EL EMPLEO DE LOS MÉTODOS ARITMÉTICOS EN LA CONSTRUCCIÓN DEL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO EN ESTUDIANTES DE BÁSICA SECUNDARIA DE UNA INSTITUCIÓN EDUCATIVA PÚBLICA

LUIS ALBERTO BOHÓRQUEZ PUENTES

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES

FACULTAD DE ESTUDIOS SOCIALES Y EMPRESARIALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

MANIZALES

2022

EL EMPLEO DE LOS MÉTODOS ARITMÉTICOS EN LA CONSTRUCCIÓN DEL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO EN ESTUDIANTES DE BÁSICA SECUNDARIA DE UNA INSTITUCIÓN EDUCATIVA PÚBLICA

Autor

LUIS ALBERTO BOHÓRQUEZ PUENTES

Proyecto de grado para optar al título de Magister en Enseñanza de las Ciencias

Tutor

Dr. LIGIA INÉS GARCÍA CASTRO

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES

FACULTAD DE ESTUDIOS SOCIALES Y EMPRESARIALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

MANIZALES

2022

DEDICATORIA

Dedicar primeramente a Dios por permitirme culminar este importante proceso académico y de formación profesional, a mi madre por darme la vida y ser aquella que siempre aposto todo por mí, a mi padre que me enseño el camino de la educación y con su ejemplo me enamore de esta bonita profesión, a mi hijo hermoso que siempre fue mi motor para continuar y luchar con todas las barreras que se presentan, a mi pareja por brindarme su apoyo y transmitirme felicidad y a mi familia por siempre darme fortaleza.

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Autónoma de Manizales por permitirme adelantar mis estudios de maestría y poder transformar mis prácticas de aula y a los docentes que me proporcionaron lo mejor de ellos., en especial a la Doctora Ligia Inés García Castro por ser más que una docente o asesora de tesis una mujer en todo el sentido de la palabra.

RESUMEN

La asignatura de matemáticas viene históricamente siendo afectada por la horizontalidad de los temas a impartir en el aula establecidos a partir de los referentes de calidad (estándares básicos de competencia, lineamientos curriculares, derechos básicos de aprendizaje, entre otros), durante el cambio conceptual que implica el álgebra en los estudiantes de grado octavo de secundaria (MEN, 2003) existen problemas semióticos que imposibilitan adquirir un pensamiento variacional, a través de los niveles de algebrización se potencializan las habilidades aritméticas que se requieren para adquirir un pensamiento algebraico. los cuatro niveles de algebrización propuestos en función del razonamiento algebraico, tales como, el nivel de ausencia de razonamiento, el nivel incipiente de algebrización, el nivel intermedio de algebrización y el nivel consolidado de algebrización (Godino, et al, 2014), hacen grandes esfuerzos en la transformación en cuanto a los mecanismos necesarios para el óptimo aprendizaje de los sistemas algebraicos, esto ha exigido desde el orden curricular, técnico y practico fortalecer dichos campos a partir de la aritmética y los sistemas numéricos.

Palabras clave: Razonamiento, Educación, niveles de algebrización, semiótica, enseñanza de las matemáticas, aprendizaje de las matemáticas.

ABSTRACT

The subject of mathematics has historically been affected by the horizontality of the topics to be taught in the classroom established from the quality benchmarks (basic standards of competence, curricular guidelines, basic learning rights, among others), during the conceptual change that involves algebra in eighth grade high school students (MEN, 2003) there are semiotic problems that make it impossible to acquire variational thinking, through the levels of algebrization the arithmetic skills required to acquire algebraic thinking are potentiated. the four levels of algebrization proposed based on algebraic reasoning, such as the level of absence of reasoning, the incipient level of algebrization, the intermediate level of algebrization and the consolidated level of algebrization (Godino, et al, 2014), make great efforts in the transformation regarding the necessary mechanisms for the optimal learning of algebraic systems, this has required from the curricular, technical and practical order to strengthen these fields from arithmetic and numerical systems.

Keywords: Reasoning, Education, algebrization levels, semiotics, mathematics teaching, mathematics learning.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ANEXOS

1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El álgebra es una rama de la matemática que se encarga especialmente del estudio de las generalidades y algoritmos expuestos de forma particular en cada una de las demás ramas subyacentes de la misma, tales como la geometría, la trigonometría, la aritmética, la estadística y la probabilidad respectivamente, y es precisamente en este campo donde se manifiestan obstáculos tanto en el proceso de enseñanza, como en el proceso de aprendizaje ya que se considera abstracto y mecánico lo que no permite la comprensión de los procesos de algoritmación (Kaput, Carraher y Blanton, 2008).

Al revisar algunos estudios sobre las dificultades en la comprensión del algebra como generalización de sucesiones, el grupo de investigación SESM (Strategies and Errors in Secondary Mathematics) del Reino Unido, durante un estudio llevado a cabo en tres años consecutivos desde 1980 a 1983, afirman que durante el paso de la aritmética al algebra en estudiantes de 13 a 17 años de edad, se puede determinar que uno de los mayores obstáculos que se presenta está dado por las diferencias del lenguaje natural y el lenguaje algebraico, como también el paso abrupto de números representados a través de letras, siendo estos obstáculos importantes en función de los procesos de enseñanza y aprendizaje que aun hoy persisten.

Teniendo en cuenta que existen semejanzas y diferencias notables entre algunos conceptos aritméticos y algebraicos, donde el estudiante presenta algunas dificultades importantes en este campo, ya que, suelen generalizar su sentido matemático en todos las situaciones dadas, llevándolos a interpretar erróneamente algunas situación, es decir, que un concepto matemático puede sufrir diferentes intensiones dependiendo del caso, como ocurre frecuentemente con las expresiones conocidas o constantes que se encuentran en el álgebra y las constantes manifestadas en la aritmética (Algebra: las constantes se caracterizan por ser contenidos conocidos con anterioridad y se expresan con las primeras letras del alfabeto y en aritmética: las constantes están compuestas por todo el conjunto de los números reales).

Teniendo en cuenta lo afirmado anteriormente es importante traer a colación entonces lo que sostiene D´Amore, 1999 (citado por Tamayo y Vallejo, 2008) "la aprehensión de los objetos matemáticos es un aprendizaje conceptual y solo por representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos" (p.157); por lo tanto es evidente que uno de los obstáculos importantes que se manifiestan en el proceso de enseñanza y aprendizaje del algebra está dada especialmente por el campo semiótico. De esta forma es trascendental reconocer que existen diversos obstáculos que dificultan el proceso de aprendizaje de los contenidos matemáticos en los grados séptimo y octavo respectivamente, así como las dificultades evidenciadas durante el proceso de aprendizaje de los contenidos algebraicos, otro de los obstáculos encontrados se refiere a la representación del objeto matemático en diferentes situaciones que implican reconocerlo desde diferentes tópicos (Duval, 2004).

Finalmente, el otro de los obstáculos está dado por el aislamiento marcado que se da habitualmente en las instituciones educativas entre la aritmética y el álgebra (Skemp, 1993), ya que, desde las estructuras curriculares establecidas tanto en los planes de aula como en los planes de área y estudio en la educación básica, secundaria y media, se ha dividido sistemáticamente el pensamiento variacional con el pensamiento numérico, olvidando que en gran medida los aprendizajes de los sistemas algebraicos dependen directamente de las herramientas aritméticas, ya que, en su enfoque especial el álgebra generaliza procesos numéricos que se extraen de un sistema que implica cambio.

Por consiguiente varios autores tales como Kaput (1989); Kieran (1989); Gascon (1999); Godino et al (2014), han propuesto los niveles de algebrización donde se tienen en cuenta las acciones de los educando en función con los contenidos algebraicos; en el cual se muestran generalmente cuatro aspectos importantes que deben hacer parte del currículo, en donde el primer nivel (ausencia del razonamiento algebraico), nos muestra la interposición de los objetos extensivos por medio del lenguaje natural, numérico e icónico, es decir permitiendo a la aritmética que sea el ente fundamental en el proceso de algebrización, el segundo nivel o nivel incipiente de algebrización, se caracteriza especialmente por la intervención de los símbolos en tareas, el tercer nivel o nivel intermedio de algebrización, nos muestra la importancia de las variables expresadas por medio del lenguaje simbólico-literal en problemas contextualizados, y finalmente el cuarto nivel o nivel consolidado de algebrización, es donde el estudiante relaciona directa e indirectamente todos los niveles anteriores en problemas reales, es decir, el estudiante resuelve operaciones algebraicas (Godino, et al 2014).

Teniendo en cuenta estas consideraciones anteriores subyacentes a los procesos de enseñanza y aprendizaje de los algoritmos matemáticos, se propone la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuáles son los métodos aritméticos que permiten el proceso de generalización presente en la construcción del razonamiento algebraico en estudiantes de grado 8º de una institución educativa pública?

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GENERAL:

Describir los cambios en los niveles de algebrización que se presentan en estudiantes del grado 8º de una institución educativa pública a partir de la incorporación de métodos aritméticos.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Conocer los niveles de algebrización que utilizan los estudiantes al resolver problemas del contexto.
- Identificar los elementos aritméticos y algebraicos formales que permitan construir algoritmos a partir de un problema.
- Relacionar los métodos aritméticos en la construcción del razonamiento algebraico en los estudiantes del grado 8º de una institución educativa pública.

3 JUSTIFICACIÓN

La educación colombiana ha sufrido diferentes transformaciones a partir de los intereses y necesidades del entorno, el enfoque curricular es uno de los mecanismos que soportan en gran medida los procesos que se llevan a cabo en las aulas de clase, proporcionando herramientas de transformación conceptual, así mismo, los procesos de enseñanza y aprendizaje a partir de la pedagogía y la didáctica se complementan para que estas transformaciones conceptuales que han sido objeto de estudio lleguen finalmente al estudiante.

La construcción de la presente investigación es pertinente no solo desde el punto de vista conceptual, sino también desde el punto de vista actitudinal, donde existe una necesidad en la incorporación del modelo constructivista durante el proceso de enseñanza y el proceso de aprendizaje de las ciencias, se ha admitido que el estudiante pueda indagar, reflexionar y criticar constructivamente, sin olvidar el verdadero horizonte por el cual debe pasar, siendo este el acto didáctico, el momento el cual la información es procesada con diferentes fines académicos, y el contrato didáctico como el otro momento en la práctica educativa, que a partir de las relaciones interpersonales se crean espacios y ambientes agradables de aprendizaje.

En la educación matemática han existidos diferentes paradigmas que influyen en todos los procesos que se llevan a cabo en las aulas de clase, ya que, en gran medida el acto de aprender matemática viene acompañado con miedo y fobia hacia la misma, esto por el hecho de mesclar en la escritura letras y números que representan diferentes magnitudes y cantidades. Al establecer y construir un pensamiento variacional en los estudiantes de la educación básica y media se puede determinar que se piensa formalmente.

Esta investigación pretende aportar al mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje del algebra en estudiantes de secundaria, precisamente en grado octavo, donde el MEN a partir de los referentes de calidad educativa establecen que es allí donde se “materializa” y profundiza con gran rigor el álgebra; pero una de las grandes falencias ha sido desligar sustancialmente los contenidos aritméticos con los nuevos procesos de generalización matemática denominado algebra.

A su vez, es necesario resaltar que durante gran parte de nuestra vida estamos aplicando el pensamiento variacional desde el concepto de algoritmo, ya que, todo lo que hacemos está dado por un orden especifico y que se necesita de ello para que funcione el sistema, como es el caso de la formación académica, es necesario pasar por la educación primaria y posteriormente por la educación secundaria y se finaliza si es posible en la educación superior, este orden es quizás obligatorio, pero es un algoritmo y hace parte del pensamiento variacional.

Posteriormente, se pudo identificar que una de las grandes estrategias utilizadas en este campo, es de los niveles de algebrización, a aparte de ser un algoritmo por sí mismo, es también la ficha clave para que se inicie y termine con gran eficacia los aprendizajes algebraicos, cabe mencionar que dichos niveles están dados según los conocimientos previos que poseen los estudiantes, estos se clasifican de la siguiente manera: Nivel 0 (ausencia de razonamiento algebraico), Nivel 1 (incipiente de algebrización), Nivel 2 (intermedio de algebrización), Nivel 3 (consolidado de algebrización).

4 REFERENTE CONCEPTUAL

4.1 ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

Durante los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ciencias formales, se ha podido evidenciar la existencia de una gran variedad de obstáculos, donde estos cumplen un papel muy importante en esta ciencia, permitiendo que la matemática causen antipatía por parte del educando y muchas veces también por parte del docente; ya que, su exceso de formalidad y la forma tradicional como ha sido enseñada durante toda la historia (donde el estudiante era una hoja en blanco y el docente tenía la única razón y verdad sobre un concepto determinado), hacen que la práctica (hacer didáctico) y la construcción de nuevos conocimientos a partir de los preconceptos por parte del docente y el educando sean los grandes ausentes en los escenarios educativos, así como lo afirma Duval, 1999 (citado por Vallejo y Tamayo, 2008) piensa que los objetos matemáticos no son accesibles físicamente, sino, a través de signos y representaciones semióticas, por lo tanto, "en matemática no existe un solo sistema semiótico sino varios sistemas para el estudio de un contenido" (p.157).

Teniendo en cuenta que el proceso de enseñanza por parte del docente y aprendizaje desde el estudiante es el principio fundamental de los procesos académicos, en la mayoría de sus casos van a existir obstáculos epistemológicos que afectan en gran escala la construcción de nuevos conceptos desde el saber a priori, así como lo sostiene Mora (2002), afirmando: "entiéndase por obstáculos epistemológicos las limitaciones o impedimentos que afectan la capacidad de los individuos para construir el conocimiento real o empírico" (p.2).Pero en las matemáticas por su amplia notación y sus mecanismos de generalización la convierten en un caso atípico y complejo en su aplicabilidad tanto en el aula de clase y en la resolución de problemas contextualizados; es por esta la razón que durante la realización de cuantiosas investigaciones en el campo de la educación matemática, se orientan en base al proceso de enseñanza y aprendizaje de los algoritmos matemáticos o el proceso de algebrización.

Las investigaciones que se van a citar posteriormente muestran la importancia de la aritmética en la enseñanza del algebra, como también la trascendencia que tiene el lenguaje algebraico en cuanto a la resolución de problemas contextualizados.

Osorio Pinilla (2020) en su investigación denominada "La argumentación en el aprendizaje de la factorización de polinomios cuadráticos" expresa claramente algunos mecanismos de semióticos que establecen una relación directa entre las estructuras algebraicas y los mecanismos aritméticos desde la geometría, esto hace que dicha investigación promueva el aprendizaje del algebra a partir del pensamiento numérico.

Allí mismo establecen los niveles de argumentación matemática como herramienta fundamental a la hora de identificar las estructuras algorítmicas que destacadas en la descomposición factorial. Así como lo establece en literalmente en la investigación:

> Así mismo, la estructura de la unidad didáctica permitió visibilizar la necesidad de que el proceso de enseñanza de la factorización se encuentre estrechamente ligado con el uso de material manipulativo, que permita el establecimiento de una relación clara entre las áreas y dimensiones de figuras planas como una aplicación de la factorización. (Osorio, 2020, pp 63)

Desde la argumentación matemática se implantan diferentes niveles desde el aprendizaje algebraicos y su transformación a partir del pensamiento geométrico y aritmético al pensamiento variacional, expuestas de la siguiente manera:

> Nivel 1: Los argumentos utilizados corresponden a una descripción simple de la vivencia.
>
> Nivel 2: En los argumentos utilizados se puede identificar de forma clara la existencia de datos y conclusiones.
>
> Nivel 3: En los argumentos utilizados, además de los datos y la conclusión, se puede evidenciar la existencia de una garantía.

> Nivel 4: En los argumentos utilizados se evidencia la existencia de datos, conclusiones y garantías mediante el uso de calificadores modales y sustento.
>
> Nivel 5: En los argumentos utilizados se incluyen los 6 elementos, datos, conclusiones, garantías, sustento y condiciones de refutación. (Osorio, 2022, pp 21)

Consecuentemente Mejía Urbano (2021) en su investigación denominada “Argumentación y desempeño en la comprensión del concepto de función lineal en estudiantes de grado noveno” proporciona grandes aportes a la presente investigación académica, puesto que toma las representaciones semióticas y su transformación en el hecho de enseñar y aprender el concepto de función lineal que inicia desde la representación verbal o lenguaje natural, pasa por los conjuntos o representaciones de Venn que implican un conocimiento profundo de la aritmética, seguidamente la tabulación como herramienta de organización de datos obtenidos desde la variable dependiente de una función, la graficación es otra de las etapas que comprenden dicha transformación semiótica, puesto que facilita el análisis del comportamiento de la función misma a partir de las parejas numéricas ordenadas, y se finaliza con la representación algebraica, que sostiene claramente, Mejía (2021): “en este tipo de representación se busca, mediante una fórmula matemática o ecuación entre los elementos de los conjuntos en cuestión, expresar en forma explícita o implícita, la relación funcional” (p. 25).

De antemano es indispensable reconocer que esta investigación de carácter pedagógico y didáctico promueve tajantemente el uso constante de las representaciones semióticas en todos los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, puesto que, es así como el educando obtiene mayor claridad a la hora de enfrentarse a un problema. Como se sostiene a continuación:

> Como se mencionó anteriormente la conversión de representaciones semióticas es una de las actividades que genera mayor dificultad en los estudiantes, por ello es necesario que en el aula regular se favorezcan los procesos de enseñanza que involucran la conversión entre diferentes registros de representación de la función lineal. (Mejía, 2021, pp 23)

Así mismo, Velosa Sánchez (2020) en su investigación conocida como “las representaciones semióticas en el aprendizaje de los números enteros” amplifica el uso adecuado de las representaciones semióticas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, puntualizando la necesidad de implementar el pensamiento numérico y la esencia del número positivo y negativo en problemas contextualizados o de nuestro entorno.

De esta manera, la investigación establece que cuando se desarrollan diferentes procesos aritméticos son necesarios todas aquellas representaciones semióticas para el aprendizaje sea eficaz, así como lo sostiene en el siguiente apartado:

> Por lo tanto, un sistema de representación responde a preguntas ¿qué representaciones hay asociadas con el tema? y ¿qué relaciones se pueden establecer entre esas representaciones? Teniendo en cuenta esas dos preguntas, identificamos que los sistemas de representación utilizados para hacer presente un número entero son: verbal, simbólico, gráfico y manipulativo (Velosa, 2020, p. 45).

Godino et al (2014) en su investigación muestran a través de un trabajo minucioso sobre los procesos y niveles del desarrollo de las habilidades de razonamiento algebraico en la escuela primaria.

Con respecto al trabajo de campo realizado en la investigación con algunos estudiantes de primaria, detectaron que muchos estudiantes que resolvían problemas contextualizados utilizando el álgebra o utilizando la aritmética, estos debían operar las cantidades o generalidades de acuerdo con ciertas reglas congruentes entre ambos métodos, como son las relacionadas directamente con los signos de operación, de relación y de agrupación respectivamente.

De antemano cabe resaltar que dentro de esta investigación muestran que el proceso de algebrización está compuesto por una base muy fuerte reconocida como la aritmética, donde el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra se unifica en cuanto a su horizonte, transformándolo al razonamiento algebraico, es decir, que el concepto de algebra pasa a ser una triada vectorial que inicia desde las representaciones aritméticas de un sistema,

El pensamiento variacional viene siendo un campo de la construcción matemática en todos los niveles de la educación colombiana, que busca precisamente mejorar el razonamiento y la cimentación de nuevos conocimientos que potencialicen las habilidades en la resolución de problemas, es por esta razón que los procesos de algebrización toman un protagonismo especial no solo en la estructuración y aplicación de los conocimientos, sino que en la organización misma del aprendizaje. Así como lo sostienen Godino et al (2014) en el siguiente apartado:

> Ciertamente no se trata de impartir un «curso de álgebra» a los alumnos de educación infantil y primaria, sino de desarrollar el razonamiento algebraico a lo largo del período que se inicia en la educación infantil hasta el bachillerato (…). En el «álgebra escolar», se incluyen no solo las funciones y la capacidad de analizar situaciones con la ayuda de símbolos (planteamiento de ecuaciones en la resolución de problemas), sino también el estudio de los patrones numéricos y geométricos, la determinación de reglas generales y el reconocimiento de estructuras isomorfas (p. 4).

Es preciso señalar que otra de las componentes trascendentales del presente trabajo investigativo, se refiere a los niveles de algebrización, por los que debe pasar un estudiante al finalizar su educación básica, reconociéndolos como el nivel 0, donde se evidencia una ausencia del razonamiento algebraico, por lo que el estudiante en este nivel resuelve los problemas utilizando únicamente las herramientas aritméticas; en el nivel 1 o nivel incipiente de algebrización, el estudiante debe manifestar por medio del análisis y razonamiento algunas relaciones, patrones y regularidades entre dos o más números, es decir que el estudiante en ambos niveles debe tener un indicio sobre concepto de número y demás de instrumentos matemáticos necesarios en la resolución de problemas, como son los signos de agrupación, relación y operación.

Otra de las investigaciones está dada por Ruiz, Bosch y Gascón, 2010, acerca de la importancia de los niveles de algebrización ya expuestos en la investigación inmediatamente anterior, teniendo en cuenta que en esta investigación se inicia dando importancia a los procesos de cálculo aritmético, es decir que se enmarcan sobre las semejanzas simbólicas que tiene la aritmética y el álgebra respectivamente.

De igual manera este trabajo investigativo muestra que una expresión algebraica o algoritmo puede sufrir un proceso de aritmetización, en otras palabras

que los procesos generalizados pueden analizarse desde perspectivas particulares; ya que, si este proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra se toma como objeto de estudio a la aritmética generalizada, entones los estudiantes van a realizar un proceso netamente reflexivo.

Teniendo en cuenta lo anterior y apoyándose de las estructuras algebraicas, una de las bases fundamentales para que el proceso de aprendizaje del álgebra sea significativo, es necesario dar inicialmente al educando libertad en cuanto a los procesos de algebrización, permitiendo la creación de sus propios modelos, desarrollando una concepción amplia de las estructuras y mecanismo de los algoritmos; así como se muestra en el siguiente esquema de la misma investigación:

Figura 1.Creacion algoritmos

$$\begin{aligned} PCA(\heartsuit) &= \heartsuit + 2\cdot(\heartsuit + 1) + 15 - 3\cdot\heartsuit = \heartsuit + 2\cdot\heartsuit + 2 + 15 - 3\heartsuit \\ &= 3\heartsuit - 3\heartsuit + 17 = 17. \end{aligned}$$

Fuente. Elaboración propia (2021)

Mediante la investigación de Pérez y Hernández (2013) quisieron expresar la importancia que tiene la aritmética como puente fundamental en el proceso de aprendizaje del algebra, ya que los estudiantes antes de llegar a los grados obligatorios donde se inician los conceptos algebraicos, éstos han desarrollado un recorrido puramente aritmético.

Por tal motivo esta investigación toma esencialmente dos instrumentos didácticos que permiten el mejoramiento en los procesos de enseñanza y aprendizaje, inicialmente conocidos como la ingeniería didáctica, puesto que se encarga en construcción de los trabajos didácticos comparables con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico (Artigue 1995), es decir que se tienen en cuenta todos esas concepciones o preconceptos del educando.

El segundo concepto y componente fundamental de la ingeniería didáctica se conoce como las secuencias didácticas, donde se tienen en cuenta todas las técnicas, métodos y pautas que realiza el docente a través de su experiencia y sus conocimientos formales sobre un determinado concepto, donde se busca que los obstáculos (…) que se enfrentan al trabajar con tópicos algebraicos, esto se logra a través de la utilización de fórmulas sencillas para calcular perímetros y áreas de las figuras con las que están trabajando, ya que estas ecuaciones sólo han sido vistas como abreviaturas de los procedimientos dentro de los escenarios educativos (Pérez, 2013).

Teniendo en cuenta los aportes de las investigaciones anteriores, es importantes explorar desde una perspectiva más profunda el concepto aritmético-algebraico, es decir, todas esas manifestaciones aptitudinales que se deben fijar durante el proceso de aprendizaje por parte del estudiantes, es así que la investigación llevada a cabo por Pérez, Filloy y Gallardo (2014), quieren expresar la valor didáctico de los modelos de enseñanza sintáctico, la contextualización y los proceso lúdicos llevados a cabo dentro y fuera del salón de clase.

De este modo se muestran que las tres componentes afirmadas anteriormente, deben hacer parte activa los procesos de enseñanza y aprendizaje, no solo de la aritmética y el álgebra, sino también de todas las demás ramas de las matemáticas como también los demás campos de las ciencias naturales, sociales y demás disciplinas del conocimiento. Uno de los ejemplos más significativos dentro de la investigación y relacionados directamente con las tres componentes nombradas anteriormente, está dado desde la aritmética, como es el caso de los números enteros, donde se muestra las operaciones numéricas que utilizan los signos de relación, agrupación y relación respetivamente.

pasando por la ubicación de puntos en la recta numérica y graficación en el plano cartesiano (modelo contextualizado), finalmente se desarrolló un juego en grupos de dos, llamada la cucaracha, donde los estudiantes confrontaban los valores a través del uso de los dados (modelo lúdico).

Posteriormente otro de las investigaciones llevadas a cabo sobre el proceso de aprendizaje del algebra en la educación básica y superior, fue impulsado por Soneira, Souto y Tarrío (2014), demostrando que durante el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra se producen cambios semióticos y sintácticos importantes que permiten comprender situaciones problema desde el lenguaje aritmético al lenguaje algebraico.

En la elaboración de este proceso investigativo se tuvieron en cuenta algunas variables fundamentales tales como el lenguaje algebraico y el propio lenguaje natural, es decir que buscaron semejanzas y congruencias entre estos tipos de lenguaje, teniendo en cuenta que, dentro del lenguaje natural, así como el lenguaje algebraico comparten muchas similitudes de forma y de fondo, como son las imágenes, las letras del alfabeto, símbolos, palabras y hasta los mismos números racionales. Así como lo sostiene Duval (2006). "(…) Destacamos la conocida (…) paradoja de Duval, la cual expone que los objetos matemáticos, en contraposición con los de las ciencias empíricas, no son perceptibles directamente a través de los sentidos, solo es posible acceder a ellos a través de las representaciones semióticas (…) (p.88)".

Finalmente, otra de las investigaciones que sostiene este trabajo de investigación, fue llevada a cabo por Castro (2012), donde se clasifican algunos obstáculos evidenciados durante el proceso de enseñanza ya aprendizaje de los conceptos algebraicos, ya que muchos autores destacados manifiestan que el álgebra es un ente que no es la solución final de la aritmética, sino que se fundamentan entre sí, tal y como lo muestra Palarea (1998) al afirmar:

El álgebra trata de la simbolización de las relaciones numéricas generales, de las estructuras matemáticas y de las operaciones de esas estructuras; desde esta posición se puede ver el álgebra como aritmética generalizada que involucra formulación y manipulación de relaciones y propiedades numéricas (p.89).

Estos obstáculos reconocidos tienen una yuxtaposición directa con las dificultades aritméticas o de aritmetización de contenidos contextualizados, otro de los obstáculos está dado por la generación de patrones dentro de una sucesión, seguidamente se evidenció un obstáculo asociado al concepto de generalización o algebrización, como también obstáculos asociados al lenguaje y los asociados a las estructuras de las expresiones algebraicas.

4.2 REFERENTE TEÓRICO DE LA INVESTIGACIÓN

Con frecuencia los docentes de matemáticas aplican diversos métodos de enseñanza dentro del aula de clase, en pro del mejoramiento en los procesos de aprendizaje por parte del alumno, donde su fin depende de la relación directa entre las concepciones, definiciones, ejemplificaciones, la experimentación, la reflexión y la crítica constructiva respectivamente; con la ayuda de herramientas externas tales como las tecnologías de la información y la comunicación, el trabajo cooperativo, colaborativo, entre otros, sin olvidar que las ciencias formales compuesta por la lógica y las matemáticas se sostienen especialmente con bases algorítmicas o simplemente algebraicas, es decir, que las matemáticas quieren demostrar de forma generalizada muchos de los sistemas y problemas que se nos presentan día a día.

Durante los procesos de enseñanza y aprendizaje del algebra observado y analizado uno de los obstáculos más significativos al que enfrentan los docentes y los estudiantes en los grados séptimo y octavo respectivamente, ya que durante estos grados es que se introduce por primera vez el estudiante con el álgebra, es decir, que el educando pasa de la aritmética donde se estudian situaciones específicas, a un campo donde se demuestran o construyen situaciones problemas desde un sentido más general “el álgebra”, por lo que el cambio además de ser de fondo también es de forma como ocurre con el lenguaje. Es considerable tener en cuenta que uno de los preconceptos fundamentales que se deben enmarcar durante el proceso de algebrización, es la misma aritmética, ya que los estudiantes antes de empezar el proceso de aprendizaje de los contenidos algebraicos, éste ha pasado por diversas etapas de tipo numérico, teniendo así una fuerte concepción de los mecanismos aritméticos, por lo tanto es fundamental pasar a los contenidos algebraicos teniendo como base principal los contenidos aritméticos, es decir, generalizando la aritmética.

Interpretar el álgebra como una aritmética generalizada supone asumir que el álgebra se construye en un contexto numérico, a modo de generalización de los cálculos con números y de la traducción de expresiones numérico-verbales, donde las expresiones algebraicas nacen de la necesidad de representar y manipular números desconocidos (Munzón, Bosch y Gascón, 2007, p.656).

Es importante tener en cuenta que los conceptos teóricos, didácticos y epistémicos del algebra y del proceso de algebrización, toman un papel imprescindible todos esos fundamentos que soportan el proceso de enseñanza y aprendizaje del algebra, tales como, el razonamiento algebraico, el álgebra en el currículo, el lenguaje algebraico, el álgebra como generalización de la aritmética, los niveles de algebrización.

En este sentido los niveles de algebrización pasan a ser una herramienta que permite la transición desde la aritmética a los procesos de generalización o el álgebra misma, es decir, que se toman los criterios y fundamentos numéricos para con el fortalecimiento del pensamiento variacional; en esta investigación académica se atribuye la gran fortaleza que tienen los procesos algorítmicos en los procesos de enseñanza y aprendizaje para poder fortalecer las técnicas de análisis y razonamiento.

Estos niveles de algebrización establecidos en la presente investigación, se componen de cuatro etapas primordiales que establecen según su nivel la rigurosidad de los conocimientos previos del estudiante, para el nivel 0 y el nivel 1 no es necesario tener conocimiento alguno del algebra, simplemente es necesario tener un pensamiento numérico básico en el cual se priorizan las propiedades aritméticas, los procesos de operación y las divisiones internas que existen entre los números (racionales e irracionales).

Para los niveles uno y dos si es necesario contar con un pensamiento variacional básico, que establezca algunas relaciones e identifique la diferencia entre algunos elementos del algebra, tales como los conceptos de monomios, binomios, trinomios y polinomios y también la diferencia existente entre variable y constante respectivamente, sumando obviamente el pensamiento variacional.

4.2.1 La Unidad Didáctica

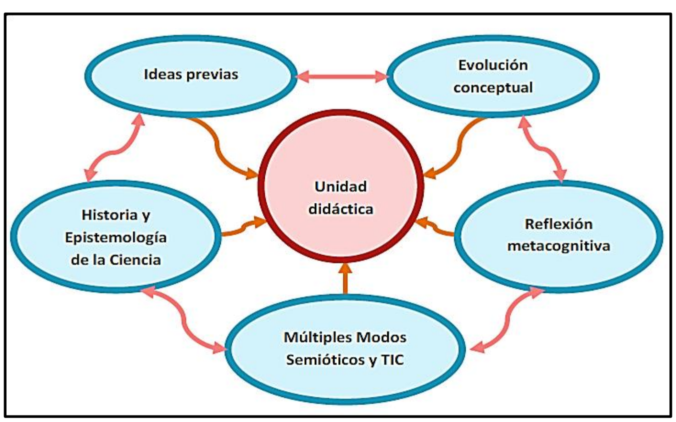
Durante la práctica docente se aplican diversos métodos que facilitan los procesos de enseñanza y aprendizaje, en algunos casos estos métodos pueden ser retomados o modificados de otro ya estructurado y formalizado, , todas estas herramientas didácticas que aprenden desde la formación como docentes y la experiencia dentro de las aulas de clase, conllevan a implementar las propias formas de enseñar a los estudiantes (Parales y cañal, 2000), todo esto en función de alcanzar una crítica constructiva y reflexión por parte del educando. Por esta razón es importante tener en cuenta que todos estos métodos admitidos anteriormente hacen parte del modelo de unidad didáctica, ya que, ésta se concreta como un proceso flexible, es decir, que permite modificaciones de forma y fondo, donde el proceso de enseñanza y la planificación de contenidos de una ciencia especifica permiten la existencia de un proceso de aprendizaje eficaz en una comunidad especifica (Tamayo, 2006).

Las unidades didácticas son una herramienta en la cual interactúan directamente los estudiantes, el docente y los contenidos de la ciencia específica (en este caso las matemáticas), en donde existen algunas componentes metodológicas básicas, tales como, la importancia de las ideas previas principalmente por parte de los estudiantes, ya que su vivencias y experiencia permiten que los conocimientos nuevos sean integradores; otra de las componentes conocida como la historia y la epistemología hacen parte de los conocimientos necesarios, ya que, todo concepto ha tenido una evolución y ha pasado por diferentes etapas, seguidamente la Metacognición, fundamentada a partir de la importancia de la conciencia como ente primordial en el proceso de aprendizaje, y finalmente la resolución de problemas la cual integra estas etapas anteriores (Tamayo, Suárez, García y otros, 2011).

Posteriormente es claro manifestar que las unidades didácticas son sostenidas desde el constructivismo, donde los estudiantes toman un rol diferente, es decir, pasan de ser pasivos a ser individuos activos dentro del proceso de aprendizaje, en el cual estos conocimientos nuevos se construyen en el aula de clase, permitiendo que estos escenarios educativos sean testigos de un paralelismo entre el trabajo científico y la misma ciencia, en donde finalmente construimos lo que se llama *la ciencia escolar* (Tamayo, 2005).

Es importante tener en cuenta que las unidades didácticas llevadas a cabo sobre las ciencias específicas generalmente han sido ajustadas directamente al modelo adoptado por Tamayo (2001), en donde se complementan las ideas previas, la evolución conceptual, la reflexión metacognitiva, los múltiples modos semióticos y las TIC, y la historia y la epistemología de las ciencias; tal como se presenta a continuación:

Figura 2. Diseño de la unidad didáctica



Fuente. Diseño y análisis de unidades didácticas desde una perspectiva multimodal. Tamayo, O. (2001).

4.2.2 Las Ideas Previas

Teniendo en cuenta el modelo esquematizado anteriormente sobre las unidades didácticas, podemos iniciar reconociendo la trascendencia que tienen las ideas previas dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje llevados a cabo en nuestras aulas de clase, ya que su forma de adquirirlas depende esencialmente de las eventualidades, experimentaciones, y todo lo que conlleve a la experiencia, desde el contexto cultural, familiares, escolares, etc. (Tamayo, Vasco, Suárez, Quiceno, García y Giraldo, 2010), por lo que se puede reconocer que en cualquier escenario que se encuentre un estudiantes, este va a adquirir experiencia y por consiguiente conocimientos no científicos; teniendo en cuenta lo anterior es necesario dar importancia a lo afirmado por Viennot, Driver, Pfundt y Duit, Duit y Martínez (como se citó en Tamayo, Vasco, Suárez, Quiceno, García y Giraldo, 2010)piensan que las ideas previas son aquellos conceptos que traen los estudiantes antes de adquirir un conocimiento formal.

De esta forma el docente como el individuo que propone inicialmente los contenidos o conceptos e impulsor del mismo, debe clasificar todas las concepciones de sus estudiantes, permitiendo claramente que los estudiantes pasen de sus conocimientos no formales a conocimientos científicos estructurados (Tamayo, Vasco, Suárez, Quiceno, García y Giraldo, 2010).

Finalmente cabe resaltar que las ideas previas toman gran importancia dentro de las unidades didácticas, porque estas admiten que se pueda realizar un trabajo en equipo dentro del aula de clases, también ayuda a mejorar el lenguaje científico, da gran importancia a las experiencias vividas por los estudiantes y finalmente que las estrategias de enseñanza no partan solo del docente, sino de las necesidades de los mismos educandos.

4.2.3 La Historia y Epistemología de la Ciencia

Durante la estructuración de los instrumentos y procedimientos propios o retomados de otras metodologías de enseñanza, consideramos que la historia y la epistemología son campos con poca importancia, además en diversas ocasiones los consideramos sinónimos; en este sentido quiero reconocer que en el campo de las matemáticas especialmente, no solo son importantes las representaciones semióticas, sino, también estas dos componentes toman un papel fundamental durante los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ciencias; reconociendo así que la historia es una parte de este sistema educativo, ya que, hace importante la línea espacio-temporal, es decir, que los estudiantes al igual que el docente reflexionamos sobre las etapas evolutivas por las que paso determinado concepto; de igual forma la epistemología de las ciencias no es ajeno a nosotros, esta surge como un paralelismo entre los conocimientos formales o científicos y los conocimientos comunes, que comparten un espacio con la misma filosofía de la ciencia en cuanto al conocimiento genuino (Tamayo, Vasco, Suárez, Quiceno, García y Giraldo, 2010).

Al aplicar la importancia de la historia y la epistemología de la ciencia dentro de una unidad didáctica, se puede rescatar algunas manifestaciones positivas y de gran impacto en la misma, iniciando lógicamente en el conocimiento espacio-temporal que obtienen los estudiantes sobre el concepto a trabajar, otra de las ventajas se centra en la idea de los obstáculos a los que se pueden enfrentar en un futuro, también la identificación de los fenómenos desde un punto de vista formal, el mejoramiento en el lenguaje científico, y finalmente obtener autonomía de estudio, es decir, que los estudiantes al reconocer el campo histórico y epistemológico de los conceptos despiertan mayor interés sobre todos estos fenómenos a los que nos enfrentamos diariamente.

4.2.4 Múltiples Modos Semióticos y TIC

El lenguaje es un elemento que juega un papel muy importante dentro de los procesos educativos actuales, ya que gracias a los métodos existentes que hacen de los estudiantes entes activos en nuestras aulas de clase, reconociendo que el lenguaje tiene dos manifestaciones importantes, así como los sostiene Sager (como se citó en Tamayo, Vasco, Suárez, Quiceno, García y Giraldo, 2010) iniciando por la descriptiva, es decir, se refiere a la trascendencia que tiene el lenguaje dentro de la interpretación de contenidos, y la otra manifestación se conoce como la interactiva, en donde el lenguaje permite facilitar las relaciones externas, tales como las sociales e interpersonales.

Así mismo las representaciones semióticas como una manifestación verificable del lenguaje, permite que la simbología pueda representar muchas de las acciones comunicativas, es decir que, lo semiótico es una forma de comunicar muchas de las manifestaciones algorítmicas, como es el caso de las matemáticas; y así admitiendo que el salón de clases sea un escenario con varios medios de comunicación.

> Kress (citado en Tamayo, Vasco, Suárez, Quiceno, García y Giraldo, 2010) sostiene de manera metafórica, indica que cada modo semiótico cumple el papel de un instrumento musical y, como parte de una orquesta, puede expresar las frases melódicas de la obra (aula de clase) en un intervalo determinado. Las frases pueden ser interpretadas por otro instrumento, acompañado por el anterior protagonista (modo semiótico), lo que da lugar a una obra cuya armonía depende de la interpretación de los instrumentos que participen en ella y de quien los orienta (maestro). (p.115)

Además, las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC), son otra componente fundamental dentro de la aplicación de una unidad didáctica, sea esto un espacio donde se mejoren todo lo que tiene que ver con los paradigmas existentes en la educación tradicional, permitiendo que los estudiantes se conviertan autónomos y como lo decía hace un momento sean activos dentro de su proceso de aprendizaje (Facundo, 2005). En efecto es prescindible manifestar que así como las herramientas de software y hardware permiten un desarrollo flexible y eficaz dentro de nuestras aulas, también es capaz de modificar los conocimientos desde una perspectiva nueva e integradora (Quiceno, 2004).

Con la ayuda de las TIC, tres impactos importantes tales como:

a) Remiten a la representación del conocimiento de diversas maneras, gracias a las ventajas que ofrecen las tecnologías, tales como: multimedia, hipermedia, hipervínculos, entre otros.

b) Facilitan la construcción del conocimiento porque éste se puede comunicar haciendo uso de estos productos, análisis que realiza un determinado autor para materializar una idea. Un ejemplo son los mapas conceptuales que se logran con los hipervínculos.

c) Facilitan la interacción con comunidades científicas y académicas de manera sincrónica y asincrónica con herramientas como el chat, el correo electrónico, los foros virtuales, los campus virtuales, etc., que permiten el acceso a expertos temáticos, fuentes de información especializada, bases de datos, bibliotecas virtuales, blogs, laboratorios virtuales, entre otros. (Tamayo, Vasco, Suárez, Quiceno, García y Giraldo, 2010, p.117)

4.2.5 La Metacognición

Este concepto que hoy en día ha conseguido muchos logros referenciados a través de la memoria humana y su influencia dentro del proceso de aprendizaje que se lleva a cabo en diferentes contextos, ya que se espera que los estudiantes asuman su propio proceso de aprendizaje, es decir, que su finalidad consiste en crear personas autónomas (Romero, 2002). A permitido según Flavell que el conocimiento a adquirir reconoce dos situaciones destacadas como el saber hacer (KnowHow) y el propio saber (KnowWhat), en donde el primero se refiere a un proceso practico que busca la reflexión como mecanismo en el acto de aprender, y la segunda como la autonomía que se debe optar a través de la supervisión, la controlación y regulación respectivamente (Tamayo, 2006).

La metacognición es un aspecto que conjuntamente con la didáctica de las ciencias la considera como una disciplina que estudia a profundidad los procesos de enseñanza y aprendizaje desde un punto de vista formal, es decir, que se tienen en cuenta las variables conceptuales (las ciencias), contextuales (instituciones educativas) y el material humano (docentes profesionales), ya que incurre positivamente en la adquisición, comprensión, conservación y aplicación de los conocimientos que se aprenden durante el acto didáctico (Tamayo, Vasco, Suárez, Quiceno, García y Giraldo, 2010).

Finalmente cabe resaltar que los procesos metacognitivos se adquieren fundamentalmente a través del uso formal e informal del lenguaje, es decir la comunicación a manera de herramienta didáctica en función de las representaciones semióticas; teniendo en cuenta las consideraciones anteriores se han determinado algunas ventajas de la metacognición dentro de las unidades didácticas en ciencias reconocidas por Tamayo, Vasco, Suárez, Quiceno, García y Giraldo (2010) afirman que:

- Es importante propiciar el análisis de los procesos empleados en sus actividades de aprendizaje entre los estudiantes, para identificar las operaciones mentales que conducen a lograr las expectativas de aprendizaje y diferenciarlas de las operaciones mentales que no producen resultados fructíferos.
- La metacognición permite una mejor adaptación al medio escolar, porque tanto el docente como el estudiante logran conocer, mediante esta práctica, las distintas maneras de pensar de la comunidad escolar de la cual hacen parte.
- La explicación de la reflexión de los procesos cognitivos y sus diferentes estrategias de regulación permite a los estudiantes experimentar otras formas de expresión y desarrollar la creatividad con la ayuda de los múltiples lenguajes.
- La práctica de la actividad metacognitiva en el aula permite modificar la planificación de la enseñanza, porque el docente logra conocer las estrategias que utiliza el estudiante para aprender y, de este modo, adapta los contenidos de la enseñanza a las necesidades de aprendizaje del estudiante.
- El modelo de unidad didáctica presentado permite hacer dos tipos de reflexión: metaconceptual y metacognitiva. La reflexión metaconceptual establece vínculos entre los distintos componentes que conforman la unidad didáctica, lo que facilita comparar conceptos, la ubicación histórica y geográfica de éstos, el estado de la ciencia y la auto-

evaluación del estudiante de la comprensión de los conceptos científicos. La reflexión metacognitiva, por su parte, permite conocer los procedimientos y las distintas regulaciones que ocurren al adquirir conocimiento.

- La metacognición facilita que los estudiantes desarrollen un pensamiento crítico frente los contenidos porque permite el autoconocimiento de los individuos (cómo aprenden), lo que da lugar a la identificación de las explicaciones de las comunidades científicas y el pun-to de vista de cómo se da el aprendizaje (maestro, libro de texto, video, etc.).
- La práctica de la metacognición facilita la identificación de obstáculos epistemológicos, lingüísticos y pedagógicos en los actores de los procesos de enseñanza y aprendizaje. (p.119)

4.2.6 Evolución Conceptual

Finalmente, el último componente estructural de las unidades didácticas en ciencias se conoce como la evolución conceptual, es donde el docente analiza de manera coherente los avances que han obtenido los educandos desde el proceso de enseñanza y la transformación de los contenidos informales a los contenidos científicos por parte de los estudiantes en el proceso de aprendizaje (SanMartí, 2000). Según Tamayo (2001) afirma que

> La evolución conceptual […] en primer lugar, la existencia de ideas de los estudiantes, las cuales se caracterizan por ser relativamente coherentes, comunes en distintos contextos culturales y difíciles de cambiar y, en segundo lugar, la existencia del conocimiento científico […] En el ámbito de la enseñanza de las ciencias existe un acuerdo general sobre la importancia de favorecer el cambio de estas ideas, de tal manera que se acerquen más a los conocimientos científicos. (p.120)

Por otro lado, es significativo mencionar que los estudiantes en esta etapa de evolución conceptual deben ser capaces de identificar las causas y consideraciones finales a partir del cambio de conceptos culturales arraigados a conceptos científicos, la cual recae directamente a los campos de la esquematización y la estructuración (Sanmartí, 2000).

Para terminar, también es fundamental mencionar las características positivas que hacen del cambio conceptual un escalón de las unidades didácticas, así como lo sostienen Tamayo, Vasco, Suárez, Quiceno, García y Giraldo (2010).

- Permite hacer una evaluación constante de todo el proceso de desarrollo de la unidad didáctica y de cada uno de los componentes; lo cual significa la evolución conceptual que no aparece explicita en la unidad didáctica, pero está siempre presente en cada momento de su desarrollo.
- Permite que, tanto el maestro como el estudiante, transformen los es-quemas mentales originados por el conocimiento común de los fenómenos científicos, desarrollando la capacidad analítica.
- Contribuye a afianzar la capacidad de decisión de los estudiantes respecto de la teoría que ofrece mejores satisfacciones a las preguntas iniciales.
- Propicia el desarrollo de la creatividad, para lograr la evolución conceptual de sus estudiantes: el docente planea diversas actividades según distintas estrategias cognitivas, metodológicas, entre otras, para lograr su objetivo.
- Destaca el conocimiento que traen consigo los estudiantes; es decir, el desarrollo de la unidad didáctica se enriquece con los distintos modelos mentales identificados por el docente en el aula de clase.
- Disminuye las fronteras entre la ciencia y la vida cotidiana, porque sustituye la visión de ciencia como una doctrina idealizada, para entenderla como una actividad desarrollada por personas que intentan mejorar las condiciones de vida.
- Hace posible que el docente perciba los conceptos desde distintos pun-tos de vista (las diferentes perspectivas de sus estudiantes), que da lugar a una visión dinámica e inacabada de la ciencia y una construcción permanente del conocimiento especializado.
- La evolución conceptual transforma el aula en un grupo que aprehende la ciencia a partir del aprendizaje cooperativo.

4.2.7 El Pensamiento Algebraico

A consecuencia del pensamiento variacional que dinámicamente relaciona las componentes internas de variabilidad en una sucesión desde los patrones y las regularidades, el pensamiento algebraico fortalece estas relaciones desarrollando mecanismos de transformación estructural o representaciones semióticas que permiten ver desde diferentes perspectivas un mismo registro matemático, también el razonamiento algebraico adquiere como objeto de estudio no solo el problema mismo de algebra, sino que amplía el juicio reflexivo desde las estructuras de modelización y la simbología que la rige así como lo profundiza el lenguaje algebraico, finalmente, otro de los fundamentos algebraicos viene dado por el álgebra en el currículo, que no solo muestra de manera detallada que se debe enseñar sino como hacerlo desde el uso de los conocimientos previos, en este caso desde la aritmética para adquirir una transición lógica y eficaz al algebra.

4.3 LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

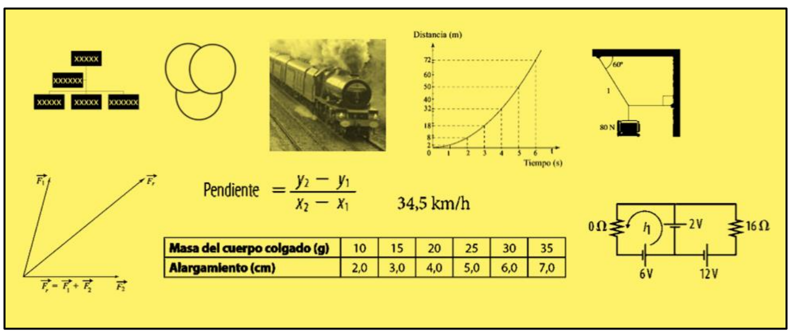
Una gran cantidad de matemáticos especialmente Duval et al (2004), entre otros, han reconocido que las matemáticas se constituyen a través de las representaciones semióticas, especialmente en matemáticas donde estas representaciones no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma, de ahí que esta disciplina formal a diferencia de la gran mayoría no se puede obtener resultados finales a través de la percepción, sino que la acción matemática se debe tratar especialmente con representaciones.

Se puede reconocer que las representaciones semióticas que se emplean durante los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ciencias, hacen referencia a sistemas de símbolos que ayudan a mejorar y facilitar las funciones de comunicación, tratamiento y objetivación respectivamente (D´Amore, 2009), de esta manera cabe resaltar que las representaciones semióticas se pueden determinar según como lo afirma Tamayo (2006):

Los conjuntos de signos o de símbolos que representan algo pueden ser externos o internos. Por ejemplo, los mapas, los diagramas y los dibujos son tipos de representaciones externas, elaborados con propósitos comunicativos y producidos por acciones intencionadas o no intencionadas de las personas, que usamos permanentemente en nuestras vidas. También lo son las palabras y otras notaciones simbólicas de uso común, por ejemplo, que empleamos en los campos de física, la química y las matemáticas. Estas representaciones externas son también conocidas como representaciones semióticas. Las representaciones internas, mentales, son aquellas que "ocupan un lugar" en la mente de los sujetos. (p.39)

Estas representaciones pueden ser:

Figura 3. Las representaciones semióticas

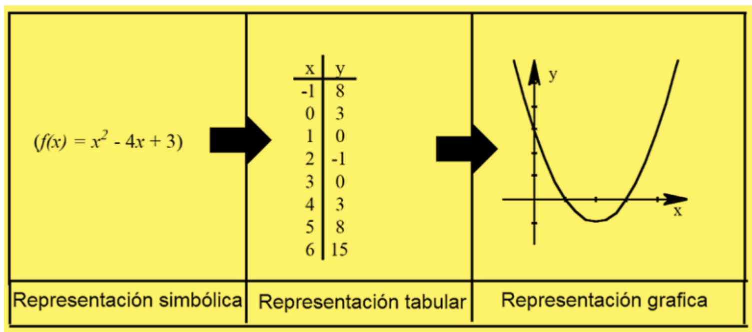


Fuente: Representaciones Semióticas. Godino, J., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2014).

En otras palabras las representaciones semióticas son un campo de las matemáticas que no solo permite verificar, sino transformar los procesos de enseñanza y aprendizaje en diferentes contextos, estas representaciones también demandan un conocimiento sobre las formas numéricas, el lenguaje figural, el lenguaje algebraico, las graficaciones cartesianas de dos y tres dimensiones, las representaciones tabulares y matriciales, entre otros, cuando de matemáticas se habla; teniendo en cuenta estas representaciones mencionadas anteriormente, cabe precisar que se componen por tres generalidades, tales como: el objeto representado principalmente, en segunda medida el contenido de la representación y finalmente la forma de representación (Duval, 2004).

Así mismo, un concepto matemático puede ser transformado a otros sistemas de representación sin perder su esencia principal o valor cuantitativo, ya que, durante un proceso matemático especialmente en el de la resolución de problemas, en muchas situaciones es necesario analizarlos desde sus diversas representaciones y de esta manera obtener mayor interpretación del mismo; como es el caso de las funciones; por ejemplo:

Figura 4. Transformación semiótica de una función



Fuente. Transformación semiótica de una función. Godino, J., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2014).

Por consiguiente, es también fundamental establecer que las actividades matemáticas llevadas a cabo dentro de los salones de clase, están constituidas según Kaput 1998 (citado en Gómez y Carulla, 2001) en cuatro categorías:

1) Transformaciones sintácticamente restringidas dentro de un sistema particular, con o sin referencia a otros significados externos;

2) Traducciones entre sistemas de notación, incluyendo la coordinación de acciones a través de sistemas de notación;

3) Construcción y verificación de modelos matemáticos, lo que es equivalente a la traducción entre aspectos de una situación y conjuntos de notaciones; y

> 4) La consolidación o cristalización de relaciones y procesos en objetos conceptuales o "entidades cognitivas" que pueden ser usadas en relaciones y procesos de un orden más alto de organización (p.17).

Finalmente es indispensable mostrar que todas las actividades representadas y utilizadas durante los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ciencias, la cual deben proporcionar los registros semióticos, es decir, "a aquellos sistemas con reglas que permiten combinar signos y efectuar a su interior transformaciones de expresión o de representación" (Duval, 2004, p.44), están compuestas por tres acciones fundamentales, tales como:

a. Elegir un registro semiótico, al interior del cual producir signos perceptibles, que puedan ser identificados como representación de «alguna cosa» en un registro semiótico determinado.

b. Transformar representaciones al interior de un registro semiótico de representación para obtener otras representaciones en el mismo registro, haciendo uso únicamente de las reglas propias del sistema.

c. Convertir las representaciones producidas en un determinado registro semiótico, en representaciones en otro registro semiótico. (Duval, 1999, p.30)

4.4 EL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO

El razonamiento algebraico se puede considerar como una parte del algebra que busca desarrollar e instaurar en el educando el pensamiento algebraico, es decir que, a partir de la manipulación directa de las variables, de signos (relación, agrupación y operación) y de constantes como en el caso de la aritmética, permite que el estudiante reflexione sobre las dificultades u obstáculos de inferencia y de abstracción dentro de un sistema formal (Kaput, 1999).

De antemano es importante reconocer que el razonamiento se puede considerar como un proceso cognitivo, que permite mejorar el aprendizaje a través de la observación y el análisis que se requieren dentro de un sistema complejo, es decir, que todo sistema formal depende no solo de las concepciones, sino también de algunas habilidades cognoscitivas que influyen en la reflexión; así como lo afirma Serrano (1993). “El razonamiento es la operación por la cual el entendimiento alcanza dos o más juicios, producto de la observación y el análisis, afirmando algo nuevo; la deducción la analogía, el ordenamiento y el silogismo son formas de razonamiento” (p.14).

En sintonía con lo anterior es trascendental inferir que el razonamiento algebraico, implica que el educando pueda representar, generalizar y establecer patrones e irregularidades de cualquier componente matemática (Godino y Font, 2003), por ende es importante además que estos aspectos sobre el razonamiento algebraico son conformados también desde el mismo razonamiento abstracto (el cual además de tener componentes matemáticas, se compone también por sucesiones de gráficos e ilustraciones abstractas).

Finalmente cabe resaltar que el álgebra, así como en la aritmética también existen elementos que soportan los conocimientos a priori y a posteriori en cuanto al algebraico en función del razonamiento algebraico, tales como:

a) **La modelización:** La aritmética es una parte de las matemáticas que se desarrolla teniendo en cuenta situaciones específicas, por esta razón es que el álgebra escolar impartida hoy en día en nuestras instituciones educativas requiere de manifestaciones algebraicas, haciendo uso de las modelizaciones y generalizaciones aritméticas, que permiten un análisis más general de alguna situación contextualizada. En donde algunos elementos conocidos como la aritmética específica (considerada como la relación entre la numeración y los símbolos, como en el caso de las operaciones entre dos o más números), el álgebra específica (considerada como el estudio y tratamiento de las incógnitas y las variables), la simbología (conocidas como las letras que designan las variables) y reglas sintácticas (conocidas como las reglas que transforman las expresiones) direccionan la propia modelización algebraica (Godino y Font, 2003).

b) Los signos: En muchas situaciones por las que nosotros pasamos, hemos necesitado alguna vez signos que puedan representar situaciones, cosas, conceptos, entre otros, en las matemáticas este aspecto es muy habitual, ya que a través de los signos Icono (se trata de un signo que tiene relación física con el objeto que representa), los signos índices (se trata de un signo que permite dirigir la atención sobre un objeto) y los signos simbólicos (trata de un signo cuya relación con el objeto se determina por una convención), estructuran gran parte de los contenidos algebraicos (Godino y Font, 2003).

c) El lenguaje algebraico: La capacidad de representación simbólica es considerada como una forma de expresión, capaz de mostrar y representar a través de símbolos las similitudes que tengan algunas situaciones específicas, como es el caso de la aritmética generalizada, es decir desde un punto de vista algebraico; de esta forma entonces podemos confirmar que la construcción del conocimiento se encuentra estrechamente ligada a la capacidad de simbolización, pues permite la construcción de los significados necesarios (Pérez Gómez, citado en Alcalá, 2002).

Durante los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos generalmente, juega un papel muy importante el sentido que se le da a la aritmética como ente fundamental del proceso de generalización, ya que aritmética debe pasar a representaciones algebraicas a través del uso del lenguaje, y así asegurar una buena comprensión y evitar algunos obstáculos epistemológicos durante los procesos educativos (Esquinas, 2009).

Por otro lado es necesario dar a conocer que el lenguaje algebraico a diferencia del lenguaje natural (el que nosotros aplicamos para comunicarnos con los demás), tienen diferentes orientaciones gramaticales y sintácticas, pero finalidades semejantes en cuanto al mismo lenguaje utilizado en la comunicación, análisis y reflexión, siendo esto el fin esperado por el lenguaje natural y el lenguaje algebraico, así como la afirman algunos como Russell, 1968 (como se citó en Esquinas, 2009) piensa que (…) las limitaciones propias del lenguaje natural, que no dispone de palabras que expresen con exactitud lo que se desea y cuya gramática y sintaxis califican de extraordinariamente engañosas, deben ser un punto de apoyo para iniciar la construcción de un lenguaje en el cual todos los aspectos formales estuvieran englobados en la sintaxis y no en el vocabulario.

Es evidente señalar la importancia que tiene el lenguaje durante la instrucción de los conceptos científicos, ya que debe realizar cambios positivos en el proceso de aprendizaje por parte de los educandos, por lo que la didáctica de los contenidos matemáticos establecidos en la naturalidad de las representaciones (Esquinas, 2009), los de la gnoseología como la naturaleza de las ciencias y la epistemología como la forma de adquisición del mismo conocimiento, permite que los conceptos algebraicos estudiados desde su propia naturaleza van a permitir un mejor proceso de enseñanza y aprendizaje durante la instrucción conceptual; así como lo afirma Sweet (citado por Esquinas, 2009):

(…) introducción de la formalización se produzca sólo después de haber procurado el desarrollo de las capacidades matemáticas que ésta sustenta, si enseñáramos matemáticas de igual manera que enseñamos lengua, quizá, para empezar, tuviéramos que habérnoslas con menos actitudes negativas. A ningún niño se le enseña a leer antes de hablar, ni se le exige que escriba antes de saber leer. (p.100)

De esta forma se puede argumentar también que la comprensión y los sistemas de representación llevados a cabo desde la propia didáctica de las matemáticas, hacen que el estudiante se interrogue sobre su importancia en contextos reales, como también los procesos de matematización que pueden hacer los estudiantes teniendo únicamente los preconceptos (Palarea, 1999). Teniendo en cuenta lo anterior uno de los métodos en cuanto a la importancia del lenguaje algebraico que pueden ayudar a la comprensión de estas situaciones esta dado desde las ideas asociacionistas, es decir que a partir de semejanzas y congruencias existente entre dos o más situaciones algorítmicas y aritméticas (Resnick y Ford, 1981).

4.5 EL ÁLGEBRA EN EL CURRÍCULO

En la educación colombiana existen algunas generalidades directamente relacionada con el curriculum, la principal componente se establecen a través de los estándares de calidad que direccionan todos los procesos educativos que se realizan en todo el territorio nacional, haciendo que el proceso de enseñanza y aprendizaje tenga un hilo conductor; en el campo de las matemáticas existen cinco componentes conocidas como el pensamiento numéricos y los sistemas numéricos, el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, el pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas, el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, y el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, donde nos centraremos especialmente en el último pensamiento, ya que es el encargado de la parte algorítmica o los sistemas generalizadores de la misma matemática (MEN, 2002).

> (…) esta componente del currículo tiene en cuenta las aplicaciones más importantes de la matemática, cual es la formulación de modelos matemáticos para diversos fenómenos, por ello, el currículo debe permitir que los estudiantes adquieran progresivamente una comprensión de patrones, relaciones y funciones. (MEN, 2002, p.16)

El Ministerio de Educación Nacional mediante los aportes en el campo de la didáctica, establecidos en el libro de los estándares de competencias, mas puntualmente en el campo de las matemáticas, ha querido implementar diferentes mecanismos que mejoren todos las prácticas de aula, donde se quiere que las competencias en matemáticas se han una ayuda primordial en cuanto a todos los procesos de instrucción que se realicen dentro y fuera del aula de clases, a través de situaciones problematizadoras significativas y contextualizadas, y así poder avanzar a niveles de competencia más estructurados, mediante el uso oportuno y eficaz de los conocimientos conceptuales y procedimentales (MEN, 2002).

Teniendo en cuenta los aportes significativos que nos ofrecen los estándares de competencia en matemática, también distinguen algunos procesos sugeridos en cuanto a la actividad matemática, iniciando desde la formulación y resolución de problemas, enfatizándonos especialmente que en campo de las matemáticas es necesario que el estudiante pueda extraer y resolver problemas reales, ya que a partir de esta espacio el estudiante puede manipular las variables estudiadas conceptualmente, en segunda medida nos sugieren la modelización de procesos y fenómenos de la realidad, siendo esta una extensión fundamental de la formulación y resolución de problemas contextualizados, posteriormente nos sugieren también la comunicación, haciendo uso del propio lenguaje natural y el lenguaje algebraico, finalmente el razonamiento, la formulación y comparación de procedimientos y algoritmos, reconociendo como un eficaz proceso de aprendizaje, el cual permita a los estudiantes generalizar situaciones y sistemas aritméticos (MEN, 2002).

En los estándares curriculares se establece además que, durante los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos algebraicos, estos deben estar estrictamente ligados con los contenidos aritméticos trabajados en cursos anteriores, es decir, una aproximación al algebra como generalización de la misma aritmética, por lo que su método se centra en la resolución de ecuaciones aritméticas (MEN, 2002), así como se evidencia en la siguiente tabla:

Figura 5. Fragmento de temas matemáticos a impartir en los grados 6°, 7° y 8° de los estándares curriculares de competencia

GRADO	TEMAS DE MATEMÁTICAS
Sexto	Conjuntos, relación de contenencia y operaciones entre conjuntos (unión intersección y producto cartesiano).
Séptimo	Razones, proporciones, proporcionalidad directa, proporcionalidad inversa, y regla de tres simple y compuesta.
Octavo	Expresiones algebraicas, monomios, operaciones entre monomios (suma, diferencia, producto, cociente y potencia), polinomios, operaciones entre polinomios (suma, diferencia, producto, cociente), factorización de polinomios, fracciones algebraicas, operaciones entre fracciones algebráicas (suma, diferencia, multiplicación, división y simplificación), ecuación e identidad algebraica, solución de ecuaciones de primer grado en una variable, inecuaciones de primer grado en una variable, solución de inecuaciones de primer grado en una variable, ecuación de ecuaciones de primer grado en dos variables e inecuaciones lineales en dos variables.

Fuente. MEN (2002)

4.5.1 Los Niveles de Algebrización

Durante el quehacer como estudiantes y como docentes, en muchas ocasiones se realizan actividades que facilitan el proceso de aprendizaje de los conceptos algebraicos pero con poca eficacia en cuanto al impacto en el proceso de aprendizaje, hoy en día se ha podido demostrar que existen cuatro niveles de algebrización por lo que debe pasar los aprendices durante la transición de la aritmética al algebra, en la cual se tiene en cuenta todas las acciones que realizan los estudiantes en las diferentes tareas matemáticas de tipo algorítmico (Martínez, 2014).

A través de estas actividades que se realizan en consecuencia de las tareas matemáticas de tipo algorítmicos, Godino et al., Wilhelmi, (2014) propone algunos elementos que hoy en día se conocen como los niveles de algebrización, tales como el nivel 0, donde se evidencia una ausencia del razonamiento algebraico, por lo que el estudiante en este nivel resuelve los problemas utilizando únicamente las herramientas aritméticas; en el nivel 1 o nivel incipiente de algebrización, el estudiante debe manifestar por medio del análisis y razonamiento algunas relaciones, patrones y regularidades entre dos o más números, es decir que el estudiante en ambos niveles debe tener un indicio sobre concepto de número y demás de instrumentos matemáticos necesarios en la resolución de problemas, como son los signos de agrupación, relación y operación

> Nivel 0: Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante los lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero este valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En tareas de generalización, el mero reconocimiento de la regla recursiva que relaciona un término con el siguiente, en casos particulares, no es indicativa de generalización.
>
> Nivel 1: Intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante los lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con

> estos objetos. En tareas estructurales, se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente. En tareas funcionales, se reconoce la generalidad, aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal. (Godino y Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014, p. 207-208)

En el nivel 2 o nivel intermedio de algebrización, el estudiante desarrolla un lenguaje generalizado o lenguaje algebraico, identificando el concepto de variable y el concepto de constante, así como lo afirma Godino y colaboradores, (2014) "(…) se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión" (p.210). y el nivel 3 o nivel consolidado de algebrización, en esta altura el estudiante unifica todos los niveles anteriores en función del análisis e interpretación de situaciones contextualizadas, es decir, que el estudiante esquematiza una situación problema desde lo simbólico-literal y resuelve operaciones entre los mismos. (Godino y colaboradores, 2014)

5 METODOLOGÍA

La presente investigación, se enmarca a través del campo cualitativo y con un alcance descriptivo dado que es a partir de los procesos desarrollados por los estudiantes se obtiene los datos con los que podemos reconocer no solo la conceptualización y aplicabilidad de la misma en situaciones reales, sino también el contexto y la realidad social (Osses, Sánchez & Ibáñez, 2006), entendiendo así mismo que estas variables anteriores modifican el proceso de enseñanza y aprendizaje, así como lo afirma Scott (1989), "describe las principales diferencias entre dos concepciones del proceso de E/A, la de transferencia de conocimientos y la de construcción de conocimientos. (…)" (p.40).

Esta investigación está enmarcada por medio de la interpretación y comprensión de situaciones que se realizan durante los procesos de enseñanza y aprendizaje del pensamiento variacional dentro de los salones de clases, donde a partir de algunos estudios de casos permite observar a profundidad los mecanismos que utiliza el estudiante tales como las habilidades de razonamiento, la utilización de los preconceptos, entre otros, dentro de estos escenarios formativos (Posner, 1982, Nusbaum y Novik 1982, Osborne y Wittrock 1985, Driver 1986); Por consiguiente, es indispensable analizar a profundidad para una investigación de tipo académica, las estrategias de transformación de contenidos al receptor, que en este caso viene siendo el estudiante, es decir, el cambio pedagógico que sufre un concepto para que pueda ser orientado en el aula de clase, por esta razón se establecerá un momento de estudio a los contenidos enfocados al pensamiento variacional o más exactamente algebraico, ya que, estamos desarrollando la presente unidad didáctica con estudiantes de grado octavo, en el cual se profundiza directamente el algoritmo matemático a partir de una construcción generalizada. En este sentido se fijará la atención al docente como eje central del proceso de enseñanza y promotor del proceso de aprendizaje.

Cada profesor, como individuo formado en un área científica, tiene sus propias creencias sobre lo que es la Ciencia y el papel que debe jugar en un sistema educativo, lo que se traduce en preferencias sobre el contenido (conocer leyes, manejo de aparatos, resolución de problemas...) a la hora de enseñar o la utilización de determinados recursos (explicación del profesor, laboratorio, vídeo...). (Sánchez y Valcárcel,1993, p.40).

Es evidente establecer una relación directa y paralela entre los contenidos procedimentales llevados a cabo en el aula de clase y propuestos esencialmente por el docente, y la conceptualización o elementos algorítmicos, ya que permiten desarrollar actitudes y autonomía de aprendizaje capaces de mediar entre el proceso de aprendizaje y el proceso de enseñanza (Hemándt, 1989; Sanmartí, 1990); tomando así un papel importante dentro de esto procesos la ciencia, la tecnología y la sociedad, ya que son una fuente importante de las actitudes y aptitudes necesarias en los educandos (Sánchez. y Valcárcel, 1993).

Finalmente cabe resaltar que todas estas actitudes que se adquieren en los escenarios educativos, permiten que los procesos perspectivos y cognitivos transportan verticalmente el proceso de aprendizaje hacia las aptitudes conceptuales y procedimentales (Sarabia, 1992). Es así como esta metodología que sostiene la actual investigación quiere identificar y romper los obstáculos del proceso de enseñanza y aprendizaje de los algoritmos que se trabajan hoy en día en los grados séptimo y octavo de las instituciones educativas estatales, así como lo afirman Sánchez y Valcárcel (1993), “Los planteamientos metodológicos nos informan sobre las funciones que profesor y alumnos desempeñan en el proceso de E/A” (p.41).

5.1 CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN

La presente investigación se realiza en el departamento del Caquetá, en el municipio de puerto Milán, especialmente en la institución educativa Marco Fidel Suarez, una institución de carácter urbana estatal, donde se instruye al educando en valores, aptitudes y religiosidad. Es aquí donde se tomó como punto de partida al grado octavo, que consta de 12 estudiantes con edades que oscilan entre 12 y 15 años, ya que éstos según los estándares curriculares del área de matemáticas estipulados por el ministerio de educación y los planes de aula de la misma institución, es donde se realiza el cambio o quiebre entre las concepciones aritméticas y las nuevas conceptualizaciones algebraicas o algorítmicas.

En la institución educativa marco Fidel Suarez se trabaja generalmente con el modelo constructivista, donde se forman estudiantes en altas capacidades académicas con énfasis en sistemas o nuevas tecnologías de la información y la comunicación (T. I. C. s), además la intensidad horaria es de seis horas sin incluir el descanso o refrigerios, en el cual todos los grados de secundaria de la institución reciben semanalmente cinco horas de clase en el área de matemáticas.

Por consiguiente, es importante mostrar los contenidos conceptuales elegidos para la unidad didáctica, donde éstos han sido durante mucho tiempo un paradigma fundamentado sobre obstáculos de aprendizaje, tales como: los números racionales, las variables, las constantes, polinomios, patrones, series, regularidades y sucesiones; así como se muestra en los estándares básicos de competencias en matemáticas (MEN, 2003).

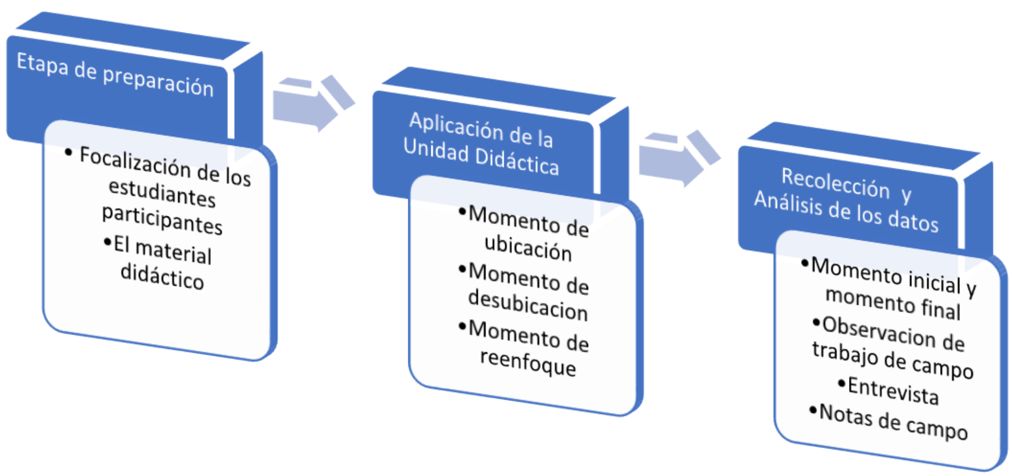
Finalmente cabe resaltar que al mismo tiempo en el que se realizan las actividades, se pretende incentivar y fomentar el trabajo cognitivo por medio de la comparación, ejemplificación, contextualización, conceptualización, experimentación, creatividad, imaginación, exploración, discusión, comparación, contrastación, realización de analogías, explicación, argumentación, predicción y la descripción; donde se espera desarrollar habilidades en el trabajo individual, colaborativo y cooperativo respectivamente.

5.2 DISEÑO METODOLÓGICO DE LA INVESTIGACIÓN

Durante el desarrollo de esta investigación académica que se aplicó a estudiantes de secundaria del grado octavo, se desarrollaron diferentes fases que implicaban directamente el uso de diversos instrumentos tanto de recolección de datos, como de preparación y análisis, en este sentido se inició con una etapa de preparación, donde se solicitó e informo a los participantes todo lo relacionado a la unidad didáctica que sería objeto de trabajo, así mismo, se organizó todo el material necesario; seguidamente se desarrolló la etapa de aplicación, donde se intervenía directamente mediante los instrumentos concertados con y definidos, finalmente se ejecutó la etapa de recolección de los datos adquiridos, el cual servirá como insumo fundamental en la investigación, puesto que, con ello se detectaran las dificultades, fortalezas y destrezas adquiridas por los estudiantes por medio de la aplicación de dicha unidad didáctica.

A continuación, se muestra el siguiente esquema que detalla cada etapa:

Figura 6. Diseño metodológico de la investigación



Fuente. Elaboración propia (2021)

5.3 DISEÑO Y DESARROLLO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Este trabajo investigativo de carácter cualitativo donde se pretende fortalecer y potencializar el pensamiento variacional a partir del desarrollo de diferentes instrumentos didácticos, que desde la aritmética y su apropiación se llegara al pensamiento algebraico o análisis variacional desde diferentes escenarios numéricos en estudiantes de grado octavo, ya que, según el ordenamiento curricular propuesto por el ministerio de educación nacional

MEN (referentes de calidad), es donde se profundiza con gran rigor los sistemas algebraicos. , en la cual se trabajó tres momentos fundamentalmente, clasificados como **el momento de ubicación, el momento de desubicación y el momento de reenfoque**.

En el *primer momento* se realizó de manera directa la exploración de ideas previas, es decir, que los estudiantes con ayuda del docente identificaron as concepciones que tienen los educandos directa e indirectamente sobre los conceptos de variable, incógnita y ecuación, además en esta primer etapa del diseño de la unidad se pretende explorar por medio de la práctica los términos intuitivos sobre cada uno de los conceptos algebraicos y aritméticos respectivamente, así mismo analizar las concepciones válidas que tienen los estudiantes sin importar su fundamento teórico y científico (las actividades que hacen parte de este momento son a, b, c y d), finalmente cabe resaltar que durante esta etapa todo se enmarcará de una naturaleza intuitiva.

Seguidamente el *momento de desubicación* se desarrolló en el marco del trabajo realizado en el momento anterior, es decir del momento de ubicación, particularmente en este momento se fomentará un escenario donde los estudiantes podrán discutir sobre estos preconceptos utilizados mediante el lenguaje natural y los mismos conceptos desde una naturaleza teórica y metodológica, es decir la utilización de un lenguaje técnico, ya que a partir de este momento se incluirán cuatro aspectos, conocidos como la metacognición, la historia y la epistemología, la relación ciencia/tecnología/sociedad y el uso de las representaciones (las actividades que hacen parte de este momento son e, f, g, h, i).

En la tercera etapa que se ha denominado *reenfoque*, sigue lógicamente las dos etapas desarrolladas anteriormente, en donde se partirán de todos esos productos constituidos anteriormente de forma intuitiva y se incorporarán elementos teóricos y científicos, en donde se transformará el lenguaje natural a un lenguaje estructurado con bases teóricas (las actividades que hacen parte de este momento son j y k).

5.4 APLICACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Esta unidad didáctica se aplicó en la institución educativa Marco Fidel Suarez del municipio de puerto Milán en el departamento del Caquetá, para iniciar con la aplicación de la misma se solicitó de manare escrita tanto al rector de la institución educativa como a los estudiantes y padres de familia el permiso pertinente para desarrollar cada una de las actividades propuestas, así mismo, se les dio a conocer el uso que se le daría a los datos obtenidos y cada una de las evidencias que se extraerían (todo con una finalidad únicamente académica).

Figura 7. Reunión padres de familia

Fuente. Captura autor (2021)

Según el proyecto educativo institucional PEI de la institución educativa, la asignatura de matemáticas tiene una intensidad horaria semanal de 5 horas, las cuales se reparten en dos bloques de 2 horas y la hora restante se profundiza en el proyecto de jornada única en la tarde. También es importante resaltar que la asignatura está focalizada como una asignatura fundamental, esto indica se deben aplicar los instrumentos de evaluación tipo ICFES.

Durante el desarrollo de esta unidad didáctica se utilizaron espacios en horas de la mañana y la tarde, esto con el fin de no interceder o entorpecer los procesos que se llevan a cabo con las demás asignaturas y solamente aplicándolo en los espacios asignados para el área de matemáticas (6 horas), así mismo, cabe mencionar que todas actividades se realizaron dentro de las instalaciones de la institución educativa, utilizándose así espacios abiertos de dialogo, el aula máxima de la institución, el aula o salón de clase, la sala audiovisual y la ludoteca; a continuación se especificaran los tiempos y espacios utilizados durante las ocho actividades propuestas y aplicadas:

Tabla 1. Actividades de la unidad didactica

Actividad	Instalación	Tiempo De Aplicación
Reunión con estudiantes y padres de familia	Salón de grado octavo	2 horas
Indagación de ideas previas (concepciones algebraicas)	Salón de grado octavo	3 horas
Proyección del video "sin miedo a las matemáticas"	Sala audiovisual	4 horas
Realización de esquemas o imágenes propias sobre su realidad matemática	Salón de grado octavo	2 horas
El concepto de numero racional	Aula máxima	3 horas
Utilización del software Microsoft Excel en la construcción delos conceptos de series, sucesiones, regularidades y patrones	Sala audiovisual	10 horas
Utilización de material manipulable (series, sucesiones, regularidades y patrones)	Salón de grado octavo	5 horas

Uso de la geometría como fundamento para la adquisición de los conocimientos algebraicos básicos	Salón de grado octavo	5 horas
El cubo de rubik. Una estrategia fácil y didáctica	Aula máxima	7 horas

Fuente. Elaboración propia (2021)

6 UNIDAD DE ANÁLISIS

A partir de la aplicación de las actividades establecidas en la presente unidad didáctica, se organizó una ruta de aplicación (descrita en la tabla anterior) y por consiguiente una línea de prioridades en los aprendizajes durante la intervención en el aula de clase con los estudiantes objeto de estudio, es decir, las prelaciones académicas en cada intervención; de esta manera se mantuvo una relación directa entre la práctica y los objetivos de cada nivel de algebrización. A continuación, se presenta de manera detallada los niveles de algebrización como instrumentos indispensables en el desarrollo del pensamiento algebraico:

Tabla 2. Niveles de algebrización

Niveles de algebrización	**0** **Ausencia de razonamiento algebraico**	**1** **Incipiente de algebrización**	**2** **Intermedio de algebrización**	**3** **Consolidado de algebrización**
Criterios conceptuales	Fundamentos aritméticos y reconocimiento de las reglas de generalización básicas	Se reconoce de manera explícita la generalidad a partir del lenguaje natural, gestual e icónico	Se reconoce la generalidad matemática de una sucesión	Se realizan transformaciones simbólicas de una expresión algebraica a partir de su equivalencia
Criterios procedimentales	Determinación de un término y su consecuente	Aplica la simbología matemática (operación,	Identificación de la generalidad matemática de	Se desarrollan operaciones entre

	relación y agrupación) en situaciones problemas	una sucesión a partir de su regularidad	expresiones algebraicas

Fuente. Elaboración propia (2021)

7 UNIDAD DE TRABAJO

La comunidad de puerto Milán en su mayoría son indígenas y campesinos que dependen del sustento diario proveniente del trabajo agrícola, ganadero, de la pesca y en una fracción muy pequeña del comercio, ya que, es un municipio minúsculo en extensión urbana y por ende la demanda de productos de segunda necesidad son muy bajas, esto hace que los habitantes de este municipio emigren cada vez que se disminuya considerablemente el trabajo, entonces son catalogadas comunidades flotantes; teniendo en cuenta la premisa anterior la comunidad académica no es ajena a esta problemática y los estudiantes se dedican además de estudiar a desarrollar actividades que ayuden al sustento de la familia, forzándolos a dedicar algunas espacios que deben ser para la educación y formación de ellos a trabajar en labores de campo o de venta de los productos extraídos de los cultivos.

Los estudiantes de grado octavo que fueron objeto de estudio para la presente unidad didáctica están entre las edades de 13 a 19 años, en un 70% se encuentran en extra edad por misma situación que les ha tocado dejar sus estudios no solo por el trabajo sino también por la problemática de orden público, convirtiéndolos de esta manera en víctimas del conflicto armado y el desplazamiento forzado; cabe mencionar que el 100% de los estudiantes a perdido a un ser querido por esta situación de orden público o a presenciado un acto de violencia en su entorno.

Otra de las informaciones adquiridas desde el formato o ficha de caracterización de los estudiantes ha sido sobre la alimentación y vivienda, en donde algunos estudiantes manifiestan que la única comida buena que ingieren durante el día, es la proporcionada por la misma Institución Educativa, esto conlleva a deducir que la alimentación de algunos estudiantes es precaria haciendo entonces énfasis en los aprendizajes de ellos; así mismo se observó que un 50% aproximadamente no tienen vivienda propia y por este motivo en varias ocasiones les ha tocado mudarse de residencia.

Figura 8. Aplicación ficha de caracterización

Fuente. Captura autor (2021)

A pesar de la incertidumbre en la que viven los estudiantes, ellos manifiestan que quieren salir adelante estudiando para ayudar a sus familias y mejorar desde todo los ámbitos, algunos de ellos también manifiestan que prefieren ir a trabajar porque aun estudiando no hay oportunidades de trabajo digno, todo esto y la problemática que les ha tocado vivir, les falta mejorar un poco más en la educación con valores, ya que, muchos de ellos tienen padres separados, acudientes que no les promueven los valores en casa, conflictos familiares, estudiantes que les toca vivir solos en intervalos de tiempos, entre otras prácticas que fortalecen los antivalores.

Finalmente se observó que los estudiantes tienen una relación muy amena con todos los docentes de la institución educativa, afirmado que los docentes para ellos son como unos padres y por este motivo deben respetarlos y escuchar las sugerencias que tienen para decirles, y desde la relación estudiante-estudiante se analiza que el respeto es muy reducido y dentro el aula de clase tienden a traer los problemas familiares y de su entorno.

8 TÉCNICAS DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

Para ello se utilizaron los siguientes instrumentos que nos permitieron identificar las habilidades, fortalezas y aspectos por mejorar de la unidad didáctica en la práctica:

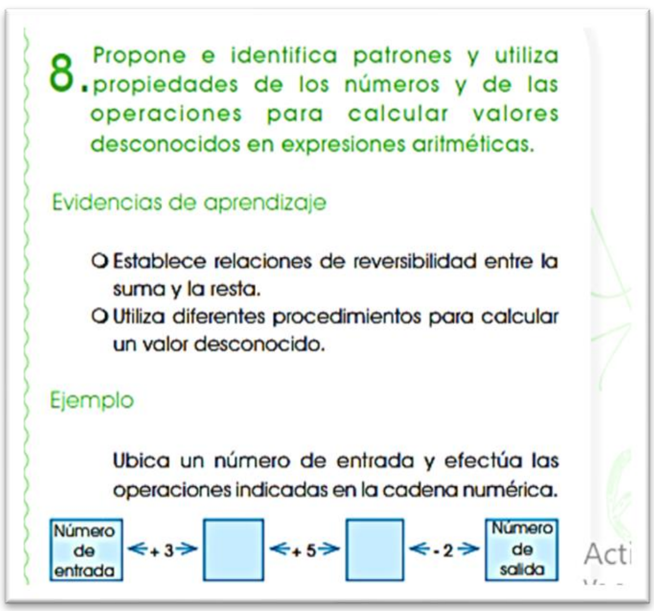
- **Observación Directa**. Este instrumento permite tomar registros de conductas académicas que no requieren de la participación de los mismos, puesto que, se realiza cuando los estudiantes están desarrollando actividades rutinarias y propias que manejan para su aprendizaje; en esta investigación se observó constantemente cada una de las manifestaciones que mostraban los estudiantes durante la aplicación de las nueve actividades propuestas y se llenaba un registro solo cuando eran casos atípicos.
- **La Encuesta.** A partir de la aplicación de esta herramienta de recolección de datos, se analizaron los conocimientos previos que tenían los estudiantes sobre el pensamiento variacional y los conceptos algébricos respectivamente, todo esto a través de una serie de preguntas dirigidas y preguntas abiertas. Esta se aplicó únicamente para la actividad número dos **(Indagación de ideas previas-concepciones algebraicas).**
- **El Cuestionario.** Esta actividad de recolección de datos permite que el estudiante o personal objeto de estudio muestre de manera detallada y directa los conocimientos adquiridos con un previo proceso de orientación, esta fue aplicada en durante las actividades tres y cinco respectivamente **(Proyección del video “sin miedo a las matemáticas” y el concepto de numero racional).**
- **Talleres.** Finalmente cabe mencionar que este instrumento de colección de datos o información, se puede realzar desde una perspectiva física o también conocido como trabajo en clase y otra puramente escrita, donde el estudiante muestra de manera directa las aptitudes, habilidades, conocimientos y estado mental; las actividades en las que se aplicó el presente instrumento son las comprendidas entre la seis y nueve **(6-***Utilización del software Microsoft Excel en la construcción delos conceptos de series, sucesiones, regularidades y patrones,* **7-** *Utilización de*

material manipulable (series, sucesiones, regularidades y patrones), **8-** *Uso de la geometría como fundamento para la adquisición de los conocimientos algebraicos básicos,* **9-** *El cubo de rubik. Una estrategia fácil y didáctica).*

9 RESULTADOS

Durante gran parte de los procesos de enseñanza y aprendizaje del algebra se pudo reconocer que este campo de las matemáticas iniciaba en edades tardías a pesar de la posibilidad que se ofrece desde el pensamiento numérico y espacial dado que solo se imparte en la secundaria y educación superior, pero no se estimaba la posibilidad de fortalecer estos conocimientos en diferentes niveles educativos o paralelos con la enseñanza aritmética (Godino y Font, 2003).

Figura 9. DBA grado segundo



Fuente. MEN (2016)

Por consiguiente, en la educación primaria y como en los primeros años de educación secundaria (puntualmente los grados que van desde primero a séptimo) según los referentes de calidad, siendo estos los derechos básicos de aprendizaje DBA, los estándares básicos de competencia, lineamientos, mallas de aprendizaje, entre otros, el pensamiento variacional está enfocado únicamente al campo cualitativo que describe las relaciones y compara sucesiones numéricas y geométricas, pero es un campo que en estos grados toma poca fuerza por su escaza aplicabilidad en las pruebas externas y por ende en las pruebas internas de las instituciones educativas, puesto que, se establecen erróneamente estrategias de desarrollo enfocados en la parte aritmética y geométrica pero no a los fundamentos específicos de la estructura variacional, como son la identificación de las sucesiones a partir de las regularidades y por consiguiente el patrón o generalidad de la sucesión misma.

Durante este apartado se muestran cada uno de los momentos que estructuraron dicha unidad didáctica, mediante el uso de algunas herramientas estadísticas, como también sobre algunas generalidades fundamentales que generaron curiosidad. Así mismo cabe resaltar que esta unidad didáctica consto de 10 actividades con una durabilidad de 3 meses, aplicada y ejecutada a los estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Marco Fidel Suarez del municipio de Puerto Milán en el departamento del Caquetá.

Figura 10. Competencias grado 6° y 7°

Tabla 6. Competencia: comunicación, representación y modelación. Ciclo de 6° a 7° grados

Componente	Afirmación: El estudiante...
Numérico-Variacional	Describe y representa situaciones cuantitativas o de variación en diversas representaciones y contextos, usando números racionales.

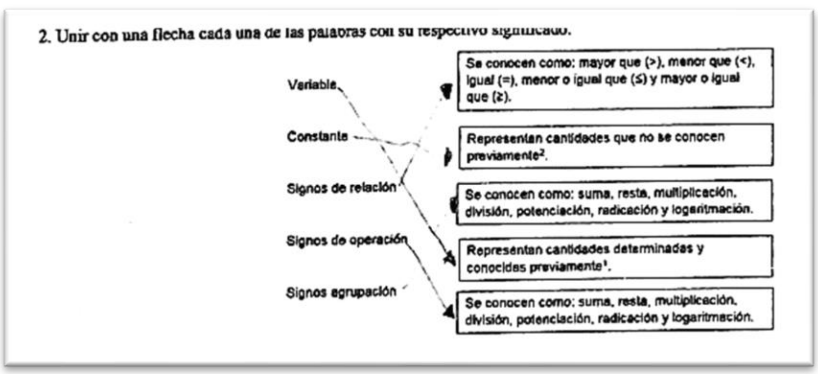
Fuente. MEN (2016)

9.1 MOMENTO DE UBICACIÓN

9.1.1 Actividad 1. Diagnóstico Inicial (Indagación de Ideas Previas)

En dicho contexto indagado se observó en el momento de iniciar esta investigación que los estudiantes de la mencionada institución carecían de los conocimientos algebraicos básicos ya que, utilizaban únicamente mecanismos aritméticos a la hora de solucionar los problemas, desconociendo totalmente la aplicabilidad del algebra para el desarrollo de las mismas; teniendo en cuenta el instrumento denominado pre-test el cual consta de 8 preguntas enmarcadas desde la aritmética y el álgebra, se pudo reconocer que cada uno de los estudiantes participantes se ubicaban en el Nivel 0 de algebrización (ausencia de razonamiento algebraico).

Figura 11. Pregunta No. 2 pre test



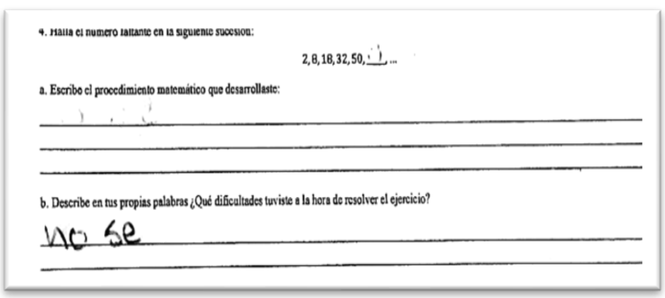
Fuente. Elaboración propia (2021)

Una de las primeras dificultades evidenciadas, se analizó desde la conceptualización, ya que, confundían el concepto de variable con el concepto de constante y por consiguiente no establecían una dialéctica fundada entre el lenguaje propio o también conocido como el lenguaje natural y el lenguaje simbólico que enmarca a la matemática y en este caso el álgebra misma.

Otra de las falencias observadas en la conceptualización fue sobre los signos matemáticos, puesto que, no identificaban las diferencia entre los signos de agrupación, los signos de relación y los signos de operación, y esto también hacía que los estudiantes no desarrollaran espacios de discusión e interrogación sobre los procesos mismos.

Finalmente otra de las manifestaciones arrojadas por los estudiantes sobre los conocimientos básicos de algebra, se dio en las preguntas donde se debían desarrollar diferentes estrategias para hallar un número a partir de una sucesión establecida, es decir, que debían determinar el patrón a partir de la regularidad misma, pero ellos consideraron que no tenían las capacidades necesarias para realizar dichos procesos, en pocas palabras estaban con ausencia de razonamiento algebraico, el cual puntualiza que si un individuo está ubicada en el nivel cero de algebrización solo desarrolla procesos de resolución algebraica extensivos sin el uso de las propiedades numéricas, es decir, que aplica la aritmética de manera directa y sin crear relación alguna entre los elementos conocidos y los nuevos valores que se obtienen a partir de su mecánica progresiva, esto en el caso de las sucesiones.

Figura 12. Pregunta No. 4 pre test

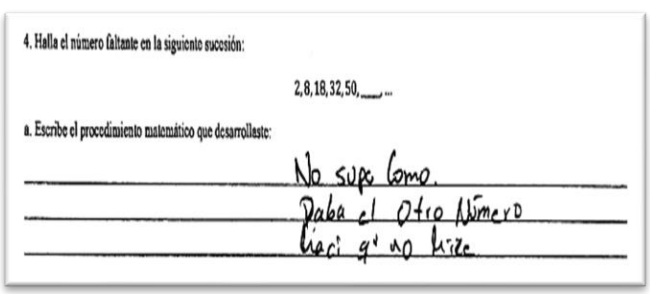

4. Halla el numero faltante en la siguiente sucesion:

2,8,18,32,50, ___ ...

a. Escribo el procedimiento matemático que desarrollaste:

b. Describe en tus propias palabras ¿Qué dificultades tuviste a la hora de resolver el ejercicio?

no se


4. Halla el número faltante en la siguiente sucesión:

2,8,18,32,50, ___ ...

a. Escribe el procedimiento matemático que desarrollaste:

No supe como.
Daba el Otro Número
Haci q' no hize

Fuente. Elaboración propia (2021)

Godino et al. (2014) afirman:

> Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante los lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero este valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En tareas de generalización, el mero reconocimiento de la regla recursiva que relaciona un término con el siguiente, en casos particulares, no es indicativa de generalización (p.207).

En este ejercicio los estudiantes resolvieron un cuestionario de 8 preguntas en un tiempo máximo de 2 horas; las cuales consistían en solucionar algunos problemas básicos enmarcados desde la aritmética, álgebra y razonamiento matemático respectivamente.

Figura 13. Aplicación pre test

Fuente. Captura autor (2021)

PREGUNTA 1

En este problema de tipo aritmético se pretendía conocer las habilidades básicas tales como las propiedades y operaciones entre números racionales (Q), en donde se proporcionó un ejercicio de sumas entre fracciones, números mixtos y números decimales, los estudiantes debían observar si este tenía errores o no y justificar su respuesta. A continuación de muestra la pregunta:

Figura 14. Pregunta No. 1 pre test

1. Analiza el siguiente proceso aritmético:

$= \left(\frac{3}{4} + 2\frac{3}{2}\right) + 0,25$ ⟶ Se transforma el número mixto a fracción: $2\frac{3}{2} = \frac{(2\cdot 2)+3}{2} = \frac{7}{2}$

$= \left(\frac{3}{4} + \frac{7}{2}\right) + 0,25$ ⟶ Se resuelve la suma entre fracciones: $\frac{3}{4} + \frac{7}{2} = \frac{5+11}{6} = \frac{16}{6}$

$= \frac{16}{6} + 0,25$ ⟶ Simplificamos la fracción: $\frac{16}{6} = \frac{8}{3}$

$= \frac{8}{3} + 0,25$ ⟶ Transformamos la fracción a decimal: $\frac{8}{3} = \begin{array}{r|l} 30 & 8 \\ \hline 60 & 0,375 \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$

$= 0,375 + 0,25$ ⟶ Se suman los decimales: $\begin{array}{r} 0,375 \\ \underline{0,250} \\ 0,625 \end{array} +$

Considera que el ejercicio no tiene errores.

Si: __ No: __

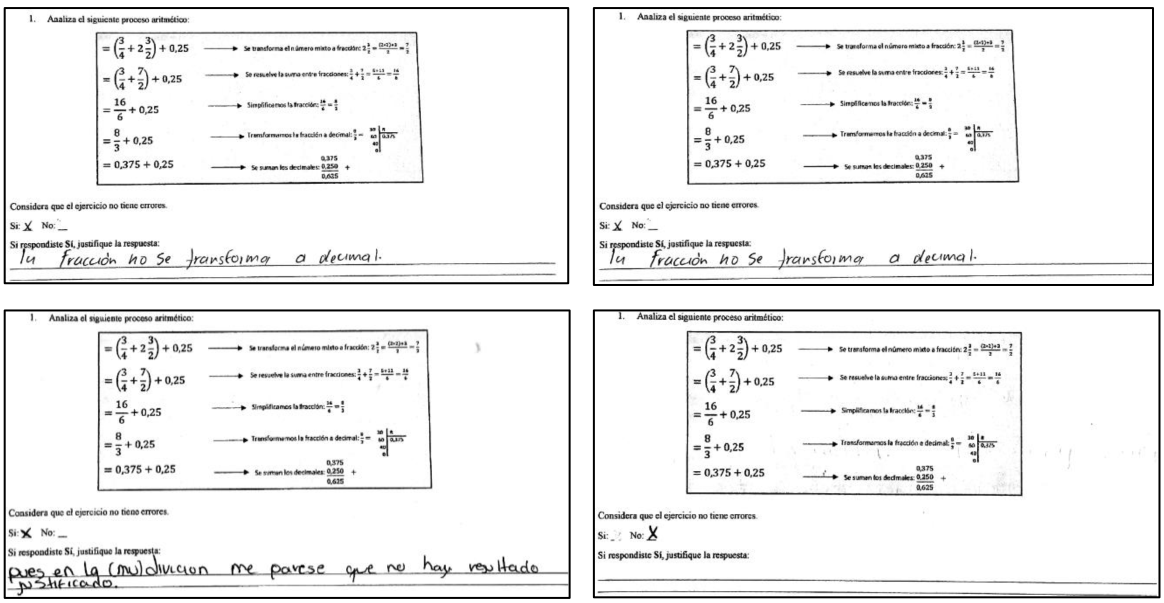
Si respondiste **Sí**, justifique la respuesta:

Fuente. Elaboración propia (2021)

Nota: cabe mencionar que este proceso aritmético, tiene algunas inconsistencias como son al sumar las dos fracciones ¾ y 7/2 (para sumar es necesario multiplicar el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción, a esta respuesta se suma la multiplicación del denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción y finalmente para obtener el denominador de la fracción resultante se multiplican ambos denominadores); así mismo otra de las inconsistencias notables es al dividir 8/3 para obtener el número decimal que le corresponde (para dividir este tipo de números es importante tener en cuenta que el numerador es el mismo dividendo y el denominador es el mismo divisor, es decir 8 dividido 3).

Por lo tanto, algunos estudiantes consideraron que el ejercicio tenía errores, pero su justificación no fue clara o inaceptable, no obstante, en otros casos los estudiantes consideraron que el ejercicio no tenía errores. A continuación, se pueden evidenciar algunas de las respuestas más significativas en cuanto a esta pregunta se refiere:

Figura 15. Respuesta pregunta No. 1



Fuente. Elaboración propia (2021)

Observando que los estudiantes a pesar de sus conocimientos poseen fundamentos erróneos e inconsistentes en cuanto a los procesos de tipo aritmético, en consecuencia es evidente establecer que estos conocimientos numéricos que poseen los estudiantes indagados proporcionan elementos importantes para considerar, tales como, la necesidad de fortalecer las propiedades y operaciones entre números racionales, manejo de los signos matemáticos, transformación semiótica de los números, entre otros, seguidamente se muestra un consolidado más específico de esta pregunta con cada uno de los estudiantes:

Tabla 3. Resultados pregunta No. 1

Pregunta 1			
Estudiante	**Respuesta**	Correcta	Incorrecta
E1		X	
E2			X
E3		X	
E4		X	

Fuente. Elaboración propia (2021)

Nota: De las respuestas correctas (estudiantes que marcaron que el ejercicio planteado tenía errores), los estuantes con rojo son lo que no establecieron un argumento sólido a su respuesta y los estudiantes marcados con el color verde son los que proporcionaron un argumento válido o cercano a dicha respuesta.

PREGUNTA 2

Al aplicar esta pregunta se esperaba que los estudiantes reconocieran el concepto matemático de cada una de las herramientas y mecanismos que fundamentan la aritmética y el álgebra; la presente pregunta consistía en unir con flechas el objeto matemático con su respectivo concepto.

Figura 16. Pregunta No. 2 pre test

2. Unir con una flecha cada una de las palabras con su respectivo significado.

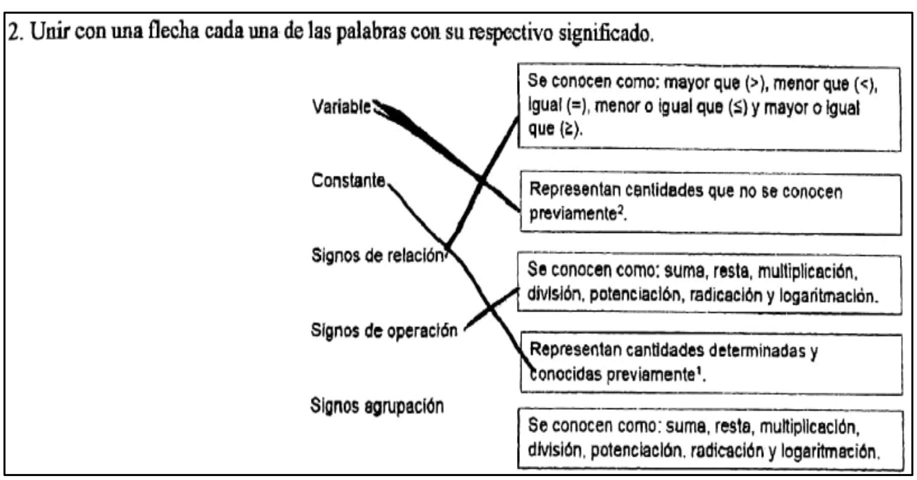
Variable	Se conocen como: mayor que (>), menor que (<), igual (=), menor o igual que (≤) y mayor o igual que (≥).
Constante	Representan cantidades que no se conocen previamente[2].
Signos de relación	Se conocen como: suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación.
Signos de operación	Representan cantidades determinadas y conocidas previamente[1].
Signos agrupación	Se conocen como: suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación.

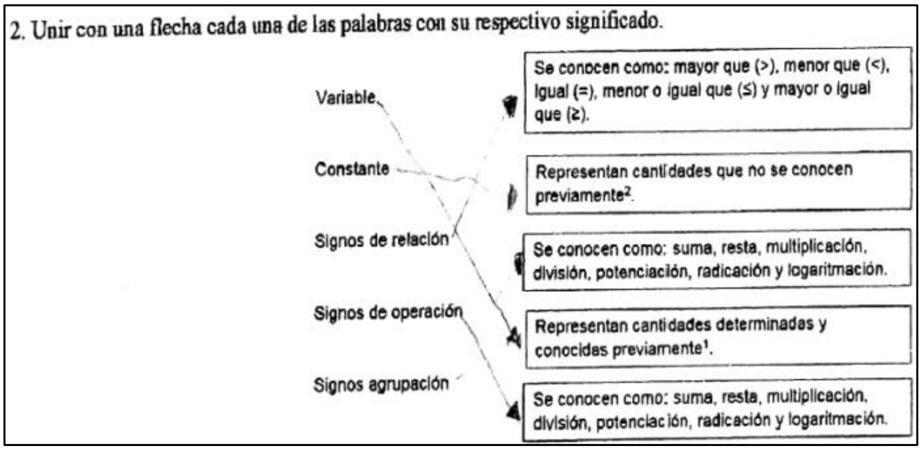
Fuente. Elaboración propia (2021)

Así como se muestra a continuación:

Los estudiantes manifestaron estar satisfechos con sus respuestas a esta pregunta, pero algunos de los estudiantes mostraron algunas dificultades a la hora de diferenciar los tipos de signos (agrupación, relación y operación), así como también la diferencia entre variable y constantes. A continuación, se muestran algunas de las respuestas de los estudiantes:

Figura 17. Respuesta pregunta No. 2





Fuente. Elaboración propia (2021)

Tabla 4. Respuestas pregunta No. 2

Concepto	**Características**				
Estudiante	Variable	Constante	Signos de relación	Signos de operación	Signos de agrupación
E1	**x**	√	√	√	√
E2	**x**	**X**	√	√	√
E3	*x*	√	**X**	**X**	**x**
E4	√	√	√	√	√

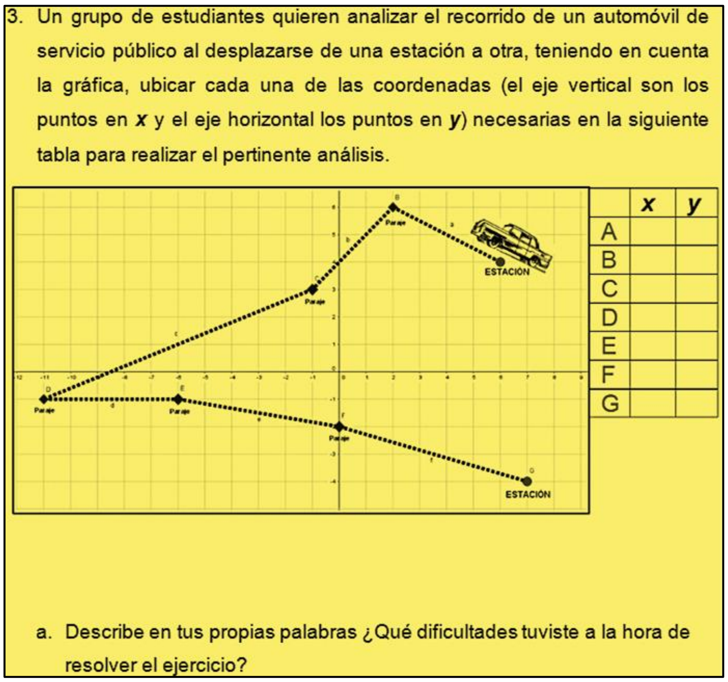
Fuente. Elaboración propia (2021)

Nota: Los estudiantes que se encuentran con el color verde y un chulo indica que si relacionaron el objeto matemático con su concepto, por el contrario se marca con una equis y se subraya con el color rojo.

PREGUNTA 3

Al aplicar esta pregunta a los estudiantes de grado octavo se quiso analizar la capacidad que tenían al relacionar los contenidos aritméticos básicos con el concepto de espacio (profundizados en la geometría euclidiana); el ejercicio consistía en observar detenidamente y extraer la ubicación numérica respecto al plano cartesiano de cada uno de los puntos establecidos en el recorrido del automóvil, así como se esquematiza a continuación:

Figura 18. Pregunta No. 3 pre test



3. Un grupo de estudiantes quieren analizar el recorrido de un automóvil de servicio público al desplazarse de una estación a otra, teniendo en cuenta la gráfica, ubicar cada una de las coordenadas (el eje vertical son los puntos en ***x*** y el eje horizontal los puntos en ***y***) necesarias en la siguiente tabla para realizar el pertinente análisis.

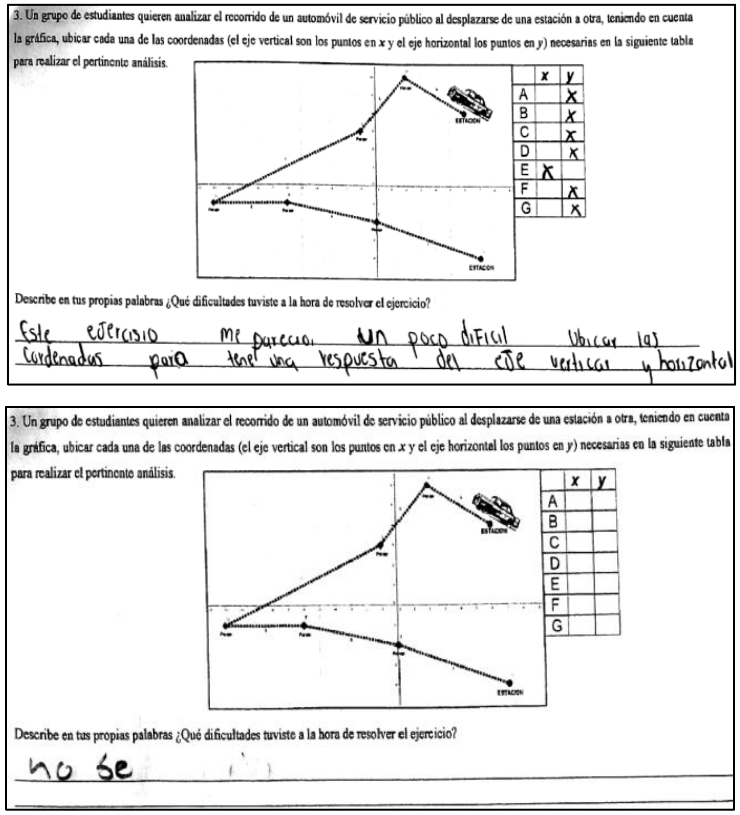
	x	***y***
A		
B		
C		
D		
E		
F		
G		

a. Describe en tus propias palabras ¿Qué dificultades tuviste a la hora de resolver el ejercicio?

Fuente. Elaboración propia (2021)

Es importante tener en cuenta que los estudiantes en su totalidad no pudieron resolver o mostrar las coordenadas que se solicitaban durante el ejercicio, algunos estudiantes no escribieron nada, pero otros manifestaban que el ejercicio era muy complejo:

Figura 19. Resultado pregunta 18



Fuente. Elaboración propia (2021)

Teniendo en cuenta que cada uno de los estudiantes tenían algunas dificultades en cuanto a la ubicación de puntos en el plano cartesiano, se pudo reconocer que los estudiantes E1, E2 y E3 no pudieron completar dicha tabla como se esperaba, mientras que el estudiante E4 reconoció cada uno de los cuadrantes del plano cartesiano y la ubicación positiva y negativa de cada uno de los ejes que la componen, pero no fue posible que completara dicha tabla.

Finalmente se encontró que los estudiantes presentaban además de su dificultad a la hora ubicar puntos en el plano cartesiano, también un problema de tipo estructural, es decir, no dimensionaban la transición de las parejas numéricas a un punto geométrico en el plano cartesiano entendiéndose como un problema de transformación semiótica.

PREGUNTA 4

Durante la implementación de esta pregunta se quiso establecer una relación entre las sucesiones numéricas y los mecanismos propios del razonamiento matemático.

Figura 20. Pregunta No. 4 pre test

4. Halla el numero faltante en la siguiente sucesión:

$$2, 8, 18, 32, 50, \_\_\_, \ldots$$

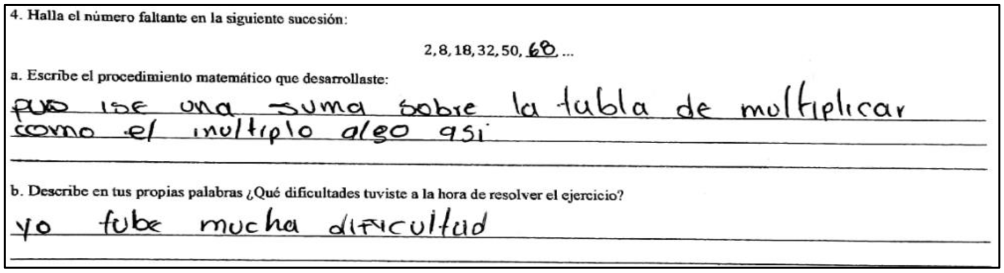
   a. Escribe el procedimiento matemático que desarrollaste:

   b. Describe en tus propias palabras ¿Qué dificultades tuviste a la hora de resolver el ejercicio?

Fuente. Elaboración propia (2021)

Esta pregunta consistía en buscar el número faltante de una sucesión numérica, de la siguiente forma, los estudiantes manifestaron que no podían concebir un resultado para dicho contenido, es decir, que en su totalidad no establecieron una relación entre los elementos que componían dicha sucesión numérica, pero es también sustancial reconocer que uno de los estudiantes (E1) si estableció una relación entre estos elementos y por tal motivo encontró el número faltante (los planteamientos que manifestaron los estudiantes se basaban únicamente en procesos de tipo aritmético).

Figura 21. Respuesta pregunta 4 pres test


4. Halla el número faltante en la siguiente sucesión:

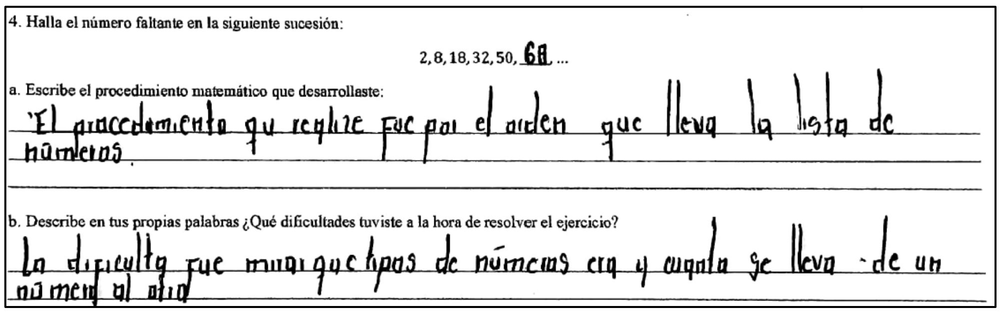
2, 8, 18, 32, 50, 68 ...

a. Escribe el procedimiento matemático que desarrollaste:

pues ise una suma sobre la tabla de multiplicar como el multiplo algo asi

b. Describe en tus propias palabras ¿Qué dificultades tuviste a la hora de resolver el ejercicio?

yo tube mucha dificultad


4. Halla el número faltante en la siguiente sucesión:

2, 8, 18, 32, 50, 68 ...

a. Escribe el procedimiento matemático que desarrollaste:

El procedimiento que realice fue por el orden que lleva la lista de números.

b. Describe en tus propias palabras ¿Qué dificultades tuviste a la hora de resolver el ejercicio?

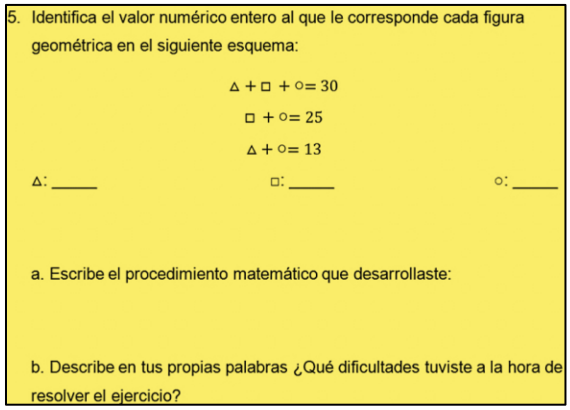
La dificulta fue muchos tipos de números era y cuando se lleva de un número al otro

Fuente. Elaboración propia (2021)

PREGUNTA 5

Por medio de esta pregunta se quería instituir una relación entre los conocimientos aritméticos y el concepto de incógnita (mediante el uso de las figuras geométricas con un valor numérico definido), ya que a partir de este convergen diferentes procesos y objetos matemáticos; el ejercicio consistía en buscar el valor que le correspondía cada figura geométrica y que se cumplieran las sumas (un problema con tres incógnitas).

Figura 22. Pregunta No. 5 pre test



5. Identifica el valor numérico entero al que le corresponde cada figura geométrica en el siguiente esquema:

△ + □ + ○= 30
□ + ○= 25
△ + ○= 13

△: _____ □: _____ ○: _____

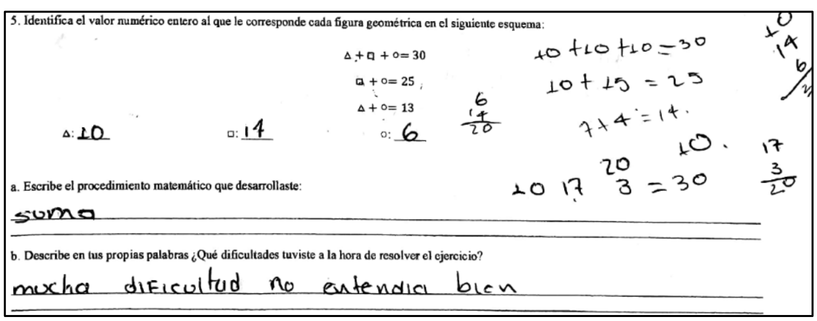
a. Escribe el procedimiento matemático que desarrollaste:

b. Describe en tus propias palabras ¿Qué dificultades tuviste a la hora de resolver el ejercicio?

Fuente. Elaboración propia (2021)

Todos los estudiantes que participaron durante esta actividad mencionaron que se les dificultaba resolverlo, ya que, era un ejercicio que tenía tres condiciones y que para ellos las tres condiciones debían cumplirse; es decir, que los estudiantes E1, E2, E3, y E4 no completaron dicha actividad.

Figura 23. Respuesta pregunta No. 5



5. Identifica el valor numérico entero al que le corresponde cada figura geométrica en el siguiente esquema:

△ + □ + ○= 30
□ + ○= 25
△ + ○= 13

△: 10 □: 14 ○: 6

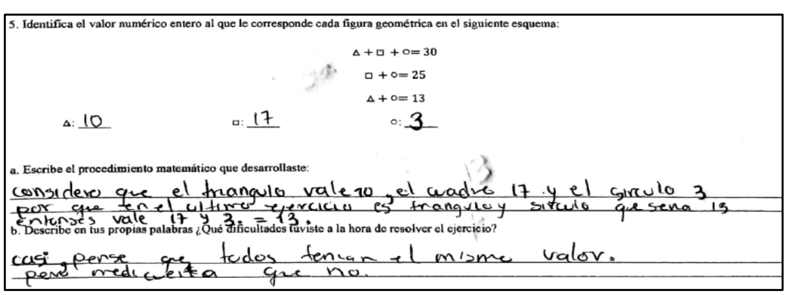
10 + 10 + 10 = 30
10 + 15 = 25
7 + 4 = 14.

a. Escribe el procedimiento matemático que desarrollaste:

suma

b. Describe en tus propias palabras ¿Qué dificultades tuviste a la hora de resolver el ejercicio?

mucha dificultad no entendia bien



5. Identifica el valor numérico entero al que le corresponde cada figura geométrica en el siguiente esquema:

△ + □ + ○= 30
□ + ○= 25
△ + ○= 13

△: 10 □: 17 ○: 3

a. Escribe el procedimiento matemático que desarrollaste:

considero que el triangulo vale 10, el cuadro 17 y el sirculo 3 por que en el ultimo ejercicio es triangulo y sirculo que seria 13 entonses vale 17 y 3. = 13.

b. Describe en tus propias palabras ¿Qué dificultades tuviste a la hora de resolver el ejercicio?

casi, pense que todos tenian el mismo valor. pero me di cuenta que no.

Fuente. Elaboración propia (2021)

Durante este ejercicio se pudo ratificar que los estudiantes a pasear de hacer todo su esfuerzo, sus mecanismos aritméticos propios no fueron de gran ayuda para una situación que requería de un análisis a profundidad sobre la naturaleza de un problema encadenado, ya que, no solo se observa como un ejercicio aritmético, sino, como un problema algebraico que conecta diferentes partes desde el concepto de constante y variable respectivamente.

PREGUNTA 6

Durante la aplicación de esta pregunta los estudiantes debían reconocer los signos de operación, la aplicabilidad de los signos de agrupación y finalmente el mecanismo de los signos de relación, así como se muestra a continuación en el siguiente esquema de la pregunta:

Figura 24. Pregunta No. 6 pre test

6. Inserta los signos de operación necesarios para que la igualdad se cumpla:

$$(2\ \_\_5)\_\_(4\ \_\_6) = 1$$

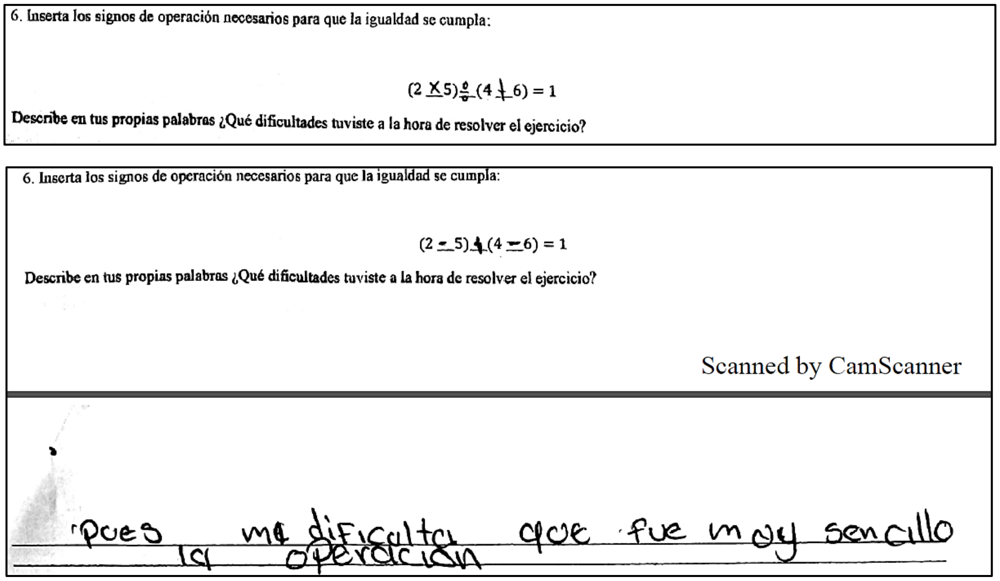
Describe en tus propias palabras ¿Qué dificultades tuviste a la hora de resolver el ejercicio?

____

Fuente. Elaboración propia (2021)

Solo uno de los estudiantes pudo resolver eficazmente el ejercicio (E4), pero los 3 estudiantes restantes establecieron que el ejercicio no tenía solución o quizás estaba mal formulado, pero es claro reconocer que el ejercicio si tenía un sustento lógico y tenía su respectiva solución.

Figura 25. Respuestas pregunta No. 6



6. Inserta los signos de operación necesarios para que la igualdad se cumpla:

$(2 \times 5) \div (4 + 6) = 1$

Describe en tus propias palabras ¿Qué dificultades tuviste a la hora de resolver el ejercicio?

6. Inserta los signos de operación necesarios para que la igualdad se cumpla:

$(2 - 5) \div (4 - 6) = 1$

Describe en tus propias palabras ¿Qué dificultades tuviste a la hora de resolver el ejercicio?

Scanned by CamScanner

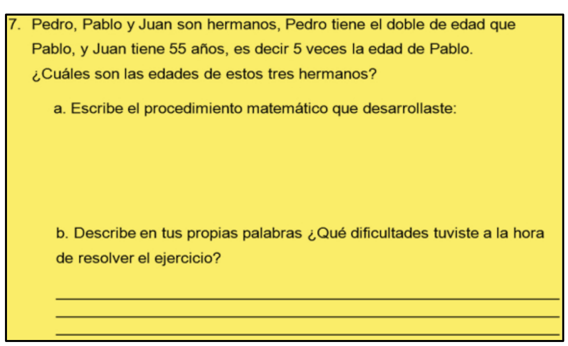
Pues ma dificulta que fue muy sencillo
la operación

Fuente. Elaboración propia (2021)

PREGUNTA 7

En el presente ejercicio se requería de habilidades no solo de matemáticas o algoritmos, sino también de habilidades en cuanto al análisis, razonamiento y observación respectivamente, ya que a través del lenguaje natural cada estudiante debía establecer una relación lógica.

Figura 26. Pregunta No. 7 pre test



7. Pedro, Pablo y Juan son hermanos, Pedro tiene el doble de edad que Pablo, y Juan tiene 55 años, es decir 5 veces la edad de Pablo. ¿Cuáles son las edades de estos tres hermanos?

a. Escribe el procedimiento matemático que desarrollaste:

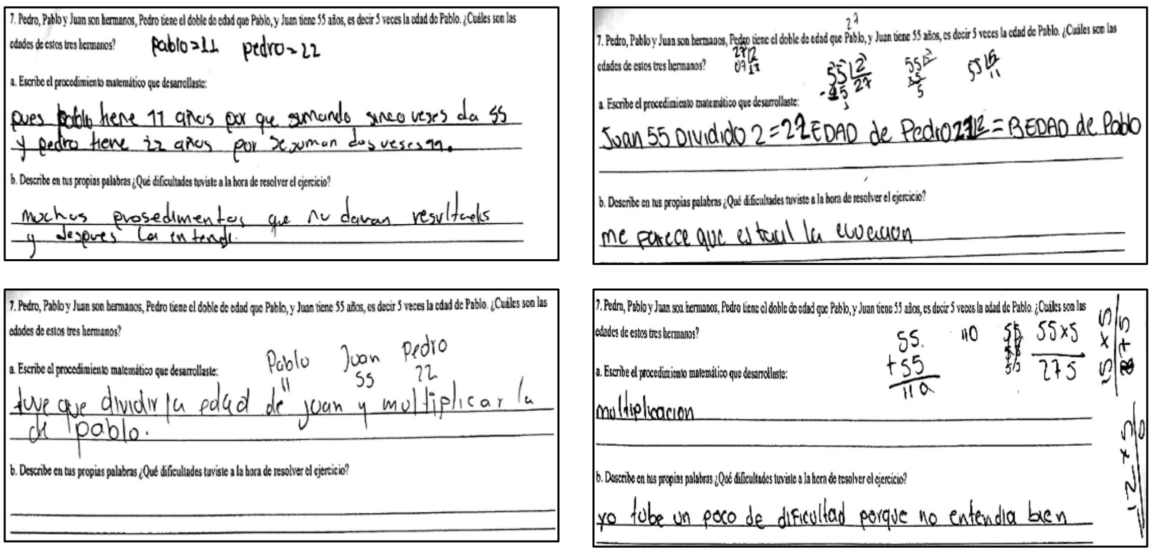
b. Describe en tus propias palabras ¿Qué dificultades tuviste a la hora de resolver el ejercicio?

Fuente. Elaboración propia (2021)

Tal ejercicio causo un poco de atención, ya que, algunos de los estudiantes establecieron algunas relaciones aritméticas las cuales les permitió desarrollar dicho ejercicio eficazmente, pero otros de los estudiantes no pudieron analizar positivamente el ejercicio.

En la Figura 27, se muestran algunos de los resultados obtenidos y procedimientos,

Figura 27. Resultados pregunta No. 7


7. Pedro, Pablo y Juan son hermanos, Pedro tiene el doble de edad que Pablo, y Juan tiene 55 años, es decir 5 veces la edad de Pablo. ¿Cuáles son las edades de estos tres hermanos? pablo=11 pedro=22

a. Escribe el procedimiento matemático que desarrollaste:

pues pablo tiene 11 años por que sumando sinco veses da 55 y pedro tiene 22 años por que se suman dos veses 11.

b. Describe en tus propias palabras ¿Qué dificultades tuviste a la hora de resolver el ejercicio?

muchos prosedimentos que no davan resultados y despues lo entendi

7. Pedro, Pablo y Juan son hermanos, Pedro tiene el doble de edad que Pablo, y Juan tiene 55 años, es decir 5 veces la edad de Pablo. ¿Cuáles son las edades de estos tres hermanos?

a. Escribe el procedimiento matemático que desarrollaste:

Juan 55 DIVIDIDO 2 = 22 EDAD de Pedro 22/2 = 11 EDAD de Pablo

b. Describe en tus propias palabras ¿Qué dificultades tuviste a la hora de resolver el ejercicio?

me parece que es facil la ecuacion

7. Pedro, Pablo y Juan son hermanos, Pedro tiene el doble de edad que Pablo, y Juan tiene 55 años, es decir 5 veces la edad de Pablo. ¿Cuáles son las edades de estos tres hermanos?

a. Escribe el procedimiento matemático que desarrollaste: Pablo 11 Juan 55 Pedro 22

tuve que dividir la edad de juan y multiplicar la de pablo.

b. Describe en tus propias palabras ¿Qué dificultades tuviste a la hora de resolver el ejercicio?

7. Pedro, Pablo y Juan son hermanos, Pedro tiene el doble de edad que Pablo, y Juan tiene 55 años, es decir 5 veces la edad de Pablo. ¿Cuáles son las edades de estos tres hermanos? 55 + 55 = 110 55x5 = 275

a. Escribe el procedimiento matemático que desarrollaste:

multiplicacion

b. Describe en tus propias palabras ¿Qué dificultades tuviste a la hora de resolver el ejercicio?

yo tube un poco de dificultad porque no entendia bien

Fuente. Elaboración propia (2021)

Teniendo en cuenta estos resultados obtenidos sobre este ejercicio literal, se pudo observar lo siguiente:

Tabla 5. Resultados pregunta No. 7

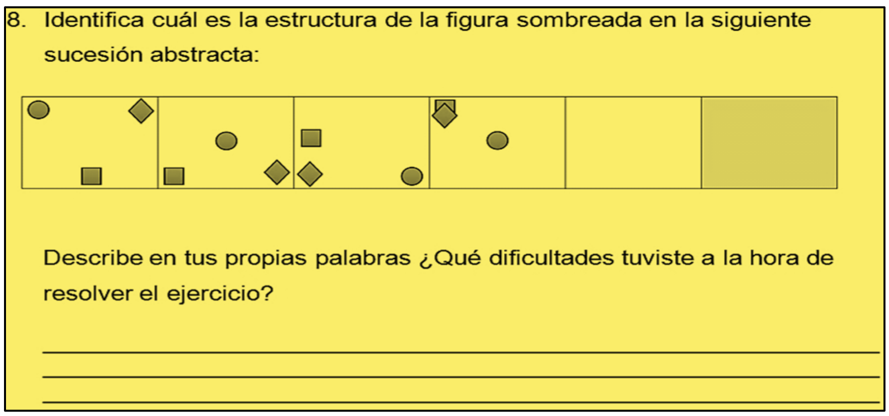
Estudiante	Correcto	Incorrecto
E1	x	
E2	x	
E3		x
E4	x	

Fuente. Elaboración propia (2021)

PREGUNTA 8

Cabe mencionar que esta pregunta consistió en desarrollar un pensamiento abstracto, el cual se buscó que a partir de un sistema de esta naturaleza los estudiantes puedan desarrollar eficazmente su pensamiento lógico-matemático.

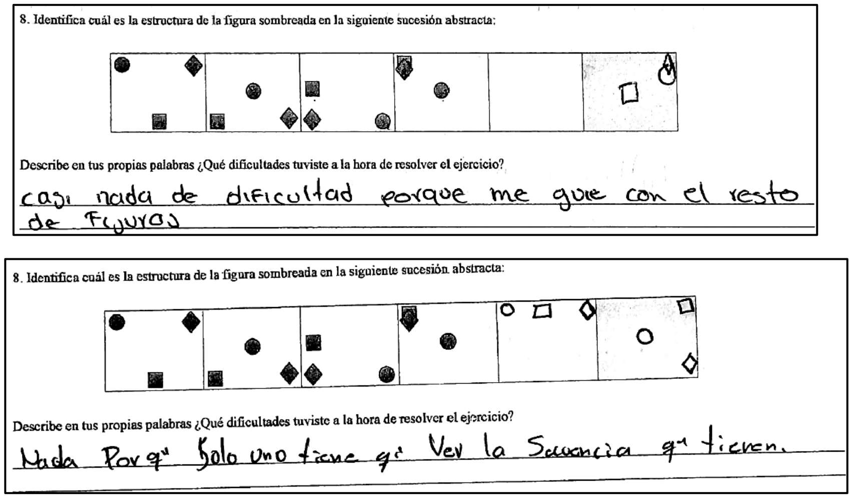
Figura 28. Pregunta No. 8 pre test



Fuente. Elaboración propia (2021)

Algunos estudiantes no pudieron establecer los movimientos de cada una de las figuras geométricas dentro del cuadrado, mientras que otros estudiantes si captaron cada uno de estos movimientos (el cuadrado se movía en la misma dirección de las manecillas del reloj, pero de mitad en mitad, mientras que el rombo también se movía en la dirección de las manecillas del reloj solo que este se movía de vértice en vértice, y finalmente el circulo de movía diagonal de mitad en mitad).

Figura 29. Respuestas pregunta No. 8



Fuente. Elaboración propia (2021)

Finalmente, la mitad de los estudiantes (E1 y E4) encontraron el mecanismo para hallar los movimientos de cada una de las figuras y determinar la posición en la casilla 6.

De una manera más explícita es fundamental reconocer que los estudiantes mostraron tanto sus habilidades matemáticas y de razonamiento como también sus debilidades en cuanto al reconocimiento de algunos elementos pertenecientes a los conceptos de aritmética y algebra respectivamente.

Los estudiantes E1 y E3 mostraron claramente algunas dificultades elementales correspondientes a las relaciones binarias, propiedades fundamentales de la aritmética (conmutativa, asociativa y transitiva) y la transición aritmética – algebra (generalización, el lenguaje, Unitarización, formalización y transformación); en los estudiantes E2 y E4 se pudo establecer que al igual que los estudiantes anteriores tuvieron dificultades en cuanto al uso de los algoritmos matemáticos o generalidades algebraica en la solución de algunos ejercicios que los demandaban, pero en ellos se observó que utilizaban apropiadamente los mecanismos aritmético a su favor para resolver y analizar los ejercicios de este instrumento.

9.1.2 Actividad 2 (Proyección del Video "Sin Miedo a las Matemáticas" De Marcus Du Sautoy)

A causa del trabajo realizado con los estudiantes hasta el momento y escuchando a algunos de ellos, se pudo establecer que tanto las perspectivas de los estudiantes del grado octavo como la de los demás estudiantes de los diferentes grados, reconocen la matemática como una ciencia que se dificulta mucho en su aprendizaje, por su forma compleja forma de escritura y de comunicación; teniendo en cuenta estos puntos de vista se vio la necesidad de incluir dentro de la unidad didáctica un espacio donde los estudiantes puedan observar y analizar algunas expertos en el tema que muestran de manera muy didáctica la importancia del saber matemático en problemas que nos rodean.

Figura 30. Proyección video

Fuente. Captura autor (2021)

Durante el transcurso de esta actividad se les permitía a los estudiantes expresar algunos puntos de vistas o interrogantes que ellos tuvieran sobre el documental, en donde argumentaron lo siguientes:

E1: *Creo que las matemáticas no son tan difíciles como nosotros pensamos solo debemos prestar más atención.*

E2: *Las matemáticas se aprenden más fáciles relacionándola con momentos reales.*

Figura 31. Proyección video

Fuente. Captura autor (2021)

E3: *A las matemáticas le ocurre lo mismo que un video juego, si nos hablan que es muy difícil entonces cuando vayamos a jugarlo lo Aremos con miedo, pero si nos hablan bien desde el inicio, de que es fácil y todo eso, lo jugaremos sin temor.*

E4: si nosotros creemos todas las cosas negativas que nos murmuran de las matemáticas no la entenderemos, porque todos somos un mundo diferente y aprendemos de distintas formas.

Finalmente, muchos de los estudiantes al término del documental reconocieron que tanto los docentes como ellos mismos, tienen dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, no solo por la complejidad de la matemática misma, sino también, por las manifestaciones paradigmáticas a las que se enfrentan muchos estudiantes durante los inicios de la educación básica y media respectivamente.

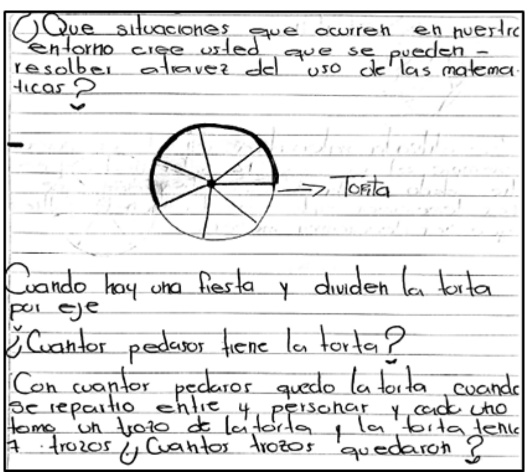
De igual manera es importante reconocer que las matemáticas u otras ciencias que contengan estructuras algorítmicas, deben ser enfocadas y planteadas desde situaciones reales en las que ellas intervengan o representaciones semióticas capaces relacionar dichos conceptos, es decir, que al contextualizar un objeto matemático éste toma importancia e interés en los estudiantes (Duval, 2004), por esta razón se instaura la presente actividad en la unidad didáctica.

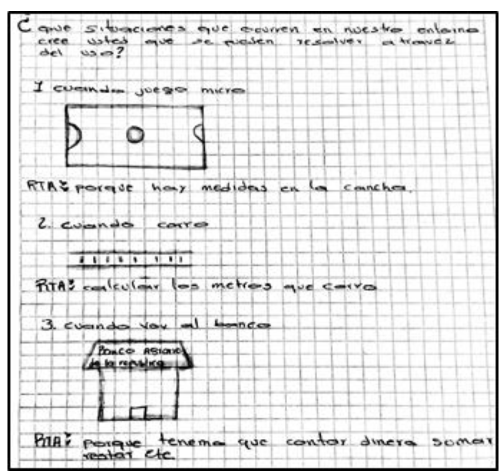
9.2 MOMENTO DE DESUBICACIÓN

Durante este momento se esperaba que los estudiantes se situaran y clarificaran todos aquellos conceptos básicos necesarios para el desarrollo de los demás momentos, así mismo cabe mencionar que durante este momento también se aplicaron los niveles de algebrización 0 (ausencia de razonamiento algebraico (Godino et al., 2014)

El siguiente aspecto trata de establecer una relación directa entre los conocimientos básicos que tienen los estudiantes sobre el área de matemáticas y la realidad que vivimos; en esta actividad se les pregunto a los estudiantes ¿Qué situaciones que ocurren en nuestro entorno, cree que están relacionadas con las matemáticas?, a la cual respondieron algunos estudiantes lo siguiente

Figura 32. Productos de los estudiantes sobre la actividad 3





Fuente. Elaboración propia (2021)

De esta forma todos los estudiantes lograron establecer y esquematizar una situación la cual consideraron que se podía sustentar desde las matemáticas, en donde algunos la relacionaron con el deporte, la gastronomía, la cultura, el arte, con otras áreas del conocimiento, entre otros. Permitiendo reconocer que los estudiantes de grado octavo pueden representar semióticamente algunos conceptos matemáticos, es decir, desde el punto de vista simbólico – literal (Godino et al., 2014).

Después de la aplicación de esta actividad se pudo reconocer que los estudiantes no consideran el concepto y las componentes algebraicas como una herramienta útil para la solución de problemas, mientras que la aritmética toma gran fuerza en sus argumentos, utilizando así el lenguaje natural, numérico, icónico y gestual respectivamente.

De antemano es claro establecer que tanto las nociones de los estudiantes sobre los conceptos matemáticos y la realidad matemática de los mismos, tienen un punto de convergencia, en cuanto a las estructuras mentales o representaciones internas que una persona desarrollo (Tamayo, 2006); los estudiantes manifestaron icónicamente que las matemáticas se encuentran en muchas de las actividades que hacemos día a día.

9.2.1 Actividad 4 (Concepto de Numero Racional)

Durante esta actividad se buscó ubicar a los estudiantes en los conjuntos numéricos, sus relaciones, propiedades y mecanismos de operación, en donde se mostraron de forma muy dinámica los conceptos; en esta actividad los estudiantes debían tomar nota sobre la definición de cada uno de los tipos de números (enteros, naturales, fraccionarios y decimales respectivamente), finalmente de forma individual, posteriormente a cada estudiante le correspondía establecer una relación entre los cuatro tipos de números dados y finalmente el docente corregía algunos errores de conceptualización y operación.

Al finalizar el momento de ubicación de la presente unidad didáctica, se esperaba que cada uno de los estudiantes tuvieran claro las propiedades y mecanismos que rigen cada tipo de numeración, y así, poder utilizar estos conocimientos básicos para el desarrollo de las siguientes actividades que inducen a los conocimientos algebraicos, es decir, implementar y utilizar la transición aritmética – algebra (Pérez y Hernández, 2013).

Figura 33. Concepto de Numero Racional

Fuente. Captura autor (2021)

En este momento se revisaron aquellos conceptos básicos que el estudiante ha desarrollado en el nivel anterior, donde se someterán a transformaciones que involucran directamente la aritmética y el álgebra respectivamente, así mismo, se desarrollaran todas aquellas actividades enmarcadas desde los niveles 1 y 2 de algebrización (incipiente e intermedio de algebrización) (Godino et al., 2014).

De esta forma cabe resaltar que, durante el momento de desubicación, aparte de desarrollar actividades grupales, también iniciarán a solucionar actividades de trabajo situado y cooperativo, por lo que establecerán problemas de los cuales intervendrán conceptos aritméticos y algebraicos.

9.2.2 Actividad 5 (Utilización de Microsoft Excel en la Construcción de los Conceptos de Series, Sucesiones, Regularidades y Patrones)

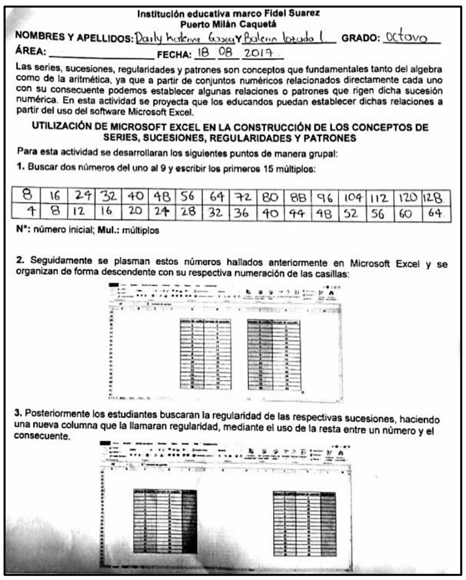
Durante esta actividad los estudiantes asumieron un primer acercamiento a los conceptos de generalidades o expresiones algebraicas básicas, en el cual por medio del trabajo cooperativo y colaborativo y con la utilización de las TIC, requerían identificar las características básicas de una sucesión numérica; en pocas palabras equilibrar y buscar él ¿Por qué? de la naturaleza de esos números que se obtienen infinitamente.

Figura 34. Utilización de las TIC´S

Fuente. Captura propia (2021)

Cabe mencionar que durante esta actividad también se desarrollaron los niveles de algebrización como es en este caso el Nivel 1 o nivel insipiente de algebrización, el cual reconoce que los estudiantes mantienen el lenguaje natural, pero interactúan indirectamente con las expresiones algebraicas básicas (como es el concepto de generalidad en este caso) (Godino et al., 2014).

Figura 35. Explicación esquema



Institución educativa marco Fidel Suarez
Puerto Milán Caquetá

NOMBRES Y APELLIDOS: Daily katerine Gasca Y Baleria lozada L GRADO: octavo
ÁREA: ______ FECHA: 18 08 2017

Las series, sucesiones, regularidades y patrones son conceptos que fundamentales tanto del algebra como de la aritmética, ya que a partir de conjuntos numéricos relacionados directamente cada uno con su consecuente podemos establecer algunas relaciones o patrones que rigen dicha sucesión numérica. En esta actividad se proyecta que los educandos puedan establecer dichas relaciones a partir del uso del software Microsoft Excel.

UTILIZACIÓN DE MICROSOFT EXCEL EN LA CONSTRUCCIÓN DE LOS CONCEPTOS DE SERIES, SUCESIONES, REGULARIDADES Y PATRONES

Para esta actividad se desarrollaran los siguientes puntos de manera grupal:

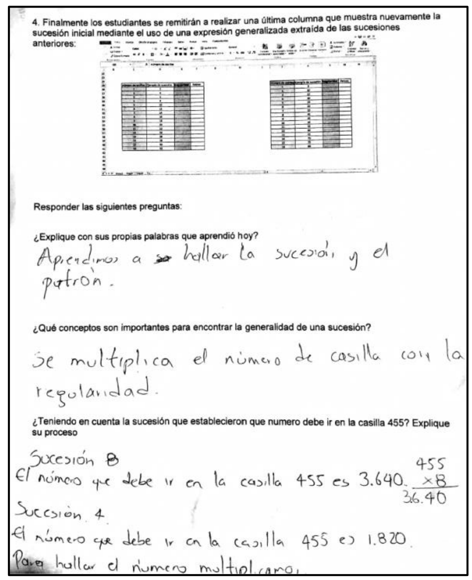
1. Buscar dos números del uno al 9 y escribir los primeros 15 múltiplos:

8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64

N°: número inicial; Mul.: múltiplos

2. Seguidamente se plasman estos números hallados anteriormente en Microsoft Excel y se organizan de forma descendente con su respectiva numeración de las casillas:

3. Posteriormente los estudiantes buscaran la regularidad de las respectivas sucesiones, haciendo una nueva columna que la llamaran regularidad, mediante el uso de la resta entre un número y el consecuente.



4. Finalmente los estudiantes se remitirán a realizar una última columna que muestra nuevamente la sucesión inicial mediante el uso de una expresión generalizada extraída de las sucesiones anteriores:

Responder las siguientes preguntas:

¿Explique con sus propias palabras que aprendió hoy?

Aprendimos a hallar la sucesión y el patrón.

¿Qué conceptos son importantes para encontrar la generalidad de una sucesión?

Se multiplica el número de casilla con la regularidad.

¿Teniendo en cuenta la sucesión que establecieron que numero debe ir en la casilla 455? Explique su proceso

Sucesión 8
El número que debe ir en la casilla 455 es 3.640. 455 ×8 36.40
Sucesión 4
El número que debe ir en la casilla 455 es 1.820.
Para hallar el numero multiplicamo,

Fuente. Elaboración propia (2021)

Teniendo en cuenta las explicaciones anteriores, es de vital importancia conocer de primera mano el esquema a desarrollar en la presente actividad, a continuación, se muestra dicho esquema con algunas de las apreciaciones de proporcionadas por los estudiantes,

Teniendo en cuenta que esta actividad no se basaba en el uso del software, era necesario conocer algunas tácticas y mecanismos de uso del mismo, ya que, a partir del uso de esta herramienta y los conocimientos de los conceptos básicos de las sucesiones, se esperaba que los estudiantes alcanzaran a establecer alguna relación entre el número antecedente y consecuente y así desarrollar una generalidad. Es por esto que se desarrolla el siguiente esquema:

Tabla 6. Respuesta conceptos

Concepto / Estudiante	Sucesión	regularidad	patrón
E1 y E2	√	√	x
E3 y E4	√	√	x

X: Estudiantes que no reconocieron el concepto

√: Estuantes que si reconocieron el concepto

Fuente. Elaboración propia (2021)

Cabe destacar que a la hora de los estudiantes relacionar las componentes sustanciales de la expresión general de una sucesión, ellos están reconociendo la generalidad como un ente final y amplio de dicha sucesión, pero con ausencia de los elementos formales, así como lo manifiesta Godino et al., (2014): "en tareas estructurales, se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente. En tareas funcionales, se reconoce la generalidad, aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal" (p.208).

9.2.3 Actividad 6 (Utilización De Material Manipulable en el Desarrollo de los Conceptos de Series, Sucesiones, Regularidades y Patrones)

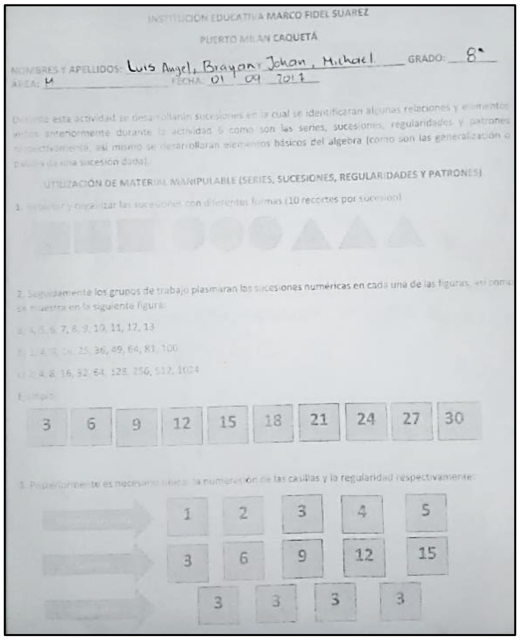
Durante la aplicación de la presente actividad se buscó que los estudiantes fueran capaces de identificar las componentes básicas de una sucesión numérica dada y a través de ello estructural el patrón que la genera, es decir, que los estudiantes reconocieran la relación que tiene las sucesiones de tipo aritmético y su relación con las generalidades algebraicas. Para el desarrollo de esta actividad los estudiantes debían formar grupos donde se nombraba un representante (trabajo cooperativo), seguidamente debían recortar cuantas veces fuera necesario tres tipos de figuras geométricas y allí plasmar las sucesiones dadas, posteriormente cada grupo debía mostrar el número de cada cacilla, la sucesión dada y la regularidad encontrada, finalmente a través del análisis de cada una de estas componentes de la sucesión los estudiantes debían extraer dicho patrón.

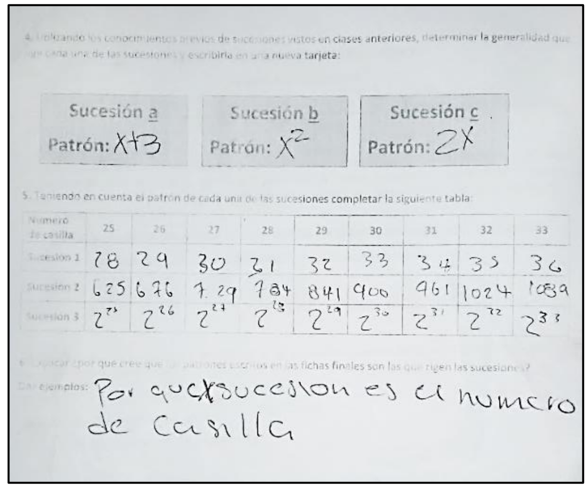
Figura 36. Material didáctico aplicado a estudiantes

Fuente. Captura autor (2021)

Teniendo en cuenta las proposiciones establecidas anteriormente sobre dicha actividad, es importante mostrar una de las actividades desarrolladas y ejecutadas por los mismos estudiantes, esta es:

Figura 37. Resultados estudiantes actividad 6





Fuente. Elaboración propia (2021)

Así mismo durante cada la ejecución de esta actividad se pudo observar que muchos de los estudiantes establecían una relación directa entre las sucesiones dada, las propiedades fundamentales y el concepto de patrón; en la siguiente tabla se puede observar claramente cada una de las habilidades y debilidades que se pudieron observar y analizar en cada uno de los productos:

Figura 38. Habilidades y debilidades estudiantes actividad No. 6

Desarrollo Estudiantes	Sucesión 1	Sucesión 2	Sucesión 3
E18, E19, E20, E21	X	X	O
E15, E16, E22, E1	X	O	O
E2, E5, E6, E8, E14	O	X	O
E3, E4, E7, E9	X	X	O

E10, E11, E12, E13, E17	**O**	√	**O**

Fuente. √**:** Grupos que identificaron los patrones de cada sucesión y lo justificaron
O: Grupos que identificaron los patrones de cada sucesión y NO la justificaron
X: Grupos que NO identificaron los patrones de las sucesiones ni justificaron
Elaboración propia (2021)

9.2.4 Actividad 7 (Uso de la Geometría Como Fundamento Para la Adquisición de los Conocimientos Algebraicos Básicos)

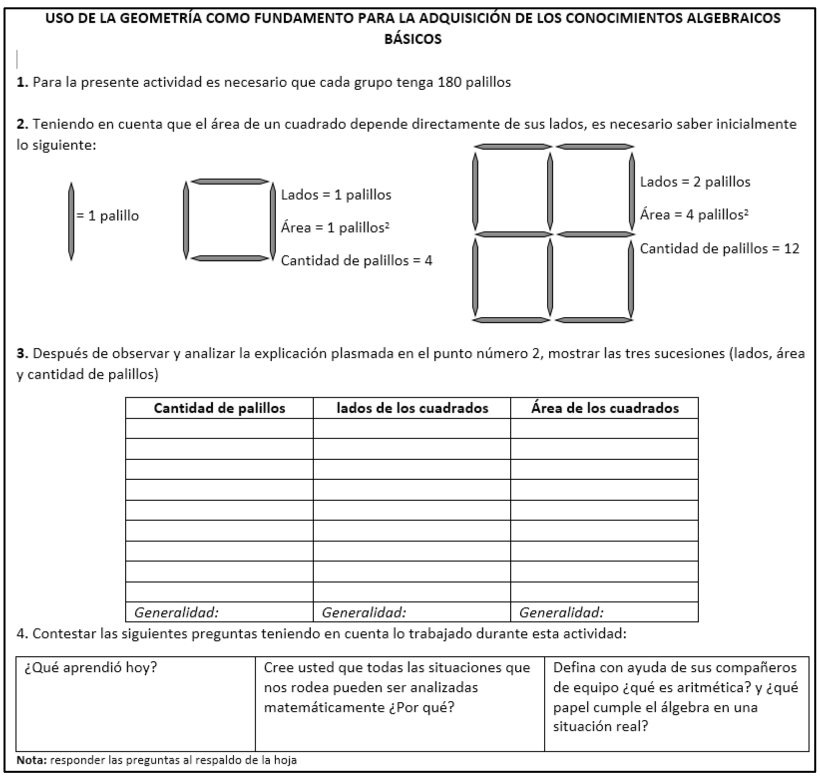
A través del uso de elementos geométricos se quiso desarrollar una actividad en la cual los estudiantes a través del uso de la geometría básica incluyeran el concepto de generalidad o expresión algebraica, así mismo, por medio del trabajo en equipo debían ampliar autónomamente sus propios mecanismos para el desarrollo de problemas cotidianos.

Figura 39. Aplicación elementos geométricos

Fuente. Captura autor (2021)

Teniendo en cuenta que durante el transcurso de la presente actividad, inicialmente fue necesario trabajar en equipo (trabajo colaborativo) en donde se eligió un representante que expusiera los logros obtenidos de la actividad demandada, así mismo se desarrollaron escenarios en donde relacionamos directamente los contenidos algebraicos y aritméticos visto hasta el momento, y finalmente desarrollamos un producto que nos permitió reconocer estos contenidos algebraicos a través del uso de algunos conceptos geométricos tales como lado, área y unidades de medida. En la Figura 40, se puede observar el diseño la dicha actividad.

Figura 40. Diseño actividad geometría



USO DE LA GEOMETRÍA COMO FUNDAMENTO PARA LA ADQUISICIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS ALGEBRAICOS BÁSICOS

1. Para la presente actividad es necesario que cada grupo tenga 180 palillos

2. Teniendo en cuenta que el área de un cuadrado depende directamente de sus lados, es necesario saber inicialmente lo siguiente:

= 1 palillo

Lados = 1 palillos
Área = 1 palillos^2
Cantidad de palillos = 4

Lados = 2 palillos
Área = 4 palillos^2
Cantidad de palillos = 12

3. Después de observar y analizar la explicación plasmada en el punto número 2, mostrar las tres sucesiones (lados, área y cantidad de palillos)

Cantidad de palillos	lados de los cuadrados	Área de los cuadrados
Generalidad:	*Generalidad:*	*Generalidad:*

4. Contestar las siguientes preguntas teniendo en cuenta lo trabajado durante esta actividad:

¿Qué aprendió hoy?	Cree usted que todas las situaciones que nos rodea pueden ser analizadas matemáticamente ¿Por qué?	Defina con ayuda de sus compañeros de equipo ¿qué es aritmética? y ¿qué papel cumple el álgebra en una situación real?

Nota: responder las preguntas al respaldo de la hoja

Fuente. Elaboración propia (2021)

Para la ejecución de la presente actividad cada grupo de estudiantes debían tener mínimo 180 palillos o cerillos, seguidamente estos necesitaban observar y analizar las sucesiones geométricas o de construcción de cada una de las figuras, teniendo como base estas sucesiones ellos debían completar la tabla haciendo utilidad de los palillos y establecer una relación directa entre la sucesión obtenida y su respectiva generalidad o algorítmica; finalmente cada grupo debía responder las preguntas finales (¿Qué aprendió hoy?, Cree usted que todas las situaciones que nos rodea pueden ser analizadas matemáticamente ¿Por qué?, Defina con ayuda de sus compañeros de equipo ¿qué es aritmética? y ¿qué papel cumple el álgebra en una situación real?).

Figura 41. Actividad palillos

Fuente. Captura autor (2021)

Figura 42. Resultados actividad No. 7

3. Después de observar y analizar la explicación plasmada en el punto número 2, mostrar las tres sucesiones (lados, área y cantidad de palillos)

Cantidad de palillos	lados de los cuadrados	Área de los cuadrados
4	1	1
12	2	4
24	3	9
40	4	16
60	5	25
84	6	36
112	7	49
144	8	64
180	9	81
Generalidad: $2x^2+2x$	Generalidad: x	Generalidad: x^2

3. Después de observar y analizar la explicación plasmada en el punto número 2, mostrar las tres sucesiones (lados, área y cantidad de palillos)

Cantidad de palillos	lados de los cuadrados	Área de los cuadrados
4	1	1
12	2	4
24	3	9
40	4	16
60	5	25
84	6	36
112	7	49
144	8	64
180	9	81
Generalidad:	Generalidad:	Generalidad:

Fuente. Elaboración propia (2021)

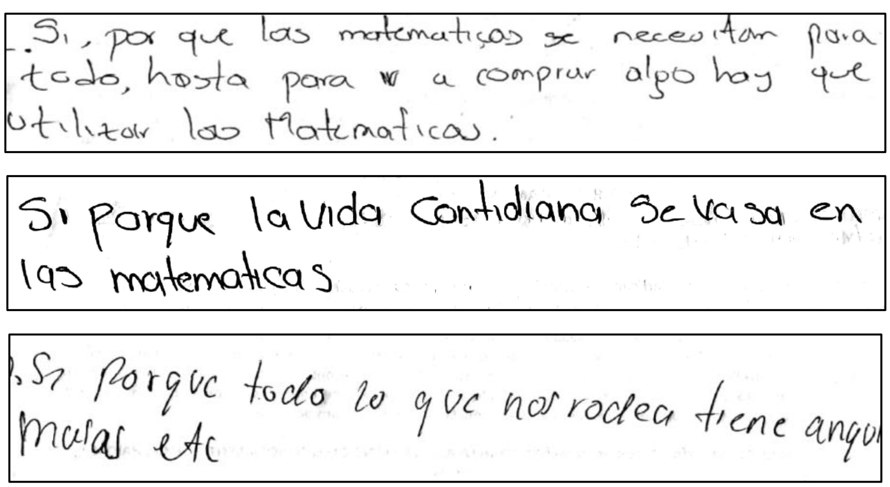
Tabla 7. Resultados actividad No. 7

Desarrollo Estudiantes	Sucesión **(Cantidad de palillos)**	Sucesión ((**Lados de los cuadrados)**	Sucesión **(Áreas de los cuadrados)**
E18, E19, E20, E21	√	√	√
E15, E16, E22, E1	√	√	√
E2, E5, E6, E8, E14	√	√	√
E3, E4, E7, E9	**X**	√	√
E10, E11, E12, E13, E17	√	√	√

Fuente. **X:** Dificultades en la identificación de las componentes de la sucesión
√**:** Identificación de las componentes de la sucesión. Elaboración propia (2021)

A modo de conclusión es también importante tener en cuenta que la gran mayoría de los grupos que participaron en la presente actividad, argumentaron que las matemáticas son una herramienta que se puede utilizar diariamente en situación de nuestro entorno, así mismo creen que todo lo que nos rodea puede ser sustentado desde los principios matemáticos.

Figura 43. Resultados actividad



Fuente. Comentarios realizados estudiantes sobre las matemáticas. Elaboración propia (2021)

9.3 MOMENTO DE REENFOQUE

Durante este momento los estudiantes desarrollaron una actividad la cual consistía en utilizar los conocimientos a priori sobre el álgebra y la aritmética y aplicarlos a una situación real, como es el desarrollo del cubo de Rubik; es también mencionar que durante este momento se desarrolló también el nivel 3 de algebrización (consolidado de algebrización).

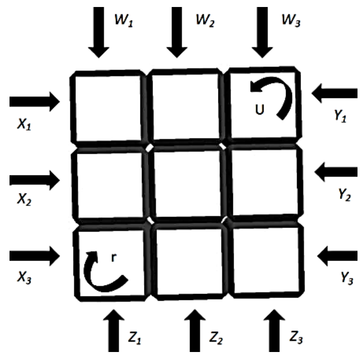
Figura 44. Metododo Rubik

Fuente. Captura autor (2021)

Durante la ejecución de esta actividad se establecieron algunas generalidades de aplicación, como la solución del cubo de Rubik (armar todos sus colores) por el método básico, ya que, en el tutorial presente la relación de este método con las componentes básicas del álgebra. Teniendo en cuenta que a los estudiantes se les suministro un cubo de Rubik de 3x3x3 y su respectivo tutorial, en este tutorial y con la ayuda del docente se pudo determinar que los estudiantes si establecieron una relación de los movimientos permitidos con el cubo y la generalidad que se estableció.

Cabe mencionar que los estudiantes tuvieron algunas dificultades durante la aplicación de los ocho pasos para el desarrollo del cubo de Rubik, siendo estos los siguientes.

Figura 45. Variables Rubik

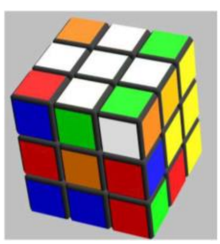


Fuente. Elaboración propia (2021)

Tabla 8. Metodologia practica Rubik

<table>
<tr>
<td>PASO 1 "CRUZ BLANCA"

En este paso debemos tratar de organizar una cruz blanca, lo único que debemos saber es que la cruz se obtiene identificando las cuadriculas blancas centrales y acomodándolas en una cara

</td>
<td>PASO 2 "COLORES CENTRALES"

En este paso trataremos de organizar las casillas o cuadrados pequeños que hay entre la cruz blanca y el centro de cada una de las caras excepto la amarilla, ya que pertenece a la cara inferior

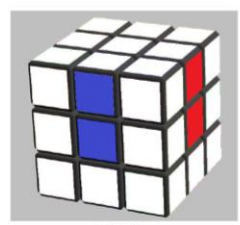


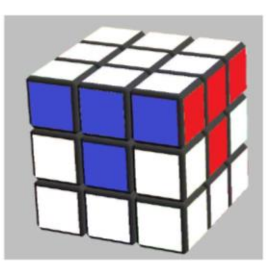
Figura Nº 7

El algoritmo que debemos seguir es el siguiente: $CC = W_1 + Y_1 + Z_1 + X_1 + W_1$

$NOTA_1$: para realizar todos los pasos con satisfacción debemos elegir una cara de cualquier color solo que la superior siempre va hacer la cara blanca, y la vamos a tener siempre frente a nosotros, ya que esta va a representar el esquema de la figura Nº 3</td>
</tr>
<tr>
<td>PASO 3 "LA T"

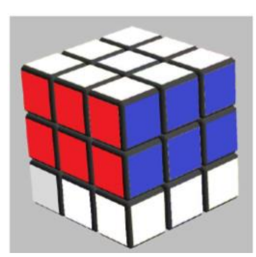
En este paso debemos tener en cuenta los siguientes sub pasos:
1) Debemos identificar los vértices que tengan una cara blanca
2) Luego organizamos de tal forma que las caras blancas estén situadas en la parte inferior alrededor del cubo
3) Seguidamente ubicamos el color que tiene el vértice blanco con la cara correspondiente

$NOTA_2$: El primer movimiento se ejecuta hacia donde apunte la cara blanca del vértice (derecha o izquierda)


Cuando la blanca apunta a la derecha
$T = X_3 + r_1 + Y_3 + U$

Cuando la blanca apunta a la izquierda
$T = Y_3 + U + X_3 + r$</td>
<td>PASO 4 "ORGANIZACIÓN 2 X 9"

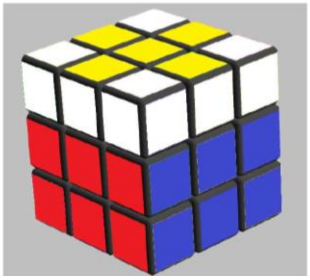
En este paso organizaremos perfectamente 2/3 del cubo, es decir las dos horizontales superiores. Por la cual se deben tener en cuenta los siguientes sub pasos:
1) Dirigir la concentración a la horizontal inferior
2) Observamos el color del centro de cada lado de la horizontal inferior y lo dirigimos a la cara correspondiente
3) Luego observamos el color que se sitúa debajo del cuadro central


Si el movimiento se hace a la izquierda
$O_{2x9} = W_3 + X_3 + Z_3 + X_3 + r + Y_3 + U$

Si el movimiento se hace a la derecha
$O_{2x9} = W_1 + Y_3 + Z_1 + Y_3 + U + X_3 + r$</td>
</tr>
</table>

PASO 5 "CRUZ AMARILLA"

Ahora vamos a tener como cara superior a la cara amarilla, es decir que vamos a girar el cubo 180°, y ejecutaremos el algoritmo hasta que obtengamos la cruz amarilla

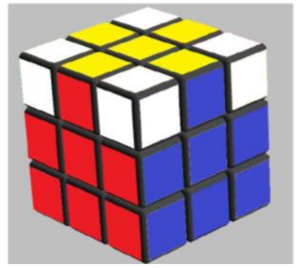


El algoritmo es el siguiente:

$CA = r + Y_1 + Z_3 + X_1 + W_3 + U$

PASO 6 "MEDIOS SUPERIORES"

En este caso lo que vamos a realizar es coincidir las puntas de la cruz amarilla con los colores laterales de cada cara, ejecutando el algoritmo cuantas veces sea necesario. La figura que buscamos es la siguiente:

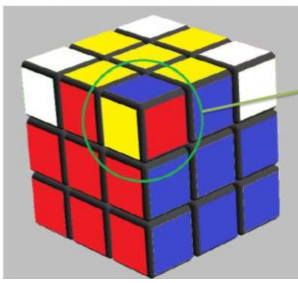


El algoritmo es el siguiente

$MS = W_3 + 2Y_1 + Z_3 + Y_1 + W_3 + Y_1 + Z_3$

PASO 7 "VÉRTICES Y CARAS SEMEJANTES"

Nos ubicamos en una cara cualesquiera, teniendo en cuenta que en este caso ya tenemos como cara superior a la amarilla ya que en el paso numero 5 (cruz amarilla) fue requerido, de esta forma realizamos el algoritmo cuantas veces sea necesario, hasta hacer coincidir los colores de cada vértice con sus determinadas caras



Los tres colores de cada cara corresponden a los tres colores que tiene el vértice (sin importar si concuerdan perfectamente)

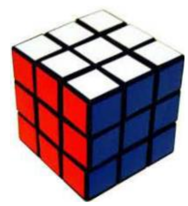
El algoritmo es el siguiente

$VCS = Z_1 + Y_1 + Z_3 + X_1 + W_1 + Y_1 + W_3$

PASO 8 "CULMINACIÓN"

Principalmente elegimos una cara, luego rotamos la cara amarilla hasta llegar a un vértice que concuerde con sus colores, y finalmente ejecutamos el algoritmo requerido, cuando concuerden exactamente seguimos girando la cara amarilla y buscamos otro vértice que no concuerde perfectamente con sus lados y volvemos a ejecutar el algoritmo, así sucesivamente; y de esta manera obtendremos un cubo como lo muestra la figura Nº 1

$C = W_3 + Y_3 + Z_3 + X_3$



Fuente. Elaboración propia (2021)

10 CONCLUSIONES

Es evidente que más allá de reconocer los elementos algebraicos y sus propiedades algorítmicas de una situación problema, es importante establecer una relación entre cada una de las herramientas aritméticas que faciliten la transición de esta a un patrón o generalidad que evalué la naturaleza de dicha situación, es decir, que este proceso de algebrización depende directamente de la aritmética misma; de esta forma cabe mencionar también que a través de cada una de las actividades de la unidad didáctica se fortalecieron y transformaron aquellos conocimientos intuitivos o carentes de formalidad para encaminar a los estudiantes a un pensamiento crítico constructivo por medio de los niveles de algebrización. Las características del proceso de algebrización en cada una de las actividades de la unidad didáctica fueron:

Durante las actividades que se enmarcaron desde el nivel 0 de algebrización (ausencia de razonamiento algebraico), los estudiantes mostraron algunas habilidades y debilidades en el manejo de los elementos aritméticos; como son los métodos de operación, escritura y lenguaje, pero algunas de las dificultades se mostraron desde el uso de las propiedades básicas de la aritmética.

Consecuentemente en el transcurso de las actividades pertenecientes al nivel 1 de algebrización (incipiente de algebrización), se pudo comprobar que los estudiantes si fueron capaz de establecer una relación directa entre cada uno de los signos de la aritmética y consecuencia del algebra, como son: los signos de relación (mayor que, menor que e igual), los signos de agrupación (el paréntesis, el corchete y las llaves), y finalmente los signos de operación (suma, resta, multiplicación y división).

En las actividades del nivel 2 de algebrización (intermedio de algebrización) los estudiantes lograron transformar esos sistemas aritméticos como las sucesiones o conjuntos numéricos a una expresión algebraica que la describiera, es decir, pasar de la escritura numérica a una escritura generalizada.

Posteriormente durante la actividad que describía el nivel 3 de algebrización (consolidado de algebrización), los estudiantes reconocieron los elementos algebraicos básicos (signos de relación, signos de operación, signos de agrupación, variable y constante) dentro de una situación problema como fue la construcción del cubo de rubik.

Finalmente es importante resaltar que los estudiantes SI pudieron establecer una relación directa entre la aritmética y los patrones de una sucesión dada, es decir, que este proceso de algebrización utilizando los cuatro niveles dichos anteriormente nos facilitan la manera de infundir el concepto de algebra en los estudiantes de la educación básica secundaria, ya que este se inicia desde las bases aritméticas, trasciende en los mecanismos de funcionamiento de una sucesión o expresión aritmética (patrones, regularidades y series) y finaliza en la generalidad de dicho sistema.

A partir del presente proyecto investigativo con estructuras puramente académicas, se logró en gran medida fortalecer y brindar herramientas que permitieron mejorar indiscutiblemente los aprendizajes en el campo del algebra, facilitar herramientas que inciden directamente en la transformación de un matemática informal o intuitiva a una matemática desarrollada a partir de las estructuras algorítmicas y también se fortaleció el pensamiento paradigmático que poseían los estudiantes erróneamente sobre la trascendencia del algebra en la solución de problemas del contexto. De esta manera se logró avanzar indiscutiblemente en los siguientes campos:

Se mejoró la práctica docente, en cuanto a la ejecución correcta de las partes que componen una clase *(momento de exploración de ideas previas, momento de estructuración o conceptualización, momento de la práctica y ejecución de los conceptos y el momento de transferencia o evaluación*), en la aplicación de las estructuras curriculares necesarias y suficientes para poder afianzar las competencias matemáticas y se fortalecieron los conocimientos adquiridos con la evaluación formativa.

En segunda mediada se evidencio que la flexibilidad en los procesos educativos permitió una mayor asertividad en la enseñanza y el aprendizaje, puesto que, el estudiante necesita construir el conocimiento a partir de lo que conoce y esto lo transforma desde la interacción pasiva a activa sin presionarlo con los resultados requeridos.

La utilización de las tecnologías facilito el aprendizaje de los conceptos que eran objeto de estudio, ya que, tanto el docente en el proceso de enseñanza y el estudiante en el proceso de aprendizaje lograron observar de manera más exacta los fenómenos numéricos que ocurrían en una sucesión y así se identificaba de manera más fácil el patrón o la generalidad de la misma.

Otra de las eventualidades académicas observadas y rescatables fue la trascendencia que tomo el trabajo colaborativo en el proceso de aprendizaje, ya que, algunos estudiantes perciben de manera más fácil algunos conceptos por medio de las tecnologías, del juego, trabajo de campo y así se complementaron y mejoraron los conocimientos.

Desde el punto de vista procedimental, se puede destacar indiscutiblemente que los métodos aritméticos son la base fundamental en los procesos de algebrización, dado que, desde el estudio de una sucesión numérica y su regularidad se puede extraer su generalidad, siendo esta la primera estructura algebraica necesaria para desarrollar el análisis algorítmico.

Finalmente, es necesario sostener que a partir del desarrollo de la unidad didáctica se pudo percibir que los niveles de algebrización construyen homogéneamente el pensamiento variacional, es decir, que el aprendizaje del algebra y en su efecto la construcción del pensamiento variacional debe cimentarse de manera ascendente paso a paso.

11 RECOMENDACIONES

Durante la aplicación de la presente investigación académica fundada a partir de la pedagogía y la didáctica, se establecieron diferentes pautas y estrategias que en cierta medida construyeron significativamente al pensamiento variacional en estudiantes de grado octavo de una institución educativa publica a partir de las herramientas aritméticas que tenían previamente los estudiantes; de esta misma manera es evidente resaltar que para que exista una verdadera transformación en los procesos de enseñanza y aprendizaje del algebra se requiere ajuste razonable en:

1. Se recomienda incluir en los procesos académicos el concepto de sucesión y cada una de las componentes de ella (series, regularidad y patrón) en pro de la construcción del pensamiento variacional, esto implica fortalecer el razonamiento aritmético en todos los niveles educativos.
2. Se recomienda aplicar los niveles de algebrización en las estructuras curriculares de las instituciones educativas desde el primer grado de secundaria hasta los inicios de la educación media en cuanto al proceso de aprendizaje del algebra, con el fin de afianzar el pensamiento variacional a partir de los conocimientos previos que posee un estudiante.

12 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Asociación colombiana de matemática educativa (2002). *Estándares curriculares - área matemática: aportes para el análisis.* Colombia: Gaia.

Asociación colombiana de matemática educativa (1999). *La enseñanza de la aritmética escolar y la formación del profesor.* Colombia: Gaia.

Asociación colombiana de matemática educativa (1999). *El conocimiento profesional: una mirada a la aritmética de la escuela*. Colombia: Gaia.

Asociación colombiana de matemática educativa (1999). *La comprensión de la proporcionalidad, una perspectiva social y cultural*. Colombia: Gaia.

Asociación colombiana de matemática educativa (2001). *Sistemas de representación y mapas conceptuales como herramientas para la construcción de modelos pedagógicos en matemáticas.* Colombia: Gaia.

Asociación colombiana de matemática educativa (2003). *Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría.* Colombia: Gaia.

Aké L., Castro W. y Godino J. (2011). Conocimiento didáctico-matemático sobre el razonamiento algebraico elemental: un estudio exploratorio. *Revista SIEM*, volumen (13), pp. 227-236.

Aké L., Castro W. y Godino J. (2011). Distinción del pensamiento algebraico del aritmético en actividades matemáticas escolares. *Revista CIAEM*, volumen (14), pp. 1-9.

Aguilar A., Bravo F., Gallegos H., Cerón M. y Reyes R. (2009). *Matemáticas simplificadas*. México: Pearson.

Ballén N. (2012).*El álgebra geométrica como recurso didáctico para la factorización de polinomios de segundo grado*(tesis de maestría). Universidad Nacional, Bogotá, Colombia.

Blaxter L., Hughes C. y Tight M. (2002). *Como se hace una investigación*. Gedisa.

Bedoya J. (1998). Epistemología y pedagogía. *Ensayo histórico crítico sobre el objeto y método pedagógico.* Colombia: Ecoe ediciones.

Bosch, M., Gascón, J. y Ruiz N. (2011). Un modelo epistemológico de referencia del álgebra como instrumento de modelización. *Revista CITAD*, volumen (10), pp. 743-765.

Bosch, M., Gascón, J. y Ruiz N. (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria. *Revista CITAD*, volumen (10), pp. 655-676.

Castaño A. (2014). *Dificultades en la enseñanza de las operaciones con números racionales en la educación secundaria* (tesis de maestría). Universidad autónoma de Manizales, Colombia.

Castro, C., Molina, E., Gutiérrez, M. L., Martínez, S., & Escorial, B. (2012). Resolución de problemas para el desarrollo de la competencia matemática en Educación Infantil. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 80, 53-70.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9(1), 143-168.

Duval, R. (1999). Argumentar, demostrar, explicar:¿ continuidad o ruptura cognitiva? (pp. 15-17). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Esquinas S. (2009). *Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica: aplicación a la práctica docente* (tesis de doctorado). Universidad complutense de Madrid, España.

García, C., & Sosa, L. (2013). Conocimiento del profesor al impartir el tema de lenguaje algebraico en secundaria.

Gascón, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. Educación matemática, 11(01), 77-88.

Godino, J. D., Batanero, C., & Vicenç, F. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Universidad de Granada.

Godino, J., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32 (1), pp. 199-219.

Godino J. y Font V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. España: Baza.

González P. (2008). *La Historia de la Matemática como recurso didáctico e instrumento de integración cultural de la Matemática.*

González R. (2013). *La epistemología de las matemáticas y su contribución al aprendizaje significativo en estudiantes de grado sexto* (tesis de maestría). Universidad nacional, Manizales, Colombia.

Joya A. (2013). *Los caminos del saber, matemáticas 7°*. Colombia: Santillana.

Joya A. (2013). *Los caminos del saber, matemáticas 8°*. Colombia: Santillana.

Kaput, J., & Schorr, R. (2008). The case of SimCalc, algebra, and calculus. Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Cases and perspectives, 2, 211.

Kieran C. y Filloy Y. (1989). El aprendizaje del algebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Revista investigación y experiencia didácticas,* volumen (7), pp. 229-240.

Kogelman S. y Heller B. (1996). *El único libro de matemáticas que necesitara en su vida.* España: planeta.

Llinares S. y Sánchez V. (1990). *Teoría y práctica en educación matemática.* España: Alfar.

Martínez E. (2014). *Caracterización del razonamiento algebraico elemental de estudiantes de primaria según niveles de algebrización* (tesis de maestría). Universidad de Medellín, Colombia.

Martínez E., Bohórquez L., Silva J. y Nieto J. (2012). *El significado de la derivada desde los conceptos de patrón, regularidad y sucesión* (tesis de pregrado). Universidad de la amazonia, Caquetá, Colombia.

Malisani E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico visión histórica. *Revista Irice*, volumen (13), pp. 1-25.

Martínez P. y García F. (). Reflexión sobre un problema profesional relacionado con la enseñanza del álgebra. *Revista Campus Universitario de Cartuja*, pp. 1-12.

Mejía Urbano, J. A. (2021). *Argumentación Y Desempeño En La Comprensión Del Concepto De Función Lineal En Estudiantes De Grado Noveno* (tesis de maestría) Universidad autónoma de Manizales. Manizales, Caldas: https://repositorio.autonoma.edu.co/handle/11182/1212

Ministerio De Educación Nacional (2002). *Lineamientos curriculares.* Colombia: M.E.N.

Ministerio De Educación Nacional (2002). *Estándares básicos de competencias en matemáticas.* Colombia: M.E.N.

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (2003). *Narrativa docente, prácticas escolares y reconstrucción de la memoria pedagógica. Argentina.*

Mora, C. D. (2003). Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Revista de pedagogía, 24(70), 181-272.

Moreno C. y García M. (2009). La epistemología matemática y los enfoques del aprendizaje en la movilidad del pensamiento instruccional del profesor. *Revista Investigación y posgrado,* volumen (24), pp. 218-240.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *Revista PNA*, volumen *3*, pp. 135-156.

Muñoz H. (2013). *Modelos conceptuales de profesores de educación básica sobre las matemáticas y su enseñanza* (tesis de maestría). Universidad autónoma de Manizales, Colombia. https://repositorio.autonoma.edu.co/handle/11182/479

Olmedo N., Galíndez M., Peralta J. y Di Bárbaro M. (2015). Errores y concepciones de los alumnos en álgebra. *Revista CIAEM*, volumen (14), pp. 1-13.

Osses Bustingorry, S., Sánchez Tapia, I., & Ibáñez Mansilla, F. M. (2006). Investigación cualitativa en educación: hacia la generación de teoría a través del proceso analítico. Estudios pedagógicos (Valdivia), 32(1), 119-133.

Osorio Pinilla, D. M. (2020). La Argumentación En El Aprendizaje De La Factorización De Polinomios Cuadráticos (tesis de maestría). Universidad autónoma de Manizales. Manizales, Caldas. https://repositorio.autonoma.edu.co/handle/11182/1136

Palarea M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en Álgebra por alumnos de 12 a 14 años* (tesis de doctorado). Universidad de la laguna, Estados unidos.

Palacio O. (2013). Génesis del algebra. *Revista Pedagogía en acción, volumen* (1°), pp. 97-100.

Palarea M. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación. *Revista de didáctica de las matemáticas*, volumen (40), pp. 3-28.

Pérez, M. (2013). Las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Materiales para el desarrollo curricular de matemáticas de tercero de ESO por competencias, 8.

Pozas D. y Santori M. (2013). Un estudio exploratorio de los niveles de algebrización en torno a los problemas verbales en la escuela secundaria. *Revista CIBEM*, volumen (7), pp. 3345-3354.

Ricaldi M. (2013). Análisis del tratamiento del álgebra en el primer año de secundaria: su correspondencia con los procesos de algebrización y modelización. *Revista CLAME*, volumen 1, pp. 223-232.

Sanmartí, N. (2000). El diseño de unidades didácticas. Didáctica de las ciencias experimentales, 239-276.

Skemp, R. R. (1993). Psicología del aprendizaje de las matemáticas (Vol. 15). Ediciones Morata.

Socas M. (1997). Perspectivas de investigación en pensamiento algebraico. *Revista SIEM*, Acta III, pp. 261-282.

Socas, M. M. (2000). Álgebra para todos. Análisis de un material didáctico:“Puzzle Algebraico”. Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, II, 299-330.

Struik D. (1999). *La matemática, sus orígenes y desarrollo*. Elaleph.

Tamayo y Tamayo, M. (2001). El proceso de la investigación científicaincluye evaluación y administración de proyectos de investigación (No. 001.42 T3).

Tamayo, Ó. E. (2006). Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. Revista educación y pedagogía, 18, 37-49.

Tobón t., Pimienta P. y García f. (2010). *Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias.* México: Pearson.

Trujillo P. (2008). *Proceso de generalización que realiza futuros maestros (*tesis de maestría). Universidad de Granada, España.

Vallejo F. y Tamayo O. (2008). Dificultades de los estudiantes de grado octavo en los procesos de tratamiento y conversión de los números racionales. *Revista latinoamericana de estudios educativos*, volumen (4), pp. 151-182.

Velosa Sánchez, E. (2020). Las Representaciones Semióticas En El Aprendizaje De Los Números Enteros (tesis de maestría). Universidad autónoma de Manizales. Manizales. https://repositorio.autonoma.edu.co/handle/11182/1085

13 ANEXOS

Anexo A. Unidad Didáctica

INDAGACIÓN DE IDEAS PREVIAS (CONCEPCIONES ALGEBRAICAS)

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

Tesis de investigación:

Utilización de los métodos de aritmetización en los niveles de algebrización

A continuación, se presentan una serie de situaciones problemas, por medio de los cuales se pretenden conocer algunas concepciones referentes a la aritmética y al algebra, las cuales son elementales a la hora de iniciar algún estudio referente a los algoritmos matemáticos; donde se tendrán en cuenta los niveles de algebrización fundamentados a través de la generalización, unitarización, formalización y ostensión, y transformación respectivamente (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014).

Teniendo en cuenta nuestros conocimientos lógico-matemáticos respondamos de manera cuidadosa y responsable cada una de las siguientes preguntas.

Nombre(s) y apellidos: ___________________________________; Genero: _____; Edad: ______; Grado: ______; Fecha: _____, _____, ______;

Institución Educativa: ___________________________

1. Analiza el siguiente proceso aritmético:

Figura 46. Ejercicios unidad didáctica

$= \left(\frac{3}{4} + 2\frac{3}{2}\right) + 0{,}25 \longrightarrow$ Se transforma el número mixto a fracción: $2\frac{3}{2} = \frac{(2*2)+3}{2} = \frac{7}{2}$

$= \left(\frac{3}{4} + \frac{7}{2}\right) + 0{,}25 \longrightarrow$ Se resuelve la suma entre fracciones: $\frac{3}{4} + \frac{7}{2} = \frac{5+11}{6} = \frac{16}{6}$

$= \frac{16}{6} + 0{,}25 \longrightarrow$ Simplificamos la fracción: $\frac{16}{6} = \frac{8}{3}$

$= \frac{8}{3} + 0{,}25 \longrightarrow$ Transformamos la fracción a decimal: $\frac{8}{3} =$

$$\begin{array}{r|l} 30 & 8 \\ \cline{2-2} 60 & 0{,}375 \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

$= 0{,}375 + 0{,}25 \longrightarrow$ Se suman los decimales:

$$\begin{array}{r} 0{,}375 \\ 0{,}250 \; + \\ \hline 0{,}625 \end{array}$$

Fuente. Elaboración propia (2021)

Considera que el ejercicio no tiene errores.

Si: __ No: __

Si respondiste **Sí**, justifique la respuesta:

____

____

____

2. Unir con una flecha cada una de las palabras con su respectivo significado.

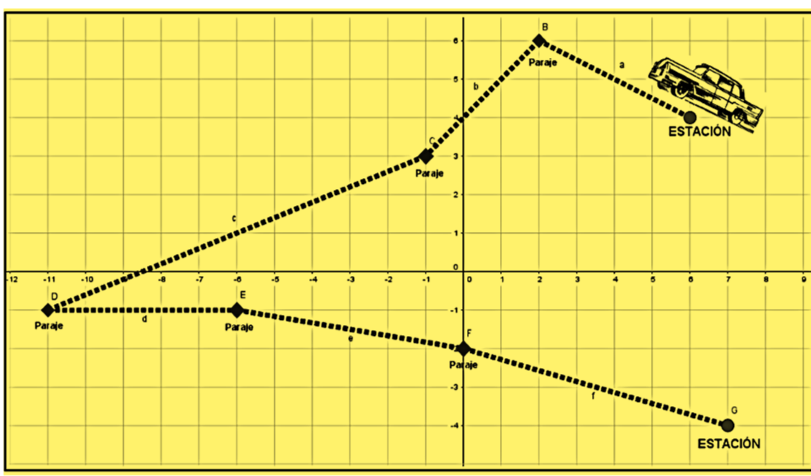
Figura 47. Ejercicio unidad didáctica conceptos

Variable	Se conocen como: mayor que (>), menor que (<), igual (=), menor o igual que (≤) y mayor o igual que (≥).
Constante	Representan cantidades que no se conocen previamente[2].
Signos de relación	Se conocen como: suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación.
Signos de operación	Representan cantidades determinadas y conocidas previamente[1].
Signos agrupación	Se conocen como: suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación.

Fuente. Elaboración propia (2021)

3. Un grupo de estudiantes quiere analizar el recorrido de un automóvil de servicio público al desplazarse de una estación a otra, teniendo en cuenta la gráfica, ubicar cada una de las coordenadas (el eje vertical son los puntos en ***x*** y el eje horizontal los puntos en ***y***) necesarias en la siguiente tabla para realizar el pertinente análisis.

Figura 48. Ejercicio graficas



	x	*y*
A		
B		
C		
D		
E		
F		
G		

Fuente. Elaboración propia (2021)

a. Describe en tus propias palabras ¿Qué dificultades tuviste a la hora de resolver el ejercicio?

4. Halla el número faltante en la siguiente sucesión:

$$2, 8, 18, 32, 50, \_\_\_\_, \ldots$$

   a. Escribe el procedimiento matemático que desarrollaste:
   b. Describe en tus propias palabras ¿Qué dificultades tuviste a la hora de resolver el ejercicio?

5. Identifica el valor numérico entero al que le corresponde cada figura geométrica en el siguiente esquema:

$$\triangle + \square + \circ = 30$$

$$\square + \circ = 25$$

$$\triangle + \circ = 13$$

$\triangle$: ______ $\square$: ______ $\circ$: ______

a. Escribe el procedimiento matemático que desarrollaste:

b. Describe en tus propias palabras ¿Qué dificultades tuviste a la hora de resolver el ejercicio?

6. Inserta los signos de operación necesarios para que la igualdad se cumpla:

$$(2 \_\_5)\_\_(4 \_\_6) = 1$$

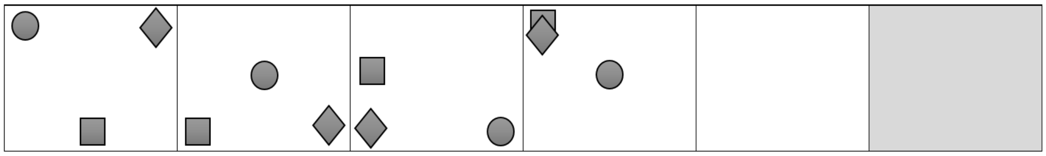
Describe en tus propias palabras ¿Qué dificultades tuviste a la hora de resolver el ejercicio?

7. Pedro, Pablo y Juan son hermanos, Pedro tiene el doble de edad que Pablo, y Juan tiene 55 años, es decir 5 veces la edad de Pablo.
¿Cuáles son las edades de estos tres hermanos?

a. Escribe el procedimiento matemático que desarrollaste:

b. Describe en tus propias palabras ¿Qué dificultades tuviste a la hora de resolver el ejercicio?

8. Identifica cuál es la estructura de la figura sombreada en la siguiente sucesión abstracta:



Describe en tus propias palabras ¿Qué dificultades tuviste a la hora de resolver el ejercicio?

____

____

____

____

¿Te atrae el área de matemáticas?

Sí ___ No ___ ¿Por qué?

____

____

____

____

____

a) Socializar cada una de las respuestas que dieron, donde expliquen las razones por la cual escogieron determinada respuesta.

Anexo B. Proyección del documental “sin miedo a las matemáticas”

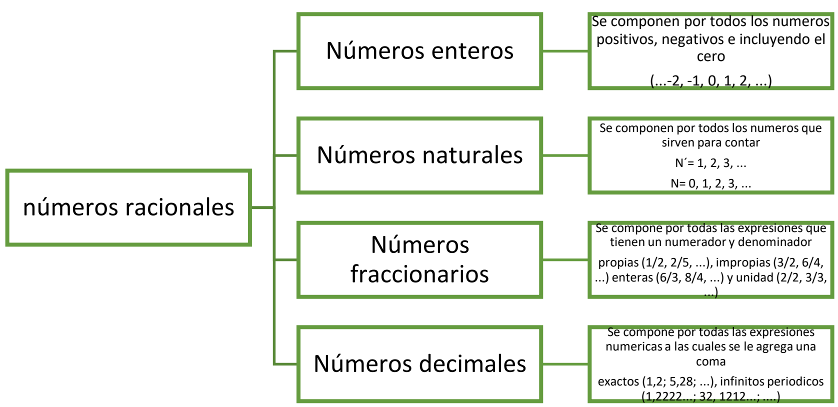
Realizado por el profesor Marcus Du Sautoy de la universidad de Oxford Inglaterra, en la cual se muestran aspectos históricos y epistemológicos, donde se pedirá a los estudiantes que argumenten los elementos más importantes e interesantes que observo según el criterio de cada uno.

Realización de un esquema donde los estudiantes muestren que aspectos desde el punto de vista matemático podemos identificar en situaciones reales, y explicar ¿por qué cree que los fenómenos que han resaltado se fundamentan a través de las matemáticas?

Anexo C. Concepto de numero racional

Posteriormente el docente muestra de manera detallada las componentes aritméticas básicas necesarias en cuanto al reconocimiento de los algoritmos, tales como la composición, operaciones y propiedades de los números racionales.

Figura 49. Mapa conceptual números racionales

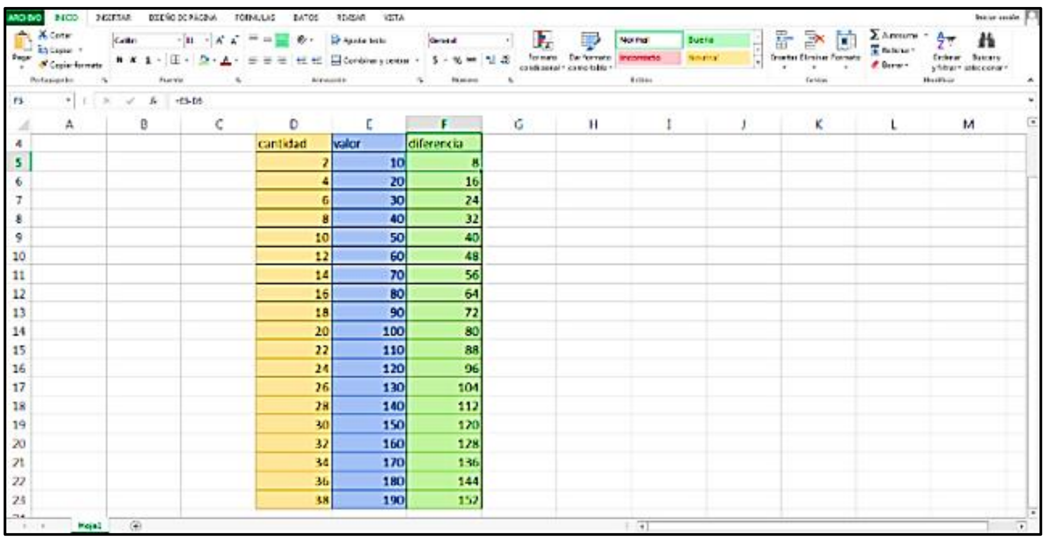


Fuente. Elaboración propia (2021)

Anexo D. Utilización del programa informático Microsoft Excel en la construcción de los conceptos de series, sucesiones, regularidades y patrones

Seguidamente se realizó una explicación directa sobre los conceptos de sucesiones, series, irregularidad y patrones, a través del análisis de valores reales, tales como las notas académicas, ventas, entre otros, haciendo uso de Microsoft Excel y sus herramientas matemáticas.

Figura 50. Analisis resultados Excel

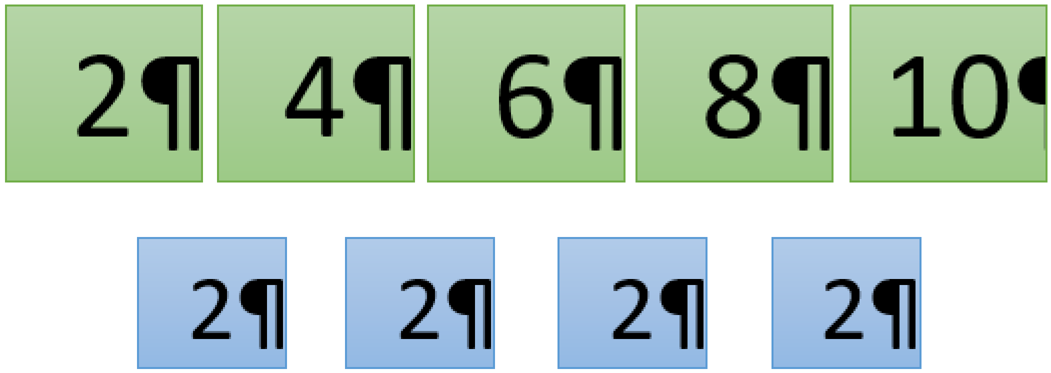


cantidad	valor	diferencia
2	10	8
4	20	16
6	30	24
8	40	32
10	50	40
12	60	48
14	70	56
16	80	64
18	90	72
20	100	80
22	110	88
24	120	96
26	130	104
28	140	112
30	150	120
32	160	128
34	170	136
36	180	144
38	190	152

Fuente. Elaboración propia (2021)

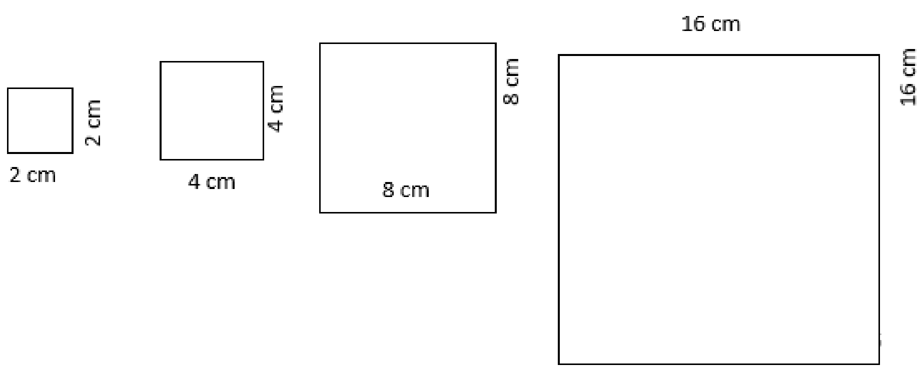
Anexo E. Utilización material didáctico “fichas con sucesiones”

Otra de las actividades se trata del uso de fichas con sucesiones, es decir, que los estudiantes deben trabajar colaborativamente en la creación del material requerido; donde los estudiantes determinan todas aquellas diferencias que encuentren entre las mimas. Por ejemplo:



b) Durante esta actividad los estudiantes deberán observar y analizar la orientación directa que realiza el docente, donde se explican formalmente y conceptualmente cada una de las partes de las actividades expresadas anteriormente, como son patrón, regularidad, sucesión y serie.

c) En esta actividad llamada “sucesiones geométricas”, los estudiantes deberán realizar cuadrados con diferentes dimensiones (base y altura), y buscaron una relación que tengan estas dimensiones con las áreas de cada uno de los mismos cuadrados, finalmente clasificar cada uno de los conceptos trabajados en anteriores actividades.



lados	Área	
2 cm	4 cm^2	
4 cm	16 cm^2	
8 cm	64 cm^2	

16 cm	256 cm^2	
?	?	

Anexo F. El cubo de Rubik. una estrategia fácil y didáctica

Esta actividad llamada "el cubo de Rubik, una estrategia didáctica", trabajar con los estudiantes este juego que busca crear en ellos un pensamiento algebraico desde la lúdica y la geometría; y este consiste en dar un valor generalizado a cada una de los movimientos, y a través de estos crear ecuaciones donde formalice un paso necesario en la solución del mismo.

Página web:
http://razonaya.weebly.com/uploads/2/5/6/3/25637582/proyecto_1__cubo_de_rubik.pdf