de las 14 soluciones favorables.

Por lo que respecta a los problemas de comparación multiplicativa, los resultados indican que los problemas en los que la incógnita es la cantidad comparada CMM (multiplicación) les resulta a los estudiantes más fácil de resolver que en los que se busca la cantidad referente o escalar CMD1 y CMD2 (ambos de división)

En cuanto a los problemas de producto de medidas, los resultados indican que resulta más sencillo resolver los problemas de multiplicación (en los que se busca la medida producto), que los problemas de división (donde la incógnita es una de las medidas elementales). Pero de forma general en figura 20 se aprecia que los estudiantes además de tener claro los datos del problema, también establecieron una relación multiplicativa o cartesiana entre los mismos, ayudando a que el procedimiento planteado favorezca una relación combinatoria de parejas ordenadas, precisando una respuesta correcta.

En esta fase el caso del estudiante **E1** (figura 20), evidencia en forma general que los estudiantes establecen con claridad que existe una relación conmutativa y ternaria entre las dos medidas M1 (2 primeros platos) y M2 (tres segundos platos):  $2 \times 3$  ó  $3 \times 2$  permitiéndoles obtener la medida M3 (6 menús), de la misma manera se les facilita aplicar otros procedimientos que le permitan solucionar el problema como representar en forma gráfica y obtener 6 parejas ordenadas.

Aunque el 77,7% de las respuestas frente a los problemas multiplicativos de isomorfismo de medidas y el 66,6% de las respuestas de producto de medidas establecieron un buen desempeño, se requiere seguir mejorando los procesos de regulación metacognitiva para obtener mejores resultados en la solución de este tipo de problemas, no obstante de forma general los estudiantes avanzaron en dividir el problema multiplicativo tipología Vergnaud en componentes más básicos, examinando y buscando las relaciones entre los diferentes elementos que forman parte del problema.

El estudiante **E5**. Figura 18, cuando se enfrentó a un problema de isomorfismo de medidas pudo determinar que se manejan dos unidades de medida y cuatro magnitudes, dentro de las cuales una es la incógnita.

En el caso de comparación multiplicativa los estudiantes tienen claro que son dos unidades de medida y un escalar que se lo identifica con la palabra “veces” y en el producto de medidas son dos unidades elementales que se multiplican para dar origen a la tercera unidad que es el producto.

Igualmente lograron determinar el tipo de relación que existe entre las unidades de medida; en isomorfismo de medidas caracterizaron una relación cuaternaria, en comparación multiplicativa y producto de medidas establecieron una relación ternaria. Bajo este análisis se observó que la mayoría de los estudiantes tenían claro si los datos propuestos en el enunciado del problema de IMDP eran suficientes, ejecutaron más de un procedimiento matemático para la solución del problema usando representaciones gráficas, dibujos o esquemas, realizaron acciones para controlar y revisar la validez del proceso de resolución de los resultados obtenido, detectando posibles errores. Al respecto se consideró el siguiente ejemplo:

Figura 18 Caso problema IMDP, fase 4 –evaluación final – E5

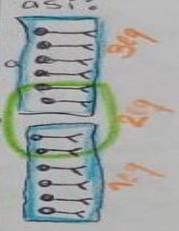
**IMDP)**  
A un entrenamiento de basquetbol asisten 12 jugadores. El entrenador conformó dos equipos como se muestra en la siguiente figura



Si después el entrenador conformó tres equipos con la misma cantidad de jugadores, ¿con cuánto jugadores conformó cada equipo?

**ANTES DE SOLUCIONAR RESPONDE LAS SIGUIENTES PREGUNTAS METACOGNITIVAS (P)**

¿Cuáles son las unidades de medida del problema y el tipo de relación que existe entre ellas?	¿Cuáles son los datos que se requiere para resolver problema? Representa los datos usando números, tablas o dibujos.	¿Qué tipo de operación necesita para resolver el problema? Argumente.	¿Cuánto cree que gastará en resolver el problema?	¿Cuántanos paso a paso como piensas solucionar el problema?
EVID: 1,2,3 RTA/ Unidades medida: $M_1$ $M_2$ Equipos    jugadores 3         12 A B C D E F tienen relación cuaternaria	EVID: 4,5,6 RTA/ $M_2 = 12$ jugadores $M_1 = 3$ equipos $M_2 = x$ $M_1 = 1$ A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z	EVID: 8 RTA/ Necesito una división entre magnitudes 12 y 3	EVID: 7 RTA/	EVID: 9,10 RTA/

ANTES DE SOLUCIONAR RESPONDE LAS SIGUIENTES PREGUNTAS METACOGNITIVAS (M)											
¿Los datos propuestos en el enunciado del problema son suficientes? SI NO <input checked="" type="checkbox"/> Porque?	¿Puedes reorganizar los datos del problema en una tabla? SI NO Como?	Muéstranos el procedimiento o los procedimientos posibles y resuelve el problema. Si requieres apoyarte en un gráfico o dibujo lo puedes hacer.	TOTAL								
EVID: 1,2,6 RTA/	EVID: 3,4,5 RTA/	EVID: 7,8,9,10 RTA/									
No, porque hay un error cuando habla de la misma cantidad de jugadores de un equipo no se sabe si es la cantidad total de jugadores o la misma cantidad de jugadores que debe haber en cada grupo o equipo	Si, puedo hacer así: 	1. Miro cuales son las unidades de medida y las magnitudes 2. Ve la relación que hay entre los datos 3. Hago una tabla para organizar los datos. <table border="1" data-bbox="893 514 1201 609"> <tr> <td>M1</td> <td>M2</td> </tr> <tr> <td>Equipos</td> <td>Jugadores</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>12</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>X</td> </tr> </table> 4. realizo una división: $\begin{array}{r} 12 \overline{) 12} \\ \underline{-12} \phantom{0} \\ 0 \phantom{0} \\ \underline{-0} \phantom{0} \\ 0 \phantom{0} \end{array}$ 5. Coloco la respuesta que es con 4 jugadores cada equipo.	M1	M2	Equipos	Jugadores	3	12	1	X	
M1	M2										
Equipos	Jugadores										
3	12										
1	X										

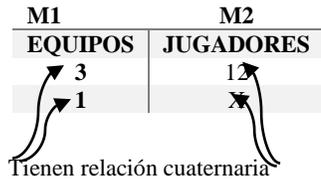
ANTES DE SOLUCIONAR RESPONDE LAS SIGUIENTES PREGUNTAS METACOGNITIVAS (M)	
¿De qué manera podemos verificar si la respuesta que obtuviste del problema es correcta? Muéstranos.	¿Cuáles fueron las dificultades que tuviste durante el procedimiento del problema multiplicativo?
EVID: 1,5 RTA/	EVID: 3,4 RTA/
Yo creo que puedo verificar que es correcta cuando multiplico 4 jugadores por 3 equipos me debe dar 12 jugadores así: $4 \times 3 = 12$ que asisten al entrenamiento	tube un problema con el enunciado al principio cuando decía que el entrenador conforma 3 equipos con la misma cantidad de jugadores, no sabia si eran los jugadores totales.

F4-EF-E5	
Problema IMDP:	PREGUNTAS METACOGNITIVAS
Para recorrer cierta distancia Vanesa gasto 15 horas. Miguel utilizo 3 veces más de tiempo que Vanesa. ¿Cuántas horas gasto Miguel?	1. P. Cuáles son las unidades de medida del problema y el tipo de relación que existe entre ellas?
	2. P. ¿Cuáles son los

	<p>datos que se requiere para resolver el problema?. Representa los datos usando números, tablas ó dibujos</p> <p>3. <b>P.</b> ¿Qué tipo de operación necesita para resolver el problema?</p> <p>6. <b>M.</b> Los datos propuestos en el enunciado del problema son suficientes? SI_ NO____. Porque?</p> <p>7. <b>M.</b> ¿Puedes reorganizar los datos del problema en una tabla?</p> <p>8. <b>M.</b> Muéstranos el procedimiento o los procedimientos posibles y resuelve el problema. Si requieres apoyarte en un gráfico o dibujo lo puedes</p> <p>9. <b>E.</b>¿De qué manera podemos verificar si la respuesta que obtuviste del problema es correcta?. Muéstranos.</p> <p>10. <b>E.</b> ¿Cuáles fueron las dificultades que tuviste durante el procedimiento del problema multiplicativo?</p> <p>11. <b>E.</b> ¿Las operaciones usadas en la solución del problema son la apropiadas puedes usar otra operación?</p>
--	---

**Tratamiento F4 -EF -E5- IMDP en el registro-Lenguaje común**

1.P. unidades de medida



2.P. M2=12 jugadores (estudiante dibuja)

M1= 3 equipos|

M2= X

M1=1

3. **P.** Necesito una división entre magnitudes 12 y 3

6. **M.** No, porque hay un error cuando habla de la misma cantidad de jugadores de un equipo no se sabe si es la cantidad total de jugadores o la misma cantidad de jugadores que debe haber en cada grupo o equipo.

7.**M.** si, puedo hacer así: (estudiante hace un gráfico)

8. **M.** 1. Miro cuales son las unidades de medida y las magnitudes

2..Veo la relación que hay entre los datos

3. Hago una tabla para organizar lo datos

4..realizo una división  $12 \div 3 = 4$

5. coloco la respuesta que es con 4 jugadores cada equipo.

M1	M2
EQUIPOS	JUGADORES
3	12
1	X

9.**E.** yo creo que puedo verificar que es correcta cuando multiplico 4 jugadores por tres equipos me debe dar 12 jugadores así:  $4 \times 3 = 12$ . Que asisten al entrenamiento

10.**E.** tuve un problema con el enunciado al principio cuando decía que el entrenador conformo 3 equipos con la misma cantidad de jugadores, no sabía si eran los jugadores totales

11.**E.** Puedo hacerlo con una división o puedo hacerlo dibujando

(Discurso tomado de anexo 7 **F4-EF-E5.** Problema 7)

*Fuente: elaboración propia*

Como se estableció en el grafico 12, durante la fase 4 de evaluación final la categoría multiplicativa con menores niveles de resolución 4 y 5 fue comparación multiplicativa

con porcentajes de 11,11% y 5,55% respectivamente, a pesar de que los estudiantes definieron la unidad de medida, el escalar y las magnitudes siguen presentando dificultades para establecer que una de estas cantidades actúa como referente y la otra como comparado y que la comparación entre ambas se realiza mediante un escalar, al no aparecer escrito en el enunciado la dirección de la comparación en “veces más” o “veces menos que”, no saben cómo proponer la solución del problema multiplicativo.

Al respecto Castro (1995) identificaron estrategias erróneas en la resolución de problemas de comparación multiplicativa (a) resolver los problemas de comparación sumando o restando el referente escalar (aditiva), (b) restar el referente del comparado cuando el escalar es desconocido (aditiva).

Todos estos aspectos se aprecian en el siguiente ejemplo- Figura 19:

Figura 19 Caso problema CMD2, fase 4 –evaluación final – E4

**LAS SIGUIENTES PREGUNTAS IVAS (M)**  
 Muéstranos el procedimiento o los procedimientos posibles y resuelve el problema. Si requieres apoyarte en un gráfico o dibujo lo puedes hacer.

EVID 7.4  
 RTA/  
 el procedimiento para resolver el problema es hacer una resta

48 - 16 = 32

**CMD2)**  
 En un mapa, la distancia entre dos pueblos es 16 centímetros. La distancia real entre estos dos pueblos es de 48 kilómetros. ¿Cuántos kilómetros representa cada centímetro del mapa?

**ANTES DE SOLUCIONAR RESPONDE LAS SIGUIENTES PREGUNTAS METACOGNITIVAS (P)**

¿Cuáles son las unidades de medida del problema y el tipo de relación que existe entre ellas?	¿Cuáles son los datos que se requiere para resolver el problema? Representa los datos usando números, tablas o dibujos.	¿Qué tipo de operación necesita para resolver el problema? Argumente.	¿Cuánto tiempo crees que gastará en resolver el problema?	¿Cuántos pasos o pasos como pienso solucionar el problema?	T O T A L						
RTA/ No 1, 2, 3 Aquí las unidades de medida son M y la distancia. El escalar es las kilómetros que representa cada centímetro en el mapa y una relación ternaria en las distancias. El problema se relaciona por un operador escalar.	RTA/ Distancia en el mapa 16 cm. Distancia real 48 Kilómetros. <table border="1"> <tr> <td>dist. map</td> <td>dist. real</td> <td>escalar</td> </tr> <tr> <td>16cm</td> <td>48km</td> <td>X</td> </tr> </table>	dist. map	dist. real	escalar	16cm	48km	X	RTA/ Creo que es una suma o resta que es una resta.	RTA/ Tal vez unos 3 minutos.	RTA 7-10 1- Encuentra las unidades 2- obtén las magnitudes 3- organiza los datos 4- busca la operación 5- aplica la operación 6- Escribe el resultado 7- compara con el compañero 8- mira si estás bien 9- escribe la respuesta correcta	
dist. map	dist. real	escalar									
16cm	48km	X									

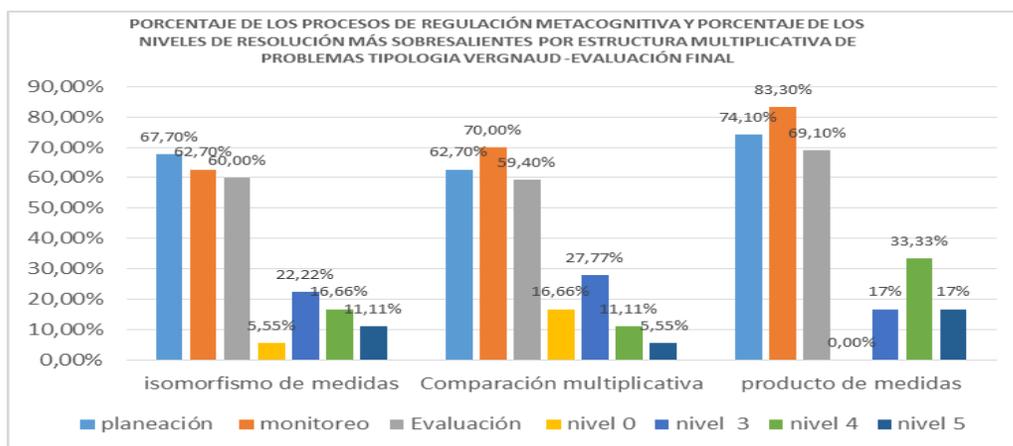
<b>F4-EF-E4</b>							
<p><b>Problema CMD2:</b> En un mapa la distancia entre dos pueblos es 16 centímetros. La distancia real entre estos dos pueblos es de 48 kilómetros. ¿Cuántos kilómetros representa cada centímetro del mapa?</p>	<b>PREGUNTAS METACOGNITIVAS</b>						
	<p><b>1.</b> unidades de medida del problema y el tipo de relación que existe entre ellas? <b>P.</b> Cuáles son las unidades de medida del problema y el tipo de relación que existe entre ellas?</p> <p><b>2.</b> datos que se requiere para resolver el problema?. Representa los datos usando números, tablas ó dibujos <b>P.</b> ¿Cuáles son los datos que se requiere para resolver el problema?. Representa los datos usando números, tablas ó dibujos</p> <p><b>8.</b> procedimiento o los procedimientos posibles y resuelve el problema. Si requieres apoyarte en un gráfico o dibujo lo puedes hacer <b>M.</b> Muéstranos el procedimiento o los procedimientos posibles y resuelve el problema. Si requieres apoyarte en un gráfico o dibujo lo puedes hacer</p>						
<p><b>Tratamiento F4 -EF -E4- CMD2 en el registro-Lenguaje común</b></p> <p>1. Aquí las unidades de medida son <math>M_1</math> es la distancia. El escalar es los kilómetros que representa cada centímetro en el mapa. Ay una relación ternaria entre los datos El problema multiplicativo se relaciona con un operador escalar</p> <p>2. Distancia en el mapa 16 cm Distancia real 48 kilometros</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>Dist. mapa</th> <th>Dist .real</th> <th>es calar</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>16 cm</td> <td>45 km</td> <td>X</td> </tr> </tbody> </table> <p>8. El procedimiento para resolver el problema es hacer una resta <math>48 - \frac{16}{32}</math></p> <p>(estudiante hace dibujo) (Discurso tomado de anexo 7 <b>F4-EF-E4</b> . Problema 5)</p>		Dist. mapa	Dist .real	es calar	16 cm	45 km	X
Dist. mapa	Dist .real	es calar					
16 cm	45 km	X					

**Fuente:** elaboración propia

6.2.8.2 *Análisis relación de los procesos de regulación metacognitiva y porcentaje de los niveles de resolución por cada problema multiplicativo tipología Vergnaud- evaluación final.*

Esta parte del análisis muestra la relación entre los porcentajes de niveles de resolución de los problemas multiplicativos respecto a los procesos de regulación metacognitiva. Sintetizado en el siguiente gráfico:

*Gráfico 13 Porcentajes de procesos de regulación metacognitiva que implementan los estudiantes al solucionar problemas de estructura multiplicativa tipología Vergnaud y porcentajes sobresalientes niveles de resolución de problemas.-F4-Evaluación final (EF)*



*Fuente: elaboración propia*

De acuerdo a la gráfica 13 durante la evaluación final (EF) se caracteriza que hay una mayor relación entre el avance de los niveles de resolución 3,4 y 5 y la evolución en los procesos de regulación metacognitiva, como se puede observar en todas las categorías de problemas multiplicativos; caracterizando que los niveles resolutivos 3,4 y 5 de los estudiantes es mayor en los problemas multiplicativos de producto de medidas, al igual que los procesos de planeación, monitoreo y evaluación.; siguiendo la relación porcentual entre procesos de regulación metacognitiva (PRM) y niveles de resolución de problemas se aprecia durante esta fase que los problemas de comparación multiplicativa presentan mayores dificultades a la hora de planear, controlar y evaluar por parte del estudiante y por ende disminuyen los niveles de resolución 3,4 y 5; mientras que los problemas de comparación multiplicativa se focalizan entre estos dos.

Si bien durante la fase 1 de exploración ó ideas previas se apreció que los estudiantes tenían mayores dificultades al enfrentarse a los problemas producto de medida, en esta última fase de evaluación final se evidenció que realizan una mejor comprensión del problema, identificando más fácilmente los datos, logrando determinar las unidades de medida como el caso del estudiante **E1** quién escribe: “m1= unidades de medida primeros

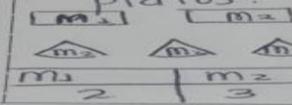
platos , m2= unidad de medida segundos platos” m3= unidad producto y las magnitudes o cantidades “ 2 y 3”.

Igualmente, los estudiantes tienen claro el tipo de operación se requiere, previendo el tiempo necesario que gastara en la solución del problema multiplicativo, representando los datos del problema en forma numérica y usando dibujos, incorporando el procedimiento mediante operaciones y dibujos, determinando si los datos propuestos en el enunciado del problema son suficientes o que dificultades se presentaron durante el procedimiento del problema multiplicativo.

Tomando el siguiente caso con el estudiante E1 -Figura 20:

Figura 20 Figura 22 Caso problema PMM, fase 4 –evaluación final – E1

(PMM)  
El menú escolar está formado por dos platos principales, el primero y el segundo que realiza el menú escolar tiene 2 primeros platos y 3 segundos. ¿Cuántos menús realizar?

ANTES DE SOLUCIONAR RESPONDE LAS SIGUIENTES PREGUNTAS METACOGNITIVAS (P)			
¿Cuáles son las unidades de medida del problema y el tipo de relación que existe entre ellas?	¿Cuáles son los datos que se requiere para resolver el problema? Representa los datos usando números, tablas o dibujos.	¿Qué tipo de operación necesita para resolver el problema? Argumente.	¿Cuánto tiempo cree que gastará en resolver el problema?
EVID: 1,2,3 RTA m <sub>1</sub> = Unidades de medida primeros platos m <sub>2</sub> = Unidad de medida segundos platos m <sub>3</sub> = Unidad producto	EVID: 4,5,6 RTA Datos: • Magnitudes 2 y 3 - 2 primeros platos - 3 segundos platos. 	EVID: 8 RTA Cree que solo necesito combinar m <sub>1</sub> y m <sub>2</sub> o multiplicar 2 x 3	EVID: 7 RTA Cree que gastara 2 minutos
¿Los datos propuestos en el enunciado del problema son suficientes? SI <input checked="" type="checkbox"/> NO <input type="checkbox"/> Porque?	Muéstranos el procedimiento o los procedimientos posibles y resuelve el problema. Si requieres apoyarte en un gráfico o dibujo lo puedes hacer.		
EVID: 1,2,5 RTA Porque solo necesito saber cuantas primeros platos hay y cuantas segundos para saber cuantos menús me da al final.	EVID: 7,8,9,10 RTA • Multiplicando 2 primeros platos x 3 segundos platos = 6 menús  • Combinando  (m <sub>1</sub> - m <sub>2</sub> ) (m <sub>1</sub> - m <sub>2</sub> ) (m <sub>1</sub> - m <sub>2</sub> ) (m <sub>1</sub> - m <sub>2</sub> ) (m <sub>1</sub> - m <sub>2</sub> ) (m <sub>1</sub> - m <sub>2</sub> ) da m <sub>3</sub> = 6 menú		

<b>F4-EF-E1</b>					
<p><b>Problema PMM:</b> El menú escolar está formado por dos platos principales, el primero y el segundo. Si la empresa que realiza el menú escolar tiene 2 primeros platos y 3 segundos. ¿Cuántos menús diferentes puede realizar?</p>	<p style="text-align: center;"><b>PREGUNTAS METACOGNITIVAS</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li><b>P.</b> Cuáles son las unidades de medida del problema y el tipo de relación que existe entre ellas?</li> <li><b>P.</b> ¿Cuáles son los datos que se requiere para resolver el problema?. Representa los datos usando números, tablas ó dibujos</li> <li><b>P.</b> ¿Qué tipo de operación necesita para resolver el problema?</li> <li><b>P.</b> ¿Cuánto tiempo cree que se gastará en resolver el problema?</li> <li><b>M.</b> Los datos propuestos en el enunciado del problema son suficientes? SI_ NO____. Porque?</li> <li><b>M.</b> Muéstranos el procedimiento o los procedimientos posibles y resuelve el problema. Si requieres apoyarte en un gráfico o dibujo lo puedes hacer.</li> </ol>				
<p><b>Tratamiento F4 -EF -E1- PMM en el registro-Lenguaje común</b></p> <p>1.m1=Unidades de medida primeros platos m2= Unidad de medida segundos platos .m3=Unidad producto</p> <p>2.Datos: Magnitudes 2 y 3 *2 primeros platos * segundos platos (estudiante hace dibujos)</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">m1</td> <td style="text-align: center;">m2</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">3</td> </tr> </table> <p>3.Creo que solo necesito combinar m1 y m2 ó multiplicar 2X3 Ó (estudiante hace dibujo)</p> <p>4. Creo que gastare 2 minutos.</p> <p>6.Si, porque solo necesito saber cuantos primeros platos hay y cuantos segundos para saber cuantos menús me da al final</p> <p>8. multiplicando 2 X 3 = 6 Primeros segundos menus Platos platos</p> <p>Combinando (estudiante dibuja) (m1-m2)(m1-m2)(m1-m2) (m1-m2)(m1-m2)(m1-m2) da m3=6 menu</p> <p>(Discurso tomado de anexo 7 <b>F4-EF-E1</b> . Problema 1)</p>		m1	m2	2	3
m1	m2				
2	3				

*Fuente: elaboración propia*

Se observa que en esta última fase existió mayor claridad a la hora de escoger las estrategias o procedimientos para solucionar el problema multiplicativo ya que toma el plan y sintetiza el procedimiento en pocos pasos teniendo claro los conceptos matemáticos necesarios que uso, sabe si la solución del problema multiplicativo es

correcta o incorrecta y establece que procedimientos de los usados eran más eficaces para encontrar la solución.

La autora Brown (citada por Cadavid, 2014) relaciona (...), los procesos de regulación metacognitiva potencian el desempeño de los estudiantes al determinar el proceso que sigue Antes, estableciendo que en esta etapa de la resolución de problemas se contemplan múltiples estrategias para decidir cuáles se adaptan más a la situación específica, diseñando así el rumbo a seguir para llegar del estado inicial al hallazgo de la solución.

Aunque debe tenerse en cuenta que durante la fase final la categoría de Producto de medidas alcanzó mejor nivel de resolución frente a las estructuras multiplicativas de los problemas tipología Vergnaud, teniendo en consideración los niveles 0,3,4 y 5 como los más sobresalientes. Adquiriendo un mayor manejo de cada una de las estructuras multiplicativas establecieron que la relación multiplicativa entre dos medidas elementales da como resultado la creación de una nueva medida producto, determinaron en función de la incógnita la estructura multiplicativa reconociendo las dos medidas iniciales y buscando el producto, lograron identificar los problemas en los cuales se conoce la medida producto y una de las dos medidas iniciales , encontrando la otra medida; estas acciones se reflejan al superar totalmente los niveles de resolución 0 que alcanzo un 0,00%, donde el estudiante pasa de no utilizar los datos e intentar resolver el problema a alcanzar un 17%, 33,33% y 17% en los niveles 3.4 y 5 respectivamente que permitieron concluir que intentan resolver el problema, relacionando las unidades y justificando los procesos a seguir.

Le siguió isomorfismo de medidas alcanzando para el nivel de resolución 0 un 5,55%; nivel 3 un 22,22%; nivel 4 un 16,66%; nivel 5 un 11,11% y por último le sigue en nivel de resolución los problemas de comparación multiplicativa que al obtener un nivel de resolución 0 de 16,66% se estableció inherentemente que los estudiantes no utilizan datos del enunciado del problema y tampoco demuestran una posible solución del mismo, existiendo dificultades para identificar la estructura multiplicativa, es decir no pudieron

establecer entre los dos espacios de medida una relación cuaternaria, ni definir que en este tipo de estructura intervienen 4 magnitudes o términos, en la cual se debe hallar el valor de una de ellas para su solución, obviando si el procedimiento de la solución es de tipo escalar o vertical, de igual forma no lograron identificar la relación existente entre magnitudes del mismo espacio y magnitudes de espacio de medida diferente.

### 6.3 ANÁLISIS COMPARATIVO Y EVOLUCIÓN DE LOS PROCESOS DE REGULACIÓN METACOGNITIVA Y PORCENTAJE DE LOS NIVELES DE RESOLUCIÓN POR CADA CATEGORÍA DE PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS TIPOLOGÍA VERGNAUD DURANTE EXPLORACIÓN Y EVALUACIÓN FINAL.

En esta parte final del análisis se hizo una comparación general de los procesos de regulación metacognitiva (PRM) con desempeños de problemas multiplicativos a través de la fase de exploración y fase de evaluación final, definiendo la evolución de dichos desempeños con respecto a los PRM. Esto se observa en los siguientes gráficos y tablas.

*Tabla 15 Evolución procesos de regulación metacognitiva y relación con niveles de resolución por categoría de problemas multiplicativos, fase 1-exploración y fase 4- evaluación final*

Estructura multiplicativa a tipo Vergnaud	Porcentaje de niveles de resolución de problemas multiplicativos Exploración (IP)						Porcentaje de niveles de resolución de problemas multiplicativos evaluación final (EF)						Evolución de PRM Exploración Vs Evaluación final		
	N0	N1	N2	N3	N4	N5	N0	N1	N2	N3	N4	N5	P	M	E
Isomorfismo de medidas	50 %	16,6 %	11,1 1 %	16,6 6 %	5,55 %	0,00 %	5,55 %	22,22 %	22,22 %	22,22 %	16,66 %	11,11 %	2 3,9 %	3 0,0 %	3 0,6 %
Comparación multiplicativa	61, 1 %	11,11 %	22,2 2 %	5,55 %	0,00 %	0,00 %	16,6 6 %	22,22 %	16,66 %	27,77 %	11,11 %	5,55 %	2 1,4 %	4 7,8 %	4 5,8 %
Producto de medidas	75 %	8,33 %	8,33 %	8,33 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	16,66 %	11,11 %	16,66 %	33,33 %	16,66 %	4 7,3 %	6 3,0 %	5 8,9 %

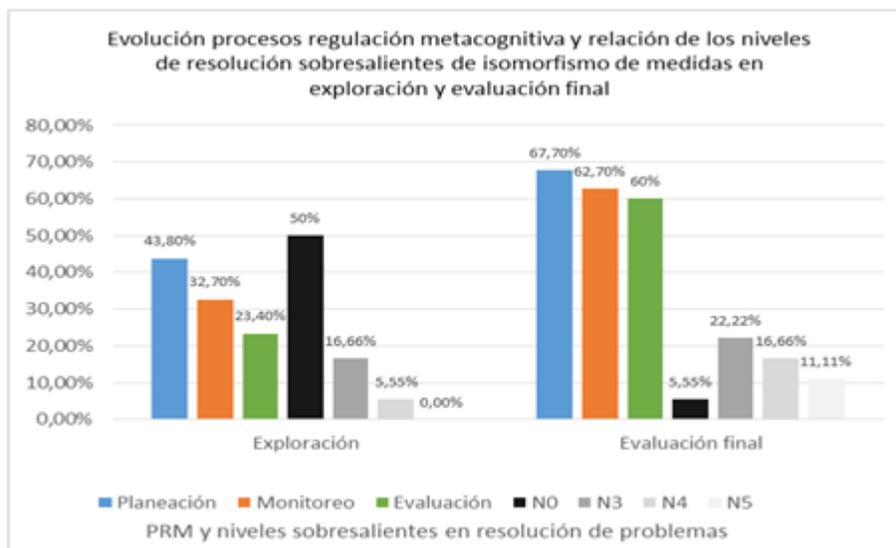
*Fuente: Elaboración propia*

6.3.1.1 Relación proceso de regulación metacognitiva y relación niveles de resolución categoría isomorfismo de medidas en exploración y evaluación final.

Considerando estos resultados globalmente, hubo un aumento progresivo del nivel de éxito en la resolución de los problemas de estructura multiplicativa, sin embargo, esta evolución no fue uniforme en las diferentes categorías de problemas ni en los diferentes tipos de problemas dentro de cada categoría.

Se evidenció durante el análisis que las diversas categorías presentan cierto grado de dificultad que va asociada con su estructura y tipo de relación entre los elementos que conforman el problema, sin embargo los estudiantes definieron estos elementos determinando las unidades de medida, magnitudes y escalares propios de cada categoría junto a la relación ternaria o cuaternaria, específica de cada una de ellas, inherente a esto se observó que el estudiante también avanzó en gran medida frente a los PRM, conllevando a tener mayores o menores resultados en los niveles de resolución.

Gráfico 14 Relación proceso de regulación metacognitiva y porcentaje de niveles de resolución de isomorfismo de medidas en exploración y evaluación final (EF).



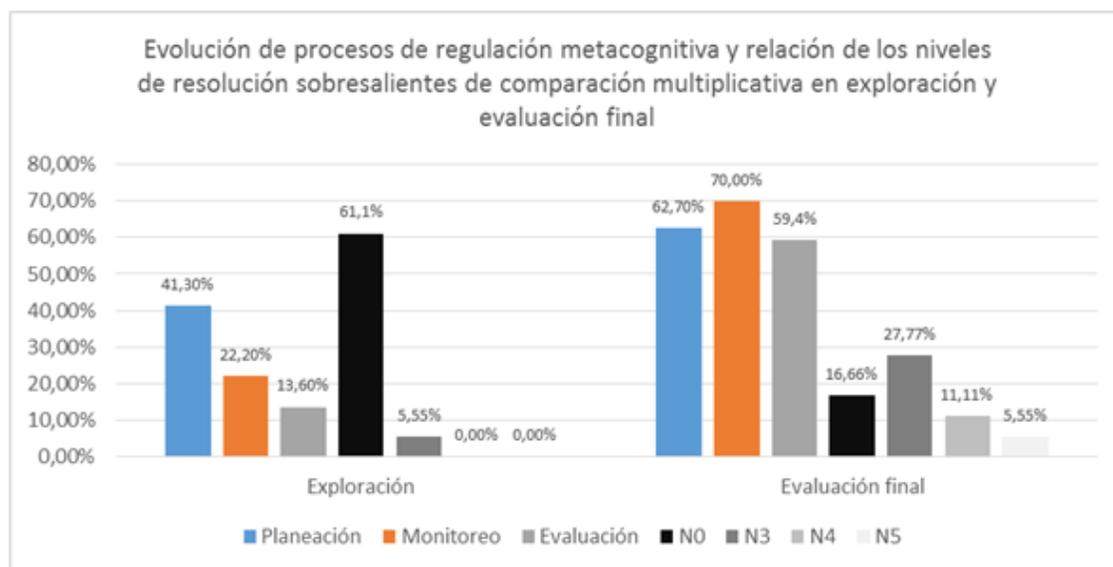
Fuente: elaboración propia

En el gráfico 14 y tabla 15 se observa que a medida que los estudiantes mejoran en los procesos de regulación metacognitiva, se produce un mejor nivel resolución de los problemas de isomorfismo de medidas; pasando el nivel 3 de un 16,66% a un 22,22%, el nivel 4 de un 5,55 % a un 16,66% y el nivel 5 de un 0,00% a 11,11%.

En cuanto a los procesos de regulación metacognitiva en esta categoría de problemas realiza una evolución mayor durante la evaluación, pasando de un 23,40% en la fase de exploración a un 60% en la fase final, mejorando dicho proceso en un 36,6%.

### 6.3.1.2 Relación proceso de regulación metacognitiva y relación niveles de resolución categoría comparación multiplicativa en exploración y evaluación final.

Gráfico 15 Relación proceso de regulación metacognitiva y porcentaje de niveles de resolución de comparación multiplicativa en exploración (IP) y evaluación final (EF)



*Fuente: elaboración propia*

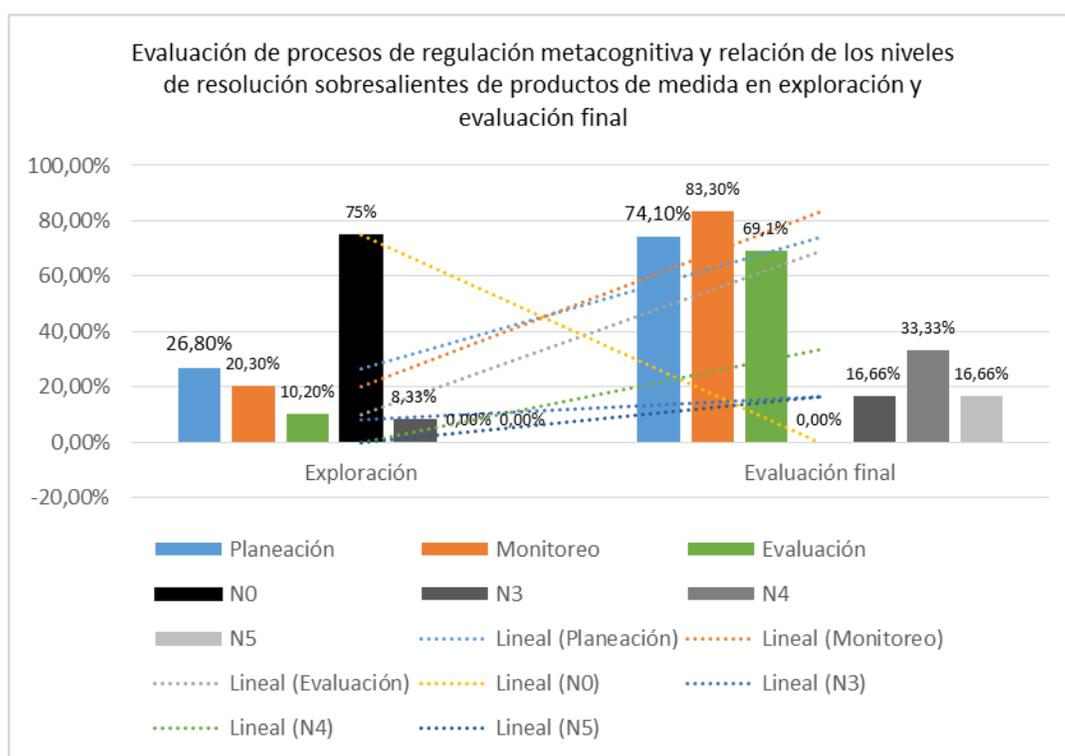
En el gráfico 15 y tabla 15, se aprecia de la misma manera que a medida que los estudiantes mejoran en los procesos de regulación metacognitiva, se produce un mejor nivel en la resolución de los problemas de comparación multiplicativa; disminuyendo el

nivel 0 de un 61,1% a un 16,66%, Aumentando el nivel 3 de un 5,5% a 27,77%, nivel 4 de un 0,00% a un 11,11% y el nivel 5 de 0,00% a 5,55%.

En cuanto a los procesos de regulación metacognitiva en esta categoría de problemas realiza una evolución mayor durante el monitoreo, pasando de un 22,2% en la fase de exploración a un 70% en la fase final, mejorando dicho proceso en un 47,8%.

### 6.3.1.3 Relación proceso de regulación metacognitiva y relación niveles de resolución categoría producto de medidas en exploración y evaluación final.

Gráfico 16 Relación proceso de regulación metacognitiva y porcentaje de niveles de resolución de producto de medidas en exploración (IP) y evaluación final (EF).



**Fuente:** elaboración propia

En el gráfico 16 y tabla 15, se apreció de la misma manera que a medida que los estudiantes mejoraron en los procesos de regulación metacognitiva produjo un mejor nivel de resolución de los problemas de productos de medida; disminuyendo notablemente el nivel cero de un 75% a 0,00 % y aumentando el nivel 3 de 8,33% al 16,66%, nivel 4 de 0,00% a 33,33% y nivel 5 de 0,00% a un 16,66%.

Caracterizando que esta categoría mejoró con respecto a las demás en sus niveles de resolución 3 y 4 con un porcentaje mayor en sus resultados. Aspecto que se soporta en la gráfica a través de la línea de tendencia que permite visualizar la forma como evolucionaran los niveles de resolución sobresalientes de este tipo de problema más allá de los datos reales, representando los valores futuros de acuerdo a la tendencia de los PRM y los desempeños en los problemas multiplicativos de producto de medidas.

En cuanto a los procesos de regulación metacognitiva en esta categoría de problemas realiza una evolución mayor durante el monitoreo, pasando de un 20,30% en la fase de exploración a un 83,30% en la fase final, mejorando dicho proceso en un 63%.

En la fase final, los estudiantes al solucionar el problema del producto de medidas realizaron acciones para revisar la validez del proceso, buscando errores de forma sistemática; en los datos del problema, en los procedimientos de resolución y los algoritmos matemáticos utilizados. En esta etapa demostraron más de un procedimiento claro.

Se observa que los estudiantes ya pueden identificar si las operaciones y algoritmos aplicados en la solución del problema se desarrollan como lo tenía previsto, es decir como en el caso del estudiante **E1**, se observa según la gráfica 16 y figura 20 que durante el monitoreo ya realiza acciones para revisar la validez del proceso y de resolución del problema usando dibujos ó gráficos, ejecutó intervenciones sobre los resultados que fue obteniendo, buscando errores de forma sistemática; en los datos del problema, en los procedimientos de resolución y los algoritmos matemáticos utilizados.

Puede afirmarse que el resultado de la investigación permite determinar que con base a la intervención del modelado metacognitivo y práctica guiada se logró un avance significativo durante la fase final en la categoría de problema multiplicativo con mayor dificultad que fue Producto de medidas, y los procesos regulativos que más se fortalecieron fueron monitoreo y evaluación.

Se logró que el estudiante realice una constante supervisión del proceso de solución de los problemas producto de medidas PM; partiendo desde la ejecución del plan previamente diseñado, estableciendo un orden lógico en la secuencia desarrollada, llevando a cabo el plan estructurado, y haciendo una valoración de la utilidad de la estrategia, determinando que esta le permitió alcanzar la respuesta y elaborando ajustes al plan.

## 7 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### 7.1 CONCLUSIONES

A raíz de los resultados que se lograron obtener durante la aplicación del presente estudio, se arrojaron las siguientes conclusiones:

1. Durante la fase de exploración los estudiantes presentaron dificultad para identificar si las operaciones y algoritmos multiplicativos aplicados en la solución del problema se desarrollaron de manera correcta o si el proceso de evaluación fue suficiente para saber que correctivos se tomaran sobre la marcha de solución del problema; de modo similar presentaron obstáculos para definir otros posibles caminos de solución, evidenciándose simultáneamente que existieron mayores dificultades en los problemas de producto de medidas y comparación multiplicativa que va asociada con su estructura y tipo de relación entre los elementos que conforman el problema.
2. En los problemas de comparación multiplicativa y producto de medidas se verificó que los estudiantes obtuvieron una mejor evolución conceptual en el proceso de regulación metacognitiva de monitoreo ya que definieron de forma clara si los datos del enunciado estaban completos o si requerían de más información, utilizaron los conceptos matemáticos necesarios para resolver el problema verificando si el procedimiento que usaron los llevó a la solución del mismo y compararon el problema multiplicativo con otros ya conocidos modificando ante sus pares la ejecución del mismo.

De forma equivalente existió un avance significativo del proceso de evaluación en los problemas de productos de medida cuando los estudiantes establecieron con seguridad los componentes básicos y las relaciones entre los diferentes elementos que forman parte del mismo, revisando si las operaciones usadas para su resolución eran las correctas, fueron conscientes de los avances y dificultades que tuvieron durante el procedimiento

resolutivo y verificaron la importancia de sus pares en la retroalimentación de la resolución del problema.

1. Durante la práctica guiada se logró un avance significativo de los procesos de regulación metacognitiva (PRM) ya que los estudiantes se fundamentaron en el modelado metacognitivo logrado por la retroalimentación del docente quien diseñó, orientó y generó heurísticas y campos conceptuales específicos y el consecuente aporte de sus pares por cada categoría multiplicativa mediante el trabajo cooperativo permitiendo al alumno interpretar las diferentes estructuras multiplicativas de cada problema y la ejecución de determinadas actuaciones metacognitivas que sin esta ayuda externa no podría realizar y que se retiraron gradualmente a medida que el alumno fue capaz de utilizarlas de manera autónoma durante la evaluación final.
2. En relación a los niveles de resolución de la estructura multiplicativa de los problemas tipo Vergnaud se logró establecer que van inversamente relacionados entre sí, a medida que el menor nivel de resolución disminuye en la práctica guiada y evaluación final, se suscita una tendencia mayor de los niveles de resolución superiores en estas fases; paralelamente a este hecho se apreció que los niveles de resolución de forma similar mejoraron notablemente en la práctica guiada en relación con la evaluación final, debido en parte a la intervención del modelado metacognitivo.

Sin embargo se puede caracterizar que los resultados más significativos se alcanzan en la evaluación final por que el estudiante asume de forma autónoma e independiente la resolución del problema logrando identificar los datos, unidades de medida, magnitudes, operaciones y procedimientos, que a su vez guardan una estrecha relación con la evolución conceptual de los procesos de regulación metacognitiva tanto en la práctica guiada como evaluación final cuya tendencia demuestra que los estudiantes identificaron correctamente la relaciones entre datos, argumentaron y en algunos casos realizaron un respaldo teórico sobre la estructura de cada problema multiplicativo.

1. Los procesos de regulación metacognitiva de los estudiantes durante la evaluación final fue menor en los problemas de isomorfismo de medidas y mayor para los problemas multiplicativos de producto de medidas verificando que los datos del enunciado estaban completos o si requerían de más información para la solución del problema, representaron el procedimiento mediante dibujos y/o gráficas, usaron otras operaciones para comprobar si la solución era correcta o incorrecta, compararon el procedimiento usado con otros problemas ya conocidos y lo solucionaron proponiendo más de una alternativa, lo mismo que establecieron con seguridad los componentes básicos y las relaciones entre los diferentes elementos que forman parte del problema multiplicativo.

## **7.2 RECOMENDACIONES**

Posterior al análisis de los resultados obtenidos en la aplicación de los instrumentos y de las conclusiones generadas en el proceso investigativo en torno a la incidencia de los procesos de regulación metacognitiva en la resolución de problema de estructura multiplicativa tipo Vergnaud, se recomienda:

1. Implementar procesos de regulación metacognitiva en otras disciplinas del conocimiento y en otros campos conceptuales como en el caso de los números racionales y enteros negativos para asegurar la mejor forma de enfrentar cualquier aprendizaje frente a la resolución de problemas de estructura multiplicativa.
2. Plantear este tipo de estrategias metacognitivas en la solución de problemas matemáticos de la vida cotidiana para que los estudiantes puedan transferir esas habilidades a diversidad de situaciones y generar nuevas alternativas de resolución cuando perciban cambios que así lo requieran.
3. Continuar avanzando desde los procesos de regulación metacognitiva (PRM) fortaleciendo los niveles de resolución en pruebas SABER de matemáticas en el caso

del proceso de planeación, que se enfoque en el tipo de heurísticas que se aplicaran y el tiempo que se gastará en cada una de ellas y desde el monitoreo que logren representar el procedimiento mediante mapas conceptuales y/o cuadros sinópticos.

4. Continuar desde la unidad de intervención fortaleciendo el modelado metacognitivo y la práctica guiada, dentro del que se constituye el aprendizaje cooperativo para facilitar el uso de estrategias cognitivas y metacognitivas por el estudiante.
5. Para futuras investigaciones se recomienda que durante el modelado metacognitivo se tenga en cuenta la aplicación de modelos matemáticos lineales, cardinales, de medida, numéricos y funcionales en la solución de los problemas multiplicativos para dar un sentido adecuado a la realidad que presenta el problema, considerando la relación que hay entre la enunciación semántica y la operación a realizar, estableciendo una transposición que el estudiante evidenciará en la evaluación final.

## 8 REFERENCIAS

- Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas. El trabajo de Allan Schoenfeld. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática* 2006, (1), 3-4.
- Brown, A. (1987). *Metacognición, control ejecutivo, autorregulación y otros mecanismos misteriosos*. En F.E. Weinert y R. H. Kluwe (Eds.), *Metacognición, motivación y comprensión*. (65-116). Hillsdale New York.
- Brown, A. y Palincsar, A.(1989).*Aprendizaje guiado, cooperativo y adquisición de conocimientos individuales*.En Resnick, L. (Eds.), *Conocimiento, aprendizaje e instrucción*. Ensayos en honor a Robert Glasear. Lawrence Earlbaum, Publishers, A.S.A.
- Buitrago, S; y García, L. (2012). *Proceso de regulación metacognitivas en la resolución de problemas matemáticos*. Recuperado de <http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/bitstream/11182/181/1/PROCESOS%20DE%20REGULACION%20METACOGNITIVA%20EN%20LA%20RESOLUCION%20DE%20PROBL%20EMAS%20MATEMATICOS%20SMBM.pdf>
- Cadavid A. (2014). *Relaciones entre la metacognición y el pensamiento viso-espacial en el aprendizaje de la estereoquímica*. Universidad Autónoma de Manizales, Colombia.
- Camayo, E. ( 2016). *Dificultades en la resolución de problemas verbales con estructura multiplicativa en niños de tercer grado*.(Tesis de maestría)Universidad autónoma de Manizales. Colombia.
- Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problema verbales de comparación*

*multiplicativa*. Tesis doctoral. Granada: Comares

Córdoba, D. (2018). *Regulación metacognitiva en la resolución de problemas matemáticos con esquema aditivo*. Universidad Autónoma de Manizales. Manizales-Colombia.

Curotto, M. M. (2010). La metacognición en el aprendizaje de la matemática. *Revista iberoamericana de educación en ciencias y tecnología*. 2 (2), 11-28.

Davidson, J; y Sternberg, R. (1998). Smart problem solving: how metacognition helps. (Eds.). *Metacognition in educational theory and practice*. Mahwah, New Jersey: LEA, ( p. 47-68).

Doménech, M. (2004). *El papel de la inteligencia y de la metacognición en la resolución de problemas*. Publicaciones Universidad Rovira I Virgili, Tarragona.

Driessnack, M., Sousa, V. y Costa, I. (setiembre-octubre, 2007). Revisión de los diseños de investigación relevantes para la enfermería: parte 3: métodos mixtos y múltiples. *Revista Latinoamericana de Enfermagem*, 15(5), 4-71. Recuperado de [https://www.scielo.br/pdf/rlae/v15n5/es\\_v15n5a24.pdf](https://www.scielo.br/pdf/rlae/v15n5/es_v15n5a24.pdf).

Erickson, F. (1989). Métodos cualitativos de investigación sobre la enseñanza. In M. Wittrok (Ed.), *La investigación de la enseñanza II. Métodos cualitativos de observación*.(p.p. 47-203). Barcelona: Paidós.

Faria, L. (2006). *Personal conceptions of intelligence: definition, differentiation and emergence as an organizer and integrative model of other motivational constructs*. *Psicologia*, XX (2), 5-10.

Gairin, J; Sanmartí, N.(1998). *Evaluación institucional*.. Ministerio Educación Argentina.2 (1), 1-5.

García, J. J. (2003). *Didáctica de las ciencias: resolución de problemas y desarrollo de la creatividad*. Editorial Magisterio.

Gomez, W; y Castillo, E. (2016). *Influencia de la regulación metacognitiva en la resolución*

*de problemas con adición de números enteros en estudiantes de 7º*. Maestría en enseñanza de las ciencias. Universidad Autónoma de Manizales. Manizales-Colombia.

Guerrero, M. (2016). 1 La investigación cualitativa. *Revista de la Universidad Internacional del Ecuador*. 1(2), 1-9. doi: 10.33890/innova.v1.n2.2016.7.

Guzmán A, A. (2007). *El enfoque de métodos mixtos en la investigación educativa: La superación del debate cuanti-cualitativo*. Hall, S. (1904). *Adolescence*. Trad. Adolescencia. Nueva York: Appleton. P.43.

Hart, K.M.(1981). Jerarquías en la educación matemática, *Estudios educativos en matemática*.

Hernández, R; Fernandez, C; y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. México: Mc Graw Hill.

Ibarra, A. (2012). *Enseñanza y Aprendizaje de los problemas multiplicativos en la Escuela*

*Primaria*. Proyecto de investigación y formación en la enseñanza. Puerto Vallarta.Mexico.

Iriarte, A. y Sierra, I. (2011). *Estrategias metacognitivas en la resolución de problemas*

*Matemáticos*. Maestría en educación. Universidad de Sucre. Sistema de Universidades Estatales del caribe colombiano. Montería- Colombia, (pp.79-82).

Ivars, P., & Fernandez, C. (2016). *Problemas de estructura multiplicativa:*

*Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años.* Educación matemática. Recuperado de <http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v28n1/1665-5826-ed-28-01-00009.pdf>

Jaramillo, L; y Simbaña, V.(2014). Herramientas Virtuales desde la práctica docente. *Sophia, Colección de Filosofía de la Educación*, (16), p.p. 299-313.

Johnson D. y Johnson R. (1999). *Aprender Juntos y Solos* (Apéndice), grupo Editorial Aique, S.A. Buenos Aires, Argentina. Recuperado de <http://www.terras.edu.ar/.../3/.../3JOHNSONDavid-JOHNSON-Roger-Apendice>

King, A. (1991). Effects of training in strategic questioning on children's problem-solving performance. *Journal of Educational Psychology*, 83(3), pp. 307-317.

Labatut, E. (2004). *Aprendizaje universitario: Un enfoque metacognitivo*. Tesis doctoral publicada, Facultad de educación, Universidad Complutense de Madrid.

Lester, F.K.(1983). Trends and issues in mathematical problem solving research. En R, Lesh y M. Landau (Ed.), *Acquisitions of mathematics concepts and processes*. London: Academy Press.

Martínez, E. C. (2008). *Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España*. In Investigación en educación matemática XII (p. 6). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Mateos, M. (2001). *Metacognición y Educación*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor S.A

Monereo, C. (2000). *El asesoramiento en el ámbito de las estrategias de aprendizaje. Estrategias de aprendizaje*. 15-61. Machado libros: Madrid, España.

Nesher, P. (1992). *Solving multiplication word problems*. En: G. Leinhardt, R. Putnam y R.

A. Hatrup (eds.). *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates , pp. 189-219.

Oberto, T. M. (2014). El aprendizaje cooperativo como herramienta para la educación universitaria. *Revista Educación en Valores*,1(21), p. 61-64.

Osses, S; y Jaramillo, S. (2008). *Metacognición un camino para aprender a aprender*. Estudios Pedagógicos, vol. XXXIV, núm. 1, pp. 187-197. Universidad Austral de Chile.

Chile.

Pifarré, M.(1998). *Aprendizaje y estrategias para resolver problemas matemáticos*. Lleida:

Pages.

Pifarré, M., & Sanuy, J. (2001). *La enseñanza de estrategias de resolución de problemas*

*matemáticos en la ESO: un ejemplo concreto*. Departamento de Pedagogía y Psicología. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Lleida. *Enseñanza de las Ciencias* (p.p. 297-308).

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Quecedo, R; y Castaño C. (2002). *Introducción a la metodología de la investigación cualitativa*. *Revista Psicodidáctica*, 14, p. 5-39. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=17501402>

Ríos, K. (2010). Problemas multiplicativos, la en su tesis de pregrado *Problemas de*

*estructura multiplicativa: Una propuesta psicopedagógica con estudiantes de 5 grado de primaria de una escuela pública del distrito federal.* Universidad Pedagógica Nacional de México. México.

Schraw, G. (1998). *Promoting general metacognitive awareness.* *Instructional Science*, 26, 113-125.

Shaw, J. (1997). Resolución cooperativa de problemas: usando K-W-D-L como organización técnica. *Enseñar matemáticas a los niños* 3(9), pp. 482-486.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Orlando, VA. Academic Press

Schoenfeld, A. H. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics.* In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). NY: Macmillan.

Sierra, T. A. (2011). *La formación matemático-didáctica en el Grado de Maestro de Educación Infantil. Análisis y propuesta desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico.*

En Seminario sobre La formación inicial del profesorado de matemáticas ante la implantación de los nuevos grados en infantil, primaria y el máster de secundaria.  
Castro  
Urdiales: SEIEM.

Tamayo, O. (2006). *Los bordes de la pedagogía: del modelo a la ruptura. La metacognición y los modelos para la enseñanza y aprendizaje de las ciencias.* Universidad Pedagógica Nacional. Primera edición Tamayo, 3.

Tamayo, O. E. (2014). *Pensamiento crítico dominio-específico en la didáctica de las ciencias*. TED\_36 indb. pp 25-46

Tamayo, O.E., Zona, J.R. y Loaiza, Y.E. (2014). *Pensamiento crítico en el aula de ciencias*. Manizales, Colombia: Ed. Universidad de Caldas.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas, 90.

Vergnaud, G. (1997). La naturaleza de los conceptos matemáticos. En T. Nunes y P. Bryant (Eds.), *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas: una perspectiva internacional* (págs. 5-28). Hove, Reino Unido: Psychology Press.

Villamizar, L. (2016). *Regulación metacognitiva en la resolución de problemas de longitud en estudiantes de básica primaria*. Universidad Autónoma de Manizales. Reposit: de: <http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/bitstream/11182/1043/1/Tesis%20Lydda%20Fernanda%20Villamizar%20Rodriguez.pdf>.(p.30).

Vygotsky, L.S. (1995). *Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores*. Madrid.

## ANEXOS

### **Anexo 1 Carta de consentimiento informado para proyectos de investigación educativa**

Yo \_\_\_\_\_, acudiente del estudiante del grado séptimo y de \_\_\_\_\_ años de edad, acepto de manera voluntaria que él (ella) se incluya como sujeto de estudio en el proyecto de investigación denominado: *la regulación metacognitiva en la solución de problemas de orden multiplicativo tipología Vergnaud*, luego de haber conocido y comprendido en su totalidad, el tratamiento de datos que se dará, la recolección, almacenamiento, uso, circulación, conservación, transferencia y/o transmisión de material impreso, cuestionarios, entrevistas videos e imágenes obtenidas del registro durante el proceso investigativo.

, así mismo y luego de recibida la información sobre riesgos si los hubiera y beneficios directos e indirectos de su participación en el estudio, y en el entendido de que:

- La participación del alumno no repercutirá en sus actividades ni evaluaciones programadas en el curso.
- No habrá ninguna sanción para el estudiante en caso de no aceptar la invitación.
- El estudiante podrá retirarse del proyecto si lo considera conveniente, aun cuando el investigador responsable no lo solicite, informando sus razones para tal decisión. Asimismo, si así lo deseo, puedo recuperar toda la información obtenida de la participación del estudiante.
- No haré ningún gasto, ni recibiré remuneración alguna por la participación en el estudio.
- Se guardará estricta confidencialidad sobre los datos obtenidos producto de la participación, con un número de clave que ocultará la identidad del estudiante.
- Si en los resultados de la participación del alumno se hiciera evidente algún problema relacionado con el proceso de aprendizaje, se le brindará orientación al respecto.
- Puedo solicitar, en el transcurso del estudio información actualizada sobre el mismo, al investigador responsable.

#### **Lugar y Fecha: Buesaco-Nariño 7 de febrero 2020**

Nombre del participante: \_\_\_\_\_

Firma del participante: \_\_\_\_\_

Número de Tarjeta de identidad \_\_\_\_\_

#### **Nombre y firma de quien proporcionó la información para fines de consentimiento.**

Nombre de quien otorga consentimiento: \_\_\_\_\_

Firma de quién otorga consentimiento \_\_\_\_\_

Número de cédula de ciudadanía \_\_\_\_\_

#### **TESTIGOS**

Nombre: RUBIELA CAICEDO ROSERO \* \_\_\_\_\_

Nombre: MARIA DEL CARMEN PAZ \* \_\_\_\_\_

Nombre: MARIO EFREN RUBIO NARVAEZ\* \_\_\_\_\_

Fecha: 7 de febrero del 2020

Anexo 2 instrumento inicial cuestionario aplicado a estudiantes, fase 1- exploración.

**PROCESOS DE REGULACIÓN METACOGNITIVA EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ORDEN MULTIPLICATIVO**

**CUESTIONARIO DE PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS TIPOLOGÍA VERGNAUD, APLICANDO IDEAS PREVIAS-FASE 1 EXPLORACIÓN**

FECHA: \_\_\_\_\_ NOMBRE: \_\_\_\_\_

TIEMPO: 2 HORAS. ESTUDIANTE No \_\_\_\_\_

A continuación, se plantean ocho situaciones problema, favor leer detenidamente y responder a cada pregunta:

**EJEMPLO ISOMORFISMO DE MEDIDAS POR MULTIPLICACIÓN.**

**IIMM:** En un supermercado empaacan tomates en cajas de 12 bolsas, cada una con capacidad para 10 tomates. Si el supermercado debe hacer un envío a uno de sus clientes de 180 cajas. ¿Cuántas centenas de tomate le estará enviando?

**Antes de solucionar responde:**

**(P).**

1. ¿Cuáles son los datos que se requieren para resolver el problema- EVID:1,2,3

2. ¿Cómo piensas solucionar el problema? - EVID:4,5,6,7,8,9

**M)**

3. Los datos propuestos en el enunciado del problema son suficientes?SI\_NO\_ ¿Por qué?- )- EVID:1,4,7

4. Muéstranos el procedimiento o los procedimientos posibles y resuelve el problema. Si requieres apoyarte en un gráfico o dibujo lo puedes hacer.-  
EVID:2,3,5,6,8,9

(E)

5. De qué manera podemos verificar si la respuesta es correcta. Muéstranos.  
EVID:3,4,7,8,9

6. Es posible resolver esta situación de otra manera. Si es posible muéstranos como:  
EVID:5,6

7. ¿Cuáles pasos y operaciones aplicaste en la solución del problema de acuerdo a lo que planeaste inicialmente? - EVID:1,2 (E)

8. De qué manera podemos verificar si la respuesta es correcta. Muéstranos-3,4,7,8,9

9. Es posible resolver esta situación de otra manera. Si es posible muéstranos como:  
EVID:5,6

10. ¿Cuáles pasos y operaciones aplicaste en la solución del problema de acuerdo a lo que planeaste inicialmente? -- EVID:1,2

**Anexo 3 Instrumento listo de cotejo tratada por docente, fase 1- fase inicial-exploración**

**FASE EXPLORACION FE- IDEAS PREVIA – IP**

**INSTRUMENTO LISTA DE COTEJO TRATADO POR DOCENTE FRENTE A CUESTIONARIO DE EXPLORACIÓN DESARROLLADA POR ESTUDIANTES SOBRE PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS TIPOLOGÍA VERGNAUD**

**Ejemplo- Primera intervención –Exploración-Ideas previas**

**PROBLEMAS ISOMORFISMO DE MEDIDAS POR MULTIPLICACIÓN**

**(IMM)**

**TIEMPO: 2 HORAS**

<b>PROBLEMA MULTIPLICATIVO IMM</b>	IIMM: En un supermercado empaacan tomates en cajas de 12 bolsas, cada una con capacidad para 10 tomates. Si el supermercado debe hacer un envío a uno de sus clientes de 180 cajas. ¿Cuántas centenas de tomate le estará enviando?				
<b>ELEMENTOS ESTRATEGIAS DE PLANEACIÓN</b>					
Organiza el proceso de resolución del problema	<b>LISTA DE COTEJO</b>	Realiza acciones como: seleccionar la estrategia general de resolución del problema.	<b>LISTA DE COTEJO</b>	Explicita un conjunto de procedimientos ordenados para ejecutar; organizar los datos o las acciones que realizará para resolver el problema	<b>LISTA DE COTEJO</b>
<b>EVIDENCIAS</b>					
1.Leer cuantas veces sea necesario el enunciado del problema multiplicativo para luego de entenderlo se pueda identificar los datos del mismo	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>	4.Tener claro qué tipo de operación(es) utiliza para resolver el problema.	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>	7.Utilizar dibujos para representar el procedimiento que llevará a cabo	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>
<b>SUBTOTAL EVIDENCIAS</b>					
2. Anotar los datos del problema	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>	5.Encuentra la estrategia más confiable para él	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>	8. Organizar paso a paso como piensa resolver el problema.	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>
<b>SUBTOTAL EVIDENCIAS</b>					
3. Representar los datos del problema en forma numérica y/o	<b>E1 E2</b>	6. Buscar patrones, es decir buscar datos,	<b>E1 E2</b>	9. Prever el tiempo en minutos que gastara en la	<b>E1 E2</b>

usando tablas y/o dibujos.	E3 E4 E5 E6	números, eventos, problemas similares que se repiten.	E3 E4 E5 E6	solución	E3 E4 E5 E6
<b>SUBTOTAL EVIDENCIAS</b>					
<b>TOTAL EVIDENCIAS</b>					
<b>PROBLEMA MULTIPLICATIVO IMM</b>	IIMM: En un supermercado empaacan tomates en cajas de 12 bolsas, cada una con capacidad para 10 tomates. Si el supermercado debe hacer un envío a uno de sus clientes de 180 cajas. ¿Cuántas centenas de tomate le estará enviando?				
<b>ELEMENTOS ESTRATEGIAS DE MONITOREO</b>					
Realiza acciones para revisar la validez del proceso de resolución del problema.	LISTA DE COTEJO	Demuestran un conocimiento sobre sus propios procesos cognitivos	LISTA DE COTEJO	Busca errores de forma sistemática; en los datos del problema, en los procedimientos de resolución y los algoritmos matemáticos utilizados	LISTA DE COTEJO
<b>EVIDENCIAS</b>					
1. El estudiante verifica si los datos del enunciado lo llevarán a la solución del problema.	E1 E2 E3 E4 E5 E6	4. Tomar el plan y sintetizar el procedimiento de solución en pocos pasos.	E1 E2 E3 E4 E5 E6	7. El estudiante sabe que los datos del enunciado están completos o si requiere de más información para solucionar el problema	E1 E2 E3 E4 E5 E6
<b>SUBTOTAL EVIDENCIAS</b>					
2. Representa el procedimiento mediante dibujos, esquemas o gráficas. (Semiótica).	E1 E2 E3 E4 E5 E6	5. Comparar el procedimiento usado en la solución del problema con otros problemas ya conocidos.	E1 E2 E3 E4 E5 E6	8..Solucionar el problema proponiendo más de una alternativa	E1 E2 E3 E4 E5 E6
<b>SUBTOTAL EVIDENCIAS</b>					
3. El estudiante establece otras operaciones para comprobar si la solución es correcta o incorrecta.	E1 E2 E3 E4 E5 E6	6.. Demuestra con argumentos si la solución del problema es correcta o incorrecta	E1 E2 E3 E4 E5 E6	9. Estar seguro de que utilizó la operación matemática correcta(multiplicación o división) en la solución del problema	E1 E2 E3 E4 E5 E6
<b>SUBTOTAL EVIDENCIAS</b>					
<b>TOTAL EVIDENCIAS</b>					

<b>PROBLEMA MULTIPLICATIVO IMM</b>	IIMM: En un supermercado empaacan tomates en cajas de 12 bolsas, cada una con capacidad para 10 tomates. Si el supermercado debe hacer un envío a uno de sus clientes de 180 cajas. ¿Cuántas centenas de tomate le estará enviando?
------------------------------------	---

<b>ELEMENTOS ESTRATEGIAS DE EVALUACIÓN</b>							
Identifica si las operaciones y algoritmos multiplicativos aplicados en la solución del problema se desarrollan como lo tenía previsto	<b>LISTA DE COTEJO</b>	Determina que correctivos se pueden tomar sobre la marcha de la solución del problema	<b>LISTA DE COTEJO</b>	Demuestra que si es posible resolver el problema multiplicativo de otra manera.	<b>LISTA DE COTEJO</b>	El estudiante está seguro de que la solución del problema es correcta o incorrecta.	<b>LISTA DE COTEJO</b>
<b>EVIDENCIAS</b>							
1. El estudiante verifica si la planeación del problema le permitió usar una estrategia clara.	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>	3. El estudiante es consciente de los avances y dificultades que ha tenido durante el procedimiento del problema multiplicativo	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>	5. Establece que procedimientos de los usados eran más eficaces para encontrar la solución del problema.	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>	7. El alumno establece con seguridad si la operación multiplicativa usada le ayuda a solucionar el problema y lo sustenta con argumentos	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>
<b>SUBTOTAL EVIDENCIAS</b>							
2. El estudiante tiene claridad sobre los pasos y operaciones necesarias para solucionar el problema de acuerdo a lo planeado.	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>	4. El estudiante establece si logro un aprendizaje autónomo y de que manera lo realizó	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>	6. El estudiante determina si fue más fácil el desarrollo del problema cuando ha resuelto previamente un problema semejante.	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>	8. El estudiante es consciente de los avances y dificultades que ha tenido durante el procedimiento del problema multiplicativo.	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>
<b>SUBTOTAL EVIDENCIAS</b>							
.	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>		<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>		<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>	9. Revisa si las operaciones usadas en la solución del problema son las correctas.	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>
<b>SUBTOTAL EVIDENCIAS</b>							
<b>TOTAL EVIDENCIAS</b>							

**Anexo 4 Instrumento modelado metacognitivo, fase 2- problema producto de medidas por multiplicación PMM**

**FASE 2 –MODELADO METACOGNITIVO (MM)  
PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS TIPOLOGÍA  
VERGNAUD, APLICANDO MODELADO METACOGNITIVO  
MODELADA POR DOCENTE**

**TIEMPO: 2 HORAS POR INTERVENCIÓN**

1. Se desarrolla por parte del docente un problema multiplicativo tipología Vergnaud en cada intervención siguiendo los elementos de cada estrategia con sus respectivas evidencias..

- **Primera intervención modelado metacognitivo Producto de medidas por multiplicación (PMM)**

En un torneo de futbol el grupo A esta formado por tres equipos y el grupo B por cuatro equipos. ¿Cuántos partidos de fútbol se jugaran entre el grupo A y el grupo B ?

- **Segunda intervención modelado metacognitivo Producto de medidas por multiplicación (PMD)**

En un torneo de fútbol entre los equipos del grupo A y los equipos del grupo B se jugaron 12 partidos de fútbol, si el grupo B esta conformado por 4 equipos. ¿Cuántos equipos conforman el grupo A?

- **Tercera intervención modelado metacognitivo problema comparación multiplicativa (CMM)**

En un vivero se sembraron 78 semillas de roble y 11 veces más de semillas de castaño. ¿Cuántas semillas de castaño se sembraron?

- **Cuarta intervención modelado metacognitivo problema comparación multiplicativa por división 1 (CMD1)**

En un vivero se sembraron 11 veces más de semillas de castaño que de semillas de roble. Si la cantidad de semillas de castaño sembradas fueron 858. ¿Cuántas semillas de roble se sembraron?

- **Quinta intervención modelado metacognitivo problema comparación multiplicativa por división 2 (CMD2)**

En un vivero se sembraron 78 semillas de roble y 858 semillas de castaño. ¿Cuántas veces más de semillas de castaño que de semillas de roble se sembraron?

- **Sexta intervención modelado metacognitivo problema Isomorfismo de medidas por multiplicación (IMM)**

En una fábrica de bloques para construcción existen seis máquinas, Si cada una de ellas produce 300 bloques en un día, ¿cuántos bloques produce la fábrica en un día?

- **Séptima intervención modelado metacognitivo problema Isomorfismo de medidas por división partitiva (IMDP)**

Una fábrica de construcción produce 1800 bloques en un día con 6 máquinas del mismo rendimiento. ¿Cuántos bloques produce cada una de las máquinas en un día?

- **Octava intervención modelado metacognitivo problema Isomorfismo de medidas por división medida (IMDM)**

En una fábrica de construcción una máquina produce 300 bloques en un día. ¿Cuántas máquinas con el mismo rendimiento se necesitan para producir 1.800 bloques en un día?

1. Se sigue la estructura de modelado basado en principios epistemológicos de Schoenfeld. Se toma como ejemplo Primera intervención productos de medida por multiplicación **PMM**

**Primera intervención modelado metacognitivo Producto de medidas por multiplicación (PMM)**

1. **Plantear y resolver problemas nuevos**

En un torneo de fútbol el grupo A esta formado por 3 equipos y el grupo B por 4 equipos. ¿Cuántos partidos de fútbol se jugaran entre el grupo A y el grupo B ?

2. **Se ejecutan los elementos de cada estrategia metacognitiva planeación, monitoreo y evaluación.**

## PLANEACIÓN

### **Primer elemento de estrategia de planeación**

*El alumno divide el problema multiplicativo tipología Vergnaud en componentes más básicos, examina y busca las relaciones entre los diferentes elementos que forman parte del problema (si la relación entre unidades de medida es cuaternaria, es terciaria, si existe una proporción entre dos espacios de medidas, si hay correspondencia entre dos medidas y un operador escalar, designado por la palabra veces, si es una composición cartesiana de dos espacios de medidas con respecto a otro espacio de medidas.*

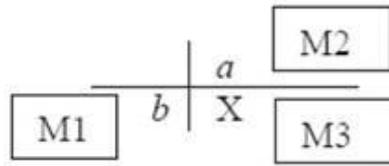
### **Aplicación de elemento con sus respectivas evidencias**

**Evidencia 1** Definir cuáles son las unidades de medida del problema

Unidades de medida M1= equipos de fútbol grupo A

M2= equipos de fútbol grupo B

M3= Partidos de fútbol



*Problema de multiplicación*

**Evidencia 2.** Establecer la relación ternaria o cuaternaria del problema multiplicativo

Se establece que los problemas de productos de medida por Vergnaud son una relación multiplicativa entre dos medidas elementales (M1 y M2) que dá como resultado la creación de una nueva medida producto (M3), lo que permite determinar que por intervenir 3 medidas o magnitudes presentan una relación ternaria

**Evidencia 3.** Establecer la existencia de una proporción entre dos espacios de medidas, si hay correspondencia entre dos medidas y un operador escalar, designado por la palabra veces o si es una composición cartesiana de dos espacios de medidas con respecto a otro espacio de medida.

Se establece una explicación que permita diferenciar en los problemas multiplicativos

- Proporción entre dos espacios de medida.
- Correspondencia entre dos medidas
- Operador escalar
- Composición Cartesiana de dos espacios de medida con respecto a otro espacio de medida

**Segundo elemento de estrategia de planeación**

*El estudiante realiza acciones como: lectura, relectura, seleccione datos, anote datos del enunciado, representa datos del enunciado (uso de tablas o dibujos*

**Aplicación de elemento con sus respectivas evidencias:**

**Evidencia 4.** Leer cuantas veces sea necesario el problema multiplicativo para luego de entenderlo se pueda identificar **los datos** del mismo

Los datos del problema son:

M1	M2	M3
<b>Equipo fútbol grupo A</b>	<b>Equipo fútbol grupo B</b>	<b>Partidos de fútbol</b>
3	4	X

**Evidencia 5.** Representar los datos del problema en forma numérica y/o usando tablas y/o dibujos, planos cartesianos, diagramas de ven.

## Uso de plano Cartesiano

GRUPO B



GRUPO A

### Tercer elemento de estrategia de planeación

*El estudiante organiza y codifica el plan o procedimiento de resolución del problema, teniendo claro que tipo de operación debe usar*

#### **Aplicación de elemento con sus respectivas evidencias:**

**Evidencia 6.** Identificar las magnitudes ó cantidades que intervienen en la operación matemática que va a utilizar

En el problema las magnitudes son las cantidades que aparecen discriminadas en el problema 3 y 4

### Cuarto elemento de estrategia de planeación

*El estudiante tiene claridad sobre el tiempo que requiere para solucionar el problema y lo distribuye de acuerdo al plan propuesto.*

**Evidencia 7.** Prever el tiempo en minutos que gastara en la solución del problema. Se considera que por ser una multiplicación directa se gastará 2 minutos.

**Evidencia 8.** Tener claro que tipo de operaciones y heurísticas aplicaran y el tiempo que se gastará en cada una de ellas.

El estudiante tendrá claro el tipo de operación matemática involucrada en el planteamiento del problema, en el caso de producto de medidas es una multiplicación directa y se establece en la misma un tiempo de dos minutos

En este punto se define que es una estrategia heurística como el conjunto de operaciones mentales típicamente útiles en el proceso de resolución de problemas, que conlleva al estudio de reglas y métodos de descubrimiento.

Algunas estrategias heurísticas frente a la solución de problemas multiplicativos están

- Construir modelos(analogía)
- Conjeturar y comprobar (ensayo y error)
- Representación de datos (organización de la información)
- Establecer analogías con problemas similares
- .Simplificar el procedimiento del problema
- Eliminar procesos innecesarios en la solución del problema.
- Empezar un problema desde atrás.
- Buscar regularidades, una ley, o un patrón.

### **Quinto elemento de estrategia de planeación**

*El estudiante realiza acciones como: seleccionar la estrategia general de resolución del problema; tantear o explorar posibles acciones para resolver el problema; explicar un conjunto de procedimientos ordenados a ejecutar.*

**Evidencia 9.** Proponer uno o más caminos adecuados para resolver el problema en forma ordenada (algoritmos)

Para resolver el problema puedo hacerlo usando el siguiente algoritmo(pasos):

1. Defino las unidades de medida
2. Establezco las magnitudes o cantidades involucradas
3. Organizo los datos en una tabla
4. Propongo el tipo de operación que necesito, en este caso es una multiplicación directa
5. Aplico la multiplicación entre unidades y magnitudes conocidas.
6. Anoto el resultado
7. Comparo la solución del problema con la de mis compañeros
8. Retroalimentación la solución del problema
9. Verifica los resultados de la solución de problema
10. Anoto la respuesta correcta

Otro algoritmo que podría usar el estudiante:

1. Defino las unidades de medida
2. Establezco las magnitudes o cantidades involucradas
3. Organizo los datos en una tabla
4. Dibujo un plano cartesiano distribuyendo en el eje X equipo del grupo A y en el eje Y equipos del grupo B
5. Obtengo con base a producto cartesiano parejas ordenadas
6. Luego escribo el conjunto de parejas ordenadas AXB
7. Determino el número de parejas ordenadas que equivaldrán al número de partidos que jugarán el grupo A contra el grupo B

8. Comparo la solución del problema con la de mis compañeros y/o solicito orientación del docente.
9. Retroalimento la solución del problema
10. Respondo al interrogante del problema.

**Evidencia 10.** Buscar patrones, es decir buscar datos, números, eventos, problemas similares que se repiten.

Al aplicar esta heurística el estudiante determina que existe similitud con un problema planteado en la fase de exploración, en la fase de modelado, lo leyó en un texto, lo explico previamente el docente, lo miró en un video, lo enfrento en su contexto cotidiano, por ejemplo cuando se realizan campeonatos de futbol en su región.

## MONITOREO

### Primer elemento de estrategia de monitoreo

*El estudiante tiene claro si los datos propuestos en el enunciado del problema son suficientes.*

### Aplicación de elemento con sus respectivas evidencias

**Evidencia 1.** El estudiante sabe que los datos del enunciado están completos o si requiere de más información para solucionar el problema.

Se establece que al determinar las unidades de medida y magnitudes del enunciado del problema, se asocia con los datos e incógnita del problema.

Unidades de medida	Magnitudes o cantidades	Datos del problema
<b>M1= equipos de fútbol grupo A</b>	3	3 equipos grupo A
<b>M2= equipos de fútbol grupo B</b>	4	4 equipos grupo B
<b>M3= Partidos de fútbol</b>	X	Incógnita o pregunta

**Evidencia 2.** El estudiante verifica si el procedimiento que usa lo llevará a la solución del problema.

En esta parte el estudiante pone en práctica el algoritmo planteado (pasos):

1. Defino las unidades de medida

Unidades de medida M1= equipos de fútbol grupo A  
M2= equipos de fútbol grupo B  
M3= Partidos de fútbol

2. Establezco las magnitudes o cantidades involucradas:  
3 para grupo A  
4 para grupo B
3. Organizo los datos en una tabla

M1	M2	M3
Equipo fútbol grupo A	Equipo fútbol grupo l B	Partidos de fútbol
3	4	X

4. Propongo el tipo de operación que necesito

Se puede establecer es una operación multiplicativa directa  
3 equipos fútbol grupo A por 4 equipos de fútbol grupo B= ?

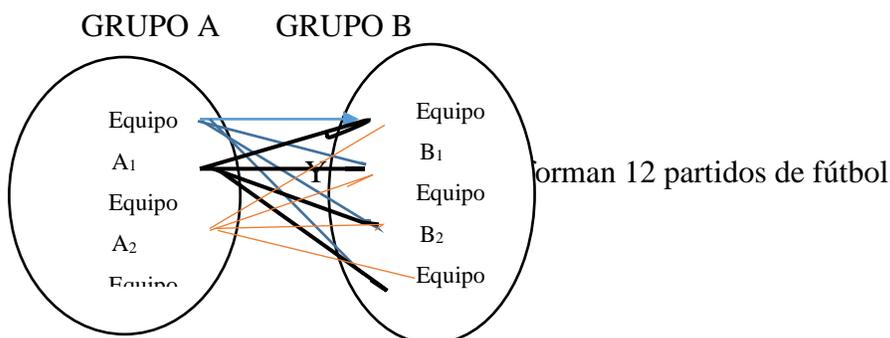
5. Aplico la multiplicación entre unidades y magnitudes conocidas.  
3 equipos fútbol grupo A por 4 equipos de fútbol grupo B= 12

Debe expresarse que la relación multiplicativa en este caso no es de relación 1:1 como posiblemente el estudiante lo establecería

**GRUPO A GRUPO B**

Equipo A<sub>1</sub> → Equipo B<sub>1</sub>  
Equipo A<sub>2</sub> → Equipo B<sub>2</sub>  
Equipo A<sub>3</sub> → Equipo B<sub>3</sub> que se forman 3 partidos  
Equipo B<sub>4</sub>

Debe establecerse que hay una relación de correspondencia uno para todos.



6. Anoto el resultado. Es 12 partidos
7. Comparo la solución del problema con la de mis compañeros,

Discuten en grupo sobre la solución o desarrollo del problema multiplicativo, el docente es un instructor o moderador, otorgando directrices básicas que son de valor para la discusión.

8. Retroalimentación la solución del problema.

Se puede usar el plano cartesiano estableciendo parejas ordenadas para determinar el número de parejas ordenadas que representan el número de partidos.



Parejas ordenadas= número de partidos

$$AXB = [(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)]$$

Se forman 12 parejas ordenadas por lo tanto entre el grupo A y B se jugarán 12 partidos.

9. Verifica los resultados de la solución de problema

Basarse en retroalimentación o con material didáctico (monedas de diferente denominación o fichas de colores)

10. Anoto la respuesta correcta

Los partidos de fútbol se jugarán entre el grupo A y el grupo B son 12 partidos.

**Segundo elemento de estrategia de monitoreo**

*Simplifica el problema, concretándolo hasta tener la posibilidad de abordarlo.*

**Evidencia 3** Toma el plan y sintetiza el procedimiento de solución en pocos pasos.

En este caso el problema se sintetiza a una sola operación multiplicativa  
 $3 \times 4 = 12$

**Evidencia 4.** El Estudiante establece con argumentos frente a sus pares si esta de acuerdo o no en la forma como se soluciona el problema.

Se da a conocer instrumento instrucción guiada con base a lúdica “el vendedor”

**Evidencia 5.** Usa tabulaciones para sintetizar el enunciado del problema

Puede realizarse la siguiente tabla:

M1	M2	M3
Equipos fútbol A	Equipos fútbol B	Partidos de fútbol
3	4	X

**Tercer elemento de estrategia de monitoreo**

*El estudiante ejecuta un procedimiento matemático (correcto o incorrecto) y aplica otros posibles procedimientos matemáticos para resolver el problema.*

**Aplicación de elemento con sus respectivas evidencias:**

**Evidencia 6.** Tiene claro los conceptos matemáticos necesarios que uso para resolver el problema

Los conceptos básicos en el problema multiplicativo específico son:

- Unidades de medida
- Magnitudes y cantidades
- Existencia de tres unidades de medida M1, M2, M3
- Medidas elementales M1, M2
- Medida producto X (M3)
- Operación multiplicativa
- Composición Cartesiana de dos espacios de medida con respecto a otro espacio de medida

**Evidencia 7.** El estudiante comprende y modifica frente a sus pares la ejecución del problema multiplicativo, proponiendo otro u otros procedimientos para la solución del mismo, diferente al propuesto por el docente..

Se evidencia En instrucción guiada y fase final de evaluación

**Evidencia 8.** Compara el problema multiplicativo con otros ya conocidos.

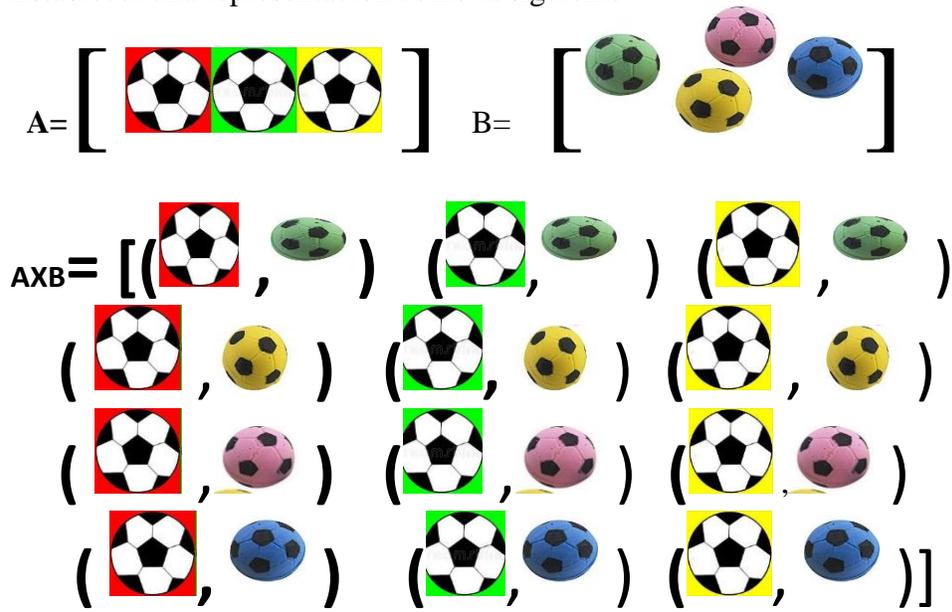
Se evidencia En instrucción guiada y fase final de evaluación

**Cuarto elemento de estrategia de monitoreo**

Hace representación gráfica, dibuja o hace un esquema del procedimiento de solución del problema

**Evidencia 9.** Representa el procedimiento mediante dibujos, esquemas o gráficas (semiótica)

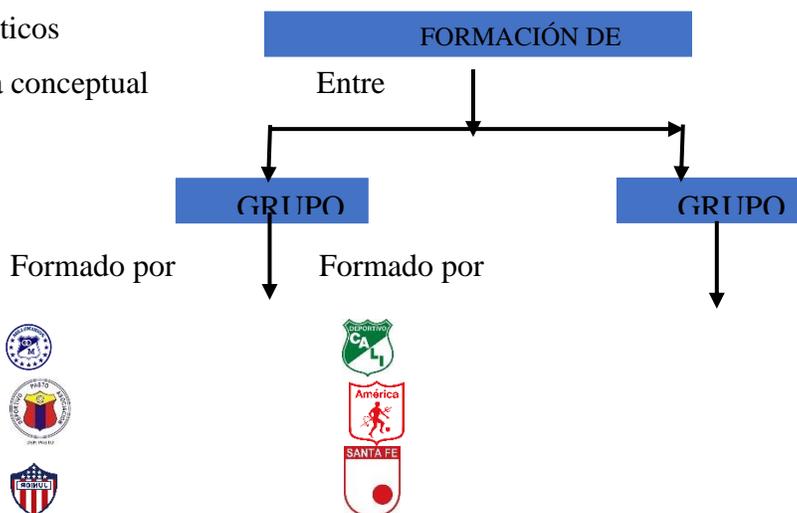
Establecer una representación como la siguiente

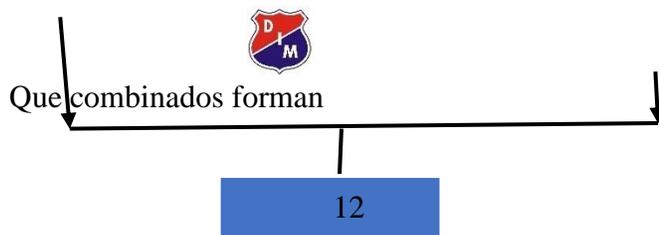


Donde A es número equipos grupo A y B número de equipos grupo B y **AXB** Número de partidos.

**Evidencia 10.** Representa el procedimiento mediante mapas conceptuales y/o cuadros sinópticos

Mapa conceptual





## EVALUACIÓN

### Primer elemento de estrategia de evaluación

*El estudiante realiza acciones para controlar, revisar la validez del proceso de resolución y/o de los resultados obtenidos y detectar posibles errores*

**Evidencia 1.** El estudiante tiene claro si la solución del problema multiplicativo es correcta o incorrecta y lo sustenta con argumentos.

Determinar si el algoritmo o los algoritmos planteados se cumplieron tal como lo tenía previsto, lo compara con los de sus compañeros y prueba la veracidad de los mismos.

**Evidencia 2..** El alumno establece con seguridad los componentes básicos y las relaciones entre los diferentes elementos que forman parte del problema multiplicativo.

Los componentes básicos:

Cuál es el enunciado

Cuáles son los datos del problema (unidades de medida y magnitudes)

Tipo de relación entre las unidades de medida (ternaria o cuaternaria)

Tipo de operación

**Evidencia 3..** El estudiante es consciente de los avances y dificultades que ha tenido durante el procedimiento del problema multiplicativo.

Puede determinar que no tenía claro si era necesario hacer una multiplicación entre los equipos del grupo A y los equipos del grupo B para obtener el número de partidos y aplicar por defecto una relación 1:1 :

**GRUPO A   GRUPO B**

Equipo A<sub>1</sub> → Equipo B<sub>1</sub>

Equipo A<sub>2</sub> → Equipo B<sub>2</sub>

Equipo A<sub>3</sub> → Equipo B<sub>3</sub> que se forman 3 partidos y un equipo queda sin jugar

Equipo B<sub>4</sub>

**Evidencia 5.** El estudiante verifica si la planeación del problema le permitió usar una estrategia clara.

En este punto verifica cada uno de los algoritmos propuestos se ejecutaron como los planeo inicialmente y se van acorde con el tiempo propuesto para la solución del problema.

### **Segundo elemento de estrategia de evaluación**

*El estudiante realiza acciones como: cuestionar la validez de algún resultado o del procedimiento de resolución; revisa de manera sistemática los datos introducidos, los algoritmos de resolución utilizados y los cálculos matemáticos realizados y si estos están de acuerdo a lo planeado.*

**Evidencia 6.** El estudiante establece si los datos planteados inicialmente son suficientes para la solución del problema.

Cabe evidenciar que para algunos estudiantes la epistemología del concepto resulta poco comprensible si desconoce como se forman equipos en el fútbol, requiere por ejemplo especificar que cada equipo del grupo A jugará con cada equipo del grupo B. Para algunos estudiantes resulta insuficiente la información en el enunciado del problema multiplicativo

**Evidencia 7.** Establece que procedimientos de los usados eran más eficaces para encontrar la solución del problema.

Se trabaja de forma más eficaz cuando se establecen representaciones graficas o dibujos, o se usa material didáctico para representar lo propuesto en el enunciado.

**Evidencia 8.** Revisa si las operaciones usadas en la solución del problema son las correctas.

Se usa la operación inversa de la multiplicación para comprobar si se aplicó la operación apropiada en el problema específico.

M1	M2	M3
<b>Equipo fútbol grupo A</b>	<b>Equipo fútbol grupo B</b>	<b>Partidos de fútbol</b>
<b>3 equipos</b>	<b>4 equipos</b>	<b>12</b>

**3X4=12:** Prueba :  $12 \text{ partidos} \div 4 \text{ Equipos fútbol grupo B} = \text{Equipo fútbol grupo B}$

$$12 \div 4 = 3$$

**Evidencia 9.** El estudiante determina si fue más fácil el desarrollo del problema cuando ha resuelto previamente un problema semejante.

Compara por ejemplo el problema multiplicativo por multiplicación de la fase de exploración:

“Natalia ha sido invitada a una fiesta y en su guarda ropa tiene 3 blusas y 4 pantalones, ¿ De cuántas formas diferentes puede vestirse Natalia para ir a la fiesta?”

Con el propuesto:

En un torneo de futbol el grupo A esta formado por 3 equipos y el grupo B por 4 equipos. ¿Cuántos partidos de fútbol se jugaran entre el grupo A y el grupo B ?

Establece similitudes entre unidades de medida, magnitudes y estructura del problema y la forma como puede solucionarlo, corrigiendo o mejorando el resultado del problema.

**Evidencia 10.** Verifica que el aporte de sus pares le permite retroalimentar la solución del problema.

Se ejecuta a través de Instrucción guiada con lúdica

### 3. **Aplicación instrumento instrucción guiada.**

Con retroalimentación docente y trabajo cooperativo con pares

**Anexo 5 Instrumento cuestionario aplicado a estudiantes, fase 3- práctica guiada**

**CUESTIONARIO DE PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS TIPOLOGÍA  
VERGNAUD, APLICANDO PRÁCTICA GUIADA FASE 4  
INSTRUMENTO DESARROLLADO POR ESTUDIANTE CON BASE LÚDICA “EL  
VENDEDOR”**

**NOMBRE ESTUDIANTE:** \_\_\_\_\_ **FECHA:** \_\_\_\_\_

**TIEMPO 2** **ESTUDIANTE No** \_\_\_\_

Siguiendo las instrucciones del docente con base a lúdica “el vendedor” desarrolle a continuación la siguiente situación problema, favor leer detenidamente y responder a cada pregunta:

**Ejemplo primera intervención práctica guiada**

**PROBLEMAS PRODUCTO DE MEDIDAS POR MULTIPLICACIÓN (PMM)**

<b>PROBLEMA MULTIPLICATIVO PMM</b>	Para determinar el uniforme de un equipo de fútbol se debe elegir entre 2 colores de pantaloneta y 4 colores de camiseta. Todas las combinaciones de pantalonetas y camisetas son posibles. ¿Cuántos uniformes diferentes se pueden obtener?
<b>ELEMENTOS ESTRATEGIAS DE (P)</b>	
<b>EVIDENCIA 1</b> Defina cuáles son las unidades de medida del problema.	
<b>EVIDENCIA 2</b> Establezca la relación ternaria o cuaternaria del problema multiplicativo	

<p><b>EVIDENCIA 3</b></p> <p>Establezca la existencia de una proporción entre dos espacios de medidas, si hay correspondencia entre dos medidas y un operador escalar, designado por la palabra veces o si es una composición cartesiana de dos espacios de medidas con respecto a otro espacio de medida</p>	
<p><b>EVIDENCIA 4</b></p> <p>Lea cuantas veces sea necesario el problema multiplicativo para que luego de entenderlo pueda identificar <b>los datos</b> del mismo.</p>	
<p><b>EVIDENCIA 5</b></p> <p>Represente los datos del problema en forma numérica y/o usando tablas y/o dibujos, planos cartesianos, diagramas de venn</p>	
<p><b>EVIDENCIA 6</b></p> <p>Identifique las magnitudes ó cantidades que intervienen en la operación matemática que va a utilizar.</p>	
<p><b>EVIDENCIA 7</b></p>	

Determine el tiempo en minutos que gastara en la solución del problema	
<b>EVIDENCIA 8</b> Escriba que tipo de operaciones y estrategias aplicaran y el tiempo que se gastará en cada una de ellas	
<b>EVIDENCIA 9</b> Proponga uno o más caminos adecuados para resolver el problema en forma ordenada (algoritmos)	
<b>EVIDENCIA 10</b> Busque patrones, es decir busque datos, números, eventos, problemas similares que se repiten.	

<b>PROBLEMA MULTIPLICATIVO PMM</b>	Para determinar el uniforme de un equipo de fútbol se debe elegir entre 2 colores de pantaloneta y 4 colores de camiseta. Todas las combinaciones de pantalonetas y camisetas son posibles. ¿Cuántos uniformes diferentes se pueden obtener?
<b>ELEMENTOS ESTRATEGIAS DE (M)</b>	
<b>EVIDENCIA 1</b> Determine si los datos del enunciado están completos o si requiere de más información para solucionar el problema.	

<p><b>EVIDENCIA 2</b></p> <p>Solucione el problema y Verifique si el procedimiento que usa lo llevará a la solución del mismo.</p>	
<p><b>EVIDENCIA 3</b></p> <p>Usando el plan inicial sintetice el procedimiento de solución en pocos pasos.</p>	
<p><b>EVIDENCIA 4</b></p> <p>Establezca argumentos frente a sus pares si está de acuerdo o no en la forma como se soluciona el problema mediante la lúdica “ el vendedor” guiada por el docente.</p>	
<p><b>EVIDENCIA 5</b></p> <p>¿Puede sintetizar el enunciado del problema usando tablas? .Justifique</p>	
<p><b>EVIDENCIA 6</b></p> <p>Describa los conceptos matemáticos necesarios que uso para resolver el problema</p>	
<p><b>EVIDENCIA 7</b></p> <p>De que forma puede proponer ante sus compañeros otro u otros procedimientos para la solución del mismo, diferente al propuesto por el</p>	

docente.	
<p><b>EVIDENCIA 8</b></p> <p>Se le parece el problema propuesto a otro ya conocido?.</p> <p>SI__NO__</p> <p>Justifique en que aspectos.</p>	
<p><b>EVIDENCIA 9</b></p> <p>Represente el procedimiento mediante dibujos, esquemas o gráficas. (semiótica)</p>	
<p><b>EVIDENCIA 10</b></p> <p>Represente el procedimiento mediante mapas conceptuales y/o cuadros sinópticos</p>	

<p><b>PROBLEMA MULTIPLICATIVO PMM</b></p>	<p>Para determinar el uniforme de un equipo de fútbol se debe elegir entre 2 colores de pantaloneta y 4 colores de camiseta. Todas las combinaciones de pantalonetas y camisetas son posibles. ¿Cuántos uniformes diferentes se pueden obtener?</p>
<p><b>ELEMENTOS ESTRATEGIAS DE (E)</b></p>	
<p><b>EVIDENCIA 1</b></p> <p>Cree que resolvió correctamente el problema?</p> <p>SI__NO__</p> <p>Justifique</p>	

<p><b>EVIDENCIA 2</b></p> <p>Describa los componentes básicos y establezca si la relación entre las unidades de medida es ternaria o cuaternaria?. Porque?</p>	
<p><b>EVIDENCIA 3</b></p> <p>Tuvo dificultades en la solución del problema multiplicativo? SI___ NO___.</p> <p>Anota que dificultades.</p>	
<p><b>EVIDENCIA 4</b></p> <p>Para la solución del problema fue necesario la ayuda de tus compañeros y/o tu docente?. Porque?</p>	
<p><b>EVIDENCIA 5</b></p> <p>¿Consideras que el plan que usaste para resolver el problema multiplicativo te sirvió para determinar una estrategia correcta?. Explica</p> <p>.</p>	
<p><b>EVIDENCIA 6</b></p> <p>Cree que los datos planteados inicialmente son suficientes para la solución del problema? SI___ NO___ Justifique su</p>	

respuesta	
<p><b>EVIDENCIA 7</b></p> <p>Establezca que procedimientos de los usados eran más eficaces para encontrar la solución del problema.</p>	
<p><b>EVIDENCIA 8</b></p> <p>Revise si las operaciones usadas en la solución del problema son las correctas. Explique.</p>	
<p><b>EVIDENCIA 9</b></p> <p>Compare este problema con otro(s) ya conocidos y encuentra las semejanzas entre sus unidades de medida, magnitudes y estructura del problema..</p>	
<p><b>EVIDENCIA 10</b></p> <p>¿De qué manera el aporte de sus compañeros durante la lúdica le permitió retroalimentar la solución del problema?</p>	

**Anexo 6 Instrumento listo de cotejo tratada por docente, fase 3- práctica guiada**

**FASE PRÁCTICA GUIADA – PG**

**INSTRUMENTO LISTA DE COTEJO TRATADO POR DOCENTE FRENTE A**

**CUESTIONARIO DE PRÁCTICA GUIADA DESARROLLADA POR**

**ESTUDIANTES SOBRE PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS**

**MULTIPLICATIVOS TIPOLOGÍA VERGNAUD**

**CON BASE LÚDICA “EL VENDEDOR”**

**Primera intervención Instrucción guiada**

**PROBLEMAS PRODUCTO DE MEDIDAS POR MULTIPLICACIÓN (PMM)**

<b>PROBLEMA</b> <b>MULTIPLICATIVO</b> <b>PMM</b>	<b>PMM</b> Para determinar el uniforme de un equipo de fútbol se debe elegir entre 2 colores de pantaloneta y 4 colores de camiseta. Todas las combinaciones de pantalonetas y camisetas son posibles. ¿Cuántos uniformes diferentes se pueden obtener?								
<b>ELEMENTOS ESTRATEGIAS DE PLANEACIÓN</b>									
<i>El alumno divide el problema multiplicativo tipología Vergnaud en componentes más básicos, examina y busca las relaciones entre los diferentes elementos que forman parte del problema (si la relación entre unidades de medida es cuaternaria, es terciaria, si existe una proporción entre dos espacios de medidas, si hay correspondencia entre dos medidas y un operador escalar, designado por la palabra veces, si es una composición cartesiana de dos espacios de medidas con respecto a otro espacio de medidas</i>	<b>LISTA DE COTEJO</b>	<i>El estudiante realiza acciones como: lectura, relectura, selección de datos, anote datos del enunciado, represente datos del enunciado (uso de tablas o dibujos.</i>	<b>LISTA DE COTEJO</b>	<i>El estudiante organiza y codifica el plan o procedimiento de resolución del problema, teniendo claro que tipo de operación debe usar</i>	<b>LISTA DE COTEJO</b>	<i>El estudiante tiene claridad sobre el tiempo que requiere para solucionar el problema y lo distribuye de acuerdo al plan propuesto</i>	<b>LISTA DE COTEJO</b>	<i>El estudiante realiza acciones como: seleccionar la estrategia general de resolución del problema; tantear o explorar posibles acciones para resolver el problema; explicar un conjunto de procedimientos ordenados a ejecutar.</i>	<b>LISTA DE COTEJO</b>
<b>EVIDENCIAS</b>									
1. Definir cuáles son las unidades de	<b>E1</b> <b>E2</b>	4. Leer	<b>E1</b> <b>E2</b>	6. Identificar	<b>E1E</b> <b>2E3</b>	7. Prever el	<b>E1</b> <b>E2</b>	9. Proponer uno o más	<b>E1</b> <b>E2</b>

medida del problema	E3 E4 E5 E6	cuantas veces sea necesario el problema multiplicativo para luego de entenderlo se pueda identificar los datos del mismo.	E3 E4 E5 E6	las magnitudes ó cantidades que intervienen en la operación matemática que va a utilizar.	E4 E5 E6	tiempo en minutos que gastara en la solución del problema.	E3 E4 E5 E6	camino adecuados para resolver el problema en forma ordenada (algoritmos)	E3 E4 E5 E6
<b>SUBTOTAL EVIDENCIAS</b>									
2. Establecer la relación ternaria o cuaternaria del problema multiplicativo	E1 E2 E3 E4 E5 E6	5. Representar los datos del problema en forma numérica y/o usando tablas y/o dibujos, planos cartesianos, diagramas de venn	E1 E2 E3 E4 E5 E6		E1 E2 E3 E4 E5 E6	8. Tener claro que tipo de operaciones y heurísticas aplicaran y el tiempo que se gastará en cada una de ellas.	E1 E2 E3 E4 E5 E6	10. Buscar patrones, es decir buscar datos, números, eventos, problemas similares que se repiten	E1 E2 E3 E4 E5 E6
<b>SUBTOTAL EVIDENCIAS</b>									
3. Establecer la existencia de una proporción entre dos espacios de medidas, si hay correspondencia entre dos medidas y un operador escalar, designado por la palabra veces o si es una composición cartesiana de dos espacios de medidas	E1 E2 E3 E4 E5 E6		E1 E2 E3 E4 E5 E6		E1 E2 E3 E4 E5 E6		E1 E2 E3 E4 E5 E6		E1 E2 E3 E4 E5 E6

con respecto a otro espacio de medida							
<b>SUBTOTAL EVIDENCIAS</b>							
<b>TOTAL EVIDENCIAS</b>							
<b>PROBLEMA MULTIPLICATIVO PMM</b>	<b>PMM</b> Para determinar el uniforme de un equipo de fútbol se debe elegir entre 2 colores de pantaloneta y 4 colores de camiseta. Todas las combinaciones de pantalonetas y camisetas son posibles. ¿Cuántos uniformes diferentes se pueden obtener?						
<b>ELEMENTOS ESTRATEGIAS DE MONITOREO</b>							
<i>El estudiante tiene claro si los datos propuestos en el enunciado del problema son suficientes.</i>	<b>LISTA DE COTEJO</b>	<i>Simplifica el problema, concretándolo hasta tener la posibilidad de abordarlo.</i>	<b>LISTA DE COTEJO</b>	<i>El estudiante ejecuta un procedimiento matemático (correcto o incorrecto) y aplica otros posibles procedimientos matemáticos para resolver el problema.</i>	<b>LISTA DE COTEJO</b>	<i>Hace representación gráfica, dibuja o hace un esquema del procedimiento de solución del problema.</i>	<b>LISTA DE COTEJO</b>
<b>EVIDENCIAS</b>							
1. El estudiante sabe que los datos del enunciado están completos o si requiere de más información para solucionar el problema.	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>	3. Toma el plan y sintetiza el procedimiento de solución en pocos pasos.	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>	6. Tiene claro los conceptos matemáticos necesarios que uso para resolver el problema	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>	9. Representa el procedimiento mediante dibujos, esquemas o gráficas. (semiótica)	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>
<b>SUBTOTAL EVIDENCIAS</b>							
	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>	4. El Estudiante establece con argumentos frente a sus pares si esta de acuerdo o no en la forma como se soluciona el problema.	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>	7. El estudiante comprende y modifica frente a sus pares la ejecución del problema multiplicativo, proponiendo otro u otros procedimientos para la solución del mismo, diferente al propuesto por el docente.	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>	10. Representa el procedimiento mediante mapas conceptuales y/o cuadros sinópticos.	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>
<b>SUBTOTAL EVIDENCIAS</b>							
2. El estudiante verifica si el	<b>E1 E2</b>	5. Usa tabulaciones para	<b>E1 E2</b>	8. Compara el problema	<b>E1 E2</b>		<b>E1 E2</b>

procedimiento que usa lo llevará a la solución del problema.	E3 E4 E5 E6	synetizar el enunciado del problema.	E3 E4 E5 E6	multiplicativo con otros ya conocidos.	E3 E4 E5 E6		E3 E4 E5 E6
<b>SUBTOTAL EVIDENCIAS</b>							
<b>TOTAL EVIDENCIAS</b>							
<b>PROBLEMA MULTIPLICATIVO PMM</b>			<b>PMM</b>				
			Para determinar el uniforme de un equipo de fútbol se debe elegir entre 2 colores de pantaloneta y 4 colores de camiseta. Todas las combinaciones de pantalonetas y camisetas son posibles. ¿Cuántos uniformes diferentes se pueden obtener?				
<b>ELEMENTOS ESTRATEGIAS DE EVALUACIÓN</b>							
<i>El estudiante realiza acciones para controlar, revisar la validez del proceso de resolución y/o de los resultados obtenidos y detectar posibles errores.</i>			<b>LISTA DE COTEJO</b>	<i>El estudiante realiza acciones como: cuestionar la validez de algún resultado o del procedimiento de resolución; revisa de manera sistemática los datos introducidos, los algoritmos de resolución utilizados y los cálculos matemáticos realizados y si estos están de acuerdo a lo planeado.</i>			<b>COTEJO</b>
<b>EVIDENCIAS</b>							
1. El estudiante tiene claro si la solución del problema multiplicativo es correcta o incorrecta y lo sustenta con argumentos.			E1 E2 E3 E4 E5 E6	6. El estudiante establece si los datos planteados inicialmente son suficientes para la solución del problema.			E1 E2 E3 E4 E5 E6
<b>SUBTOTAL EVIDENCIAS</b>							
2. El alumno establece con seguridad los componentes básicos y las relaciones entre los diferentes elementos que forman parte del problema multiplicativo.			E1 E2 E3 E4 E5 E6	7. Establece que procedimientos de los usados eran más eficaces para encontrar la solución del problema.			E1 E2 E3 E4 E5 E6
<b>SUBTOTAL EVIDENCIAS</b>							
3. El estudiante es consciente de los avances y dificultades que ha tenido durante el procedimiento del problema multiplicativo.			E1 E2 E3 E4 E5 E6	8. Revisa si las operaciones usadas en la solución del problema son las correctas.			E1 E2 E3 E4 E5 E6
<b>SUBTOTAL EVIDENCIAS</b>							
4.El estudiante establece si logro un aprendizaje autónomo y de que manera lo Realizó			E1 E2 E3 E4 E5 E6	9. El estudiante determina si fue más fácil el desarrollo del problema cuando ha resuelto previamente un problema semejante.			E1 E2 E3 E4 E5 E6
<b>SUBTOTAL EVIDENCIAS</b>							

5. El estudiante verifica si la planeación del problema le permitió usar una estrategia clara.	E1 E2 E3 E4 E5 E6	10. Verifica que el aporte de sus pares le permite retroalimentar la solución del problema	E1 E2 E3 E4 E5 E6
<b>SUBTOTAL EVIDENCIAS</b>			
<b>TOTAL DE EVIDENCIAS</b>			

## **Anexo 7 Instrumento lúdico “el vendedor”, fase 3- práctica guiada**

### ***INSTRUMENTO LUDICA “EL VENDEDOR”***

Esta lúdica se aplica una vez desarrollado guía de práctica guiada con el trabajo colaborativo de pares y retroalimentación del docente.

1. Se empieza el trabajo de la guía resolviendo el problema multiplicativo y los estudiantes deben responder a los elementos de la estrategia de planeación, monitoreo y evaluación, en el orden que indique el docente y tal como aparece en el anexo 5. Cada estudiante debe colocar cada una de sus respuestas con el numeral que corresponde en cada ficha.
2. La lúdica se inicia con la estrategia de los elementos de la planeación.
3. Todos los estudiantes deben tener un bolso o maleta en donde colocaran las respuestas de los elementos de la estrategia de planeación, monitoreo y evaluación en el orden que indique el docente.
4. El docente elige a uno de los estudiantes al azar quien debe hacer el papel de vendedor y debe tratar de vender sus respuestas al resto del grupo como si fuese una mercancía, usando todo el conocimiento y argumentos posibles.
5. Los demás estudiantes refutarán la venta de las respuestas o asentarán en la compra de las mismas, siempre usando los argumentos pertinentes, todo esto con instrucción guiada del docente.
6. Si uno de los estudiantes compra la respuesta y el docente aprueba la compra, este deberá asumir el rol de vendedor con la siguiente pregunta que oriente el profesor. Si nadie compra la respuesta, el docente realizará la práctica guiada mediante instrucción metacognitiva.
7. A medida que avanza la lúdica y se conoce la respuesta apropiada, el estudiante y docente colocara un visto bueno de la respuesta en su lista de cotejo, de lo contrario la dejará en blanco.

8. De esta forma se continua hasta que el docente aplique todos los elementos de cada estrategia metacognitiva de forma guiada y lleguen a un consenso grupal con los estudiantes
9. Al final en la lista de cotejo tratada por el docente se suman los puntos por estrategia metacognitiva (anexo 5).

**Anexo 8 Instrumento cuestionario aplicado a estudiantes, fase 4- evaluación final.**

**INSTITUCIÓN EDUCATIVA SAN IGNACIO  
PROBLEMAS DE ORDEN MULTIPLICATIVO  
CUESTIONARIO DE PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS TIPOLOGÍA  
VERGNAUD, FASE 4 EVALUACIÓN FINAL**

**NOMBRE ESTUDIANTE:** \_\_\_\_\_ **FECHA:** \_\_\_\_\_

**TIEMPO 2 HORAS** **ESTUDIANTE No** \_\_\_\_\_

**Ejemplo evaluación 3-Problema Comparación multiplicativa por multiplicación**

A continuación se plantea una situación problema, favor leer detenidamente y responder a cada pregunta.

<b>(CMM)</b> Para recorrer cierta distancia Vanesa gasto 15 horas. Miguel utilizo 3 veces más de tiempo que Vanesa. ¿Cuántas horas gasto Miguel?					
<b>ANTES DE SOLUCIONAR RESPONDE LAS SIGUIENTES PREGUNTAS METACOGNITIVAS (P)</b>					
¿Cuáles son las unidades de medida del problema y el tipo de relación que existe entre ellas?'	¿Cuáles son los datos que se requiere para resolver el problema?. Representa los datos usando números, tablas ó dibujos.	¿Qué tipo de operación necesita para resolver el problema? . Argumente.	¿Cuánto tiempo cree que gastará en resolver el problema?	¿Cuéntanos paso a paso como piensas solucionar el problema	<b>O T A L</b>
<b>EVID: 1,2,3</b>	<b>EVID: 4,5,6</b>	<b>EVID: 8</b>	<b>EVID: 7</b>	<b>EVID: 9,10</b>	
<b>RTA/</b>	<b>RTA/</b>	<b>RTA/</b>	<b>RTA/</b>	<b>RTA/</b>	
<b>Lista de cotejo</b>					
<b>(CMM)</b> Para recorrer cierta distancia Vanesa gasto 15 horas . Miguel utilizo 3 veces más de tiempo que Vanesa. ¿Cuántas horas gasto Miguel?					

<b>ANTES DE SOLUCIONAR RESPONDE LAS SIGUIENTES PREGUNTAS METACOGNITIVAS (M)</b>				
¿Los datos propuestos en el enunciado del problema son suficientes? SI____ NO____. Porque?	¿Puedes reorganizar los datos del problema en una tabla?	Muéstranos el procedimiento o los procedimientos posibles y resuelve el problema. Si requieres apoyarte en un gráfico o dibujo lo puedes hacer.		<b>O T A L</b>
<b>EVID: 1,2,6</b>	<b>EVID: 3,4,5</b>	<b>EVID: 7,8,9,10</b>		
<b>RTA/</b>	<b>RTA/</b>	<b>RTA/</b>		
<b>Lista de cotejo</b>				
<b>(CMM)</b> Para recorrer cierta distancia Vanesa gasto 15 horas. Miguel utilizo 3 veces más de tiempo que Vanesa. ¿Cuántas horas gasto Miguel?				
<b>ANTES DE SOLUCIONAR RESPONDE LAS SIGUIENTES PREGUNTAS METACOGNITIVAS (E)</b>				
¿De qué manera podemos verificar si la respuesta que obtuviste del problema es correcta?. Muéstranos.	¿Cuáles fueron las dificultades que tuviste durante el procedimiento del problema multiplicativo?	¿Cuáles pasos y operaciones aplicaste en la solución del problema de acuerdo a lo que planeaste inicialmente?	¿Las operaciones usadas en la solución del problema son las apropiadas o puedes usar otro tipo de operación?. Cuál o cuáles?	<b>O T A L</b>
<b>EVID: 1,5</b>	<b>EVID: 3,4</b>	<b>EVID: 2,7,9</b>	<b>EVID: 6,8,10</b>	
<b>RTA/</b>	<b>RTA/</b>	<b>RTA/</b>	<b>RTA/</b>	
<b>Lista de cotejo</b>				

**Anexo 9 Instrumento listo de cotejo tratada por docente, fase 4- evaluación final.**

**FASE EVALUACIÓN FINAL –EF**

**INSTRUMENTO LISTA DE COTEJO TRATADO POR DOCENTE FRENTE  
A CUESTIONARIO DE EVALUACIÓN FINAL DESARROLLADA POR  
ESTUDIANTES SOBRE PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS  
MULTIPLICATIVOS TIPOLOGÍA VERGNAUD**

**Ejemplo tercera intervención evaluación final-problema comparación  
multiplicativa por multiplicación CMM**

**PROBLEMAS COMPARACIÓN MULTIPLICATIVA ÚNICO ESPACIO DE  
MEDIDAS POR MULTIPLICACIÓN (CMM)**

<b>PROBLEMA MULTIPLICATIVO CMM</b>	Para recorrer cierta distancia Vanesa gasto 15 horas. Miguel utilizo 3 veces más de tiempo que Vanesa. ¿Cuántas horas gasto Miguel?								
<b>ELEMENTOS ESTRATEGIAS DE PLANEACIÓN</b>									
<p><i>El alumno divide el problema multiplicativo tipología Vergnaud en componentes más básicos, examina y busca las relaciones entre los diferentes elementos que forman parte del problema (si la relación entre unidades de medida es cuaternaria, es terciaria, si existe una proporción entre dos espacios de medidas, si hay correspondencia entre dos medidas y un operador escalar, designado por la palabra veces, si es una composición cartesiana de dos espacios de medidas con respecto a otro espacio de medidas.</i></p>	<b>LISTA DE COTEJO</b>	<p><i>El estudiante realiza acciones como: lectura, relectura, seleccion e datos, anote datos del enunciado, represent a datos del enunciado o (uso de tablas o dibujos.</i></p>	<b>LISTA DE COTEJO</b>	<p><i>El estudiante organiza y codifica el plan o procedimiento de resolución del problema, teniendo claro que tipo de operación debe usar</i></p>	<b>LISTA DE COTEJO</b>	<p><i>El estudiante tiene claridad sobre el tiempo que requiere para solucionar el problema y lo distribuye de acuerdo al plan propuesto</i></p>	<b>LISTA DE COTEJO</b>	<p><i>El estudiante realiza acciones como: seleccionar la estrategia general de resolución del problema; tantear o explorar posibles acciones para resolver el problema; explicar un conjunto de procedimientos ordenados a ejecutar.</i></p>	<b>LISTA DE COTEJO</b>

EVIDENCIAS									
1. Definir cuáles son las unidades de medida del problema	1	4. Leer cuantas veces sea necesario el problema multiplica tivo para luego de entenderlo o se pueda identificar los datos del mismo.	E1	6. Identificar las magnitudes ó cantidades que intervienen en la operación matemática que va a utilizar.	E1	7. Prever el tiempo en minutos que gastara en la solución del problema.	E1	9..Proponer uno o más caminos adecuados para resolver el problema en forma ordenada (algoritmos)	E1
			E2		E2		E2		
	2		E3		E3		E3		
	3		E4		E4		E4		
	4		E5		E5		E5		
	6		E6		E6		E6		
<b>SUBTOTAL EVIDENCIAS</b>									
2. Establecer la relación ternaria o cuaternaria del problema multiplicativo	1	5. Rep resentar los datos del problema en forma numérica y/o usando tablas y/o dibujos, planos cartesianos, diagramas de venn	E1		E1	8. Tener claro que tipo de operacion es y heurística s aplicaran y el tiempo que se gastará en cada una de ellas.	E1	10. Buscar patrones, es decir buscar datos, números, eventos, problemas similares que se repiten	E1
			E2		E2		E2		
	2		E3		E3		E3		
	3		E4		E4		E4		
	4		E5		E5		E5		
	6		E6		E6		E6		
<b>SUBTOTAL EVIDENCIAS</b>									
3. Establecer la existencia de una proporción entre dos espacios de medidas, si hay correspondencia entre dos medidas y un operador escalar, designado por la palabra veces o si es una composición cartesiana de dos espacios de medidas con respecto a otro espacio de medida	1		E1		E1		E1		E1
			E2		E2		E2		
	2		E3		E3		E3		
	3		E4		E4		E4		
	4		E5		E5		E5		
	6		E6		E6		E6		

<b>SUBTOTAL EVIDENCIAS</b>							
<b>TOTAL EVIDENCIAS</b>							
<b>PROBLEMA MULTIPLICATIVO CMM</b>	Para recorrer cierta distancia Vanesa gasto 15 horas. Miguel utilizo 3 veces más de tiempo que Vanesa. ¿Cuántas horas gasto Miguel?						
<b>ELEMENTOS ESTRATEGIAS DE MONITOREO</b>							
<i>El estudiante tiene claro si los datos propuestos en el enunciado del problema son suficientes.</i>	<b>LISTA DE COTEJO</b>	<i>Simplifica el problema, concretándolo hasta tener la posibilidad de abordarlo.</i>	<b>LISTA DE COTEJO</b>	<i>El estudiante ejecuta un procedimiento matemático (correcto o incorrecto) y aplica otros posibles procedimientos matemáticos para resolver el problema.</i>	<b>LISTA DE COTEJO</b>	<i>Hace representación gráfica, dibuja o hace un esquema del procedimiento de solución del problema.</i>	<b>LISTA DE COTEJO</b>
<b>EVIDENCIAS</b>							
1. El estudiante sabe que los datos del enunciado están completos o si requiere de más información para solucionar el problema.	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>	3. Toma el plan y sintetiza el procedimiento de solución en pocos pasos.	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>	6. Tiene claro los conceptos matemáticos necesarios que uso para resolver el problema	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>	9. Representa el procedimiento mediante dibujos, esquemas o gráficas. (semiótica)	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>
<b>SUBTOTAL EVIDENCIAS</b>							
	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>	4. El Estudiante establece con argumentos frente a sus pares si esta de acuerdo o no en la forma como se soluciona el problema.	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>	7. El estudiante comprende y modifica frente a sus pares la ejecución del problema multiplicativo, proponiendo otro u otros procedimientos para la solución del mismo, diferente al propuesto por el docente.	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>	10. Representa el procedimiento mediante mapas conceptuales y/o cuadros sinópticos.	<b>E1 E2 E3 E4 E5 E6</b>
<b>SUBTOTAL EVIDENCIAS</b>							
2. El estudiante verifica si el procedimiento que usa	<b>E1 E2 E3</b>	5. Usa tabulaciones para sintetizar el	<b>E1 E2 E3</b>	8. Compara el problema multiplicativo	<b>E1 E2 E3</b>		<b>E1 E2 E3</b>

lo llevará a la solución del problema.	E4 E5 E6	enunciado del problema.	E4 E5 E6	con otros ya conocidos.	E4 E5 E6		E4 E5 E6	
<b>SUBTOTAL EVIDENCIAS</b>								
<b>TOTAL EVIDENCIAS</b>								
<b>PROBLEMA MULTIPLICATIVO CMM</b>			Para recorrer cierta distancia Vanesa gasto 15 horas. Miguel utilizo 3 veces más de tiempo que Vanesa. ¿Cuántas horas gasto Miguel?					
<b>ELEMENTOS ESTRATEGIAS DE EVALUACIÓN</b>								
<i>El estudiante realiza acciones para controlar, revisar la validez del proceso de resolución y/o de los resultados obtenidos y detectar posibles errores.</i>		<b>LISTA DE COEJO</b>	<i>El estudiante realiza acciones como: cuestionar la validez de algún resultado o del procedimiento de resolución; revisa de manera sistemática los datos introducidos, los algoritmos de resolución utilizados y los cálculos matemáticos realizados y si estos están de acuerdo a lo planeado.</i>			<b>LISTA DE COEJO</b>		
<b>EVIDENCIAS</b>								
1. El estudiante tiene claro si la solución del problema multiplicativo es correcta o incorrecta y lo sustenta con argumentos.		E1 E2 E3 E4 E5 E6	6. El estudiante establece si los datos planteados inicialmente son suficientes para la solución del problema.			E1 E2 E3 E4 E5 E6		
<b>SUBTOTAL EVIDENCIAS</b>								
2. El alumno establece con seguridad los componentes básicos y las relaciones entre los diferentes elementos que forman parte del problema multiplicativo.		E1 E2 E3 E4 E5 E6	7. Establece que procedimientos de los usados eran más eficaces para encontrar la solución del problema.			E1 E2 E3 E4 E5 E6		
<b>SUBTOTAL EVIDENCIAS</b>								
3. El estudiante es consciente de los avances y dificultades que ha tenido durante el procedimiento del problema multiplicativo.		E1 E2 E3 E4 E5 E6	8. Revisa si las operaciones usadas en la solución del problema son las correctas.			E1 E2 E3 E4 E5 E6		
4.El estudiante establece si logro un aprendizaje autónomo y de que manera lo realizó		E1 E2 E3 E4 E5 E6	9. El estudiante determina si fue más fácil el desarrollo del problema cuando ha resuelto previamente un problema semejante.			E1 E2 E3 E4 E5 E6		
5. El estudiante verifica si la planeación del problema le permitió usar una estrategia clara.		E1 E2 E3 E4	10. Verifica que el aporte de sus pares le permite retroalimentar la solución del problema			E1 E2 E3 E4		

	E5 E6		E5 E6
<b>SUBTOTAL EVIDENCIAS</b>			
<b>TOTAL DE EVIDENCIAS</b>			