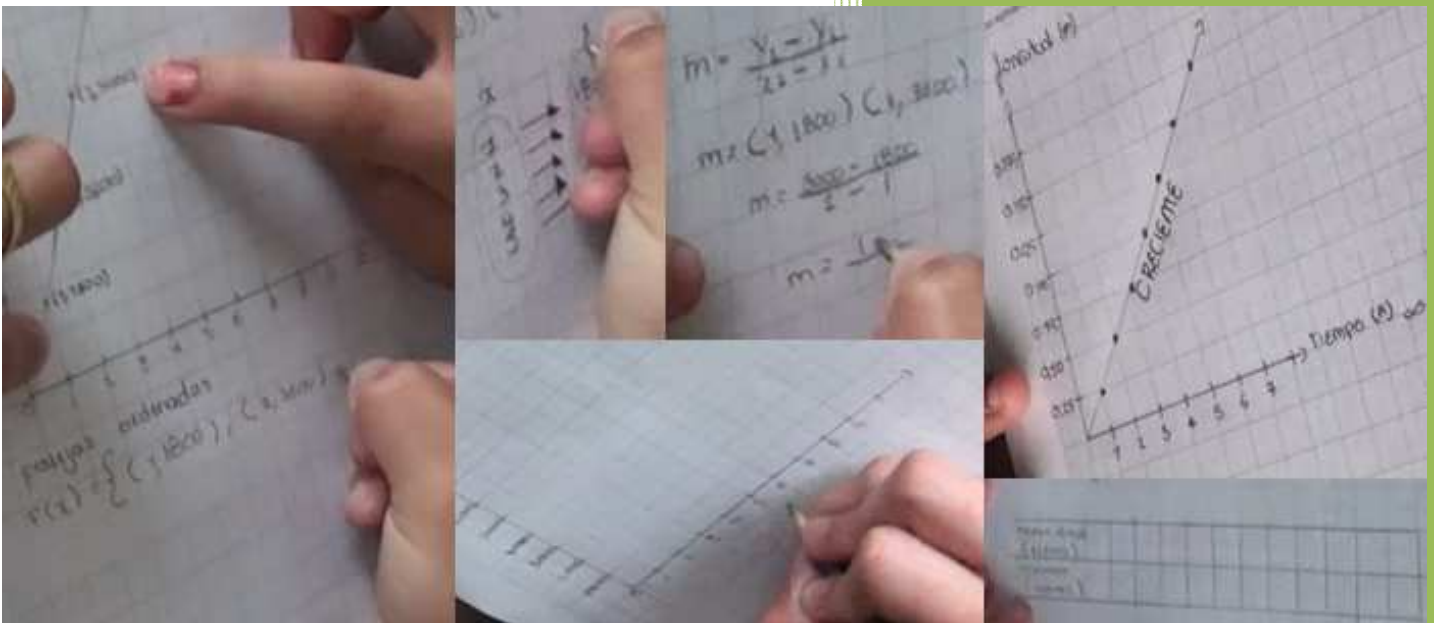


2012

Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal



Delma Ospina García

Universidad Autónoma de Manizales

20/04/2012



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES

Maestría en Enseñanza de las Ciencias

TESIS DE MAESTRÍA

LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

LINEAL

Delma Ospina García

Manizales, Abril 30 de 2012



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES

Departamento de Educación

TESIS DE MAESTRÍA

LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN
LINEAL

Investigación realizada en el marco de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias de la
Universidad Autónoma de Manizales, por Delma Ospina García, bajo la dirección de

Mgr. Ligia Inés García

Manizales, Abril 20 de 2012

DEDICATORIA

A mis amados padres Hernán y Mery quienes son la razón de mi vida y siempre me inspiran para alcanzar mis metas. Quienes con su buen ejemplo y a pesar de las dificultades me han enseñado el valor de amar y luchar por lo que se quiere.

A mi hermano Julián quien fue mi alegría, mi compañero de juegos, quien me brindó amor y apoyo constante en mi carrera profesional.

Estarás en nuestros corazones para siempre. ¡Te amamos!

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por cada nuevo amanecer, por la fortaleza y por los ángeles terrenales que ha puesto en mi camino, personas que han sido compañía y apoyo incondicional.

A la Mgr. Ligia Inés García y al Doctor Oscar Eugenio Tamayo quienes con su conocimiento y experiencia enriquecieron esta investigación.

A los protagonistas de esta investigación, los estudiantes de grado octavo, jornada de la mañana 2011 del Colegio Eugenio Pacelli, por su participación activa en la investigación.

A todas las personas que de una u otra forma colaboraron para que esta investigación fuera posible. ¡Mil Gracias!

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	10
CAPÍTULO 1.....	18
PLANTEAMIENTO EL PROBLEMA, JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS	18
1.1 Planteamiento del problema.....	18
1.2 Justificación	20
1.3 Objetivos.....	22
1.3.1 Objetivo General	22
1.3.2 Objetivos Específicos	22
CAPITULO 2.....	23
ESTADO DEL ARTE Y REFERENTE TEÓRICO.....	23
2.1 Estado del arte.....	23
2.2 Referente Teórico.....	32
2.2.1 Teoría de las representaciones semióticas.....	32
2.2.2 Registros de representación del concepto de función lineal	43
2.2.3 El Concepto de Función Lineal.....	47
CAPÍTULO 3.....	58
DISEÑO METODOLÓGICO.....	58
3.1 Tipo de estudio.....	58
3.2 Metodología	58
3.3 Diseño de la investigación	59
3.4 Procedimiento	60
3.5 Unidad de análisis.....	61
3.6 Unidad de trabajo.....	61
3.7 Instrumentos y técnicas para la recolección de la información.....	61
3.7.1 Técnica de video	61
3.7.2 Cuestionario escrito.....	62
3.8 Plan de Análisis	65
CAPÍTULO 4.....	91
ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN	91
4.1. Principales hallazgos del primer instrumento	91
4.1.1 Conclusiones del instrumento uno.....	113
4.2 Principales hallazgos del segundo Instrumento	114

4.2.1 Conclusiones del instrumento dos	153
4.3 Análisis comparativo del instrumento uno y dos	155
CAPITULO 5.....	158
CONCLUSIONES GENERALES.....	158
RECOMENDACIONES	161
Bibliografía.....	163

INDICE DE TABLAS

Tabla 1 Historia de las Matemáticas (adaptado de Planchart 2005)	49
Tabla 2 Categorías y Subcategorías de Investigación.....	64
Tabla 3 Registros de representación semiótica del concepto Función lineal y sus unidades significantes.....	78
Tabla 4 Conversión del registro verbal al registro Gráfico (Situación 1).....	116
Tabla 5 Conversión registro Gráfico al registro Simbólico situación 1.....	120
Tabla 6 Conversión registro gráfico al registro tabular. Situación 1	121
Tabla 7 Conversión registro tabular al registro figural situación 1	123
Tabla 8 Conversión registro Gráfico al registro Algebraico. Situación 1	125
Tabla 9 Conversión Registro verbal al registro Gráfico. situación 2.....	128
Tabla 10 Conversión registro gráfico al registro Simbólico. situación 2	130
Tabla 11 Conversión del registro Gráfico al registro Tabular. Situación 2	132
Tabla 12 Conversión Registro Tabular al registro Figural. Situación 2	134
Tabla 13 Conversión registro verbal al registro Gráfico. Situación 3	136
Tabla 14 Conversión registro Gráfico al registro simbólico. Situación 3.....	139
Tabla 15 Conversión registro Gráfico al registro Tabular Situación 3	141
Tabla 16 Conversión registro tabular al registro figural. Situación 3	143
Tabla 17 Conversión registro Gráfico al registro Algebraico. Situación 3	144
Tabla 18 Conversión Registro Verbal al registro Gráfico. Situación 4.....	146
Tabla 19 Conversión del registro gráfico al registro Algebraico. Situación 4.....	148
Tabla 20 Conversión del registro gráfico al registro algebraico situación 4	150

INDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1 Representaciones Semióticas (tratamiento y conversión).....	35
Ilustración 2 Tratamiento y conversión de representaciones semióticas.....	36
Ilustración 3 Diseño de Investigación.....	60
Ilustración 4 Unidades significantes y correspondencia entre el registro verbal y el registro gráfico Instrumento 1.....	65
Ilustración 5 Unidades significantes y correspondencia entre el registro verbal y el registro gráfico Instrumento 1.....	66
Ilustración 6 Unidades significantes y correspondencia entre el registro verbal y el registro gráfico Instrumento 1.....	66
Ilustración 7 Unidades significantes y correspondencia entre el registro gráfico y el registro verbal .	67
Ilustración 8 Unidades significantes y correspondencia en el registro verbal y el registro gráfico	67
Ilustración 9 Conversión del registro seleccionado por los estudiantes al registro gráfico.....	69
Ilustración 10 Conversión del registro figural al registro escogido por el estudiante	70

INTRODUCCIÓN

El interés por el aprendizaje del concepto de función lineal surge como uno de los conceptos de mayor importancia en el estudio de las matemáticas pues se considera fundamental para el estudio del Cálculo, posee diferentes aplicaciones, en otras áreas ya que permite la resolución de problemas matemáticos y no matemáticos que pueden ser modelados de forma lineal y promueve la comprensión de otros que no se comportan de esta forma. Igualmente este concepto permite modelar situaciones del mundo real, en las cuales se presenta la relación entre variables. Por ejemplo la función lineal es utilizada para solucionar problemas de costos, compras, transferencias, cálculos de perímetros, pero sobre todo su aplicación en la vida cotidiana es en el sector empresarial, en el aspecto económico, en el uso de la oferta y la demanda, cuyos comportamientos se comprueban a través de las gráficas lineales crecientes o decrecientes.

Las funciones lineales que tienen la forma $f(x) = mx$ es uno de los modelos lineales más básicos y representa para los estudiantes de Educación básica secundaria, la primera aproximación con el concepto de función.

Desde la comunidad científica en educación matemática numerosos autores han desarrollado diferentes investigaciones en torno a la conceptualización del concepto de función, autores como (Gutierrez, 2007), (Guzmán, 1998), (Planchart, 2000) , (Vasquez, 2008) entre otros, en sus investigaciones han hecho evidente como tradicionalmente las representaciones semióticas de este concepto matemático se han presentado a los estudiantes de forma desarticulada lo cual ha generado dificultades en la comprensión del concepto matemático, ya que posteriormente le es difícil al estudiante unificar sus

diferentes representaciones para darles un significado integral, es así como el estudiante observa diversos objetos matemáticos donde solo hay uno. *“Una función no es ni una estadística de valores ni una representación gráfica ni un conjunto de cálculos ni una fórmula, sino todo ello al mismo tiempo”*. COPREM¹, citado en (Vasquez, Aportes didácticos para abordar el concepto de función, 2009)

El referente teórico en el que se enmarca la investigación es la teoría semiótica de las representaciones desarrollada por Duval (1999). Este referente permite comprender cómo se da la conceptualización de los objetos matemáticos, de qué manera intervienen las actividades cognitivas de formación, tratamiento y conversión entre representaciones semióticas del concepto ya que *“Todo acceso a los objetos matemáticos (números, funciones...) pasa necesariamente por las representaciones semióticas. Sin embargo, no se puede confundir nunca un objeto matemático y su representación, el objeto puede tener otras tantas representaciones diferentes de las que uno ve”* (Duval, 1999); esta confusión conlleva a una aprehensión del concepto matemático a partir del registro en el cual se ha formado su representación, lo que no permite la transferencia del objeto a otra representación del mismo; además, esta teoría plantea que las representaciones semióticas utilizadas usualmente en matemáticas, no son producidas de manera aislada, sino que forman sistemas de representación que tienen una estructura interna propia, además poseen algunas limitaciones de funcionamiento y de significado, que pueden ser determinadas en función de las acciones cognitivas que permiten desarrollar.

¹ COPREM (Comisión para la Reflexión sobre la Enseñanza de la Matemática)

Un registro de representación está construido a partir de signos, es decir está conformado por trazos, símbolos, e íconos; por ejemplo en matemáticas (*Enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica...*) (Duval R. , 1999) pág. 14 y es desde cada registro que se origina la representación, determinada por las posibilidades suministradas por cada sistema semiótico.

“Las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma.” (Duval R. , 1999) Pág. 14

Al interior de cada registro de representación se evidencian tres actividades cognitivas:

“La primera es la formación de una representación en un registro dado, la segunda es el tratamiento de una representación, que es la transformación interna de la representación dentro del mismo registro donde esta ha sido formada y la conversión de una representación, que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial...” (Duval 1999) pág. 30

La actividad de *conversión* es una actividad necesaria para la coordinación de registros de representación, siendo esta *“fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos (matemáticos)”* (Duval 1999) pág. 176, Duval concluye que *“en una fase de aprendizaje la conversión juega un papel esencial en la conceptualización”* (Duval, 1999) pág. 181.

En el marco de la teoría de Duval, las dificultades para transitar entre representaciones pueden ser interpretadas como la consecuencia de una deficiente conceptualización del objeto matemático.

Las representaciones propias de cada registro semiótico, se hacen presentes en la vida del estudiante, ya que es el único medio de acceso que posee para reconocer los objetos matemáticos, y es como en palabras de Duval (1999) “*La conversión de registros de representación constituye una variable que se revela fundamental en didáctica porque facilita considerablemente el aprendizaje ya que ofrece procedimientos de interpretación*” (Duval R. , 1999) *pág.* 59 de esta forma se espera que en un momento del aprendizaje del concepto de función lineal, el estudiante consiga diferenciar el concepto de sus representaciones semióticas y son las actividades de articulación entre registros las que pueden favorecer esta diferenciación.

La noción de función puede ser representada en diferentes registros:

En el *registro verbal* la función lineal presenta como representación una descripción en lenguaje natural, si se desea estudiar un fenómeno o resolver una situación problema que requiera ser modelado con una función, generalmente se tiene una descripción en lenguaje natural; en el *registro tabular* la función lineal es representada por medio de una tabla de valores, en la cual se ponen en correspondencia las variables; sin embargo, tiene las limitaciones de la continuidad ya que se pueden incluir un número finito de valores; en el *registro gráfico* una función lineal se puede representar por medio de una línea recta (Continua o no) en el plano cartesiano; en el *registro algebraico* la función lineal se representa por medio de una expresión algebraica o fórmula, que permite calcular la imagen $f(x)$ para toda x correspondiente al dominio de la función; en el *registro simbólico de los conjuntos* la función lineal se representa, como un conjunto de pares ordenados, que para su enseñanza en el grado octavo se prefiere expresarlo por extensión y no por comprensión por su alto nivel de abstracción , el *registro figural* el cual pone en juego, la

relación de correspondencia entre los elementos del conjunto de partida, llamado también el dominio y el conjunto de llegada, llamado rango de la función y por último en el registro icónico en el cual una función es como una máquina, posee una entrada a la que se le suministran unos datos y una salida en donde se obtiene un valor.

Al conjunto de valores de la variable para los que la función existe (para los que la 'máquina' funciona) se llama dominio de la función.

Este ejercicio investigativo obedece a una metodología cualitativa interpretativa y como instrumentos para recoger la información se utilizaron dos cuestionarios; el primero tuvo como propósito caracterizar las conversiones que realizan los estudiantes antes de tener un contacto formal con el concepto (Ver anexo 1). El segundo, es un cuestionario con cuatro situaciones contextualizadas susceptibles de ser modeladas con una función lineal, durante el aprendizaje del concepto, las cuales están dadas en el registro verbal y las preguntas del cuestionario motivan al estudiante a realizar conversiones en diferentes registros (Ver anexo 2). La investigación se encuentra enmarcada en la teoría de registros de representación semiótica de Raymond Duval 1999 Y Bruno D' Amore 2004

En la primera fase de la Investigación se indagó por las representaciones semióticas del concepto de función lineal, tomando como referente investigativo el enfoque Semiótico de Duval (1999).

Desde este enfoque se tomó como referente los registros de representación semiótica y su relevancia en el aprendizaje de los conceptos matemáticos y específicamente en el aprendizaje del concepto de función lineal. Este enfoque ha sido desarrollado por Duval (1999) el cual plantea la conversión de registros de representación como actividad

fundamental para la aprehensión de los objetos matemáticos, también planteado por Bruno D'Amore (2004), enfoque que se fundamenta en la noción semiótica de registro de representación.

En la segunda fase se realiza un análisis de las producciones de los estudiantes, desde las cuales se exploran los registros en los que hacen transformaciones cognitivas (tratamiento y conversión), la forma en que las hacen y la coordinación de diferentes registros de representación del concepto matemático función lineal, siendo “*la conversión de registro*” la actividad que centra la atención de la investigación.

La tesis se ha dividido en cinco capítulos:

En el primer capítulo se plantean el problema, la justificación y los objetivos de investigación.

En el segundo capítulo se presentan los antecedentes y los aportes relacionados con el concepto matemático función lineal. En el marco teórico se establecen los elementos propios de la teoría de registros de representación semiótica de Raymond Duval y Bruno D'Amore las cuales constituyen el sustento teórico de esta investigación, también se establecen las características particulares de los registros de representación semiótica del concepto función lineal. A partir de este referente se diseñaron los instrumentos y se obtuvieron elementos para el análisis de los mismos.

El tercer capítulo contiene la metodología de investigación que corresponde al enfoque cualitativo, las categorías de estudio y los instrumentos de recolección de la información, planteados desde las representaciones semióticas del concepto de función lineal. El proceso de investigación se desarrolló en dos momentos; en el primero, se llevó a cabo el estudio de los saberes previos de los estudiantes, en el que se aplicó un cuestionario para explorar las representaciones de la función lineal que los estudiantes reconocen y en el segundo momento los estudiantes desarrollaron en grupo diferentes situaciones susceptibles de ser modeladas por el concepto de función lineal con el fin de analizar las conversiones a partir de los tres criterios de congruencia entre representaciones semióticas, *correspondencia semántica*, *univocidad semántica* y *conservación del orden*; conversiones que realizaron los estudiantes de las diferentes representaciones del concepto en la solución de dichas situaciones.

En el cuarto capítulo se presentan la descripción y el análisis de la información obtenidas en el grupo de estudiantes participantes en la investigación, a partir de los elementos teóricos, lo que implicó el estudio de las unidades significantes del concepto, situarlas en correspondencia en diferentes registros y el análisis de los fenómenos de congruencia y no congruencia que se exponen en la conversión de registros de representación semiótica propios del concepto de función lineal.

En el quinto capítulo se presentan las conclusiones de la investigación, en primer lugar se plantean las que provienen del análisis de los resultados de cada uno de los instrumentos, y en segundo lugar las que surgieron durante el desarrollo del estudio además se plantean las recomendaciones para los docentes de matemáticas y para estudios posteriores.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO EL PROBLEMA, JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS

1.1 Planteamiento del problema

Generalmente en el entorno escolar el concepto de función *“se concibe como una fórmula estática ya establecida, como un producto acabado que requiere ser memorizada”* Vasco, (1999) es esta concepción la que le ha restado importancia como herramienta matemática potente que permite modelar fenómenos de la vida cotidiana del sujeto como lo afirma el autor *“Aunque las Matemáticas son una gran construcción del hombre, producto de dos mil años de trabajo, es importante generar en el estudiante ese deseo de construir las matemáticas y no enseñarla como un producto acabado”* (Vasco, 1999, pág. 50) de la misma forma *“Los conceptos y los teoremas explícitos no forman sino la parte visible del iceberg de la conceptualización”* (Vergnaud, 1990) pág.7

El concepto matemático *función* se concibe como una herramienta eficaz para modelar situaciones de cambio, y es la noción de dependencia entre variables la que involucra la existencia de una relación entre cantidades, la cual implica la idea de que un cambio en una de las variables tendrá efectos sobre las otras.

Es indispensable que el estudiante reconozca la diferencia entre el concepto de función, en este caso la función lineal y sus representaciones en los diferentes registros, por ello se hace necesario que el estudiante, identifique sus unidades significantes, encuentre la

correspondencia de las unidades de una representación con respecto a las unidades estructurales de la otra representación y haga conversiones de una representación semiótica a otra en diferentes registros.

Se considera que el estudiante se apropia del concepto matemático, cuando realiza conversiones entre los diferentes registros de representación como lo expresa Hitt citado por Planchart, (2005) *“Un determinado concepto es estable en un individuo si puede articular las diferentes representaciones del concepto sin contradicciones”*.

Esta investigación es una propuesta de aprendizaje del concepto de función partiendo del reconocimiento de las representaciones semióticas que hacen aprehensible el concepto matemático, de su utilización en diferentes escenarios y también de la *conversión*² que el sujeto hace de una representación semiótica a otra, en diferente registro.

² *Conversión* según (Duval 1999) es una actividad cognitiva que consiste en la transformación de una representación propia de un registro en otra representación perteneciente a otro registro de representación

1.2 Justificación

“El reto de una investigación sobre la enseñanza de las matemáticas no es solo saber cuáles contenidos enseñar y de qué manera introducirlos en clase, sino también analizar las razones estructurales de los problemas de comprensión con los cuales se enfrenta la mayoría de alumnos de todos los niveles de enseñanza”. (Duval, 2004)

Enseñar y aprender matemáticas se constituyen en actividades que tienen como finalidad la construcción del conocimiento, es labor del docente indagar cómo aprenden los estudiantes, que actividades favorecen la enseñanza de los objetos matemáticos y reflexionar sobre el alcance que estas tienen en el aprendizaje.

En el estudio del concepto matemático función lineal, se hacen presentes las representaciones semióticas del concepto, por la naturaleza intangible del objeto, ya que se parte de la idea que dicho concepto matemático no es accesible para el sujeto sino a través de sus representaciones.

Los procesos de *conversión* no son frecuentemente realizados por los estudiantes con el grado de conciencia acerca de la mejor estrategia que se debe emplear para poner en correspondencia sus *unidades significantes*, es decir no es una actividad espontánea, requiere ser propiciada por el docente quien de manera intencional debe provocar la realización de estas actividades cognitivas.

El presente trabajo pretende aportar elementos que promuevan las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de representaciones semióticas del concepto matemático función lineal.

Se espera aportar a la construcción de modelos de enseñanza de las matemáticas a través del reconocimiento de las representaciones semióticas del concepto de función lineal, las actividades cognitivas de tratamiento y conversión y su importancia en el aprendizaje de las matemáticas en contextos de Educación Básica y Media.

Con esta investigación se busca identificar los aportes didácticos que favorecen el tratamiento y la conversión de representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto matemático que servirá de base para nuevas investigaciones y para los docentes de matemáticas con el fin de complementar su quehacer en el aula ya que las representaciones semióticas y las actividades cognitivas de tratamiento y en especial la conversión de registro favorecen la conceptualización del concepto función lineal.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Comprender las actividades cognitivas de *tratamiento y conversión* de las representaciones semióticas que realizan los estudiantes cuando se enfrentan a la solución de situaciones propias del concepto de función lineal.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Identificar el papel que cumple el *tratamiento y la conversión* de representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de Función Lineal.
- Reconocer las actividades cognitivas *de tratamiento y conversión* que realizan los estudiantes de las representaciones semióticas del concepto matemático Función Lineal.
- Identificar el aporte de otros aspectos didácticos que posibilitan el *tratamiento y la conversión* de representaciones semióticas en el concepto de Función Lineal.

CAPITULO 2

ESTADO DEL ARTE Y REFERENTE TEÓRICO

2.1 Estado del arte

El concepto de función ha sido estudiado en diversos momentos y con diferentes enfoques lo que indica que es un concepto matemático de gran importancia para la didáctica de las matemáticas.

Para esta investigación se referencian los siguientes resultados investigativos sobre el concepto de función:

(Duval, 1992) En su trabajo titulado *Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros* pone en evidencia cómo la vía del punteo (hacer la lectura de las coordenadas de un punto sobre la gráfica) es inadecuada para hacer una interpretación global de la gráfica cartesiana, ya que esta requiere de la articulación de la variable visual de la representación gráfica con la unidad significativa de la representación algebraica, ya que el tratamiento centra su atención en leer puntos aislados, y no permite establecer la relación entre la pendiente (m) y la dirección de la recta por ejemplo, convirtiéndose en un obstáculo que frena el proceso de conversión de hallar la expresión algebraica que representa.

También expresa que la articulación entre los registros gráfico y algebraico no queda establecida luego del estudio de las funciones afines. A esto atribuye directamente al desconocimiento de las reglas de correspondencia semiótica que existen entre el registro de

representación gráfico y el registro algebraico, de la misma forma al desconocimiento de los fenómenos de *no congruencia*³ entre registros de representación.

También se refiere a la interpretación global de la gráfica cartesiana que requiere de la articulación de la variable visual de la representación gráfica con la *unidad significativa* de la representación algebraica, mientras los tratamientos referentes a la acción de localizar y leer puntos aislados y a los procesos de interpolación y extrapolación para obtener valores, desvían la atención de las características generales de la gráfica y centran su atención en los puntos, lo cual se convierte en un obstáculo para la interpretación global.

En su investigación Duval (1992) aplica a los estudiantes una prueba de diez preguntas, en las cuales deben relacionar gráficas de funciones lineales con sus correspondientes expresiones algebraicas.

Los resultados hicieron evidentes las dificultades para hacer conversiones desde el registro gráfico al algebraico, al efectuar una interpretación global de las gráficas, ya que los estudiantes en su mayoría eligieron la vía del punteo.

En su investigación Duval (1992) concluye que la traducción del registro gráfico al registro algebraico necesita de una identificación exacta de las *unidades significantes*⁴ de la representación gráfica y del reconocimiento de las unidades significantes en la escritura simbólica correspondiente.

³ Duval menciona que la conversión entre dos representaciones es *congruente*, si al segmentar cada una de las representaciones en sus unidades significantes para ponerlas en correspondencia, se cumplen tres criterios: correspondencia semántica entre las unidades significantes propias de cada registro, univocidad semántica terminal y conservación del orden de organización de las unidades significantes en las representaciones.

⁴ Se entiende por *unidades significantes* los valores que pueden tomar las diferentes variables en cada registro de representación.

Esta investigación permitió reconocer las dificultades que presentan los estudiantes al realizar conversiones del registro gráfico al registro algebraico debido a la falta de *congruencia* entre el registro gráfico y el registro algebraico, los estudiantes generalmente desagregan las gráficas por partes y no las observan globalmente, esto se convierte en un obstáculo.

La investigación de (Guzmán, 1998) "*Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes*" *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* En su experiencia se apoya en la teoría de Duval para explorar el sentido que tienen para algunos estudiantes de ingeniería ciertas nociones asociadas al concepto de función, en términos de los registros gráfico, algebraico y verbal.

A partir de una revisión de las respuestas de 75 estudiantes de cálculo diferencial de primer año de ingeniería, en un cuestionario de 16 preguntas conceptuales

Las conclusiones más importantes de la investigación de Guzmán fueron:

- Se evidenció el hecho de que no se ha dado suficiente importancia a la relación que existe entre las diversas formas en que es posible representar una función.
- En general los estudiantes son "*mono registros*" lo cual indica que sus respuestas están dadas en el registro en que es formulada la pregunta, en algunas ocasiones acuden al registro algebraico, pero en la mayoría de los casos no coordinan dos registros o más.
- Las respuestas de los estudiantes revelan cierta dificultad para dar explicaciones verbales, lo cual sugiere que el registro del lenguaje natural debe tener mayor relevancia dentro del aula.

- La traducción de un lenguaje a otro y la coordinación de registros no es una meta de enseñanza que se tome en cuenta explícitamente y esto evidentemente no favorece ni ayuda a los estudiantes a formular sus explicaciones.

“Muchas veces los estudiantes saben más de lo que son capaces de expresar y redactar, lo que es fácil comprobar en entrevistas con ellos: dar una explicación verbal es más fácil que darla por escrito.” (Guzmán, 1998)

- Los análisis descubren insuficiencias conceptuales como producto de la falta de coordinación para hacer conversiones entre los registros algebraico, gráfico y lenguaje natural; lo cual no nace de manera espontánea sino que requiere de un aprendizaje.
- Los estudiantes no demuestran habilidad para leer e interpretar los gráficos movilizando conceptos pertinentes que aprendieron en lenguaje formal o natural.
- Cuando la pregunta está formulada en el registro gráfico, las respuestas hacen referencia a lecturas gráficas que describen la visualización de un hecho sin explicaciones de las mismas. Las respuestas aluden a una lectura
- No se observa interés de parte de los estudiantes, en hacer corresponder las *unidades significantes* de los registros gráfico y algebraico.

En la investigación de Guzmán se puede identificar la ausencia de articulación entre los diversos registros de representación semiótica del concepto de función, pues es evidente en los procedimientos de los estudiantes la utilización de un solo registro de representación semiótica, además se privilegia el uso del registro algebraico y, en reducidas ocasiones, utilizan otro registro de representación espontáneamente a no ser que sea solicitado.

Planchart (2000) en su tesis doctoral, *“La visualización y la modelación en la adquisición del concepto de función”*, Universidad Autónoma del Estado de Morelos reconoce que los estudiantes denotan deficiencias en el trabajo con el concepto de función y para favorecer la solución de este problema plantea una forma de enseñanza enmarcada en las representaciones semióticas del concepto matemático, la visualización, la modelación y la tecnología. Presenta a los estudiantes ejercicios de modelación y simulación con la ayuda de la tecnología, que requieren para su solución la articulación de diferentes registros de representación.

Los hallazgos más importantes obtenidos en este estudio son los siguientes:

- Para algunos estudiantes el realizar la conversión del registro gráfico al registro algebraico presenta mucha dificultad y en el registro tabular habitualmente esperan que respondan a una ecuación, poniendo en duda que representen una función.
- Los estudiantes frecuentemente tienden a pensar que las funciones deben ser continuas, lo cual es favorecido en numerosos casos por el docente quien denota una gran preferencia por las funciones continuas definidas con una fórmula única.
- Presentan dificultades en la notación de las funciones, lo que remite a un manejo inadecuado de las reglas de formación propias del sistema algebraico.
- En su mayoría los problemas son respondidos en el registro gráfico, quizás por producto del trabajo visual con tecnología.
- En los ejercicios que corresponden a situaciones físicas presentan dificultades para hacer la conversión al registro algebraico, ya que se requiere de un mayor razonamiento para identificar las variables y combinarlas. Cuando se solicitó pasar de la situación en registro

verbal al registro gráfico, en numerosos casos los estudiantes señalaron la forma de la gráfica correctamente sin lograr dar justificaciones, lo que induce a pensar que realizaron una traslación icónica

- La modelación es una herramienta que favorece en gran medida que los estudiantes puedan coordinar y hacer conversiones en los distintos sistemas de representación.

En este estudio se evidencia la dificultad que presentan los estudiantes para realizar conversiones desde el registro gráfico al registro algebraico, además utilizan el registro tabular como un registro intermedio que les ayuda a transitar desde el registro algebraico al gráfico, poniendo en duda que también es una representación del concepto de función.

Por otro lado (Gutierrez, 2007) en su tesis de Maestría *“Caracterización de tratamientos y conversiones: El caso de la función afín en el marco de las aplicaciones”*. Universidad Pedagógica Nacional, Colombia. Realiza una caracterización de las transformaciones que efectúa un grupo de estudiantes de la Escuela Colombiana de Ingeniería, cuando se proponen situaciones de variación que se modelan mediante la función afín, para lo cual el grupo investigador estudia sus producciones escritas.

El estudio de Gutiérrez (2007) se enmarca en la teoría de registros de representación de Duval, de donde se toman elementos que precisan el marco conceptual desde el cual diseñan unas situaciones de variación para los estudiantes y las categorías de análisis de los resultados.

La investigación recurre a la metodología cualitativa interpretativa y como instrumento de recolección de datos presenta un cuestionario que consta de tres situaciones de variación referentes a contextos de desocupado de tanques, posición y temperatura, las cuales se

caracterizan por estar dadas en registro verbal, no hacen explícito el registro de representación de la respuesta y contemplan fenómenos de no congruencia.

Entre los resultados se encontró que los estudiantes presentan gran diversidad de transformaciones (*tratamientos y conversiones*) para solucionar las situaciones de variación propuestas, aunque sus producciones escritas muestran un bajo nivel de articulación entre registros, debido a los fenómenos de no congruencia entre registros, asimismo, las representaciones que hacen en un registro diferente al verbal varían de acuerdo al contexto de la situación.

(Casallas, 2008) en su tesis de maestría *Situaciones de validación en el aula de matemáticas en torno a la función lineal*, Universidad Pedagógica Nacional de Colombia plantea su investigación en torno a las prácticas evaluativas en la Educación Básica Secundaria relativos al concepto de función lineal dentro del Campo Conceptual Multiplicativo (Vergnaud, 1990) Centrado en la evaluación como fenómeno didáctico, analizando desde las relaciones que se establecen entre el maestro - el saber – el alumno. Su investigación busca Caracterizar el tipo de situaciones que se abordan en torno al concepto de función lineal dentro del CCM en los grados octavo y/o noveno de Educación Básica.

La función lineal en el CCM (Campo Conceptual Multiplicativo), permite reconocer los adelantos en el aprendizaje y desarrollo de competencias multiplicativas, lo que empieza en la Educación Básica con las variedades de situaciones de multiplicación de estructura más simple, haciéndose cada vez más complejas no sólo por la estructura de esas situaciones, sino por las cantidades que intervienen, así como por la evolución a diferentes dominios de experiencia.

Es posible decir que lo que determina el avance en el perfeccionamiento de la competencia multiplicativa de cada estudiante al finalizar la Educación Básica es el hecho en de que éste reconozca la función lineal y sus propiedades como una herramienta más potente en el tratamiento de situaciones de tipo multiplicativo.

En esta investigación es posible reconocer como el aprendizaje del concepto matemático función lineal permite fortalecer la solución de situaciones inmersas en el campo conceptual multiplicativo.

Las investigaciones antes descritas coinciden en que hay ausencia de articulación entre los diferentes registros de representación semiótica del concepto de función, también mencionan que los estudiantes no reconocen el comportamiento global de las gráficas y que no establecen relaciones entre las representaciones gráfica y algebraica de una función.

En estos estudios también se evidencia la importancia del uso de múltiples representaciones en la conceptualización del objeto matemático función y la tecnología como componente que promueve una interacción simultánea entre varios registros de representación semióticos, lo cual favorece a una mejor comprensión.

Las investigaciones que estudian las funciones y sus múltiples representaciones, coinciden indirectamente en que la conversión entre registros de representación es una de las causas de las dificultades que presentan los estudiantes en la conceptualización de las funciones. Esto se debe a la falta de discriminación de las unidades significantes propias de cada registro semiótico, la falta de una interpretación global de las gráficas cartesianas, la tendencia de los estudiantes a mecanizar los procedimientos en un solo registro, sin articular

los diferentes registros también la idea de que los registros gráfico y tabular son sólo registros intermedios, y el predominio de la utilización del registro algebraico sobre los otros registros de representación.

No obstante estas investigaciones han explorado la conversión de un registro a otro, solo se ha concluido que hay dificultades y solo un estudio el de (Gutierrez, 2007) analizó las conversiones a la luz de la congruencia y no-congruencia entre registros, lo que implica el análisis de las situaciones propuestas en términos de las unidades significantes.

En las investigaciones reportadas en los antecedentes, el registro de llegada de la conversión se hace explícito, pero en ningún caso se promueve que el estudiante elija el registro de llegada y de una respuesta a los interrogantes.

2. 2 Referente Teórico

2.2.1 Teoría de las representaciones semióticas

Según (Duval R. , 1999) existen por lo menos dos características de la acción cognitiva involucrada en las habilidades matemáticas. Por una parte se acude a diversos registros de representación semiótica, algunos de ellos han sido concretamente desarrollados para realizar tratamientos matemáticos. Y, de otra parte, los objetos matemáticos no son accesibles mediante la visualización, como ocurre con la mayoría de los objetos en las otras disciplinas.

Partiendo de estas posturas, Duval plantea dos preguntas claves relacionadas con el aprendizaje: *¿cómo aprender a cambiar de registro?* y *¿cómo aprender a no confundir un objeto con la representación que se hace de él?* (Duval R. , 1999)

Puesto que la actividad matemática relaciona generalmente tratamientos y conversiones, la diferenciación de registros de representación, la coordinación y conversión entre ellos constituyen los dos puntos claves para el aprendizaje.

Las representaciones semióticas juegan un papel primordial en la enseñanza de las matemáticas, ya que son las representaciones las que permiten el acceso a los objetos matemáticos, considerando que las matemáticas, a diferencia de otras ciencias, están contenidas de objetos no tangibles. *“la actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación”*. (Duval R. , 2006)

El campo del aprendizaje de las matemáticas involucra un análisis de procesos cognitivos como es la conceptualización, estos procesos requieren de la utilización de sistemas de representación diferentes a los del lenguaje natural, ya sea algebraico, geométrico, gráfico,

simbólico, tabular, esquemas, imágenes... *“que toman el estatus de lenguajes paralelos al lenguaje natural para expresar las relaciones y las operaciones”* (Duval R. , 1999)

El Concepto se hace accesible a través de diferentes representaciones, el estudiante debe diferenciarlas del objeto matemático, de otra manera no podría haber conceptualización, pues ésta se perdería cuando se confunde el concepto con su representación *“Es esencial no confundir jamás los objetos matemáticos, es decir, los números, las funciones, las rectas, etc.; con sus representaciones”* (Duval, 1999)

Existen diferencias entre las representaciones mentales y las representaciones semióticas. Las representaciones mentales están conformadas por todo el conjunto de concepciones o imágenes mentales que un individuo tiene acerca de un objeto y las representaciones semióticas son las producciones constituidas por el empleo de signos, no son más que el medio por el cual disponen los individuos para exteriorizar sus representaciones mentales, para hacerlas visibles y accesibles a otros. Éstas, además de cumplir una función de comunicación, tienen una función de objetivación, son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma, del funcionamiento cognitivo del pensamiento, del tratamiento de la información, de la toma de conciencia y de la comprensión.

Según las investigaciones de (Duval, 1992), (Guzmán, 1998) y (Gutierrez, 2007) que se han podido desarrollar en el aprendizaje de las matemáticas se ha logrado demostrar que cambiar la forma de una representación es para muchos alumnos una operación difícil ya que no ponen en correspondencia las unidades significantes en cada uno de los registros, la falta de una interpretación global de las gráficas cartesianas, la tendencia de los estudiantes a mecanizar los procedimientos en un solo registro *“Todo sucede como si para la gran*

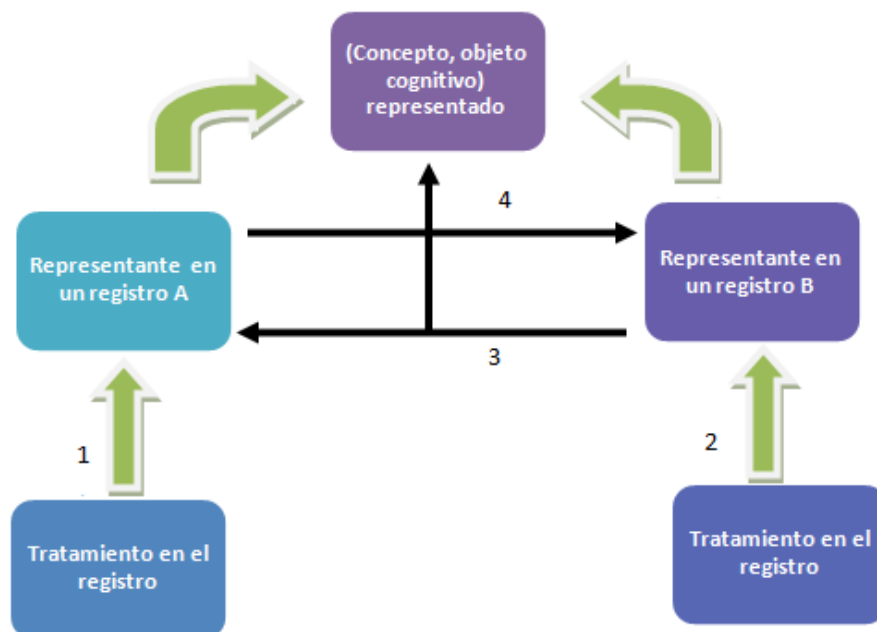
mayoría de los alumnos la comprensión que logran de un contenido quedara limitada a la forma de representación” (Duval, 1999).

El papel de la Semiosis, suscita pues procesos que se involucran en el funcionamiento del pensamiento, el desarrollo de los conocimientos y las condiciones para realizar la diferenciación en las representaciones semióticas entre representante y representado.

Sobre los sistemas semióticos considerados desde un punto de vista de su diversidad y su papel con el funcionamiento del pensamiento, Duval, plantea tres actividades cognitivas inherentes a toda representación: La primera son las representaciones de un registro semiótico particular, la cual constituye un conjunto de marcas perceptibles e identificables que permiten expresar o evocar un objeto como una representación de alguna cosa en un sistema determinado, esta representación debe cumplir con unas reglas de conformidad, por razones de comunicación y de transformación de representaciones llamada *formación*. La segunda son las transformaciones de la representación dentro del mismo registro donde se ha formado de acuerdo con unas únicas reglas que le son propias al sistema, de modo que a partir de éstas se obtengan otras representaciones que puedan constituirse como una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales se denomina *tratamiento* de una representación y hace referencia a la transformación de esta representación en el mismo registro donde ha sido producida es decir, se refiere a la transformación interna en un registro, debido a esto cada tratamiento requiere el reconocimiento y aplicación de las reglas propias a cada registro.

Por ejemplo, se realiza un tratamiento cuando se tiene una ecuación y se hace una simplificación de la misma. Y la tercera es la transformación de una representación dada en un registro, en otra representación en un registro diferente, que conserva parte del

significado de la representación inicial pero al mismo tiempo da otras significaciones al objeto representado. A esta habilidad para cambiar de registros de representación semiótica, el poder convertir las representaciones producidas de un sistema de representación a otro sistema, de manera que este otro sistema permita explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado se le denomina *conversión*. Por ejemplo, se hace una conversión cuando al tener una ecuación construimos una gráfica a partir de ella.



Adaptado de (Duval 2006)

Ilustración 1 Representaciones Semióticas (tratamiento y conversión)

Un ejemplo de tratamiento y conversión, se da en el siguiente ejemplo citado por (Duval 2006.)

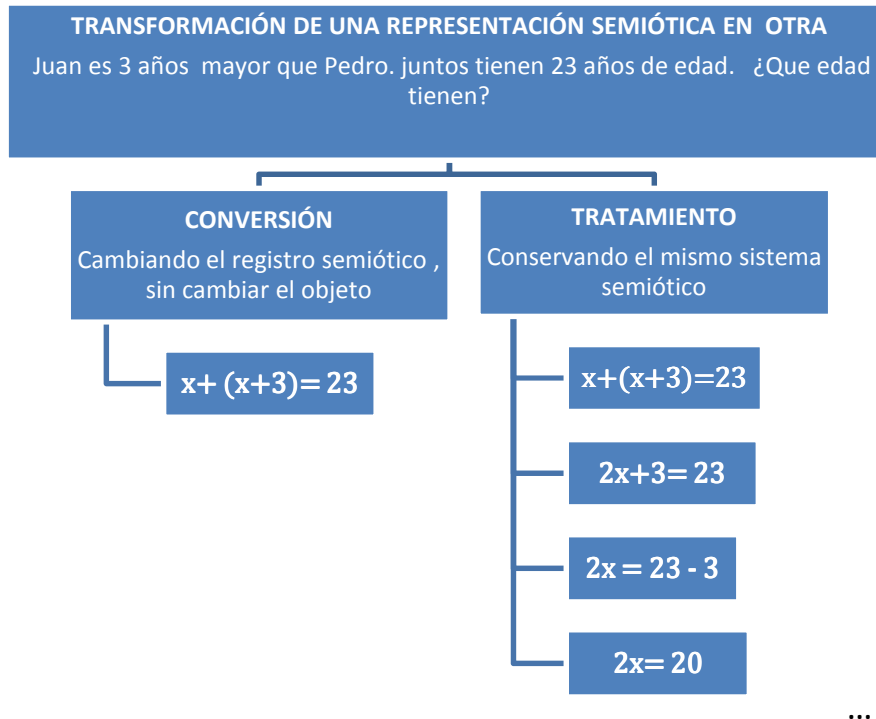


Ilustración 2 Tratamiento y conversión de representaciones semióticas

Duval (1999) expresa que la conversión de las representaciones semióticas se constituye en la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de alcanzar para la gran mayoría de los alumnos. Entre los aspectos que dificultan esta transformación, algunos hacen referencia a la comprensión de un contenido limitado algunas veces a la representación en que se aprendió, la falta de coordinación entre los registros o el desconocimiento de alguno de los dos registros de representación.

(Duval R. , 1999) concluye que la conversión posee dos características, la primera hace referencia a que tiene una orientación, señala que son conocidos tanto el registro de partida como el registro de llegada y la segunda expresa que la conversión entre registros

de representación semiótica puede ser o no congruente. Es importante indicar que no existen reglas de conversión que permitan hacer el paso de un registro a otro, lo cual puede dificultar su realización.

El autor expresa que *“La comprensión de algo, sea un texto o una imagen, moviliza ya sea actividades de conversión y de formación, o bien las tres actividades cognitivas”* (Duval, 1999). No obstante, la enseñanza habitualmente favorece el trabajo relacionado solamente con los tratamientos dejando de lado los procesos que involucran la conversión (Guzmán, 1998) y en los casos en que se favorece esta última actividad se ha mostrado que el registro de partida más usado es el algebraico, lo que conduce a que los estudiantes tiendan a dar sus respuestas en términos de éste; al respecto, Vinner citado por (Planchart, 2000) afirma. *“la preferencia por lo algebraico se debe a la creencia que la prueba algebraica es más aceptada dentro de la matemática que la prueba visual...”*

Sobre la *congruencia* y *no congruencia* entre registros de representación, Duval expresa que la actividad de conversión de una representación a otra en diferente registro es congruente, si al fragmentar cada una de las representaciones en sus *unidades significantes*, es decir los valores que pueden tomar las diferentes variables, para ubicarlas en correspondencia, deben ser cumplidos tres criterios, el primero *correspondencia semántica* entre las unidades significantes propias de cada registro, este criterio se refiere a que a cada unidad significativa del registro de partida se asocia con una unidad significativa elemental en el registro de llegada, el segundo criterio *univocidad semántica terminal* hace referencia a que cada *unidad significativa* elemental de la representación en el registro de partida le corresponde una única *unidad significativa* elemental en el registro de llegada y el tercero

conservación del orden de organización de las unidades significantes en las representaciones, establece que existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en las dos representaciones de los dos registros.

Con relación a lo anterior, es de anotar que tanto el lenguaje natural, como el lenguaje simbólico, las tablas, los gráficos, los esquemas, las imágenes, el lenguaje algebraico, permiten estas actividades y que la relación entre semiosis y noesis se da cuando se cumplen estas tres acciones de representación *“No se puede suponer que el contenido representado es separado de la forma que lo representa, como si la noesis fuera independiente de la semiosis” (Duval, 1999)*

En el análisis de desarrollo de pensamiento y los problemas de aprendizaje de las matemáticas, el trabajo realizado por Duval (1999) quien plantea tres fenómenos, que se encuentran muy relacionados entre sí, los cuales se refieren a:

- a) Diversificación de los registros de representación semiótica: Ya que los diferentes sistemas de representación son muy diferentes entre sí y cada uno de ellos plantea preguntas sobre el aprendizaje.
- b) Diferenciación entre representante y representado o entre forma y contenido de una representación semiótica: Diferenciación que está asociada a la comprensión de los que representa una representación y la posibilidad de asociar otras representaciones e integrarlas a los procedimientos de tratamiento.
- c) Coordinación de diversos registros de representación: El cual se refiere no solo a conocer las reglas de correspondencia entre dos sistemas semióticos diferentes, sino

los fenómenos de congruencia entre las representaciones producidas en los diferentes sistemas.

Las representaciones semióticas son representaciones que son conscientes y externas, que permiten mirar el objeto a través de la percepción de estímulos, ya sea puntos, trazos, carácter y que tienen un valor de significantes. Y las representaciones mentales son las que permiten “mirar” el objeto en la ausencia total del significante perceptible, en donde se incorporan los conceptos, las nociones, las ideas, como también las creencias. En síntesis, todas aquellas proyecciones que reflejan los conocimientos, los valores que un individuo comparte con su alrededor.

Ya que esta investigación centra su interés en la habilidad de cambios de registro de representación y su tratamiento a través de la cual un concepto matemático es representado, y a partir de estos diferentes registros de representación se organicen propuestas didácticas para su coordinación, ya que en la enseñanza se privilegian procesos que tienen que ver con la formación y tratamiento de representaciones semióticas, pero como lo plantea (Duval 1999.)

“Lo que se observa de manera más protuberante es que el lugar dado a la conversión de las representaciones de un registro a otro es mínimo si no nulo”. Así como los resultados de otras investigaciones planteadas por el autor, la conversión de representaciones semióticas es uno de los procesos cognitivos más difíciles de adquirir para la mayoría de los alumnos.

“La conversión requiere que se perciba la diferencia entre lo que Frege llamaba el sentido y la referencia de los símbolos o de los signos, o entre el contenido de una representación y lo que

ésta representa” (Duval R. , 2006) pág.46 ya que si no se percibe esta diferencia la conversión resulta imposible o incomprensible.

La conversión de una representación que consiste en transformarla a una representación en otro registro conservando la totalidad o una parte del contenido de la representación inicial, se convierte en la actividad cognitiva de mayor complejidad, comparada con el tratamiento de una representación y es diferente e independiente de esta.

El concepto de función, puede ser representado con una representación algebraica, Tabular, gráfica cartesiana, icónica (Figural) y lenguaje natural, entre otras.

La conversión es la que permite la articulación entre los registros de representación en la enseñanza; son el resultado de la comprensión conceptual y cualquier dificultad que se presente, indica conceptos erróneos. Según (Duval R. , 2006) pág. 166. *“Es el primer umbral de la comprensión en el aprendizaje de las matemáticas”*.

Es por ello que la comprensión de un contenido conceptual se apoya en la coordinación de al menos dos registros de representación y ésta se hace evidente en la *celeridad y la naturalidad de la acción cognitiva de conversión*.

(D'Amore, 2004) plantea que una de las dificultades sentidas y que aún incita a investigar es la referente a la representación de los objetos matemáticos. *“ El transito de un concepto entre sus diversas representaciones”*; pero antes que todo, es necesario entender qué es un concepto cuya definición requiere de la mediación de aspectos de la Ciencia y la antropología.

En ocasiones se cree que el concepto se encuentra inmerso en la mente de los científicos que han dedicado una vida entera en su estudio; sin embargo, como lo afirma el autor *“Por*

lo que en la construcción de un concepto intervienen tanto el aspecto institucional (el Saber) como el aspecto personal del sujeto que accede a ese Saber” (D'amore, 2004). Lo cual indica que la construcción del concepto no corresponde solamente a la comunidad científica, cada estudiante también está en capacidad de construir los conceptos matemáticos.

Los conceptos se encuentran constantemente en construcción, y es este proceso el que permite reflexionar sobre qué es un concepto, cómo se da en el estudiante y qué actividades debe realizar el docente para promover esta construcción. *“Todo concepto matemático remite a no-objetos, por lo que la conceptualización no es y no se puede basar sobre significados que se apoyen en la realidad concreta”.* (D'amore, 2004) en primera instancia es de vital importancia reconocer el nivel abstracto que poseen las matemáticas, cuyos conceptos son intangibles, por esta razón *“Todo concepto matemático requiere de representaciones, ya que no se dispone de objetos para presentar en su lugar, por ello la construcción del concepto debe darse sobre el tránsito entre registros representativos”* (D'amore, 2004) por lo cual las representaciones son una herramienta fundamental para promover la construcción de los conceptos matemáticos.

El estudiante en su proceso de conceptualización no debe confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas; sin embargo en su aprendizaje él solo puede acceder a las representaciones de ese objeto, si no tuviera acceso ellas, tendría gran dificultad para acceder a dichos objetos Matemáticos.

“Según el maestro, según la noosfera y según el mismo estudiante, el estudiante está entrando en contacto con un objeto matemático pero, de hecho, y parece ser que ninguno se da cuenta, el estudiante está entrando en contacto solo con una

representación semiótica particular de ese objeto. El estudiante no tiene, no puede tener, acceso directo al objeto” (D'amore, 2004)

Es por esto que el estudiante confunde el objeto con su representación y cuando requiere cambiar de representación semiótica del mismo objeto, no tiene las herramientas cognitivas para lograrlo.

Para esta elaboración el estudiante requiere de un equilibrio entre el uso y producción de representaciones semióticas de los objetos matemáticos y la comprensión conceptual de los mismos. *“Por lo tanto, el mecanismo de producción y de uso, subjetivo e intersubjetivo, de estos signos y de la representación de los objetos de la adquisición conceptual, es crucial para el conocimiento” (D'amore, 2004)* de tal forma que para conceptualizar se requiere del desarrollo progresivo de las habilidades de aprehensión y producción de representaciones semióticas en el ámbito matemático por que *“Durante el aprendizaje de las matemáticas, se introduce a los estudiantes en un mundo nuevo, tanto conceptual como simbólico, sobre todo representativo”.* (D'amore, 2004)

Las representaciones semióticas son elaboraciones formadas por el uso de signos que corresponden a un sistema de representación, el cual tiene sus propios niveles de significado y de funcionamiento por ejemplo, hay objetos matemáticos que tienen múltiples representaciones como es el caso el concepto de Función Lineal *“En matemáticas, la adquisición conceptual de un objeto pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas. Lo mencionan: Chevallard (1991), Duval (1993, 1995), Godino y Batanero (1994). Citado por (D'amore, 2004)*

El concepto de función Lineal es un ente abstracto, posee diversas representaciones semióticas para facilitar su aprehensión, sin embargo *“el objeto representado puede variar*

según el contexto o el uso de la representación: En el caso de un gráfico cartesiano puede representar una función o el conjunto solución de una ecuación algebraica". (Godino J. , 2003) pág. 53

La conceptualización matemática obedece estrictamente a la habilidad de utilizar más registros de representaciones semióticas de dichos conceptos, D'Amore plantea tres acciones que son necesarias en la construcción de un concepto:

De representarlos en un dado registro

- De tratar tales representaciones al interior de un mismo registro
- De convertir tales representaciones de un dado registro a otro (D'Amore, 2004)

2.2.2 Registros de representación del concepto de función lineal

Teniendo en cuenta que el objetivo de la investigación reportada en este documento es comprender las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas que realizan los estudiantes cuando se enfrentan en la solución de situaciones propias el concepto de función lineal, se considera oportuno reconocer los registros de representación usados en matemáticas. Según (Duval, 2004) *"En matemáticas se utilizan cuatro clases de registros de representación: discursivos, no discursivos, plurifuncionales y monofuncionales"* también *"Los registros discursivos permiten describir, inferir, razonar, calcular, mientras que los registros no discursivos permiten visualizar lo que nunca es dado de manera visible"*. (Duval, 2004) pág. 51

En los registros *plurifuncionales* los tratamientos no son algoritmizables, y estos a su vez se dividen en *discursivos* en los cuales se inscribe la lengua natural, los tratamientos son descripciones, explicaciones, argumentaciones etc.

También se encuentran los *no-discursivos* donde se encuentran inscritas las figuras geométricas.

Los registros *monofuncionales* son algoritmizables, precisamente son los más favorecidos por la enseñanza, dentro de los registros monofuncionales discursivos se encuentran las representaciones numéricas, simbólicas y algebraicas.

Para finalizar, se encuentran las gráficas cartesianas que hacen parte de los registros monofuncionales *no-discursivos*, cuyo tratamiento son los cambios en escala o unidades en el sistema de coordenadas, la interpolación y extrapolación.

Teniendo en cuenta que las situaciones que se proponen a los estudiantes están expresadas en registro *plurifuncional* discursivo (lengua natural), se tiene claro que desde este registro los tratamientos no son algoritmizables, de ahí que se requieran destrezas por parte de los estudiantes para resolver las situaciones planteadas.

Duval (2004) expresa que *“todo discurso o texto involucra dos aspectos: uno relacionado con la redacción –lingüística- y el otro con los objetos de conocimiento”* es así como para comprender una situación planteada en el registro verbal (lenguaje natural) requiere realizar un tratamiento que permita comprenderla, se puede utilizar una descripción, explicación y/o argumentación, luego es en la conversión donde el estudiante debe discriminar las unidades significantes, presentes en el enunciado de la situación y poner en

correspondencia esas unidades con su expresión en otro registro esto es quizás lo que presenta más dificultad.

La actividad de *Conversión*, consiste en encontrar una representación (figural, algebraica, simbólica, gráfica, aritmética) que permita, organizar la información de la situación y de esta forma plantear el tratamiento matemático que da solución a la misma, sin embargo hay que tener en cuenta los criterios de congruencia (Correspondencia semántica, univocidad semántica terminal e igual orden posible de aprehensión) entre las unidades significantes, presentes entre el registro de partida y el registro de llegada

“el aprendizaje de las funciones se da siempre y cuando se desarrolle la capacidad del estudiante para interpretar y usar cada una de las representaciones del concepto de función.

Así mismo la capacidad de traducción de uno a otro indica la comprensión del mismo”

Janvier (1995) citado por (Gutiérrez, 2007)

Para efectos de la investigación reportada en este documento se hace necesario establecer tanto los registros de representación utilizados en matemáticas, expuestos anteriormente como las unidades significantes correspondientes a cada uno de ellos, específicamente de la función lineal concepto matemático del estudio, con el fin de determinar los elementos que se deben tener en cuenta en el diseño de las situaciones, también con la finalidad de tener un punto de referencia para el análisis de las actividades cognitivas de tratamiento y conversión que realizan los estudiantes en el proceso de hallar la solución de las situaciones, partiendo de la postura del autor cuando expresa que las relaciones en el mismo registro corresponden a tratamientos, mientras que las relaciones en diferentes registros pertenecen a conversiones.

En las actividades de conversión de registros de representación, se requiere de la discriminación de las unidades significantes de cada registro es decir los valores que pueden tomar las diferentes variables en cada registro semiótico.

El marco teórico en el cual se enmarca la investigación permitió el diseño de situaciones, las cuales están expresadas en el registro plurifuncional discursivo, el del lenguaje natural. La distinción de las variables y de las unidades significantes correspondientes en cada registro es un componente importante en esta misión, al igual que la construcción de instrumentos que permitan su análisis.

En un estudio de las representaciones semióticas asociados al concepto de función lineal, se hizo una clasificación de las representaciones semióticas y sus tratamientos, teniendo en cuenta las unidades significantes de cada representación, este ejercicio se muestra en la Tabla 3 Registros de representación semiótica del concepto Función lineal y sus unidades significantes pág. 78 de este documento, tabla elaborada a la luz de la Teoría de (Duval 1992).

2.2.3 El Concepto de Función Lineal

El concepto de función es uno de los más trabajados en Matemáticas, y su utilización no se hace únicamente en esta disciplina, su aplicabilidad se manifiesta en numerosos aspectos del conocimiento humano, pero desde el enfoque de la investigación, se refiere esencialmente a su utilización como instrumento para modelar situaciones, que desde la teoría de Vergnaud *“El campo conceptual de las estructuras multiplicativas es a la vez el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o varias multiplicaciones o divisiones”* también *“el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones: proporción simple y proporción múltiple, función lineal y n-lineal, razón escalar directa e inversa, cociente y producto de dimensiones, combinación lineal y aplicación lineal, fracción, razón, número racional, múltiplo y divisor, etc.”* (Vergnaud, 1990) Es por ello que el concepto de función se encuentra en un campo conceptual, donde obtiene múltiples relaciones con otros conceptos matemáticos y para el caso de la investigación aquí planteada se encuentra implícito en situaciones contextualizadas, con el fin de analizar las conversiones que realizan los estudiantes cuando se enfrentan a dichas situaciones de cambio, propias de este concepto matemático.

El concepto de Función lineal es muy importante porque modela algunos fenómenos, como los costos, compras, transferencias, cálculos de perímetros, pero sobre todo su aplicación en la vida cotidiana es en el sector empresarial, en el aspecto económico, en el uso de la oferta y la demanda, los cuales no solo se encuentran en contextos matemáticos sino también en contextos de las ciencias; las funciones que tienen la forma $f(x) = ax$ y $f(x) = ax + b$ son los modelos lineales más simples y representan para muchos estudiantes el primer contacto con el concepto de función.

El concepto matemático función lineal no ha sido ajeno al desarrollo social y científico de la humanidad a través de la historia, por lo cual, ha ido evolucionando simultáneamente con los avances científicos y sociales, es por ello que su definición adopta diferentes formas a lo largo de la historia, en la búsqueda de regularidades en los fenómenos sujetos al cambio, como por ejemplo, la luz, el calor, la distancia, la velocidad, etc. Adquiriendo diversos significados relacionados con los problemas que ha permitido resolver.

El concepto de función responde a diferentes definiciones producto de su construcción en las etapas históricas. Estas definiciones han sido transformadas conforme al avance y construcción de las matemáticas, estas se pueden resumir en la siguiente tabla ⁵ Citado por (Vasquez, 2008)

Se indagó en la historia de las matemáticas las etapas relacionadas con la construcción del concepto de función con el fin de encontrar ideas que permitieran resolver dificultades que se hacen evidentes en el proceso de construcción del concepto en el contexto escolar.

⁵ Adaptación a partir de: *Mathematical and Pedagogical Discussions of the Function Concept*. Seoul Apt. 2- 1002, Yoeuido-dong, Yeongdeungpo-gu, Seoul 150-010, Korea; Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education Vol. 3, No. 1, May 1999, 35-56.

Época	Definición
Siglo XVII	Cualquier relación entre variables
	Una cantidad obtenida de otras cantidades mediante operaciones algebraicas o cualquier otra
	Cualquier cantidad que varía de un punto a otro de una curva
	Cantidades formadas usando expresiones algebraicas y trascendentales de variables y
Siglo XVIII	Cantidades que dependen de una variable
	Función de cierta variable como una cantidad que está compuesta de alguna forma
	Cualquier expresión útil para calcular
Siglo XIX	Correspondencia entre variables
	Correspondencia entre un conjunto A y los números reales
	Correspondencia entre dos conjuntos
Siglo XX	Correspondencia entre dos conjuntos
	Conjunto de pares ordenados

Tabla 1 Historia de las Matemáticas (adaptado de Planchart 2005)

En el cuadro es posible identificar las formas bajo las cuales el concepto de función se ha manifestado, y se hace interesante como en sus primeras definiciones del concepto de función los elementos centrales eran la variación y la dependencia; la correspondencia entre variables se hacía presente implícitamente. Luego en una aproximación a las definiciones modernas se observa como la variación y la dependencia se hacen implícitas, y el concepto de función adopta la forma de correspondencia. Esto permite ver cómo fueron apareciendo las diversas representaciones del concepto de función durante este proceso de construcción

1. Se tiene conocimiento que desde la antigüedad el concepto de función era utilizado en forma intuitiva en prácticas tales como la de confeccionar tablas en las que se registraba el comportamiento de una magnitud sujeta a cambios de otra bajo una determinada relación. *“A partir de las tablillas de arcilla encontradas en excavaciones arqueológicas, se ha podido verificar que en la época antigua (desde la aparición de la escritura hasta*

la caída del imperio romano en el (746 d.C.) Se trabajaba con funciones en la civilización babilónica” (Wikipedia, 2011) Los babilonios crearon tablas de cuadrados de los números naturales, cubos de los números naturales y recíprocos de los números naturales. Estas tablas evidentemente definen funciones de \mathbb{N} sobre \mathbb{N}

2. [...] Pero si concebimos una función no como una fórmula sino como una relación más general que asocia elementos de un conjunto con los elementos de otro conjunto...
Ptolomeo (Wikipedia, 2011)

Ptolomeo trabajó con las funciones, ya que calculó funciones trigonométricas pero es posible que no comprendiera el concepto de función.

3. Una de las preocupaciones de la edad media, fue el estudio de las cosas sujetas al cambio, y en particular del movimiento. (Fenómenos de la naturaleza)
4. El matemático francés René Descartes (1596-1650), en el año 1637, fue el primero en utilizar en su teoría sobre Geometría Analítica la palabra función como una correspondencia, aquí denota la idea intuitiva de variable y de función, al designar una potencia x^n de variable x

El concepto de función era relacionado con los fenómenos físicos de la naturaleza en la mayoría de los cuales la variable independiente era el tiempo

5. El genio alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) retoma el término función, desde otro punto de vista, y lo utiliza por primera vez en el 1694 para enunciar su idea general de dependencia funcional al tratar varios aspectos alrededor de las curvas, pendientes,

normales, segmentos tangentes [...] Otros tipos de líneas que, dada una figura, llevan a cabo alguna función.... Leibniz 1673 (Definición no Matemática)

6. El matemático suizo Johann Bernoulli (1667-1748), destacó el componente analítico de una función [...] una cantidad formada de alguna manera a partir de cantidades indeterminadas y constantes. Johann Bernoulli (1698)

7. El suizo Leonhard Euler (1707-1783) definió que una función de una cantidad variable es “una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de la cantidad variable y de números o cantidades constantes.” (Euler 1748)

Una “expresión analítica” significa para Euler, expresiones constituidas por las operaciones básicas de suma, multiplicación, potencias, raíces y demás.

Si, por lo tanto, x denota una cantidad variable, entonces todas las cantidades que dependen de x de cualquier modo, o que son determinadas por ella, son llamadas funciones de x . (Euler 1755)

“Si algunas cantidades dependen de otras del tal modo que si estas últimas cambian también lo hacen las primeras, entonces las primeras cantidades se llaman funciones de las segundas”.

Euler llegó a la definición Moderna de Función, esta se aplica ampliamente y contiene todas las formas en que una cantidad puede ser determinada por otra.

8. *Cada cantidad cuyo valor depende de una o más cantidades se llama una función de éstas últimas, se conozca o no qué operación es necesario usar para llegar de la última a la primera. (Lacroix 1797)*
9. Al matemático alemán Peter Dirichlet (1805-1859), se le atribuye la definición formal moderna del concepto función, al plantear en el año 1837 “[...] $g(x)$ es una función real de una variable real x , si a cada número real x le corresponde un número real $g(x)$ ”
10. *“Si cantidades variables son unidas entre ellas de tal modo que el valor de una de ellas está dado, se puede llegar a los valores de todas las otras; uno ordinariamente concibe estas distintas cantidades como expresadas mediante una de ellas, la cual entonces toma el nombre de variable independiente; las otras cantidades expresadas mediante la variable independiente son aquellas a las que se llaman funciones de esta variable”. (Cauchy 1821)*
- Cauchy proporcionó una definición que hace de la dependencia entre variables, el centro del concepto de función.
11. *En general, la función $f(x)$ representa una sucesión de valores u ordenadas cada uno de los cuales es arbitrario. Dada una infinidad de valores de la abscisa x , hay un número igual de ordenadas $f(x)$. Todas tienen valores numéricos, ya sean positivos, negativos o cero. No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se siguen unas a otras de una forma cualquiera y cada una de ellas está dada como si fuera una cantidad sola. (Fourier 1822) citado por (Vasquez, 2008)*

Aunque esta es una definición que se aparta de las expresiones analíticas, pero cuando inicia la demostración de teoremas sobre la expresión de una función arbitraria como serie de Fourier, demuestra que su función es continua en el sentido moderno

12. *Una función de x es un número que está dado para cada x y que cambia gradualmente junto con x . El valor de la función puede estar dado mediante una expresión analítica o mediante una condición que ofrece una manera de probar todos los números y seleccionar uno de ellos o, finalmente, la dependencia puede existir pero ser desconocida. (Lobachevsky 1838) citado por (Vasquez, 2008)*

13. Desde esta época pasaron 85 años hasta que (Goursat, en 1923) dio la definición que aparece en la mayoría de los libros de textos hoy en día.

Se dice que y es una función de x si a cada valor de x le corresponde un valor de y . Esta correspondencia se indica mediante la ecuación $y = f(x)$.

14. Bourbaki, en 1939, definió *función* como una correspondencia entre dos conjuntos :

Sean E y F dos conjuntos, que pueden o no ser distintos. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F , se llama relación funcional en y , si para todo x en E , existe un único y en F el cual está en la relación dada con x . Damos el nombre de función a la operación que, de esta forma, asocia cada elemento x en E con el elemento y en F que está en relación con x , se dice que y es el valor de la función en el elemento x , y se dice que la función está definida por la relación dada. Dos relaciones funcionales equivalentes determinan la

misma función. (Wikipedia, 2011)

Bourbaki también formuló una definición de *función equivalente*, como un conjunto de pares ordenados:

“una función del conjunto E en el conjunto F se define como un subconjunto especial del producto cartesiano $E \times F$ ”

Las anteriores definiciones de cada uno de los matemáticos que intervinieron en la construcción del concepto de función fueron referenciadas de (Wikipedia, 2011)

Existen diversas definiciones del concepto de función que se han deducido a partir de la Historia de las Matemáticas, las siguientes definiciones fueron referenciadas de (Planchart, 2005)

- En términos de variables *“cuando dos variables están relacionadas de tal manera que el valor de la primera queda determinado si se da un valor a la segunda, entonces se dice que la primera es función de la segunda”*. *Registro algebraico*

Es una forma general de expresar una función, cuando se razona en torno a la relación establecida de una variable en dependencia con otra, se habla de una variable que está en *función* de otra.

- En forma de conjunto de pares ordenados: Al tratarse las correspondencias de dos conjuntos que determinan un conjunto de pares numéricos ordenados. *“una función es*

un conjunto de pares ordenados de elementos tales que ningunos de dos pares ordenados tienen el mismo primer elemento. El conjunto de los primeros elementos de los pares ordenados se llama dominio y el conjunto de los segundos elementos rango de la función". Registro simbólico

- Como una regla de correspondencia se explica de la siguiente manera: "una función f de un conjunto A a un conjunto B es una regla de correspondencia que asignan a cada valor de x de cierto subconjunto D de A un elemento determinado de manera única $f(x)$ de B ".

Registro figural (Diagramas de Venn)

- En términos de máquina "una función es un procedimiento P que toma una o más entradas que salidas, y que tiene la propiedad de que cualesquiera dos llamadas a P con las misma entrada regresa a la misma salida". Registro icónico
- Como relación entre conjuntos "Las funciones son relaciones o reglas que asocian los elementos de un conjunto con los de otro, de manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y solo uno del segundo conjunto. Se pueden expresar en contextos reales mediante gráficas, fórmulas, tablas o enunciados" (Godino J. D., 2003)

La investigación reportada en este documento contempla la representación del concepto de función en los registros:

Verbal: Con una frase que describe cómo la variable independiente se relaciona con la variable dependiente

Tabular- numérica: Por medio de una tabla o lista de pares ordenados que hace corresponder un valor de la variable (x) con un valor de (y)

Gráfico: Con puntos sobre una gráfica en un plano cartesiano en el cual los valores de (x) son expresados por el eje horizontal (Eje de las abscisas) y los valores de (y) por el eje vertical (Eje de las ordenadas)

Algebraico: Por medio de una ecuación de dos variables.

Simbólico: Cuya representación se da en el lenguaje de Conjuntos, por lo cual para efectos de la investigación se estudia desde la representación simbólica de conjuntos por extensión, de parejas ordenadas de un conjunto ya que la representación simbólica conjuntista por comprensión⁶ posee un alto grado de abstracción para estudiantes de grado octavo.

Figural: Expresa la correspondencia uno a uno entre las variables, haciendo uso de los diagramas de Venn

En la Formación, tratamiento y conversión de estas representaciones está comprometida la acción matemática *“Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista. Es decir dominar con fluidez distintos recursos y registros del lenguaje cotidiano y de los distintos lenguajes matemáticos”* (MEN, 1998) pág. 51

En conclusión el eje puntual para la construcción del concepto Función lineal se halla en las acciones que se logre realizar con las diversas representaciones; esto involucra acción en un

⁶ La representación simbólica conjuntista a la que se hace referencia es la que expresa el conjunto por comprensión de esta forma $f(x) = \{(x, y)/y = 3x\}$

registro, "tratamiento" y posterior coordinación entre los diferentes registros "conversión" orientada a construir el concepto hasta conseguir reconocer al concepto matemático en sus diferentes representaciones.

Por ejemplo, no se puede acceder al concepto de función a través de solo una definición, se requiere tener actividad con las diversas representaciones, con las expresiones algebraicas, tablas, números, gráficas y lenguaje natural; esta actividad involucra formación, tratamiento y conversión entre representaciones. *"Podría decirse con Raymond Duval que si no se dispone al menos de dos formas distintas de expresar y representar un contenido matemático, formas que el autor llama "Registros de representación" o "registros semióticos", no parece posible aprender y comprender dicho contenido"* (MEN, 1998) pág. 54. Este proceso conduce a la construcción del concepto de función lineal en diferentes contextos.

CAPÍTULO 3

DISEÑO METODOLÓGICO

3.1 Tipo de estudio

3.2 Metodología

Teniendo en cuenta que la investigación reportada en este informe se orientó especialmente a indagar por los tratamientos y en especial las conversiones que realiza un grupo de estudiantes cuando se enfrenta a la solución de situaciones propias del concepto de función lineal, se hace necesario darle un enfoque cualitativo interpretativo, el cual se hace comprensible a partir del diálogo con la teoría, dando sentido a lo que cada estudiante desea expresar.

El objetivo de este estudio implica hacer una caracterización de los tratamientos y en especial de las conversiones de las representaciones semióticas que realizan los estudiantes y los criterios de congruencia entre las diversas representaciones del concepto función lineal, los cuales se hacen explícitos entre los registros de representación utilizados y las relaciones que se dan entre las representaciones del concepto y las respuestas de los estudiantes.

Estos resultados son el producto de las interpretaciones que hace la investigadora a la luz de la teoría, las cuales son orientadas por las ideas que ella tiene del mundo y de la forma como éste debe ser estudiado; de este modo busca el análisis interpretativo y comprensivo de la realidad del contexto investigado.

Para Anselm Strauss y Juliet Corbin (2002), la investigación cualitativa es aquella que produce hallazgos, a donde no se llega por métodos estadísticos u otros medios de cuantificación:

“Al hablar sobre análisis cualitativo, nos referimos, no a la cuantificación de los datos cualitativos, sino al proceso no matemático de interpretación, realizado con el propósito de descubrir conceptos y relaciones en los datos brutos y luego organizarlos en un esquema explicativo teórico”. (Hernandez Sampieri, 2006) (pág. 20)

Este proceso constante de indagación permite la obtención de información proporcionada por los instrumentos, en búsqueda de la interpretación y comprensión de la realidad en el contexto del aula para la construcción de teorías en torno a la Didáctica de las Matemáticas.

3.3 Diseño de la investigación

En el presente estudio se elaboró un diseño que incluyera, la teoría de las representaciones semióticas de R. Duval, además de la teoría relacionada con el concepto matemático función Lineal, sus representaciones semióticas y la información obtenida a partir de los datos derivados de los instrumentos aplicados.

Se planteó un esquema en el cual por las características propias de la investigación cualitativa, se hace necesario acudir continuamente a la teoría, durante el análisis de los datos conseguidos en los instrumentos.

A continuación se muestra el diseño de la investigación.



Ilustración 3 Diseño de Investigación

3.4 Procedimiento

La investigación se desarrolló en dos momentos, el primer momento fue de revisión teórica sobre el concepto de función lineal, enmarcado en la teoría de las Representaciones Semióticas de R. Duval y B. D'Amore

En el segundo momento se hizo una exploración de tratamientos y conversiones realizados por los estudiantes sobre las representaciones del concepto de función lineal, con el fin de reconocer las actividades cognitivas de tratamiento y conversión que ellos realizan previo al abordaje del concepto, (Ver anexo 1.)

Luego se buscó caracterizar las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de representaciones semióticas que realizan los estudiantes del concepto de función Lineal, cuando se enfrentan a situaciones propias de este concepto matemático. (Ver anexo 2).

3.5 Unidad de análisis

La unidad de análisis de este trabajo es el tratamiento y la conversión de representaciones semióticas del concepto de función lineal que realizan los estudiantes de grado octavo en la solución de situaciones propias del concepto de función lineal.

3.6 Unidad de trabajo

Un grupo de estudiantes, con edades que oscilan entre 13 y 15 años que cursan grado octavo de la Institución Educativa Eugenio Pacelli del municipio de Manizales departamento de Caldas. Para efectos de la investigación, el análisis se hizo a 12 estudiantes los cuales fueron elegidos sin tener en cuenta su desempeño académico.

Se decidió trabajar en el colegio Eugenio Pacelli, y en el grado octavo porque la investigadora orienta clases allí, lo cual facilitaba los espacios requeridos para el desarrollo de las actividades.

3.7 Instrumentos y técnicas para la recolección de la información

Para la recolección de la información se utilizaron las técnicas de observación, grabación de audio y video, y como instrumentos se utilizaron cuestionarios escritos sobre las situaciones propias del concepto de función lineal. Los formatos aplicados en los cuestionarios se encuentran en los anexos 1 y 2

3.7.1 Técnica de video

Las grabaciones de video fueron utilizadas en la solución de las situaciones tanto en pequeño grupo como en gran grupo, con el objetivo de registrar los procesos de tratamiento y conversión de representaciones semióticas realizadas por los estudiantes cuando se enfrentan a la solución de las situaciones presentadas.

3.7.2 Cuestionario escrito

Tomando en cuenta las características de las situaciones propuestas a los estudiantes, se formularon dos instrumentos escritos, para cada uno se realizó dos pruebas piloto, que permitieron descubrir errores en la redacción y ajustar el tiempo de solución de la primera prueba a 90 minutos y de la solución de cada situación a 60 o 90 minutos.

Como resultado de este proceso se obtuvieron dos cuestionarios, un cuestionario de entrada (Instrumento 1) el cual permitió indagar sobre las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de representaciones semióticas que hacen los estudiantes sobre el concepto función lineal antes del abordaje del concepto matemático.

El segundo Instrumento con cuatro situaciones para ser resueltas en subgrupos, cada una con cuatro preguntas de respuesta abierta, a partir de las cuales se remite a los estudiantes a realizar conversiones en diferentes registros de representación.

Este instrumento consiste en un cuestionario escrito, en el que a partir las situaciones propias del concepto de función lineal, se formulan preguntas buscando favorecer la conversión entre registros, en la búsqueda de caracterizar las transformaciones hechas por los estudiantes.

De aquí se obtuvo información relacionada con las actividades cognitivas de tratamiento y conversión realizadas por los estudiantes, las unidades significantes relacionadas a la función lineal en los diferentes registros y el análisis fue de tipo cualitativo.

Se crearon situaciones contextualizadas, expresadas en el registro verbal.

- Agua limpia para todos,
- A salvar el loro Orejiamarillo
- La Antártida y el clima Mundial
- Domicilios DeliBurger

Se formaron subgrupos de tres estudiantes, a cada uno de los subgrupos se le solicitó leer la situación y responder las preguntas con respecto a su solución, esta actividad fue grabada en video y fue realizada en jornada extraescolar.

Posteriormente cada subgrupo presenta a los miembros del grupo en general la exposición de la situación, lo cual se retroalimentó con preguntas de los demás estudiantes y docente.

Adicionalmente, se realizó un ejercicio de aprendizaje con todo el grupo se planteo la situación línea telefónica, la cual pretendía observar tanto el reconocimiento de las unidades significantes del concepto dada la situación, como los procesos de tratamiento y conversión realizados por los estudiantes, de forma individual.

Esta actividad quedó grabada en video y en el ejercicio escrito, aunque el trabajo se hizo en todo el grupo en general se tuvo en cuenta la información de los doce estudiantes participantes del ejercicio investigativo.

CATEGORÍAS Y SUBCATEGORÍAS DE INVESTIGACIÓN

Categoría	Subcategorías	Indicadores
Conversión de representaciones semióticas del concepto matemático función lineal	Correspondencia	Asocia cada unidad significativa del registro de partida con una unidad significativa elemental en el registro de llegada
	Semántica	
	Univocidad semántica	Pone en correspondencia cada unidad significativa del registro de partida con una única unidad significativa en el registro de llegada.
	Igual orden posible de Aprehensión	Presenta un igual orden de aprehensión de las unidades significantes en las dos representaciones de los dos registros.

Tabla 2 Categorías y Subcategorías de Investigación

3.8 Plan de Análisis

Teniendo en cuenta la recolección de la información, el análisis de los datos se planteó de la siguiente forma:

3.8.1 Instrumento 1 (ver anexo 1)

El instrumento permitió indagar sobre las actividades de tratamiento y conversión de representaciones semióticas que hacen los estudiantes sobre el concepto función lineal previo al abordaje del concepto función lineal en clase

La primera pregunta buscó indagar sobre las conversiones que realizan los estudiantes desde el registro verbal (lenguaje natural) al registro gráfico, a través de una situación contextualizada, llamada “Camino al colegio” así:

Vanessa, Fabián, Paula, Santiago, Mónica y Luisa, viven en una urbanización cercana a la Comuna Universitaria, cuando van al Colegio, suelen hacerlo en bicicleta. La primera clase empieza a las 6:30 am, lo cual significa que deben salir de casa alrededor de las 5:45 am. Porque llegar tarde implicaría un fuerte llamado de atención, ya que la puntualidad es una característica importante para el buen desempeño escolar. La distancia de la urbanización al colegio es de 11 km. Cada Uno de ellos nos contó su recorrido, verás cómo las cosas son distintas para cada uno de ellos cuando van al colegio.

Vanessa dice: Yo siempre salgo con mucha tranquilidad y despacio, Porque a esas horas de la mañana no te puedes apresurar... además todavía está oscuro. Ya en el camino empiezo a pedalear más de prisa, porque no me gusta llegar tarde

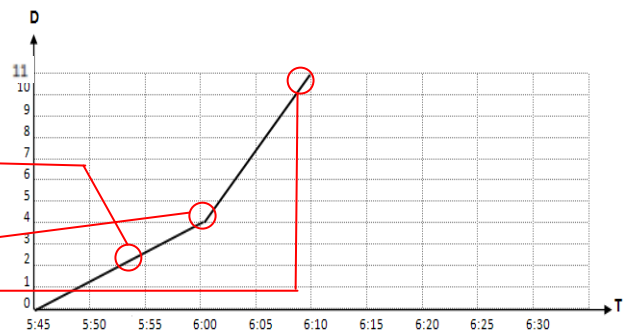


Ilustración 4 Unidades significantes y correspondencia entre el registro verbal y el registro gráfico Instrumento 1

Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal

Fabián dice: Esta mañana me fui para el Colegio en la bicicleta bien rápido, pero en la mitad del camino ¡Se daña la cadena! Trate de organizarla pero no tenía herramientas y no se mucho de mecánica, así que me toco irme caminando con mi bicicleta en la mano el resto del recorrido y lo peor es que llegué tarde al Colegio

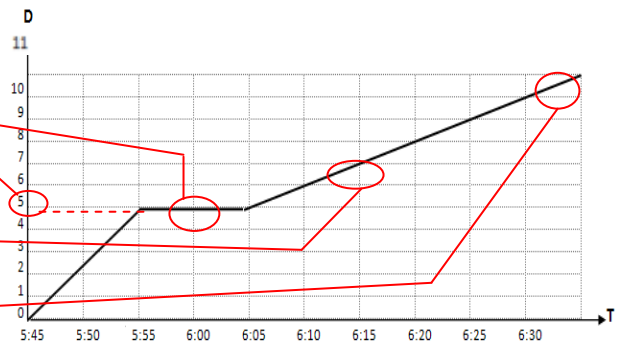


Ilustración 5 Unidades significantes y correspondencia entre el registro verbal y el registro gráfico Instrumento 1

Paula dice: Yo Salí de mi casa a la misma hora que todos, a una misma velocidad en todo el recorrido, ni muy rápido ni muy despacio y eso si no me entretuve con nada y lo mejor de todo llegué un poquito más temprano para prepararme para la clase de Matemáticas.

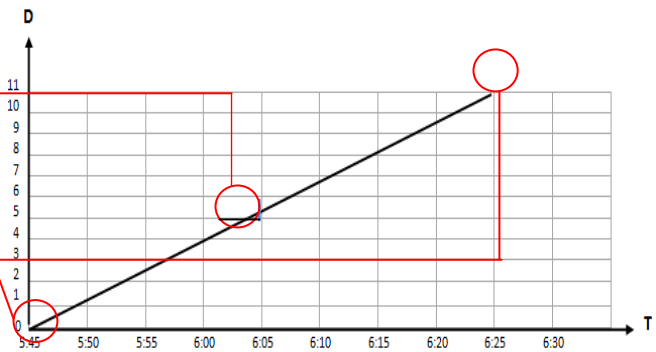
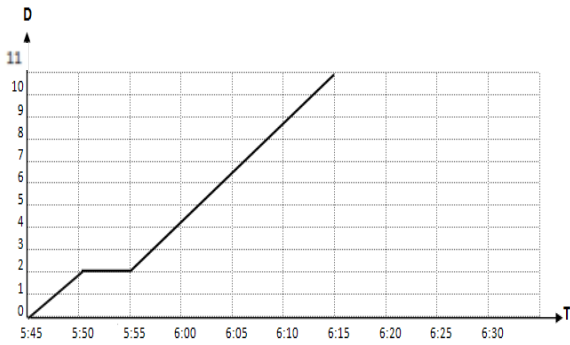


Ilustración 6 Unidades significantes y correspondencia entre el registro verbal y el registro gráfico Instrumento 1

La actividad anterior permitió si los estudiantes identificaban las unidades significantes de la situación en el registro verbal (registro de partida) y la relacionaban con la gráfica, además se buscaba observar la correspondencia que los estudiantes hacen con las unidades significantes (En el registro verbal) y las unidades significantes correspondientes en el registro gráfico (registro de llegada).

A continuación se propuso un ejercicio de conversión inverso al anterior, el cual buscaba que el estudiante a partir de la gráfica genere la historia de Santiago en el registro verbal (lenguaje Natural) y de esta forma haga explicitas las unidades significantes presentes en el registro gráfico.



Imagínate lo que pudo haber dicho Santiago. Escribe la historia

Ilustración 7 Unidades significantes y correspondencia entre el registro gráfico y el registro verbal

La segunda pregunta del instrumento de ideas previas indaga sobre la conversión que realizan los estudiantes desde el registro verbal (lenguaje natural) hacia el registro gráfico, a través de una situación también contextualizada, a diferencia del primer ejercicio aquí requieren dibujar la gráfica que relaciona la distancia con relación al tiempo del recorrido de Luisa

1.

Luisa: El médico le recomendó a Luisa no ir en bicicleta, por su problema de rodilla, así que ella tomo el bus, este hizo dos paradas, una a las 5:55 am y otra a las 6:05 am, de 5 minutos cada una, para dejar y recoger pasajeros, como crees que es la gráfica de la distancia con relación al tiempo del recorrido de Luisa.

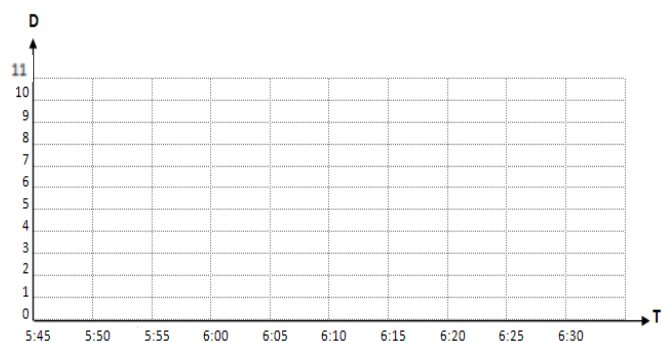


Ilustración 8 Unidades significantes y correspondencia en el registro verbal y el registro gráfico

La tercera pregunta tiene que ver con la conversión que realizan los estudiantes a partir de la representación en registro verbal (lenguaje natural) a su representación en el registro tabular. En el primer ejercicio se hacen explicitas algunas unidades significantes como las

variables y dos datos en la fila superior e inferior con el fin de familiarizar al estudiante con la representación en registro tabular.

Posteriormente se plantean dos ejercicios más, en el primero el estudiante debe realizar la conversión de la representación dada en el registro verbal (lenguaje natural) a la representación respectiva en el registro tabular, en el segundo el estudiante debe inventar una situación, plantearla en el registro verbal y después hacer la conversión a su representación en el registro tabular; es de anotar que las situaciones planteadas en el instrumento de entrada son diseñadas para estudiantes de grado octavo con los cuales no se había abordado el concepto de función lineal .

2. En la tienda del Colegio un bombón cuesta 150 pesos. Completa la siguiente tabla sobre los precios de las bombones según varíe la cantidad de ellos

Cantidad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Precio	150	300								

El bus escolar gasta 1 galón de gasolina cada 7 kilómetros recorridos en tramos horizontales. Elabora una tabla que relacione los kilómetros recorridos con el consumo.

Inventa una situación que relacione dos variables y elabora la tabla correspondiente



La pregunta número cuatro busca que a partir de la situación expresada en el registro verbal, el estudiante planteé una representación en el registro que el elija y posteriormente haga la conversión a la representación en el registro gráfico.

Esta actividad se plantea con el fin de reconocer los registros que utilizan los estudiantes para representar la situación de la hormiga, cuáles unidades significantes identifican y cómo las hacen explícitas en dicha representación.

En la conversión al registro gráfico busca reconocer de qué forma estas unidades significantes del registro de partida se hacen presentes en el registro de llegada.

3. La hormiga.

Una hormiga se encuentra en el punto A e inicia el camino hacia el hormiguero, recorre dos centímetros por segundo; si tardó 30 segundos a qué distancia está el hormiguero del punto de partida.

Expresa de la forma que quieras la situación de la distancia recorrida por la hormiga con relación al tiempo.

Dibuja la gráfica de la distancia recorrida por la hormiga con relación al tiempo.

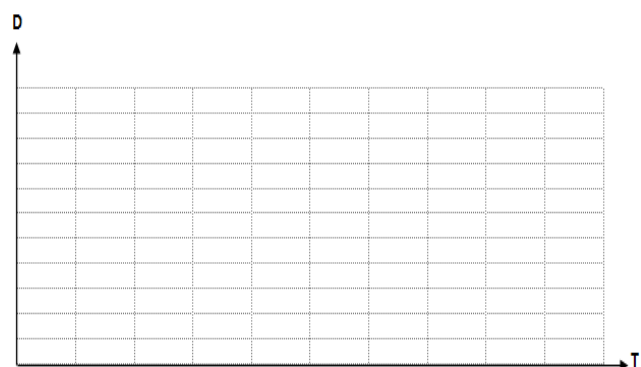


Ilustración 9 Conversión del registro seleccionado por los estudiantes al registro gráfico

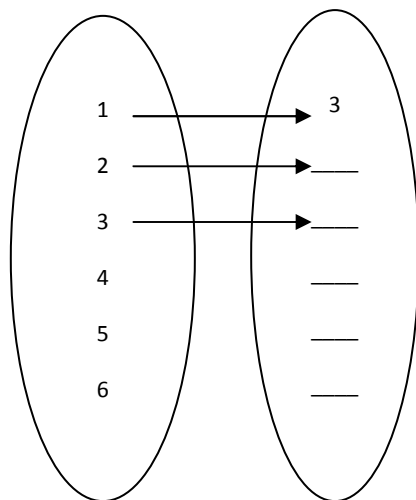
La pregunta número cinco plantea la conversión a partir de una situación dada en el registro verbal (lenguaje natural) a la representación de llegada en el registro figural en la cual los estudiantes deben completar los valores de las variables de la situación y a continuación se les pide realizar una conversión a otro registro de libre elección, esto con el fin de reconocer las preferencias en cuanto a las representaciones que utilizan los estudiantes para representar la situación de variación.

4. Martha ha medido la distancia que recorre su bicicleta con cada giro completo del pedal, halló que por cada giro completo del pedal la bicicleta avanza 3 metros.

Si Julián vive a 45 metros de la casa de Martha ¿Cuántas vueltas de pedal debe dar Martha para ir a visitarlo? _____ ¿Qué procedimiento hiciste para saberlo?

Si Martha da 20 vueltas de pedal para ir donde Leidy. ¿Cuál es la distancia hasta la casa de Leidy? _____ ¿Qué hiciste para saberlo?

Relaciona cada giro del pedal con la distancia recorrida por la bicicleta



¿Podrías expresar la situación de otra forma?
¿Cómo?

Ilustración 10 Conversión del registro figural al registro escogido por el estudiante

3.8.2 Instrumento dos (ver anexo 2)

El instrumento dos consiste en el planteamiento de cuatro situaciones contextualizadas propias del concepto de función lineal, que están expresadas en el registro verbal (lenguaje natural), enfatizando en la dependencia entre magnitudes en las cuales se muestran explícitamente las magnitudes que covarían⁷.

Las preguntas formuladas en cada situación remiten al estudiante a hacer conversiones en diferentes registros semióticos, sin señalar explícitamente el registro de llegada.

Este instrumento permitió indagar y caracterizar las actividades de tratamiento y conversión realizadas por los estudiantes cuando se enfrentan a la solución de situaciones contextualizadas creadas específicamente para esta investigación.

Como ejercicio teórico previo al análisis de los datos, se planteó una matriz de análisis como directriz en la organización de los datos recogidos, orientados a caracterizar las conversiones de las representaciones semióticas del concepto matemático función lineal de cada una de las situaciones, del instrumento dos, delimitando cada una de las unidades significantes en cada uno de los registros y haciendo corresponder cada unidad con su correspondiente en el registro de llegada, además se tuvo en cuenta la congruencia entre las diferentes representaciones a partir del análisis de los tres criterios de congruencia entre representaciones (correspondencia semántica, univocidad semántica terminal e igual orden posible de aprehensión de las unidades significantes).

⁷ Al hablar de cantidades que covarían se hace referencia a que cada una de ellas varía con respecto a la otra

La teoría, (Duval 2004) hace referencia a los registros de representación utilizados en matemáticas y los clasifica en dos clases plurifuncionales y monofuncionales; estos a su vez se clasifican en Plurifuncionales discursivos, plurifuncionales no discursivos, monofuncionales discursivos y plurifuncionales discursivos

Se plantea que los registros plurifuncionales admiten tratamientos que no son algoritmizables, mientras en los registros monofuncionales si son algoritmizables. Refiriéndose los registros discursivos plantea que *“permiten describir, inferir, razonar, calcular, mientras que los registros no discursivos permiten visualizar lo que nunca es dado de manera visible”*. (Duval, 2004, p. 51).

En correspondencia con lo expresado anteriormente y con el concepto matemático función lineal es posible afirmar que el registro numérico, simbólico y algebraico siendo algoritmizables se encuentran inscritos dentro de los registros monofuncionales /discursivos, el registro gráfico, el registro tabular y el registro figural (Diagramas de Venn) se encuentran inscritos dentro de los registros monofuncionales /no discursivos, la lengua natural en los registros plurifuncionales/ discursivos, mientras que en los plurifuncionales /no discursivos se encuentran las figuras geométricas, las cuales no son tomadas como registro de representación del concepto función lineal en el presente estudio dado que no es un registro de representación del concepto de función lineal convencional.

Teniendo en cuenta que la presente investigación está fundamentada en la teoría de las representaciones semióticas de R. Duval y presenta su interés en el estudio de registros de representación semiótica del concepto de función lineal, en aspectos relacionados con el tratamiento y las transformaciones que se dan entre representaciones semióticas que van desde una representación inicial a otra terminal en un mismo registro de semiótico y

aspectos en la conversión entre representaciones de registros semióticos diferentes, además de fenómenos de congruencia y no congruencia entre diferentes registros de representación de un mismo concepto matemático, con el fin de promover el aprendizaje del concepto.

El autor plantea que “El cambio de registro constituye una variable fundamental en didáctica: facilita considerablemente el aprendizaje pues ofrece procedimientos de interpretación” (Duval, 2004.p.62).

A partir de este referente teórico se diseñó el plan de análisis y este plantea el estudio de aspectos que tienen que ver con el tratamiento de cada representación y la conversión entre un registro de partida a un registro de llegada, que realizan los estudiantes al enfrentarse a la solución de una situaciones propias del concepto de función lineal, para ello se realiza la descomposición de cada una de las representaciones en sus unidades significantes.

Tipos de representaciones	Registros representacionales	Tratamiento de la representación	Unidades significantes
Mono funcionales Discursivos Algoritmizables	Numérico $f(n) = m(n)$	Algoritmo de la multiplicación en los números reales. Se aplica la ley de los signos en la multiplicación Se halla el producto Se halla el valor de la función	Variable dependiente (y) Tipo de variación de la pendiente (m) Variable Independiente (x), en este caso es un número real
	Algebraico $f(x) = mx$	Procedimientos algebraicos Reemplazar la variable x con diversos valores arbitrarios Efectuar el producto indicado Hallar los valores de y (Establecimiento de un patrón de cambio)	Variable dependiente Se identifica el coeficiente (m) el cual es una constante, que puede tomar los siguientes valores $m > 1$ $m < 1$ $m = 1$ $m > -1$ $m < -1$ $m = -1$
	Simbólico $f(x) = \{x/x \in R \rightarrow y = mx\}$	Se utilizan los sistemas de notación simbólica propio del lenguaje matemático Expresar la función lineal f(x) La variable x es un valor que pertenece a los números reales Se reemplazan los	Notación de conjuntos Variable dependiente (y) Pendiente (m) Variable independiente (x) Parejas ordenadas Variable independiente

conjunto de pares ordenados, donde ninguno de estos tiene la primera componente igual.	valores de x (Cálculo del dominio)	(x) Relación de variación de punto a punto
	Se hallan los valores de y (Cálculo del rango) a partir de los valores asignados a x	Variable dependiente (y) Relación de variación de punto a punto
	La variable y es un valor que pertenece a los números reales	Relación de variación entre la abscisa y la ordenada)

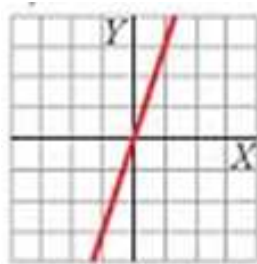


Gráfico cartesiano

En este registro, la función lineal se puede representar por medio de una línea recta (continua o no) que pasa por el origen del plano cartesiano. Se coloca en juego la noción de grafo de una función. También presenta algunas limitaciones, ya que como en el caso de la tabla, se hace necesario imaginar que continúa más allá de lo que es posible observar

Esta representación gráfica es vinculada con las potencialidades conceptualizadoras de la visualización y se conecta con la geometría y la topología.

La lectura de representaciones gráficas de la función lineal comprende una interpretación global, ya que se trata de discriminar variables visuales y percibir las variaciones correspondientes en los símbolos de la escritura algebraica.

Construcción de la gráfica

Construir los ejes x, y (dos líneas perpendiculares)

Dividir cada eje en las escalas adecuadas

Ubicar las unidades en el sistema de coordenadas (x, y)

Hallar los puntos (Hacer Interpolación y hacer Extrapolación)

Verificar que la unión de los puntos formen una línea recta

Trazar la línea recta

Eje x (variable Independiente)

Eje y (variable Dependiente)

Puntos (punto a punto)

Pendiente

Sentido e inclinación del trazo

La línea asciende de izquierda a derecha (Pendiente positiva)
la línea desciende de izquierda a derecha (Pendiente negativa))

El ángulo de los trazos con los ejes

Hay una partición simétrica del cuadrante atravesado. (La variación es igual para ambos ejes)

El ángulo formado con el eje vertical es mayor que el formado con el eje horizontal (la pendiente es de menor variación)

El ángulo formado con el eje horizontal positivo es mayor que el formado con el eje vertical (la pendiente es de mayor variación)

No discursivos

La posición del trazo respecto al origen

La línea pasa por el origen (Cuando x vale cero, al efectuar el producto y vale cero por la propiedad anulativa de la multiplicación)

Tabla de valores

x				
y				

En este registro la función lineal se representa con una tabla de valores en donde se pone en juego la relación de correspondencia entre variables.

La representación tabular posee una relación directa con el pensamiento numérico.

Construcción de tablas

Elaborar la tabla con dos filas y tantas columnas se requieran dependiendo de tantos valores de (y) se quieran hallar

Se ubica la variable (x) (independiente) en la celda de la primera fila y en la primera columna

Se asignan valores a x en la fila superior de las columnas siguientes

hay que tener en cuenta que los valores de la variable independiente estén ordenados

Se ubica la variable y (Dependiente) en la celda de la segunda fila y en la primera columna

Se hallan los valores de y , en las celdas de la fila inferior en las columnas siguientes, efectuando la multiplicación a partir

Variable independiente (x)

Tipo de relación entre los valores de la variable independiente

Variable dependiente (y)

Tipo de relación entre los valores de la variable dependiente (y)

Relación entre los valores de la variable independiente (x) y los valores hallados de la variable dependiente (y) .

Relación que guardan los valores de la variable independiente

La variación entre términos consecutivos es constante

$$x_n - x_{n-1} = k$$

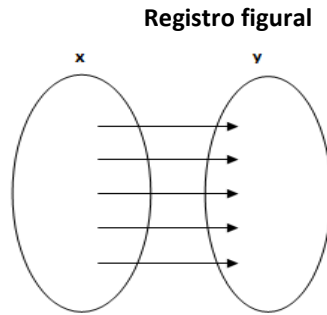
La relación que guardan los valores de las variables independiente y dependiente

A medida que los valores de la variable independiente aumentan, los valores de la variable dependiente también

de los valores de x

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = k$$

$k = \text{Constante}$



El diagrama sagital permite expresar el concepto de función, mediante los llamados diagramas de Venn. En este caso, el alumno reconoce una función lineal donde se pone en juego la correspondencia entre variable, de esta forma a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un solo elemento en el conjunto de llegada

Igual que el registro tabular presenta una relación de correspondencia entre variables.

Construcción del diagrama sagital

Elaborar el diagrama con dos epítomes o diagramas de Venn

En el primero se ubica la variable x (independiente)

Se asignan valores a x

(hay que tener en cuenta que los valores de la variable independiente estén ordenados de arriba hacia abajo)

En el segundo Se ubica la variable (Dependiente)

Se hallan los valores de y , efectuando la multiplicación a partir de los valores de x

Utilizando flechas se relaciona el valor de x con su respectivo valor de y

Variable independiente (x)

Tipo de relación entre los valores de la variable independiente

La variación entre términos consecutivos es constante

Variable dependiente (y)

Tipo de relación entre los valores de la variable dependiente (y)

La variación entre términos consecutivos es constante

Relación entre los valores de la variable independiente (x) y los valores hallados de la variable dependiente (y).

A medida que los valores de la variable independiente

aumentan, los valores de la variable dependiente también aumentan

Plurifuncionales	Discursivos	Verbal (Lenguaje Natural)	Descripciones Explicaciones Argumentaciones Deducciones Asociaciones verbales Razonamiento Discriminar la información Identificación de magnitudes que covarían en la situación descripción de situaciones de variación Reconocimiento de intervalos de covariación constante identificación de intervalos de crecimiento y decrecimiento y su coordinación	Magnitudes que varían y unidades de medida
		En este registro la función lineal acepta como representación una descripción en lenguaje natural. Si se quiere estudiar una situación e susceptible de ser modelada utilizando la función lineal se cuenta generalmente, en principio, con una descripción de este tipo Esta representación verbal se relaciona con la capacidad lingüística de las personas, y es básica para interpretar situaciones contextualizadas.	Variable Independiente (x) Tipo de relación entre los valores de la variable independiente Variable dependiente (y) Tipo de relación entre los valores de la variable dependiente (y) Relación entre los valores de la variable independiente (x) y los valores hallados de la variable dependiente (y).	
No discursivos	Geométrico	—	—	—

Tabla 3 Registros de representación semiótica del concepto Función lineal y sus unidades significantes

Elementos tomados de Duval 1992

Situación 1

Agua Limpia para todos

En el edificio donde vive Laura se empezó a notar que el agua estaba turbia entonces el administrador ha tomado la decisión de hacer mantenimiento al tanque de almacenamiento de agua.

El técnico les explica a los habitantes del edificio que no van a contar con el servicio de agua durante el proceso de limpieza del tanque de 9.000 litros de capacidad y posterior llenado del mismo.

Una vez el tanque está limpio empieza a entrar agua a razón de 1800 litros por Hora.

Laura quiere saber cuánto demorará el llenado del tanque ya que debe bañarse para ir al cumpleaños de Susanita.

Pregunta uno

¿En cuánto tiempo podrá ella utilizar la ducha? ¿Qué hicieron para averiguarlo?

Esta pregunta se planteó con el fin explorar las formas en que los estudiantes abordan la situación y buscan la respuesta en la predicción del tiempo que durará el llenado del tanque.

A partir de las representaciones semióticas del concepto, es de interés investigativo reconocer la representación utilizada por los estudiantes para caracterizar la conversión realizada por los estudiantes a partir del registro verbal.

Pregunta dos

¿Cómo pueden determinar el tiempo que hace falta para que el tanque se llene hasta la mitad (4500 litros)? ¿Cómo lo observaron?

El objetivo de esta pregunta es reconocer cómo el estudiante establece relaciones entre magnitudes que covarían, además indagar por la representación utilizada por ellos para resolver la pregunta e identificar el procedimiento de conversión realizado.

Para su solución estudiante puede considerar el volumen de agua que entra al tanque con relación al tiempo y a través del tratamiento en la representación elegida dar la respuesta.

Pregunta tres

¿En qué intervalo de tiempo la cantidad de agua que entra aumenta de 1800 litros a 5400 litros?

El objetivo de esta pregunta es averiguar qué representación semiótica aporta los elementos requeridos por los estudiantes para identificar los intervalos de covariación.

Pregunta cuatro

***¿Si el tanque tuviese una capacidad de 12600 litros, cuánto tiempo tardaría en llenarse?
¿Qué debes hacer para saberlo?***

El propósito de esta pregunta es indagar por las representaciones y procedimientos utilizados por el estudiante para hacer la predicción del tiempo que tardará el llenado de un tanque con mayor capacidad (12600 litros), es posible obtener la respuesta manera directa a partir de un tratamiento en el registro que esté trabajando.

En el enunciado se han relacionado dos variables, la primera hace referencia al tiempo requerido para el llenado del tanque y la segunda se refiere al volumen de agua que entra cada hora.

A esta situación le corresponden las unidades significantes que aparecen en el cuadro de unidades significantes y criterios de congruencia en las representaciones semióticas del concepto función lineal en la situación (ver anexo 3)

Asimismo se realiza un análisis de congruencia entre representaciones semióticas de la situación en diferentes registros teniendo en cuenta los tres criterios enunciados en el Marco teórico

1. Correspondencia semántica
2. Univocidad semántica Terminal
3. Conservación del orden de aprehensión de las unidades significantes.

Situación 2

A salvar el loro Orejiamarillo

Como producto de las celebraciones religiosas en Colombia, se puso en peligro la Palma de cera (planta símbolo nacional de Colombia) la cual es el hábitat del loro orejiamarillo que a su vez se ha visto afectado.

En 1999 se declaró que esta ave se encontraba en peligro de extinción ya que en el Tolima solo se contaba con 81 ejemplares.

A partir de ese momento se tomaron medidas de protección de la especie y la población empezó a crecer a razón de aproximadamente 98 individuos por año, si el aumento poblacional de esta ave continuara con esta tasa de crecimiento. Responda las siguientes preguntas:

Pregunta uno

¿Cuántos ejemplares pueden nacer al cabo de 7 años? ¿Qué procedimiento utilizaron para averiguarlo?

Esta pregunta se formuló para indagar el tipo de representación que utilizan los estudiantes para predecir el número de nacimientos de loros orejiamarillos que ocurrirán durante los próximos 7 años.

También busca reconocer el tratamiento realizado por los estudiantes en el registro de representación elegido para la solución de esta pregunta.

Pregunta dos

¿En qué intervalo de tiempo la población pasa de 196 a 392 ejemplares? ¿En donde se puede observar esta información?

El objetivo de esta pregunta es indagar por la representación semiótica que aporta los elementos requeridos por los estudiantes para identificar los intervalos de covariación.

Pregunta Tres

¿Cómo pueden averiguar la cantidad de loros orejiamarillos que habrán nacido después de 12 años?

El objetivo de esta pregunta es averiguar por la representación utilizada por los estudiantes para establecer relaciones entre magnitudes que covarían, para lograrlo el estudiante puede considerar el número de nacimientos por año y de esta forma a través del tratamiento en la representación elegida dar la respuesta.

Pregunta cuatro

¿Cómo se puede determinar el tiempo que hace falta para que el número de nacimientos de loros orejiamarillos supere los mil ejemplares? ¿Qué procedimiento harían para averiguarlo?

El propósito de esta pregunta es averiguar que representaciones y procedimientos utiliza el estudiante para determinar el tiempo requerido para que en la población de loros se supere los mil nacimientos; es posible obtener la respuesta de manera directa a partir de un tratamiento en el registro que el estudiante este trabajando.

En el enunciado igual que en la situación anterior se han relacionado dos variables, la primera se refiere al tiempo de reproducción de las aves y la segunda hace referencia al número de individuos que nacen por año.

A esta situación le corresponden las unidades significantes que aparecen en el cuadro de unidades significantes y criterios de congruencia en las representaciones semióticas del concepto función lineal en la situación 2 (ver anexo 3)

En este mismo se realiza un análisis de congruencia en las conversiones entre representaciones semióticas de la situación en diferentes registros teniendo en cuenta los tres criterios enunciados anteriormente.

Situación 3

La Antártida y el clima mundial

La Antártida ejerce una gran influencia sobre el clima del planeta y cualquier cambio en este enorme depósito de agua dulce sería catastrófico: Variaciones en el nivel del mar, en la cantidad de lluvias, en el caudal de los ríos y en el nivel de los lagos.

A continuación se muestra una tabla con el nombre de tres ciudades ficticias y su respectiva altura sobre el nivel del mar

Ciudad	Altura sobre el nivel del mar
Bahía Blanca	3 m
Delfines	6 m
Cristal	12 m

Como consecuencia del calentamiento global, el hielo de los glaciares se está derritiendo, a raíz de este fenómeno el nivel del mar está aumentando, poniendo en riesgo de inundación las ciudades costeras. Según los expertos se prevé que el nivel del mar aumentaría a razón de 0.25 m por año.

Pregunta uno

¿Si el nivel del mar aumentara a razón de 0.25 m por año en qué intervalo de tiempo ocurriría la inundación de bahía blanca? ¿Cómo lo observarían?

El objetivo de esta pregunta es averiguar qué representación semiótica aporta los elementos requeridos por los estudiantes para identificar los intervalos de covariación.

Se tuvieron en cuenta en esta pregunta los dos extremos del intervalo en diferente momento, lo cual proporciona una mejor interpretación del fenómeno de covariación.

Pregunta dos

¿Cuál sería la altura sobre el nivel del mar si transcurren 24 años?

El objetivo de esta pregunta es indagar por la representación utilizada por los estudiantes para establecer relaciones entre magnitudes que covarían y a través del tratamiento en la representación elegida dar la respuesta correcta.

Pregunta tres

¿Si transcurren los 24 años cuál de las tres ciudades se inundaría? ¿Cómo lo averiguaron?

La intención de esta pregunta es indagar por la representación que utiliza el estudiante para predecir después de transcurridos 24 años, cuál de las dos ciudades se inundaría; la respuesta la puede obtener de manera directa a partir de un tratamiento en el registro que esté trabajando.

Pregunta cuatro

¿Cuánto tiempo tardará en inundarse la tercera Ciudad? ¿Por qué?

El propósito de la pregunta busca analizar el tipo de representación que utilizan los estudiantes para predecir el tiempo que tardará en inundarse la tercera ciudad a partir de los datos de la tabla.

En el enunciado de esta situación, al igual que en la situación anterior, se han relacionado dos variables, la primera hace referencia al tiempo que transcurre y la segunda hace referencia a la altura del nivel del mar.

A esta situación le corresponden las unidades significantes que aparecen en el cuadro de unidades significantes y criterios de congruencia en las representaciones semióticas del concepto función lineal en la situación 3 (ver anexo 3)

En el cuadro se puede observar el análisis de congruencia entre representaciones semióticas de la situación en diferentes registros teniendo en cuenta los tres criterios enunciados en la situación anterior.

Situación 4

Domicilios Deliburguer

Camilo es el encargado de los domicilios del restaurante de comidas rápidas “Deli Burguer”, un cliente que vive a 10 km del restaurante ha hecho un pedido para una comida familiar y requiere que este sea entregado lo más pronto posible, una de las políticas del restaurante es que si el pedido demora más de 20 minutos en ser entregado este pedido no será pagado por el cliente, sino por el restaurante que le descontará a su vez el 20% del pedido a Camilo de su quincena.

Para no perder dinero de su quincena Camilo debe recorrer 10 km desde el restaurante hasta la casa del cliente en menos de 20 minutos. Camilo en su moto parte del restaurante con velocidad constante y al cabo de 4 minutos se encuentra a 2 km del restaurante, por lo que decide mantener su velocidad para llegar en el tiempo propuesto.

Pregunta uno

¿Podrá Camilo entregar su domicilio a tiempo y evitar que su sueldo sea disminuido? ¿Por qué?

El objetivo de esta pregunta es explorar la representación en la que los estudiantes establecen la relación entre dos magnitudes que co-varían, también se requiere analizar el proceso de conversión entre registro verbal (lenguaje natural) y el registro de llegada elegido por los estudiantes para hallar la respuesta.

Pregunta dos

¿Cómo podrían averiguar a qué distancia se encuentra Camilo del restaurante si conocen que han transcurrido 12 minutos desde que partió?

El interés de esta pregunta es explorar la forma en que el estudiante construye relaciones entre magnitudes que co-varían, para lo cual debe realizar una interpretación global es decir debe identificar el comportamiento de una de las variables en dependencia de otra de la situación que le permita indagar por la posición del motociclista en cada punto del dominio de la función.

Pregunta tres

Si Camilo hubiese continuado el recorrido con la misma velocidad que llevaba ¿A qué distancia del restaurante estaría a los 32 minutos? ¿Cómo lo averiguaron?

El objetivo de esta pregunta es explorar la forma en que el estudiante relaciona la velocidad, posición y tiempo con la distancia total, a través de la determinación de la imagen de un punto, para lo cual debe reconocer la invarianza de las unidades significantes de la situación.

Pregunta cuatro

¿Cuánto tiempo tardará para recorrer 15 Km? ¿Qué hicieron para saberlo?

El propósito de esta pregunta es averiguar que representaciones y procedimientos utiliza el estudiante para predecir el tiempo que tardará en recorrer 15 kilómetros, es posible obtener la respuesta de manera directa a partir del tratamiento en el registro que esté trabajando.

En el enunciado igual que en las situaciones anteriores se han relacionado dos variables, la primera se refiere al tiempo que transcurre y la segunda hace referencia a la distancia recorrida por el motociclista.

A esta situación le corresponden las unidades significantes que aparecen en el cuadro criterios de congruencia en las representaciones semióticas del concepto función lineal en la situación 4 (ver anexo 3)

De la misma manera se realiza un análisis de congruencia entre representaciones semióticas de la situación en diferentes registros teniendo en cuenta los tres criterios enunciados en la situación anterior.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

4.1. Principales hallazgos del primer instrumento

Se realizó una descripción de los hallazgos, encontrados en el primer instrumento (ver anexo 1) con el fin de reconocer el conocimiento previo de los estudiantes sobre el concepto de función lineal, las representaciones que reconocen del mismo y las conversiones entre los diferentes registros de representación del concepto matemático, previo a la enseñanza del concepto de función lineal.

En la situación presentada en la primera parte de este instrumento llamada “Camino al colegio las funciones lineales”, están expresadas por tramos para expresar cuando el móvil está en reposo; sin embargo, estas situaciones permitieron identificar representaciones del concepto de función y de esta manera determinar algunas de las articulaciones entre diferentes registros de representación semiótica *“La articulación entre registros hace referencia a la discriminación y coordinación significantes de dos representaciones de diferente registro”* (Duval, 2004).

(Duval R. , 2004) También expresa que la conversión posee dos características propias, la primera se refiere a que es orientada, es decir, el sujeto tiene conocimiento del registro de partida y el registro de llegada, y en la segunda señala que la conversión puede ser o no congruente y, con referencia en ello, Duval (2004) plantea que generalmente los procesos de conversión entre diferentes registros de representación semiótica, es espontánea para los

estudiantes cuando dichos registros son congruentes. Para ello debe cumplir tres condiciones:

CS: Correspondencia semántica

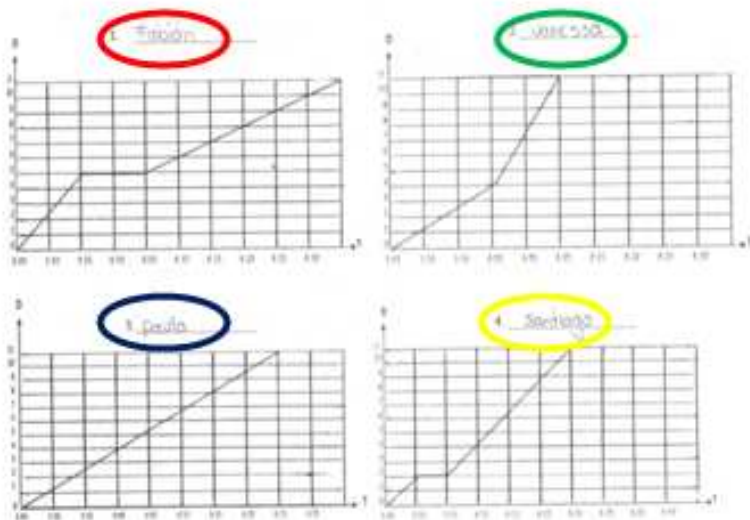
US: Univocidad semántica Terminal

CO: Conservación del orden

Las conversiones fueron caracterizadas a partir de los tres criterios de congruencia entre representaciones semióticas expresadas por (Duval R. , 1999)

Pregunta uno

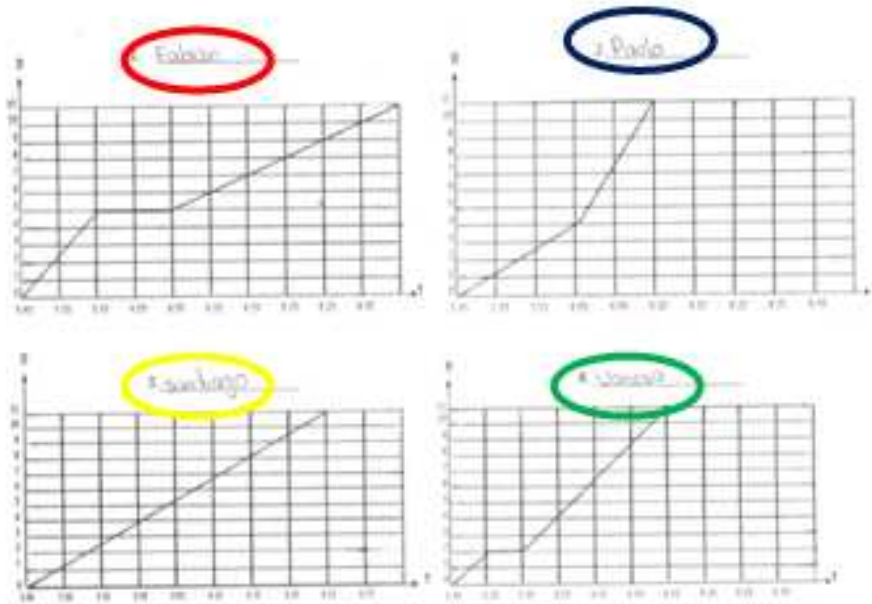
Registro de partida: Registro Verbal (lenguaje natural) **Registro de Llegada:** Registro gráfico



Los doce estudiantes coinciden en que la gráfica de Fabián es la número uno, es de anotar que las características de la historia es muy particular, además es la única gráfica que sobrepasa la hora de llegada, es posible que esto haya sido determinante para ser elegida, ya que en las otras historias no se presentó un acierto total como en este caso.

Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal

Solo un estudiante acertó al relacionar cada historia con su respectiva gráfica, se presentaron las siguientes confusiones, siete estudiantes asociaron la gráfica de Vanessa con la gráfica de Paula con lo cual se aprecia que los estudiantes no detectaron el cambio de velocidad que tuvo durante su recorrido, Vanessa cambio su velocidad y Paula no, no detectaron la unidad significativa cuando cambia la velocidad.



Cinco estudiantes relacionaron la gráfica de Paula, con la gráfica número cuatro, la descartable, a pesar que Paula dijo en su historia que no se entretuvo con nada, esto evidencia que estos estudiantes no identificaron la unidad significativa del cuerpo en reposo. Solo cuatro estudiantes descartaron la última gráfica y la asignaron a Santiago con lo cual se observa una comprensión incompleta de la gráfica, por que la única historia que hablaba de un cuerpo en reposo, fue la de Fabián y esta fue relacionada por los 12 estudiantes con la primera gráfica. Las respuestas de los estudiantes a esta pregunta revelan una falta de interpretación global de la situación y de reconocimiento de los parámetros del gráfico cartesiano.

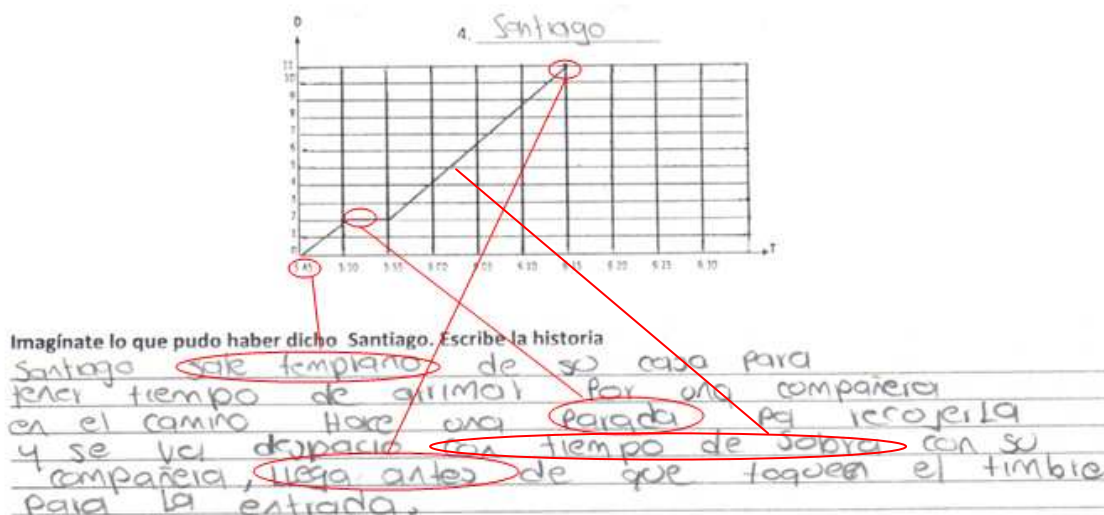
Ya que la interpretación de una gráfica, requiere hacer una mirada a toda la gráfica globalmente y darse cuenta del significado de la relación entre las dos variables y en particular de su covariación.

A continuación se planteó a los estudiantes que inventaran la historia de Santiago a partir de la gráfica que no correspondía con las tres historias anteriores.

Con el fin de realizar el análisis de congruencia entre los diferentes registros de representación utilizados por los estudiantes, se hizo necesaria la segmentación en las unidades significantes plasmadas por los estudiantes en sus producciones.

En este primer instrumento se observaron los elementos que surgieron de los estudiantes, elementos propios de las representaciones que realmente ellos manejan.

Registro de partida: Registro gráfico → **Registro de Llegada:** Registro Verbal (lenguaje Natural)



CS: No, ausencia de tres unidades significantes, las que se refieren a los momentos en que para recoger a su compañero, el tiempo que dura la pausa y el momento en el que se inicia de nuevo el recorrido.

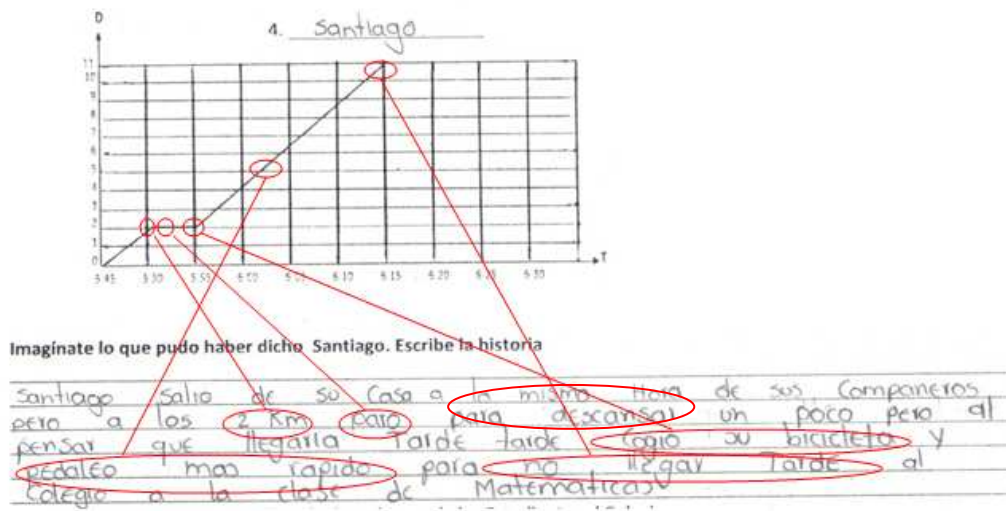
Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal

US: Si, a cada unidad significativa elemental del registro de partida le corresponde una unidad significativa en el registro de llegada

CO: Si, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes presentes en la conversión

El estudiante reconoce algunas unidades significantes que el observa en la gráfica y las pone en correspondencia en el registro verbal; sin embargo, la conversión no es congruente, ya que no se cumple el primer criterio de correspondencia semántica, debido a la ausencia de unidades significantes presentes en la gráfica que no fueron tenidas en cuenta en el registro verbal.

En la expresión "Con tiempo de sobra " significa que el estudiante observó la pendiente del segundo tramo final, la cual se observa en una mirada global de la gráfica, por ejemplo la comparación de varias pendientes.



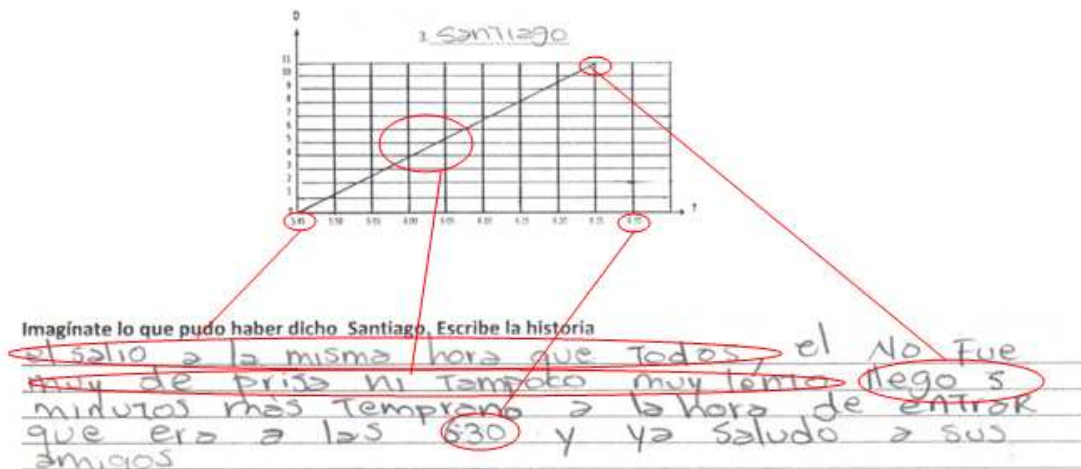
CS: No, hay ausencia de dos unidades significantes las que hacen referencia al tiempo que dura la pausa y el momento de iniciar de nuevo el recorrido.

Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal

US: Si, cada unidad significativa elemental del registro de partida se asocia con una única unidad significativa en el registro de llegada.

CO: Si, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes.

El estudiante identifica las unidades significantes que él observa en la gráfica y las pone en correspondencia en el registro verbal, sin embargo la conversión no es congruente debido a la ausencia de dos unidades significantes, que no se hacen presentes en el registro de llegada, así mismo en el registro verbal manifiesta un aumento de velocidad el cual no está expresado en la gráfica, con ello se observa que está razonando por analogía con lo acontecido con Vanessa ya que está relacionando el segundo tramo lineal con la unidad significativa “pedalea más rápido”.



CS: Si, a cada unidad significativa elemental de la representación en el registro de partida le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de llegada.

US: Si, Cada unidad significativa del registro de partida se asocia con una unidad significativa en el registro de llegada

CO: Si, Existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en las dos representaciones de los dos registros

El estudiante reconoce algunas unidades significantes que él observa en la gráfica y las pone en correspondencia en el registro verbal, cuando expresa “no fue de prisa ni tampoco muy lento” hace referencia a la relación tiempo invertido para llegar a la hora señalada; es decir a una velocidad promedio entre $(0,0)$ $(6:30, 11)$

En el ejercicio anterior se intentó generar la conversión efectuada en el sentido de representación no discursiva a la expresión en lengua natural, teniendo en cuenta que la actividad descriptiva hace un llamado a la espontaneidad del sujeto. (Duval 2004)

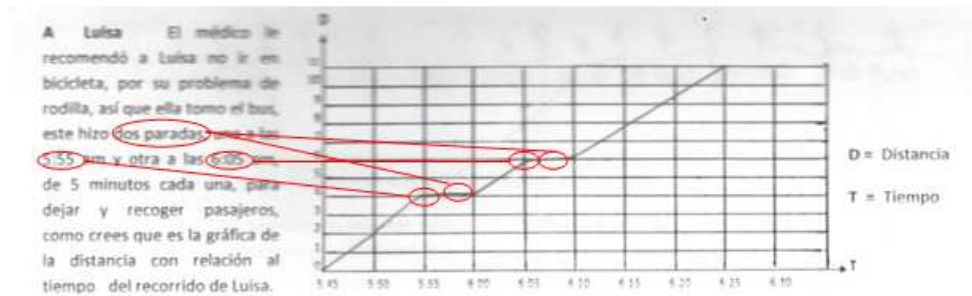
En sus descripciones verbales, los estudiantes muestran que reconocen algunos elementos de la gráfica y tratan de hacerlos corresponder en el lenguaje verbal; sin embargo, una interpretación de la representación gráfica, requiere una mirada global a toda la gráfica y comprender el significado de la relación existente entre las dos variables y particularmente en su covariación⁸, con lo cual se evidencia la ausencia en el reconocimiento de dicha variación.

Pregunta dos

Registro de partida: Registro Verbal (lenguaje Natural) → **Registro de llegada:** Registro gráfico

⁸ Covariación : Se refiere al patrón de variación conjunta de dos variables es decir cuando los cambios en una variable (Independiente) genera cambios en la otra variable (Dependiente)

Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal

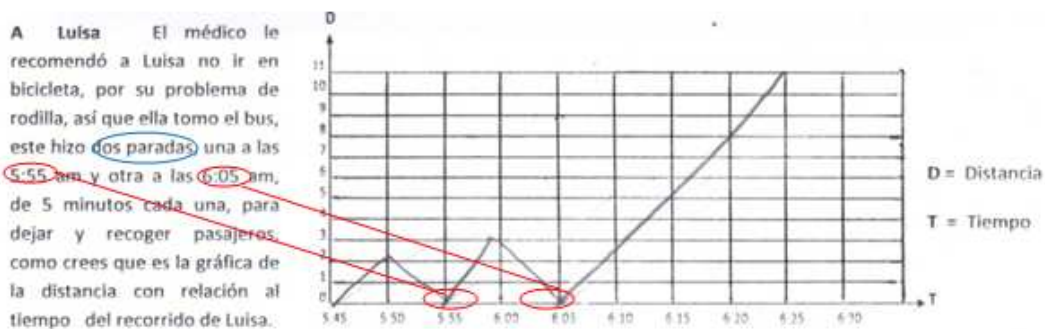


CS: Si, a cada unidad significativa elemental de la representación en el registro de partida le corresponde una unidad significativa elemental en el registro de llegada

U.S: Si, cada unidad significativa del registro de partida está asociada con una única unidad significativa en el registro de llegada

CO: No, no existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en las dos representaciones de los dos registros.

El estudiante reconoce las unidades significantes presentes en el registro de partida (verbal) y las pone en correspondencia en el registro de llegada (gráfico), con lo cual se aprecia una correcta interpretación de la situación, a pesar de esto la conversión, no es congruente debido a la ausencia del criterio tres, ya que hay un orden diferente en la aprehensión de las unidades significantes.



Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal

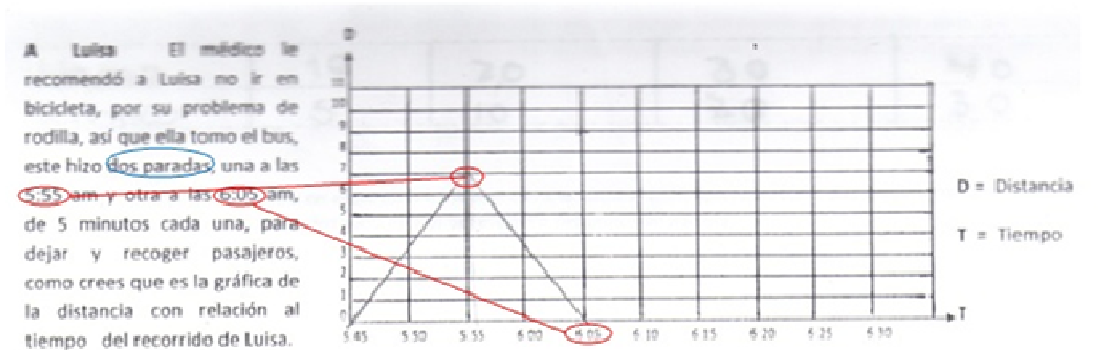
CS: No, ya que hay ausencia de dos unidades significantes de el registro de partida en el registro de llegada, las que se refieren al móvil en reposo cuando el bus para a recoger pasajeros.

US: No, ya que las dos unidades significantes encontradas por el estudiante en el registro verbal y las unidades que están expresadas en el registro gráfico, no significan lo mismo en ambas representaciones.

CO: No, no existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en las dos representaciones de los dos registros.

El estudiante discrimina dos unidades significantes en el registro verbal y las pone en correspondencia en el registro gráfico, exponiendo comprensiones “incompletas” ya que ubica estas unidades significantes en el punto de partida, con lo cual la unidad significativa cambia su sentido en el registro de llegada, es decir, la representación gráfica no representa la situación expresada en lenguaje verbal.

No hay congruencia entre representaciones ya que no se cumplen los tres criterios.



CS: No, porque hay ausencia de dos unidades significantes del registro de partida, en el registro de llegada, las unidades que hacen referencia al móvil en reposo cuando el conductor del bus para a recoger pasajeros.

US: No, ya que solo una unidad significativa en el registro verbal, tiene el mismo sentido en el registro gráfico, es la unidad que se refiere a la hora en la que para el bus (5:55), mientras que la segunda unidad significativa la referente a la segunda parada del bus (6:05) no significa lo mismo en el registro de llegada.

CO: No, no existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en las dos representaciones de los dos registros.

En esta conversión se repite el caso anterior, ya que al cambiar el sentido de una unidad significativa, cambia el sentido de la representación, es decir la representación gráfica no representa la situación expresada en lenguaje verbal.

No existe congruencia entre representaciones ya que no se cumplen los tres criterios expuestos por (Duval R. , 1999) puesto que a pesar de expresar las unidades significantes referentes a la hora de las dos paradas del bus para recoger pasajeros, no tiene en cuenta al móvil en reposo, además presenta un tramo lineal creciente y el otro decreciente, con lo cual expresa un regreso al punto de origen.

A continuación se plantea al estudiante realizar conversiones partiendo del registro verbal (lenguaje natural) al registro tabular

Pregunta tres

Registro de partida: Registro Verbal (lenguaje Natural) → **Registro de llegada:** Registro tabular

3. El bus escolar gasta 1 galón de gasolina cada 7 kilómetros recorridos. Elabora una tabla que relacione los kilómetros recorridos con el consumo.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7 Km	14 Km	21 Km	28 Km	35 Km	42 Km	49 Km	56 Km	63 Km	70 Km	77 Km	84 Km	91 Km	98 Km	105 Km

CS: No, ya que hay ausencia de una unidad significativa en el registro de partida, la que se refiere a la unidad de medida “Galón”

US: Si, cada unidad significativa del registro de partida está asociada con una unidad significativa en el registro de llegada.

CO: Si, por que las unidades significantes se presentan en el mismo orden en las dos representaciones de los dos registros.

El estudiante discrimina tres unidades significantes en el registro verbal y las pone en correspondencia en el registro tabular.

La conversión no es congruente porque no se cumple el primer criterio de correspondencia semántica, es decir cada unidad significativa del registro de partida no se asocia con una unidad significativa elemental en el registro de llegada.

3. El bus escolar gasta 1 galón de gasolina cada 7 kilómetros recorridos. Elabora una tabla que relacione los kilómetros recorridos con el consumo.

Km	7	14	21	28	35	42	49	56	63
Galón	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal

CS: Si, cada unidad significativa del registro de partida está asociada con una unidad significativa en el registro de llegada.

US: Si, a cada unidad significativa elemental de la representación en el registro de partida le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de llegada.

CO: No, no existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en las dos representaciones de los dos registros.

El estudiante reconoce cuatro unidades significantes en el registro verbal y las pone en correspondencia en el registro tabular, no obstante no hay congruencia entre ambas representaciones por falta del criterio tres ya que las unidades significantes se presentan en el registro de llegada en un orden diferente al que están expresadas en el registro verbal.

3. El bus escolar gasta 1 galón de gasolina cada 7 kilómetros recorridos. Elabora una tabla que relacione los kilómetros recorridos con el consumo.

galón	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
km	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70

CS: Si, cada unidad significativa del registro de partida está asociada con una unidad significativa en el registro de llegada

US: Si, a cada unidad significativa elemental de la representación en el registro de partida le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de llegada

CO: Si, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en las dos representaciones de los dos registros.

Con lo cual se puede apreciar que la conversión entre ambas representaciones es congruente por la presencia de los tres criterios de congruencia.

Esto evidencia que existe una mayor articulación entre la representación en el registro verbal al registro tabular, las conversiones pueden realizarse de manera transparente siguiendo el orden de la descripción verbal ya que todas y cada una de las unidades significantes presentes en el registro verbal se hacen presentes en el registro tabular, con un mismo significado, este hecho demuestra que la congruencia depende de los registros involucrados además se ratifica como epistemológicamente el registro tabular fue la segunda representación después del registro verbal.

Registro de partida: Registro Verbal (lenguaje Natural) → **Registro de llegada:** Registro tabular

• Inventa una situación en la cual se relacionan dos magnitudes, como en el ejercicio anterior y elabora la tabla correspondiente

andrea quiere bajar de peso y se propuso correr todos los días en el parque y por cada 5 km andrea reduce 1 kg

Kilometro	5	10	15	20	25	30	35	40	45
Kilos	1	2	3	4	5	6	7	8	9

CS: Si, cada unidad significativa del registro de partida está asociada con una unidad significativa en el registro de llegada.

US: Si, a cada unidad significativa elemental de la representación en el registro de partida le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de llegada.

CO: Si, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en los dos registros.

Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal

Con lo cual se puede apreciar que la conversión entre ambas representaciones es congruente ya que la transferencia del registro verbal al tabular se hace de forma clara y atendiendo al orden de la expresión en el registro verbal.

- Inventa una situación en la cual se relacionan dos magnitudes, como en el ejercicio anterior y elabora la tabla correspondiente

Hay una carrera de siclovía, pueden pasar cada 30 minutos a tomar sus botellas de agua (cuantas botellas se toman si la carrera es de 5 horas?)

B. Agua (minutos)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Se toman 10 Botellas
	30	60	1:30	2:00	2:30	3:00	3:30	4:00	4:30	5:00	

CS: No, ya que cada unidad significativa del registro de partida no está asociada con una unidad significativa en el registro de llegada.

US: No, a cada unidad significativa elemental de la representación en el registro de partida no le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de llegada.

CO: No, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en los dos registros.

La situación planteada por el estudiante no es congruente porque no cumple los tres criterios de conversión. La unidad significativa “sus botellas” no se asocia con una unidad significativa en el registro de llegada.

El estudiante quiso expresar la unidad significativa “una botella por persona” pero esto no está explícito en el enunciado en el registro verbal, no obstante en el registro tabular si se encuentra explícito.

Un vendedor de enciclopedias está vendiendo al mes 1 su valor es de 30.000 cuando gana 21 millones año 1.

tiempo	1 mes	2 meses	3 meses	4 meses	5 meses	6 meses
pesos	30.000	60.000	90.000	120.000	150.000	180.000

CS: No, cada unidad significativa del registro de partida no está asociada con una unidad significativa en el registro de llegada ya que la unidad significativa “pesos” está presente en el registro de llegada tabular, pero no tiene una unidad correspondiente en el registro de partida.

US: No, a cada unidad significativa elemental de la representación en el registro de partida no le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de llegada porque la unidad significativa “mes” (unidad de medida del tiempo) posee dos unidades significativas relacionadas (tiempo en la primera columna) y (mes en las columnas siguientes).

CO: Si, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en los dos registros.

En el ejercicio anterior no existe articulación entre registros de representación ya que los dos primeros criterios no se cumplen, puesto que la ausencia de unidades significantes en el registro de partida, que a su vez no encuentran una correspondiente en el registro de llegada, no permiten que esta conversión sea congruente.

Pregunta 4

En este ejercicio se le solicitó al estudiante realizar un dibujo de la situación planteada, aunque este registro no se tiene en cuenta en la investigación como representación del concepto de función lineal, es de suma importancia porque permite que el estudiante aflore las unidades significantes que reconoce en la situación expresada en el registro verbal y las exprese en un registro cercano a él.

Estas conversiones en las cuales intervienen los dibujos no se analizarán a partir de los tres criterios de conversión ya que siendo un registro semiótico, que represente de alguna forma la situación propia del concepto no es matemáticamente aceptado.

Registro de partida: Registro Verbal (lenguaje Natural) → **Registro de llegada:** Pictográfico

Una hormiga se encuentra en el punto A e inicia el camino hacia el hormiguero, recorre dos centímetros por segundo, si tardó 30 segundos a qué distancia está el hormiguero del punto de partida

Elabora un dibujo que represente la situación de la distancia recorrida por la hormiga y el tiempo requerido

Una hormiga se encuentra en el punto A e inicia el camino hacia el hormiguero, recorre dos centímetros por segundo, si tardó 30 segundos a qué distancia está el hormiguero del punto de partida

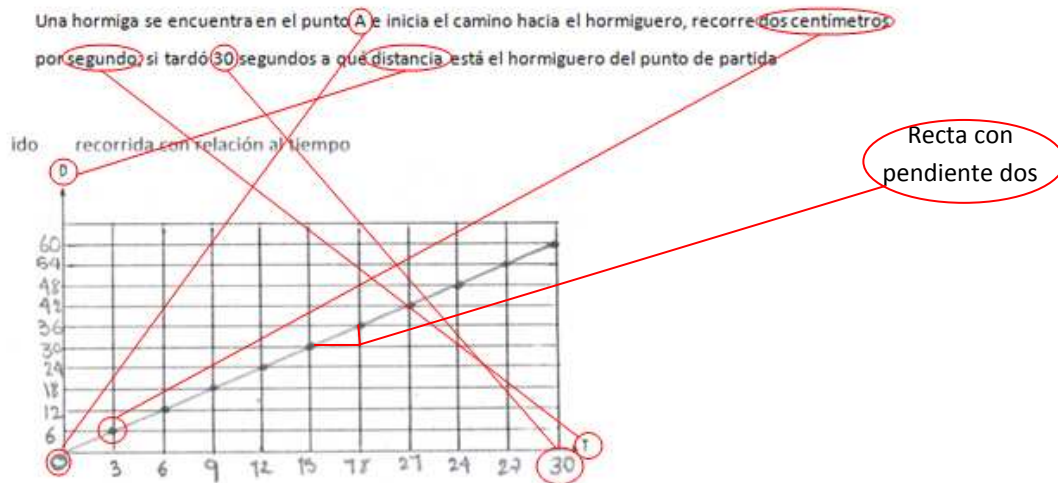
Elabora un dibujo que represente la situación de la distancia recorrida por la hormiga y el tiempo requerido

El estudiante muestra en un dibujo, la situación expresada a partir del registro verbal, se observa cómo cada registro de representación permite ver el objeto de diferentes formas, en este caso se hace evidente como la hormiga y el hormiguero en el registro pictográfico son relevantes y la relación del tiempo con la distancia recorrida no se pone en evidencia,

con ello se confirma porque el registro pictográfico no es un registro que permita representar la dependencia entre variables que covarían conjuntamente.

En las siguientes conversiones desde el registro verbal (lenguaje natural) hacia el registro gráfico se analizará a partir de los tres criterios de congruencia entre representaciones semióticas planteados por (Duval 1999).

Registro de partida: Registro Verbal (lenguaje Natural) → **Registro de llegada:** Gráfico



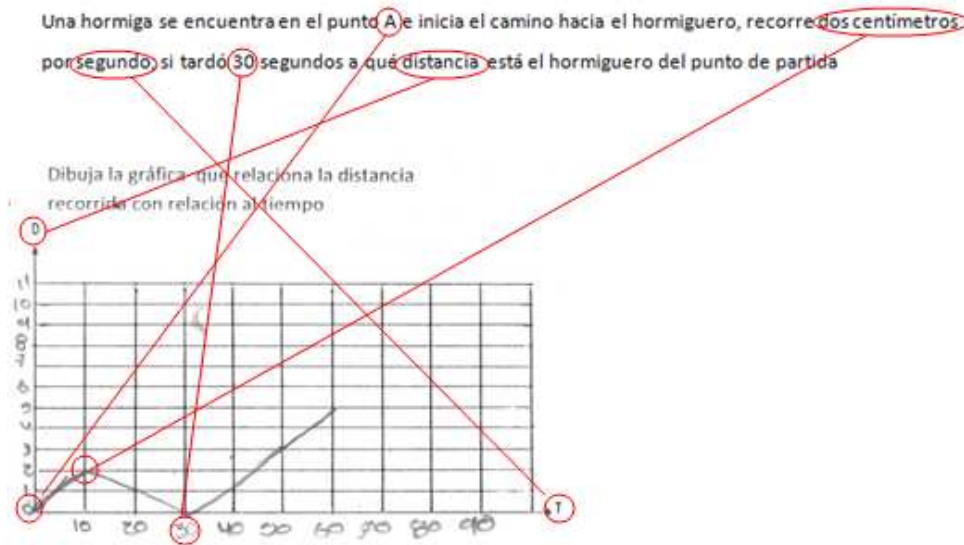
CS: Si, por que cada unidad significativa del registro de partida está relacionada con una unidad significativa en el registro de llegada.

US: Si, a cada unidad significativa elemental de la representación en el registro de partida le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de llegada.

CO: Si, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en los dos registros.

La conversión entre registros es congruente pues la transferencia del registro verbal al gráfico, se hace de manera transparente siguiendo el orden de la descripción verbal.

Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal



CS: Si, cada unidad significativa del registro de partida está relacionada con una unidad significativa en el registro de llegada.

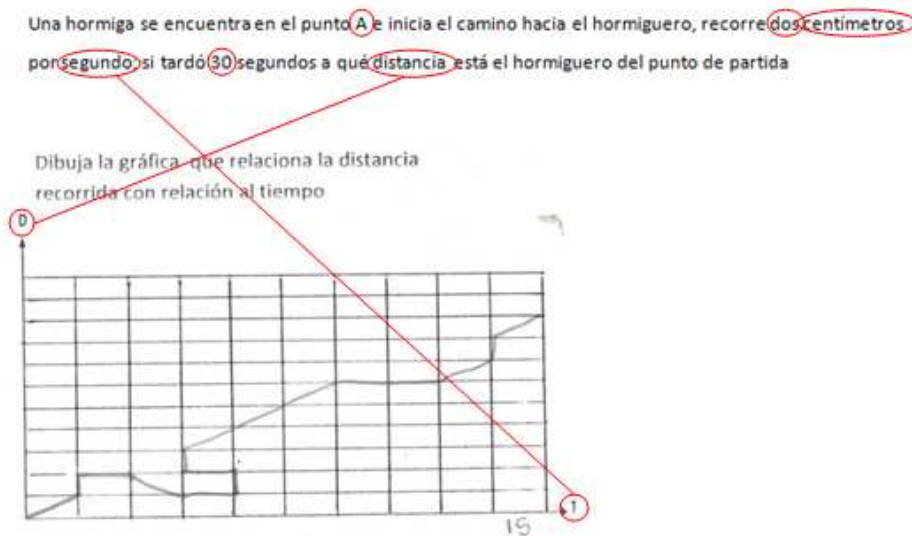
US: No, ya que las dos unidades significativas encontradas por el estudiante en el registro verbal en correspondencia con las unidades expresadas en el registro gráfico, no poseen el mismo significado en ambas representaciones.

CO: No, no existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en los dos registros.

El estudiante discrimina las unidades significantes en el registro verbal y las pone en correspondencia en el registro gráfico, de una manera inadecuada ya que la coordenada (10, 2) no expresa la relación de la velocidad de dos centímetros por segundo, además la coordenada (30, 0) refleja un regreso al punto de partida con lo cual la unidad significativa cambia su sentido en el registro de llegada, es decir, la representación gráfica no representa la situación expresada en lenguaje verbal.

No hay congruencia entre representaciones ya que no se cumplen dos criterios.

Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal



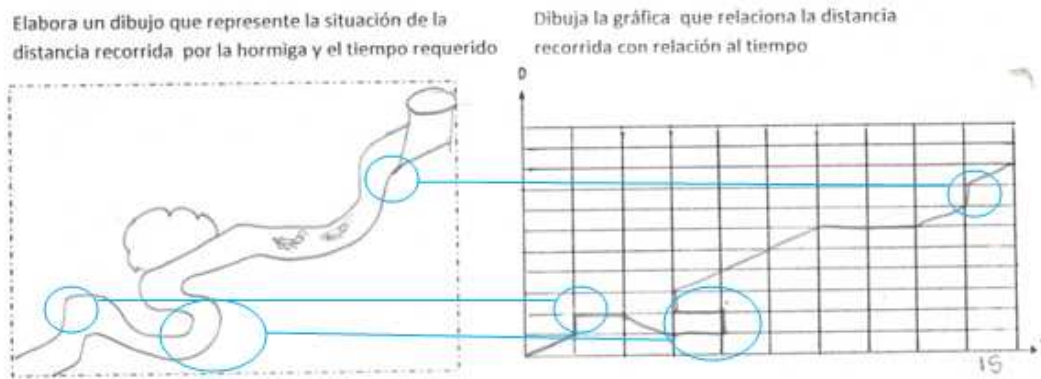
CS: No, porque hay ausencia de las unidades significantes elementales presentes en el registro verbal, en el registro gráfico.

US: No, cada unidad significativa del registro de partida no está asociada con una unidad significativa en el registro de llegada ya que al no presentarse correspondencia entre unidades significantes no puede analizarse este criterio.

CO: No, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en los dos registros.

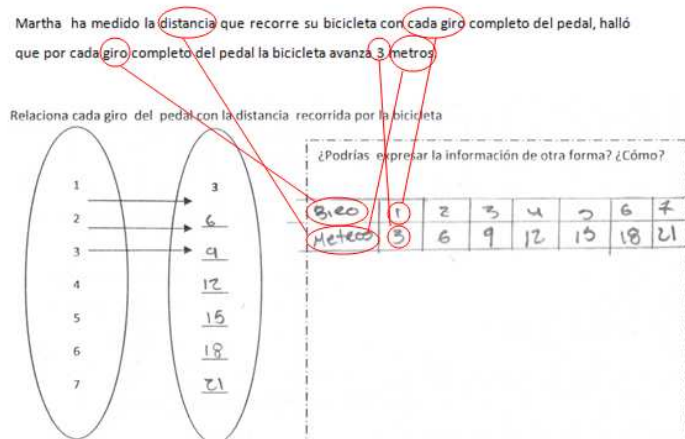
El estudiante no reconoció las unidades significantes en el registro verbal, para ponerlas en correspondencia en el registro gráfico, ya que él buscó representar la información del registro pictográfico, en el registro gráfico de igual manera, con lo cual pone en evidencia su anclaje en lo concreto de la situación, “el camino” y el no reconocimiento de las magnitudes que varían conjuntamente.

Como se puede observar a continuación.



En la siguiente actividad no se les especificó a los estudiantes el registro de llegada con lo cual se pretendió que los estudiantes tuvieran libertad para expresar el registro que ellos desearan y de esta forma permitir que afloraran las representaciones que ellos reconocen.

Registro de partida: Registro Verbal (lenguaje Natural) → **Registro de llegada:** _____



CS: Si, cada unidad significativa del registro de partida está relacionada con una unidad significativa en el registro de llegada

Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal

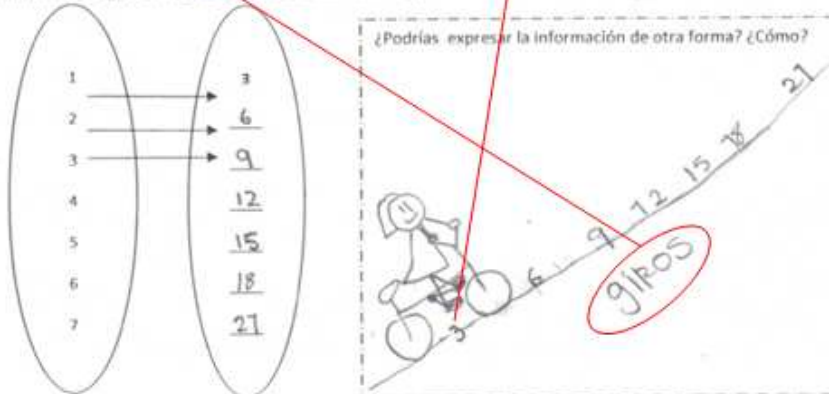
US: Si, a cada unidad significativa elemental de la representación en el registro de partida le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de llegada.

CO: Si, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en los dos registros.

El estudiante realizó una conversión congruente desde el registro verbal hacia el registro tabular, al cumplirse los tres criterios de congruencia.

Martha ha medido la distancia que recorre su bicicleta con cada giro completo del pedal, halló que por cada giro completo del pedal la bicicleta avanza 3 metros.

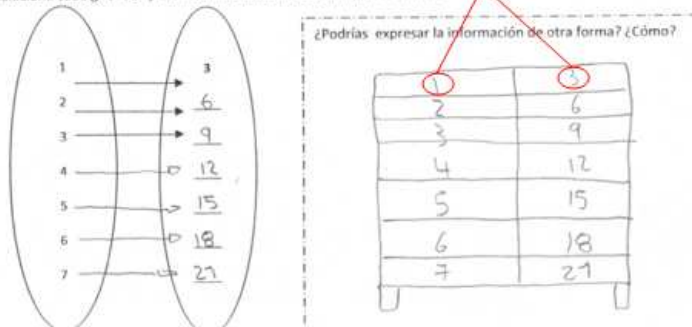
Relaciona cada giro del pedal con la distancia recorrida por la bicicleta



El estudiante realizó una conversión hacia el registro pictórico, al parecer es un registro cercano a él; sin embargo, este registro no le ofrece posibilidades de representación de la situación, con lo cual agrega números y palabras que le permiten expresar elementos de la situación; de esta forma se hacen evidentes algunas ideas imprecisas acerca del concepto al presentarse una combinación entre representaciones.

Martha ha medido la distancia que recorre su bicicleta con cada giro completo del pedal, halló que por cada giro completo del pedal la bicicleta avanza 3 metros.

Relaciona cada giro del pedal con la distancia recorrida por la bicicleta



El estudiante representa la situación en una relación de correspondencia, similar a la que se le presentó en el registro figural, solamente cambió los dos epítomes por un “tablero” con dos columnas, en este ejercicio no se presentó conversión entre registros ya que el estudiante no cambió de registro de representación, tan solo modificó el registro de partida, observándose aun la relación de correspondencia, entre variables, una idea clave del concepto de función.

4.1.1 Conclusiones del instrumento uno

En muchos casos a los estudiantes se les dificulta reconocer en la gráfica un comportamiento global, donde intervienen dos magnitudes que varían conjuntamente, la forma en que hacían sus descripciones en el registro verbal hace referencia a una sola de las magnitudes, no obstante durante la aplicación de el ejercicio de entrada, los estudiantes aun no habían tenido contacto con el concepto de función lineal.

Las tablas de valores son un registro cercano a los estudiantes, ya que sus conversiones desde el registro verbal al tabular fueron en su mayoría congruentes, es muy sabido que este registro ha sido muy cercano al hombre ya que se tiene conocimiento que desde la antigüedad el concepto de función era utilizado en forma intuitiva en prácticas tales como la de confeccionar tablas en las que se registraba el comportamiento de una magnitud sujeta a cambios de otra bajo una determinada relación. *“A partir de las tablillas de arcilla encontradas en excavaciones arqueológicas, se ha podido verificar que en la época antigua (desde la aparición de la escritura hasta la caída del imperio romano en el 746 d.C.) Se trabajaba con funciones con la civilización babilónica”* (Wikipedia, 2011)

4.2 Principales hallazgos del segundo Instrumento

El instrumento dos (Ver anexo 2) permitió caracterizar las conversiones de los estudiantes en los diferentes registros a partir de una situación dada, esta actividad se realizó después de enseñanza del concepto matemático función lineal, entendiendo por concepto matemático aquel que no tiene un representante real, teniendo que acudir a sus diferentes representaciones, de ahí que como lo afirma (Duval R. , 1999) una representación nunca agote al objeto.

(Vergnaud, 1990) Afirma que *“La operacionalidad de un concepto debe ser experimentada por medio de situaciones variadas por ejemplo, el concepto de razón no se comprende sino a través de una diversidad de problemas prácticos y teóricos; igual ocurre con los conceptos de función o de número”*. (Pág. 7). Teniendo como base esta afirmación, se han propuesto cuatro situaciones pertenecientes al campo de situaciones propias de la función lineal, para estudiantes de grado octavo las cuales se diferencian entre sí por los contextos de variación.

Las situaciones están formuladas en el registro verbal, las magnitudes que intervienen en las situaciones son explícitas en el enunciado y las variables toman valores positivos, algunos de carácter discreto y otros de carácter continuo.

Para el diseño se tuvieron en cuenta las unidades significantes de la función lineal en diferentes registros ya que el enfoque de la investigación va dirigido a las representaciones y la actividad cognitiva de conversión, es por esto que en cada situación se analizan las características relacionadas con las representaciones, lo que incluye el análisis de congruencia entre registros de representación.

No se hace explícito el registro de llegada para reconocer las representaciones que exteriorizan espontáneamente los estudiantes en sus respuestas, las características de estas conversiones, así como las articulaciones que establecen entre diferentes registros de representación.

Para efectos del análisis de las situaciones desde la congruencia entre registros, se tendrán en cuenta los tres criterios de congruencia mencionados en el marco teórico, de la siguiente forma:

CS: Correspondencia semántica entre las unidades significantes propias de cada registro.

US: Univocidad semántica terminal.

CO: Conservación del orden de organización de las unidades significantes en las representaciones.

Situación 1 Agua Limpia para todos

Registro de partida: Registro Verbal (lenguaje Natural) → **Registro de llegada:** Registro Grafico

En el Edificio donde vive Laura se empezó a notar que el agua estaba turbia entonces el administrador ha tomado la decisión de hacer mantenimiento al tanque de almacenamiento de agua. El técnico les explica a los habitantes del edificio que no van a contar con el servicio de agua durante el proceso de limpieza del tanque de 9.000 litros de capacidad y posterior llenado del mismo.

Una vez el tanque está limpio empieza a entrar agua a razón de 1800 litros por hora. Laura quiere saber cuánto demorará el llenado del tanque ya que debe bañarse para ir al cumpleaños de Susanita.

Se dividió cada representación en sus unidades significantes de esta forma:

Unidades significantes	
Variable Independiente (x): <ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Tiempo • Unidad de medida: Horas 	<p style="color: red; font-weight: bold;">→</p> <p>Eje x (variable Independiente) Eje horizontal</p> <ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Tiempo • Unidad de medida: Horas
Relación entre los valores de la variable independiente: Varían de uno en uno	<p style="color: red; font-weight: bold;">→</p> <p>Escala : Van de uno en uno hasta 5</p>
Variable dependiente (y) <ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Volumen • Unidad de medida: Litros 	<p style="color: red; font-weight: bold;">→</p> <p>Eje y (variable Dependiente) Eje vertical</p> <ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Capacidad • Unidad de medida: Litros
Relación entre los valores de la variable dependiente (y): varían de 1800 en 1800	<p style="color: red; font-weight: bold;">→</p> <p>Escala: Van de mil en mil hasta 10000</p>
Relación entre los valores de la variable independiente (x) y los valores hallados de la variable dependiente (y): Los valores de la variable dependiente (y) equivalen a 1800 por cada valor de la variable independiente (x)	<p style="color: red; font-weight: bold;">→</p> <p>Pendiente Sentido e inclinación del trazo (La línea asciende de izquierda a derecha) (Pendiente positiva) Pendiente = 1800</p>

Tabla 4 Conversión del registro verbal al registro Gráfico (Situación 1)

A continuación se exponen los aspectos relacionados con la congruencia de acuerdo con las condiciones planteadas por Duval, en los diferentes registros.

CS: Si, cada unidad significativa del registro de partida está relacionada con una unidad significativa en el registro de llegada.

US: Si, a cada unidad significativa elemental de la representación en el registro de partida le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de llegada.

CO: Si, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en los dos registros.

En esta conversión los estudiantes reemplazaron la magnitud volumen⁹ de agua, con la magnitud capacidad¹⁰ del tanque, lo cual no altera el proceso de conversión ya que se ha considerado que ambas magnitudes están estrechamente relacionadas¹¹.

La conversión del registro verbal al registro gráfico se efectuó de forma directa, trazando las descripciones suministradas en el registro de partida, por lo cual se genera un fenómeno de congruencia.

En el registro gráfico la representación corresponde al segmento que inicia en el punto de coordenadas $(0,0)$, que tiene pendiente 1800 y como punto final $(5,9000)$.

Existe articulación entre registros ya que a la unidad significativa del llenado del tanque cambia a razón constante 1800 litros cada hora establece en el gráfico la relación entre estos dos puntos, que es lineal y le corresponde una única unidad en el registro gráfico y en el mismo orden.

9 Se define el volumen como el espacio que ocupa un cuerpo.

10 Se define la capacidad como el espacio vacío de alguna cosa que es suficiente para contener a otra u otras cosas.

11 Por lo tanto, entre ambos términos existe una equivalencia que se basa en la relación entre el litro (unidad de capacidad) y el metro cúbico (unidad de volumen) aunque temporalmente también acepta el litro, que se utiliza comúnmente en la vida práctica. (<http://es.wikipedia.org/wiki/>, 2011)

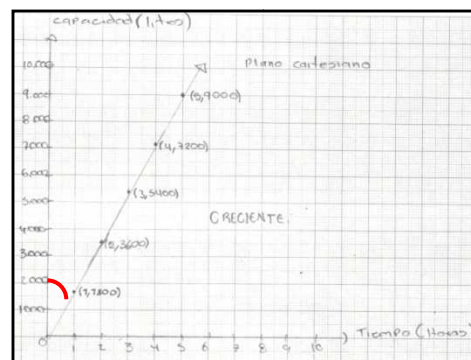
Se pone en evidencia como dos representaciones del mismo objeto no tienen el mismo contenido. "El contenido de una representación depende más del registro de representación que del objeto representado". (Duval R. , 1999).

Es como cada sistema de representación destaca determinados aspectos del objeto, mientras que oscurece otros.

En este caso el registro gráfico a diferencia del registro verbal resalta unidades significantes del concepto de función lineal como:

El ángulo de los trazos con los ejes

El ángulo formado con el eje vertical es menor que el formado con el eje horizontal (La pendiente es de mayor variación).



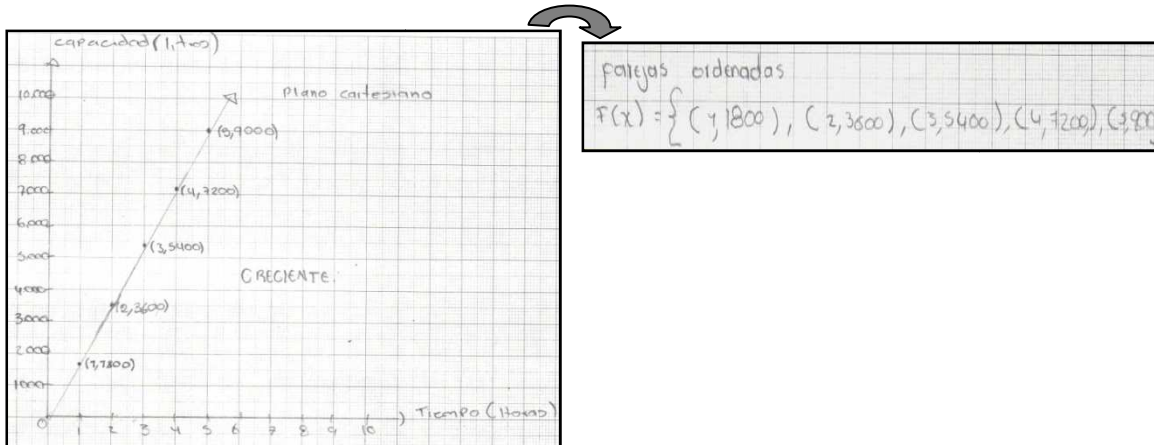
La posición del trazo respecto al origen

La línea pasa por el origen cuando x vale cero, al efectuar el producto (vale cero por la propiedad anulativa de la multiplicación).

Con referencia a este asunto el autor también señala que *"la naturaleza de las unidades significantes y su discriminación dependen de cada registro, por lo que éstas pueden ser diferentes"* (Duval R. , 1999).

El registro que escoge el grupo al iniciar el proceso de solución es el gráfico, en seguida realizan conversiones en varios registros (gráfico, simbólico, tabular y figural) para modelar la situación y dar respuestas a las preguntas formuladas con el fin de generar estas conversiones, como es posible observarlo a continuación.

Registro de partida: Grafico → Registro de llegada: Registro Simbólico



Unidades significantes

Eje x (variable Independiente) Eje horizontal → Variable independiente

Magnitud: Tiempo
Unidad de medida: Horas

Escala : Van de uno en uno hasta 10 → Relación de variación de punto a punto
Los valores de la variable independiente aumentan de uno en uno hasta 5

Eje y (variable dependiente) Eje vertical → Variable dependiente (y)

Magnitud: Capacidad
Unidad de medida: Litros

Escala: de 1000 en 1000 hasta 10.000 → Relación de variación de punto a punto
Los valores de la variable dependiente (y) aumentan de 1800 en 1800

Pendiente: Sentido e inclinación del trazo → Relación de variación entre la abscisa y la ordenada

(La línea asciende de izquierda a derecha (Pendiente positiva) A medida que los valores de la variable independiente (x) aumentan, los valores de la variable dependiente (y) también aumentan.

Pendiente = 1800 → La relación que los valores de la variable independiente (x) tiene con los valores hallados de la variable dependiente (y) es que cada valor de la variable dependiente equivalen al producto de 1800 por cada valor de la variable independiente correspondiente

Tabla 5 Conversión registro Gráfico al registro Simbólico situación 1

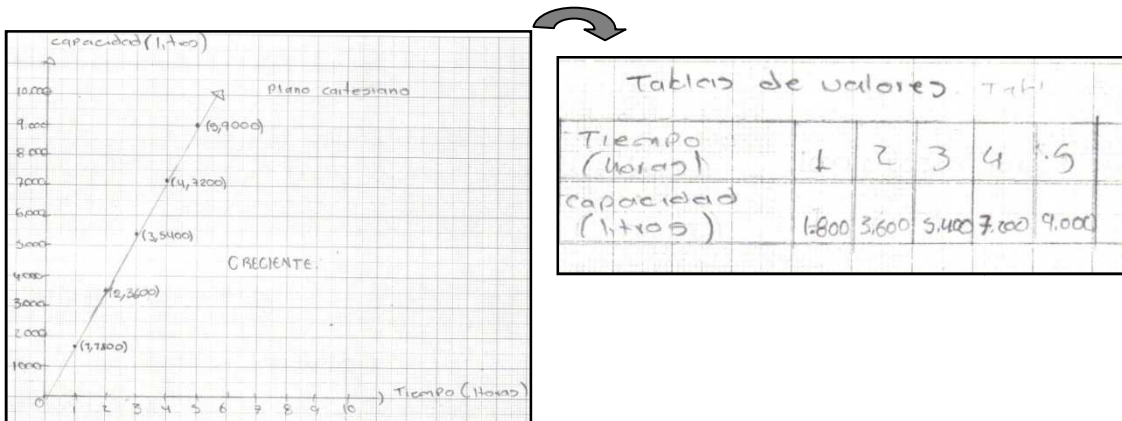
CS: Si, existe correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales; sin embargo, la representación simbólica no expresa explícitamente las magnitudes que intervienen en la situación, en este registro las variables se encuentran implícitas en cada pareja (.

US: Si, a cada unidad significante elemental de la representación en el registro de partida le corresponde una única unidad significante elemental en el registro de llegada, en este caso a cada punto de la gráfica le corresponde una pareja ordenada en el registro simbólico.¹²

CO: Si, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en los dos registros.

La aprehensión de un contenido conceptual se basa en la coordinación de al menos, dos registros de representación, en este caso el registro gráfico y el registro simbólico en funciones lineales, esta articulación entre los dos registros de representación se hace evidente en el uso rápido y la espontaneidad de la conversión.

Registro de partida: Grafico ➔ **Registro de llegada:** Registro tabular



¹² La representación simbólica conjuntista a la que se hace referencia es la que expresa el conjunto por extensión de esta forma no obstante hay casos de funciones para las que no es posible pasar a la representación simbólica dadas las restricciones que impone la continuidad de los números reales.

Unidades Significantes	
<p>Eje x (variable Independiente) Eje horizontal</p> <ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Tiempo • Unidad de medida: Horas 	<p>→ Variable independiente (x)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Tiempo • Unidad de medida: Horas
<p>Escala : Van de uno en uno hasta 10</p>	<p>→ Relación que guardan los valores de la variable independiente La variación entre términos consecutivos es constante</p> <p style="text-align: center;">$2 - 1 = 1$</p> <p>Los valores de la variable independiente aumentan de uno en uno hasta 5</p>
<p>Eje y (variable Dependiente) Eje vertical</p> <ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Capacidad • Unidad de medida: Litros 	<p>→ Variable dependiente (y)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Capacidad • Unidad de medida: Litros
<p>Escala: de 1000 en 1000 hasta 10.000</p>	<p>→ Relación que guardan los valores de la variable dependiente Los valores de la variable dependiente (y) aumentan de 1800 en 1800</p>
<p>Pendiente Sentido e inclinación del trazo (La línea asciende de izquierda a derecha (Pendiente positiva))</p>	<p>→ La relación que guardan los valores de las variables independiente y dependiente A medida que los valores de la variable independiente aumentan, los valores de la variable dependiente también aumentan.</p>
<p>Pendiente = 1800</p>	<p>→ La relación que los valores de la variable independiente (x) tiene con los valores hallados de la variable dependiente (y) es que cada valor de la variable dependiente y_1 equivalen al producto de 1800 por cada valor de la variable independiente correspondiente x_1</p>

Tabla 6 Conversión registro gráfico al registro tabular. Situación 1

CS: Si, existe correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales, ya que las magnitudes expresadas en los ejes cartesianos, sus unidades de medida , los valores de variación se encuentran enunciados en la tabla de valores y el valor de la pendiente se encuentra implícita en la relación de covariación entre columnas.

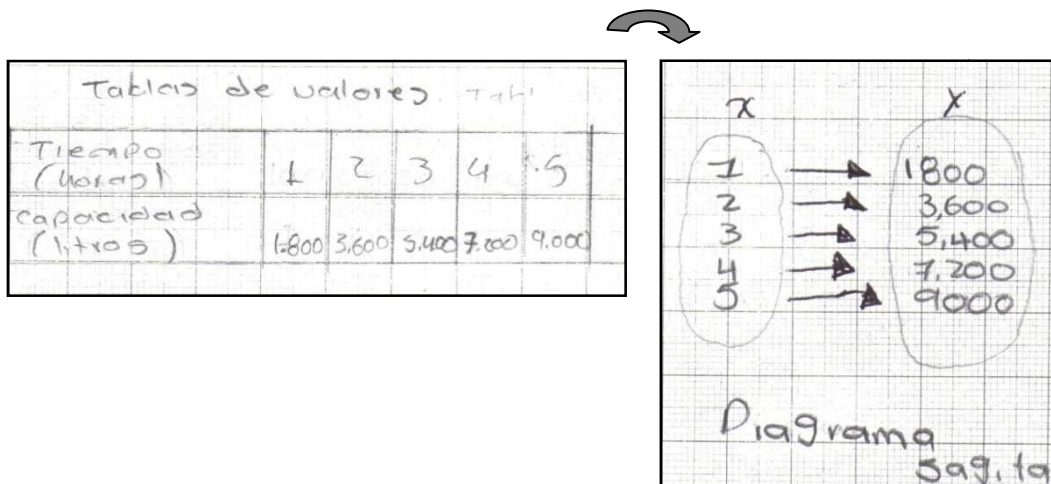
US: Si, a cada unidad significativa elemental de la representación en el registro de partida le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de llegada.

CO: Si, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en los dos registros.

En el tratamiento en el registro tabular se presentó una inadecuada asociación de la variable dependiente (Capacidad) con la primera fila de la tabla, cuando escribieron las magnitudes, pero esto fue rectificado cuando la estudiante expresa “ ¡Ay, es al revés!”, “¿Si ve esto es acá y esto es acá?” señalando los ejes cartesianos cuando estaban realizando la conversión al registro tabular escribiendo los valores de cada magnitud a partir de los puntos de la gráfica; con esto hace evidente la importancia del criterio tres sobre la congruencia de las representaciones, el orden en que se expresan las unidades significantes da cuenta del reconocimiento que tienen los estudiantes de las variables de la situación y de sus relaciones de covariación .

Es como el concepto de función como dependencia entre variables consigue su mejor expresión a través de las diferentes representaciones en este caso el registro gráfico y tabular, es así como lo expresa (García, Serrano y Espitia 2000) “Particularmente las tablas de valores y las gráficas cartesianas ayudan a desarrollar un pensamiento sobre la variación y sobre sus patrones de comportamiento” citado por (Gutierrez, 2007).

Registro de partida: Tabular → **Registro de llegada:** Registro Figural



Unidades significantes	
Variable independiente (x)	→ Variable independiente (x)
<ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Tiempo • Unidad de medida: Horas 	→
Relación que guardan los valores de la variable independiente	→ Tipo de relación entre los valores de la variable independiente
La variación entre términos consecutivos es constante	La variación entre términos consecutivos es constante
$2 - 1 = 1$	$2 - 1 = 1$
Los valores de la variable independiente aumentan de uno en uno hasta 5	→ Los valores de la variable independiente aumentan de uno en uno hasta 5
Variable dependiente (y)	→ Variable dependiente (y)
<ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Capacidad • Unidad de medida: Litros 	→
Relación que guardan los valores de la variable dependiente	→ Tipo de relación entre los valores de la variable dependiente (y)
Los valores de la variable dependiente (y) aumentan de 1800 en 1800	Los valores de la variable dependiente (y) aumentan de 1800 en 1800
La relación que guardan los valores de las variables independiente y dependiente	→ Relación entre los valores de la variable independiente (x) y los valores hallados de la variable dependiente (y).
A medida que los valores de la variable independiente aumentan, los valores de la variable dependiente también aumentan.	A medida que los valores de la variable independiente aumentan, los valores de la variable dependiente también aumentan
La relación que los valores de la variable independiente (x) tiene con los valores hallados de la variable dependiente (y) es que cada valor de la variable dependiente y_1 equivalen al producto de 1800 por cada valor de la variable independiente correspondiente x_1	→ La relación que los valores de la variable independiente (x) tiene con los valores hallados de la variable dependiente (y) es que cada valor de la variable dependiente y_1 equivalen a la mitad de cada valor de la variable independiente correspondiente x_1

Tabla 7 Conversión registro tabular al registro figural situación 1

CS: Si, existe correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales, las magnitudes que intervienen en la situación no se hacen explícitas en el registro de llegada no obstante se expresan claramente las variables, independiente y dependiente, sus valores de covariación y su relación de correspondencia.

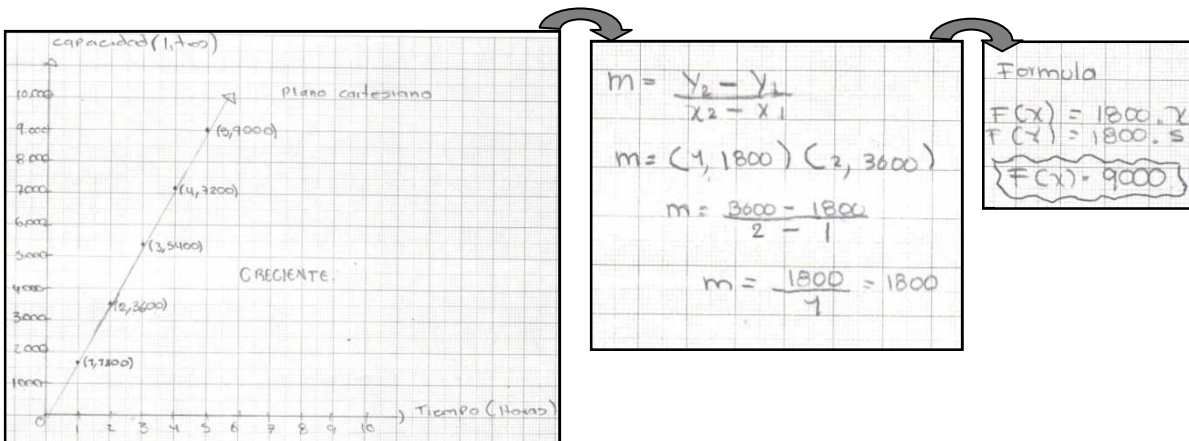
US: Si, a cada unidad significativa elemental de la representación en el registro de partida le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de llegada.

CO: Si, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en los dos registros

Los estudiantes realizaron tratamientos y conversiones adecuados para expresar la conversión del registro tabular al registro figural, esta conversión se hace de manera espontánea y transparente, expresada en el mismo orden.

El autor clasifica las conversiones en *congruentes o no (transparentes) y reversibles*, bajo este argumento es posible considerar que la representación en el registro tabular y en el registro figural son congruentes y reversibles ya que su proceso inverso de conversión se da de manera transparente por la naturaleza de sus unidades significantes, Duval señala que *“la naturaleza de las unidades significantes y su discriminación dependen de cada registro, por lo que éstas pueden ser diferentes”* (Duval R. , 1999). En el caso de estos dos registros es posible afirmar que hay identidad entre sus unidades significantes.

Registro de partida: Gráfico → **Registro de llegada:** Registro algebraico



Unidades significantes	
<p>Eje x (variable Independiente)</p> <p>Eje horizontal</p> <ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Tiempo • Unidad de medida: Horas <p>Escala : Van de uno en uno hasta 5</p>	<p>Variable dependiente $f(x) = y$</p> <p>Se identifica la Constante m que es el coeficiente 1800 la cual toma el valor $m > 1$</p>
<p>Eje y (variable Dependiente)</p> <p>Eje vertical</p> <ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Capacidad • Unidad de medida: Litros <p>Escala: de 1000 en 1000 hasta 10.000</p> <p>Pendiente Sentido e inclinación del trazo (La línea asciende de izquierda a derecha (Pendiente positiva) Pendiente = 1800</p>	<p>Variable independiente x</p>

Tabla 8 Conversión registro Gráfico al registro Algebraico. Situación 1

CS: Si, existe correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales, las magnitudes que intervienen en la situación no se hacen manifiestas en el registro de llegada; sin embargo, se encuentran explícitas las variables, independiente (x) y dependiente (y), igualmente la pendiente de variación está relacionada en el coeficiente (m) y los valores de covariación se encuentran implícitos en el registro de llegada, estos se pueden hallar a partir del tratamiento en la representación algebraica.

US: Si, a cada unidad significativa elemental de la representación en el registro de partida le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de llegada.

CO: No, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en los dos registros ya que en la representación $f(x) = 1800x$ las variables se encuentran en un diferente orden de aprehensión con relación al registro gráfico.

La interpretación de representaciones gráficas involucra una interpretación global de la misma, ya que es necesario discriminar las unidades significantes visuales, que proporciona la gráfica y descubrir las unidades correspondientes en los símbolos de la escritura algebraica.

La conversión del registro gráfico al registro algebraico no es congruente, el paso de una representación a la otra no es espontáneo ya que no se cumple el tercer criterio, el que se refiere al orden de aprehensión de las unidades significantes.

Como lo expresa el autor *“puede ocurrir que dos representaciones sean congruentes en un sentido de conversión y no congruentes en la conversión inversa. Por ejemplo la representación gráfica cartesiana de dos cuadrantes determinados respectivamente por los semi-ejes y positivos, y negativos, son congruentes si se pasa de la escritura algebraica al gráfico, pero ya no lo son en el plano inverso”*. (Duval, 1999).

La articulación entre el registro gráfico y algebraico presentó una mayor dificultad para los estudiantes, ya que a pesar de reconocer el valor de covariación (m) entre las variables (x) y (y) como se observa en la siguiente respuesta

¿En qué intervalo de tiempo la cantidad de agua que entra aumenta de 1800 litros a 5400 litros? 3
 Como lo observaron: lo observamos en el plano Cartesiano
porque iba aumentando de 1800
en 1800 hasta 5400

Recurrieron al tratamiento de una fórmula intermedia en el registro algebraico para hallar o confirmar el valor la pendiente (m), a partir de dos puntos de la gráfica.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = (1, 1800) (2, 3600)$$

$$m = \frac{3600 - 1800}{2 - 1}$$

$$m = \frac{1800}{1} = 1800$$

Formula

$$F(x) = 1800 \cdot x$$

$$F(x) = 1800 \cdot 5$$

$$F(x) = 9000$$

Esto podría explicarse en términos del modelo que propicia la enseñanza y especialmente los libros, en donde desde la gráfica se pueden obtener puntos para determinar la pendiente y posteriormente la ecuación.

Se observa la dificultad que afrontan los estudiantes para llevar a cabo la conversión entre representaciones, en este caso del registro gráfico al algebraico; este problema es llamado por Duval como *“fenómeno de no-congruencia, el cual se da entre las representaciones de un mismo objeto que provienen de sistemas semióticos diferentes y el pasaje entre ellas no es inmediato”* (Duval, 1999). Ya que la representación gráfica presenta las unidades significantes explícitas de manera visual, entre ellas los ejes cartesianos, las magnitudes, las parejas ordenadas, una de las unidades significantes implícitas en el registro gráfico es la constante de variación es decir la pendiente (**m**) mientras que la pendiente en el registro algebraico es explícita.

Situación 2 A salvar el loro orejiamarillo

Registro de partida: Registro Verbal (lenguaje Natural) → **Registro de llegada:** Registro

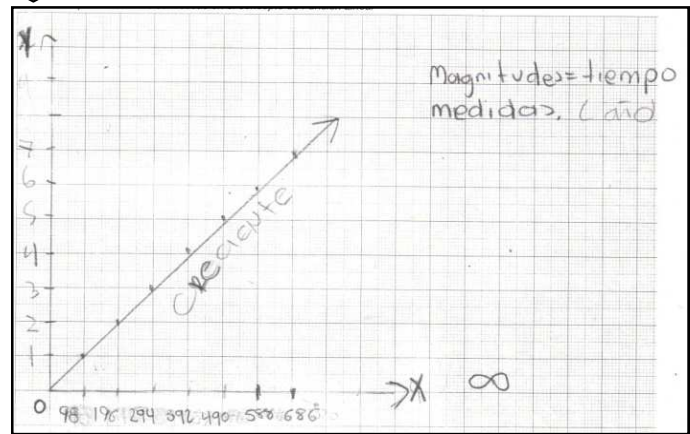
Grafico

Como producto de las celebraciones religiosas en Colombia, se puso en peligro la Palma de cera (Planta símbolo Nacional de Colombia) la cual es el hábitat de él loro orejiamarillo que a su vez se ha visto afectado.

En 1999 se declaró que esta ave se encontraba en peligro de extinción ya que en el Tolima solo se contaba con 81 ejemplares.

A partir de ese momento se tomaron medidas de protección de la especie y la población empezó a crecer a razón de aproximadamente 98 individuos por año, si el aumento poblacional de esta ave continuara con esta tasa de crecimiento.

¿Cuántos ejemplares pueden nacer al cabo de 7 años?



Unidades Significantes	
Variable Independiente (x):	Eje x (variable dependiente) Eje horizontal
<ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Tiempo • Unidad de medida: Años 	
Relación entre los valores de la variable independiente: Varían de uno en uno hasta 7	Escala: de 98 en 98 hasta 686
Variable dependiente (y)	Eje y (variable Independiente) Eje vertical
<ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Numero de individuos • Unidad de medida: Unidades 	<ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Tiempo • Unidad de medida: Años
Relación entre los valores de la variable dependiente (y): varían de 98 en 98	Escala : Van de uno en uno hasta 7
Relación entre los valores de la variable independiente (x) y los valores hallados de la variable dependiente (y):	Pendiente
Los valores de la variable dependiente (y) equivalen a 98 por cada valor de la variable independiente (x)	Sentido e inclinación del trazo (La línea asciende de izquierda a derecha) (Pendiente positiva) Pendiente = 98

Tabla 9 Conversión Registro verbal al registro Gráfico. situación 2

Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal

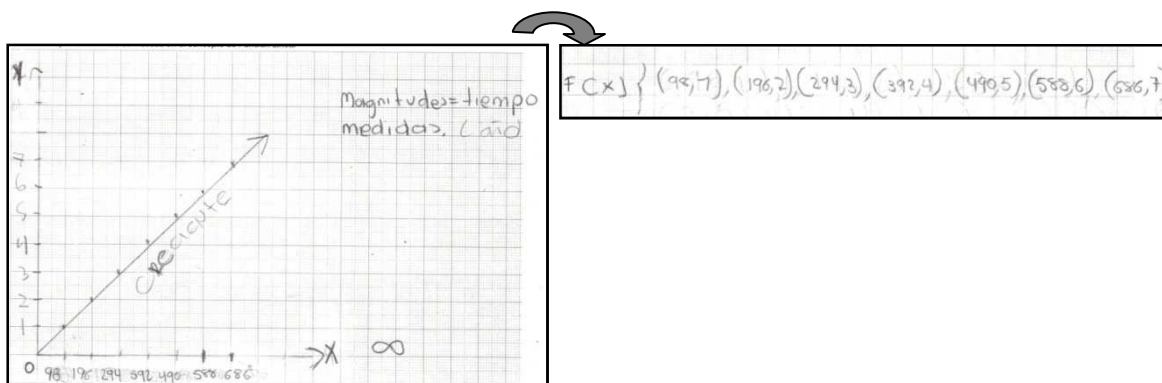
CS: Si, cada unidad significativa del registro de partida está relacionada con una unidad significativa en el registro de llegada, aunque se presenta ausencia de la magnitud número de individuos se encuentran explícitas las variables, independiente (x) y dependiente (y).

US: Si, a cada unidad significativa elemental de la representación en el registro de partida le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de llegada.

CO: No, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en los dos registros ya que en la representación gráfica los valores de los ejes cartesianos se encuentran invertidos, en el eje (x , horizontal) aparecen los valores de la variable dependiente (Individuos que nacen por año) y en el eje (y , vertical) se observan los valores de la variable independiente (tiempo) por ello las variables (x e y) se encuentran en un diferente orden de aprehensión con relación a la situación expresada en el registro verbal.

La conversión del registro verbal al registro gráfico fue efectuada, teniendo en cuenta las variables relacionadas en el registro de partida, no obstante se presentó un inadecuado tratamiento de la representación gráfica cuando se considero el tiempo en el eje vertical y el número de nacimientos en el eje horizontal, es posible que se deba a una asociación de la variable (x) con el eje de las ordenadas; generando un fenómeno de no congruencia entre registros.

Registro de partida: Grafico → **Registro de llegada:** Registro Simbólico



Unidades Significantes	
Eje x (variable dependiente) Eje horizontal	→ Variable dependiente (x_1, x_2, x_3)
	→
Escala: de 98 en 98 hasta 686	→ Relación de variación de punto a punto Los valores de la variable dependiente (y) aumentan de 98 en 98 $196 - 98 = 98$
Eje y (variable Independiente) Eje vertical	→ Variable dependiente (y_1, y_2, y_3)
<ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Tiempo • Unidad de medida: Años 	
Escala : Van de uno en uno hasta 7	→ Relación de variación de punto a punto Los valores de la variable independiente aumentan de uno en uno $2 - 1 = 1$
Pendiente Sentido e inclinación del trazo (La línea asciende de izquierda a derecha (Pendiente positiva) Pendiente = 98	→ Relación de variación entre la abscisa y la ordenada A medida que los valores de la variable independiente (x) aumentan, los valores de la variable dependiente (y) también aumenta. La relación que los valores de la variable independiente (x) tiene con los valores hallados de la variable dependiente (y) es que cada valor de la variable dependiente y_1 equivalen al producto de 98 por cada valor de la variable independiente correspondiente x_1

Tabla 10 Conversión registro gráfico al registro Simbólico. situación 2

CS: Si, existe correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales no obstante, el registro de partida (gráfico) al tener las variables invertidas, en la conversión al registro de llegada también se presentan invertidas de esta forma (y_1, x_1)

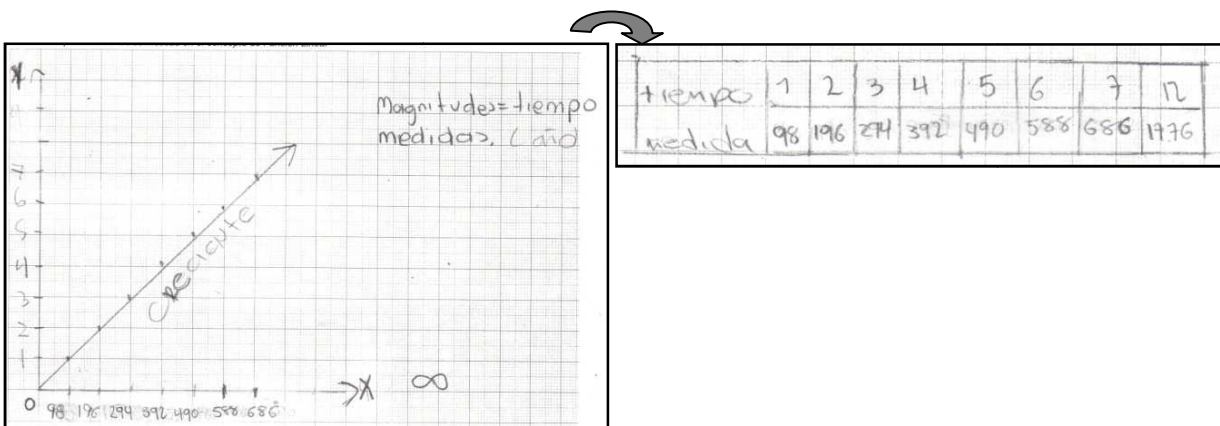
US: Si, a cada unidad significativa elemental de la representación en el registro de partida le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de llegada, en este caso a cada punto de la gráfica le corresponde una pareja ordenada en el registro simbólico

CO: Si, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en los dos registros.

Aunque la conversión del registro grafico al simbólico es congruente, ya que se cumplen los tres criterios de conversión la información expresada en el registro simbólico no expresa la información de la situación planteada en el registro verbal.

Se aprecia que los estudiantes establecen la relación entre el tiempo y el número de nacimientos, pero posiblemente el fenómeno de no congruencia que involucra la conversión del registro verbal al gráfico afecta la comprensión de la relación de dependencia entre las dos magnitudes ya que el número de nacimientos depende del tiempo y esto se hace evidente en la conversión del registro gráfico al registro simbólico.

Registro de partida: Grafico → **Registro de llegada:** Tabular



Unidades Significantes	
<p>Eje x (variable dependiente) Eje horizontal</p> <p>Escala: de 98 en 98 hasta 686</p>	<p>Variable independiente (x)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Tiempo • Unidad de medida: <p>Relación que guardan los valores de la variable independiente La variación entre términos consecutivos es constante</p> <p style="text-align: center;">$2 - 1 = 1$</p> <p>Los valores de la variable independiente aumentan de uno en uno</p>
<p>Eje y (variable independiente) Eje vertical</p> <ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Tiempo • Unidad de medida: Años <p>Escala : Van de uno en uno hasta 7</p>	<p>Variable dependiente (y)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: medida <p>Relación que guardan los valores de la variable independiente Los valores de la variable dependiente (y) aumentan de 98 en 98</p>
<p>Pendiente Sentido e inclinación del trazo (La línea asciende de izquierda a derecha (Pendiente positiva)</p> <p>Pendiente = 98</p>	<p>La relación que guardan los valores de las variables independiente y dependiente</p> <p>A medida que los valores de la variable independiente aumentan, los valores de la variable dependiente también aumentan.</p> <p>La relación que los valores de la variable independiente (x) tiene con los valores hallados de la variable dependiente (y) es que cada valor de la variable dependiente y_1 equivalen al producto de 98 por cada valor de la variable independiente correspondiente x_1</p>

Tabla 11 Conversión del registro Gráfico al registro Tabular. Situación 2

CS: Si, existe correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales, ya que las variables expresadas en los ejes cartesianos aunque invertidos y sus respectivos valores de variación, se encuentran enunciados en la tabla de valores.

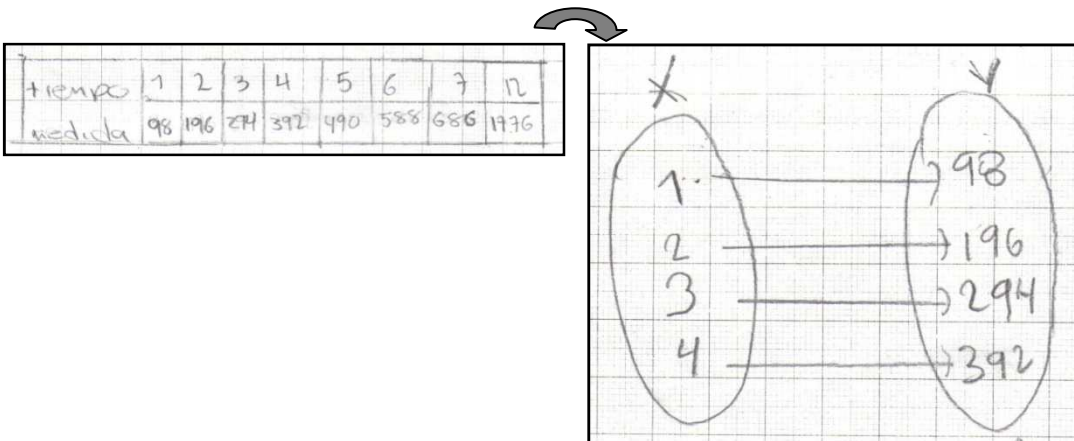
Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal

US: Si, a cada unidad significativa elemental de la representación en el registro de partida le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de llegada.

CO: No, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en el registro de partida (Gráfico) y en el registro de llegada (verbal), debido a un inadecuado tratamiento en el registro gráfico en el cual se invirtieron los ejes cartesianos.

La información que representa la tabla de valores es coherente con la información expresada en el registro verbal, con esto hace evidente la importancia del criterio tres sobre la congruencia de las representaciones, el orden en que se expresan las unidades significantes da cuenta del reconocimiento que tienen los estudiantes de las variables de la situación y de sus relaciones de covariación.

Registro de partida: Tabular → **Registro de llegada:** Figural



Unidades Significantes	
Variable independiente (x)	Variable independiente (x)
<ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Tiempo • Unidad de medida: 	
Relación que guardan los valores de la variable independiente	Tipo de relación entre los valores de la variable independiente
La variación entre términos consecutivos es constante	La variación entre términos consecutivos es constante
$2 - 1 = 1$	$2 - 1 = 1$
Los valores de la variable independiente aumentan de uno en uno	Los valores de la variable independiente aumentan de uno en uno
Variable dependiente (y)	Variable dependiente (y)
<ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Número de Individuos • Unidad de medida: Unidades 	<ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Número de individuos • Unidad de medida: Unidades
Relación que guardan los valores de la variable independiente	Tipo de relación entre los valores de la variable dependiente (y)
Los valores de la variable dependiente (y) aumentan de 98 en 98	Los valores de la variable dependiente (y) aumentan de 1800 $3n$ 1800
La relación que guardan los valores de las variables independiente y dependiente	Relación entre los valores de la variable independiente (x) y los valores hallados de la variable dependiente (y).
A medida que los valores de la variable independiente aumentan, los valores de la variable dependiente también aumentan.	A medida que los valores de la variable independiente aumentan, los valores de la variable dependiente también aumentan
La relación que los valores de la variable independiente (x) tiene con los valores hallados de la variable dependiente (y) es que cada valor de la variable dependiente y_1 equivalen al producto de 98 por cada valor de la variable independiente correspondiente x_1	La relación que los valores de la variable independiente (x) tiene con los valores hallados de la variable dependiente (y) es que cada valor de la variable dependiente y_1 equivalen al producto de 98 por cada valor de la variable independiente correspondiente x_1

Tabla 12 Conversión Registro Tabular al registro Figural. Situación 2

CS: Si, existe correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales, las magnitudes que intervienen en la situación no se hacen explícitas en el registro de llegada no obstante se expresan claramente las variables, independiente y dependiente, sus valores de covariación y su relación de correspondencia.

US: Si, a cada unidad significativa elemental de la representación en el registro de partida le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de llegada.

CO: Si, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en los dos registros.

Los estudiantes realizaron tratamientos y conversiones adecuados para expresar la conversión del registro tabular al registro figural, esta conversión se hace de manera directa y transparente, expresada en el mismo orden.

Duval afirma que *“cada sistema semiótico está definido por reglas de conformidad que permiten la formación de las unidades elementales del sistema”*. (Duval R. , 1999) Con esta premisa es posible afirmar que las reglas de conformidad del sistema de representación tabular y del sistema de representación figural son semejantes.

Situación 3 La Antártida y el clima mundial

Registro de partida: Verbal (lenguaje natural) → **Registro de llegada:** Gráfico

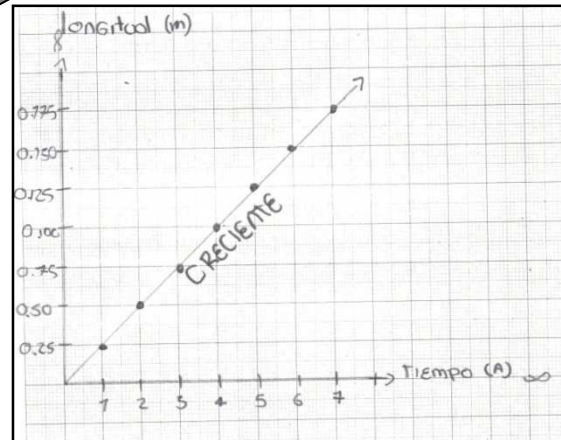
La Antártida ejerce una gran influencia sobre el clima del planeta y cualquier cambio en este enorme depósito de agua dulce sería catastrófico: Variaciones en el nivel del mar, en la cantidad de lluvias, en el caudal de los ríos y en el nivel de los lagos.

Como consecuencia del calentamiento global, el hielo de los glaciares se está derritiendo, a raíz de este fenómeno el nivel del mar está aumentando, poniendo en riesgo de inundación las ciudades costeras. Según los expertos se prevé que el nivel del mar aumentaría a razón de 0.25 mm por año.

¿Si el nivel del mar aumenta a razón de 0.25 mm por año en qué intervalo de tiempo ocurre la inundación de bahía blanca?

A continuación se muestra una tabla con el nombre de tres ciudades y su respectiva altura sobre el nivel del mar

Ciudad	Altura sobre el nivel del mar
Bahía Blanca	3 m
Delfines	6 m
Cristal	12 m



Unidades Significantes

Variable Independiente (x):

→ **Eje x (variable Independiente)**
Eje horizontal

- Magnitud: Tiempo
- Unidad de medida: Años

- Magnitud: Tiempo
- Unidad de medida: Años

Relación entre los valores de la variable independiente: Varían de uno en uno

→ **Escala :** Van de uno en uno hasta 7

Variable dependiente (y)

→ **Eje y (variable Dependiente)** Eje vertical

- Magnitud: Altura sobre el nivel del mar
- Unidad de medida: metros
- Magnitud: Longitud
- Unidad de medida: Metros

Relación entre los valores de la variable dependiente (y): varían de 0.25 en 0.25

→ **Escala:** de 0.25 en 0.25

Relación entre los valores de la variable independiente (x) y los valores hallados de la variable dependiente (y):

→ **Pendiente**
Sentido e inclinación del trazo
(La línea asciende de izquierda a derecha (Pendiente positiva) Pendiente = 0.25

Los valores de la variable dependiente (y) equivalen a 0.25 por cada valor de la variable independiente (x)

Tabla 13 Conversión registro verbal al registro Gráfico. Situación 3

CS: Si, cada unidad significativa del registro de partida está relacionada con una unidad significativa en el registro de llegada.

US: Si, a cada unidad significativa elemental de la representación en el registro de partida le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de llegada.

CO: Si, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en los dos registros.

La conversión del registro verbal al registro gráfico se efectuó de forma clara trazando las descripciones expresadas en el registro de partida, por lo cual se genera un fenómeno de congruencia.

Guzmán (1998) refiriéndose a la teoría de Duval, señala *“que el contenido de una representación depende del registro utilizado, que es el que presenta explícitamente al objeto representado y muestra particularidades del objeto que en otro registro pueden no ser evidentes”* citado por (Gutierrez, 2007)

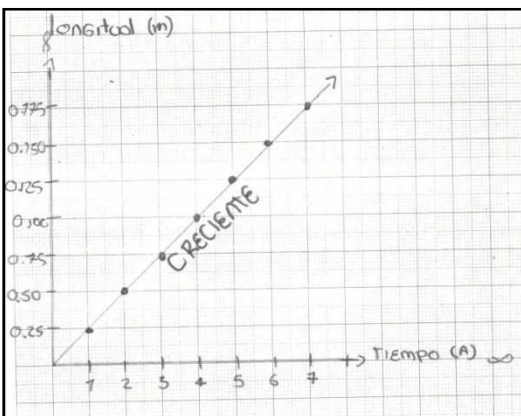
En el registro gráfico la representación corresponde al segmento que inicia en el punto de coordenadas (0,0), que tiene pendiente 0.25 y como punto final (7, 1.75), adicionalmente los estudiantes agregan el símbolo (∞) afirmando *“porque no sabemos cuándo termina”*, *“porque no tiene fin”*, con estas afirmaciones, expresan su comprensión sobre la continuidad de la función lineal de la misma forma agregan la palabra *creciente* a la gráfica, aquí se presenta un fenómeno de congruencia entre la representación gráfica de la función trazada y la percepción de la noción de crecimiento asociada con el hecho de que la gráfica sube.

En esta conversión los estudiantes expresaron la altura sobre el nivel del mar, como la longitud, lo cual no altera el proceso de conversión ya que la altura¹³ se puede expresar como longitud.

Comprender una representación gráfica requiere de una interpretación global para relacionar los elementos que no cambian es decir que características visuales de la gráfica no cambiarán bajo el cambio de escala (las intercepciones con los ejes) y que características cambian cuando se alteran las escalas, (los ángulos geométricos que la recta forma con cada uno de los ejes).

También se presenta un manejo incorrecto de los valores que toman las magnitudes continuas, ya que los valores que toma la variable dependiente son 0.25, 0.50, 0.75, 1.00, 1.25... Pero los estudiantes después de 0.75 escriben 0.100, de esta forma los estudiantes presentan una preferencia por la utilización de valores discretos y un manejo escaso de las cantidades continuas, en las conversiones siguientes se puede observar como en lugar de escribir 0.50 escriben 50; esto hace evidente el dominio de los números naturales y enteros y el poco estudio de los reales.

Registro de partida: Gráfico → **Registro de llegada:** Simbólico



Parejas ordenadas
 $f(x) = \{(1, 0.25), (2, 0.50), (3, 0.75), (4, 1.00), (5, 0.125), (6, 0.150), (7, 0.175)\}$

¹³ La altura de un objeto o figura geométrica es una longitud o una distancia, usualmente vertical o en la dirección de la gravedad. (<http://es.wikipedia.org/wiki/>, 2011)

Unidades Significantes	
Eje x (variable Independiente) Eje horizontal	→ Variable independiente (x)
<ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Tiempo • Unidad de medida: Años 	→
Escala : Van de uno en uno	→ Relación de variación de punto a punto Los valores de la variable independiente aumentan de uno en uno $2 - 1 = 1$
Eje y (variable Dependiente) Eje vertical	→ Variable dependiente (y)
<ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Longitud • Unidad de medida: metros 	→
Escala: de 0.25 en 0.25	→ Relación de variación de punto a punto Los valores de la variable dependiente (y) aumentan de 0.25 en 0.25 $0.5 - 0.25 = 0.25$
Pendiente Sentido e inclinación del trazo (La línea asciende de izquierda a derecha (Pendiente positiva)	→ Relación de variación entre la abscisa y la ordenada A medida que los valores de la variable independiente (x) aumentan, los valores de la variable dependiente (y) también aumenta.
Pendiente = 0.25	→ La relación que los valores de la variable independiente (x) tiene con los valores hallados de la variable dependiente (y) es que cada valor de la variable dependiente y_1 equivalen al producto de 0.25 por cada valor de la variable independiente correspondiente x_1

Tabla 14 Conversión registro Gráfico al registro simbólico. Situación 3

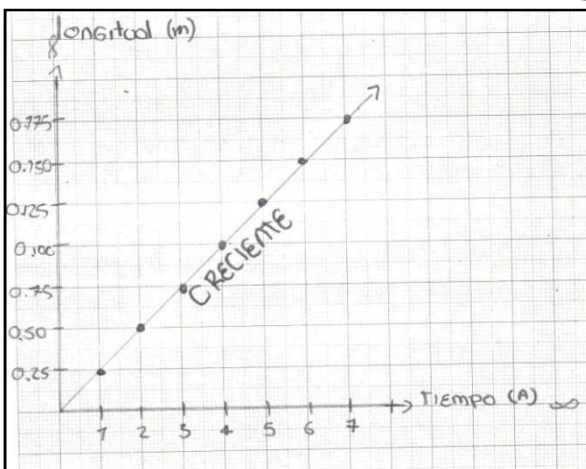
CS: Si, existe correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales, sin embargo, la representación simbólica no expresa explícitamente las magnitudes que intervienen en la situación, en este registro las variables se encuentran implícitas en cada pareja (x_1, y_1) ; es aquí donde el estudiante debe recurrir a la abstracción de dichas unidades significantes y reconocer que están presentes en el registro simbólico pero de manera implícita.

US: Si, a cada unidad significativa elemental de la representación en el registro de partida le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de llegada, en este caso a cada punto de la gráfica le corresponde una pareja ordenada en el registro simbólico.

CO: Si, existe igual orden de aprehensión de las unidades significativas en los dos registros.

La conversión es congruente ya que se cumplen los tres criterios de conversión entre el registro de partida gráfico y el registro de llegada simbólico, se observa como el registro gráfico se presenta en casi todas las conversiones que realizan los estudiantes con lo cual se verifica la afirmación del autor cuando dice que “En matemáticas los gráficos cartesianos se utilizan siempre en articulación con otros registros de representación” (Duval 2004).

Registro de partida: Gráfico → **Registro de llegada:** Tabular



tiempo							
Años	1	2	3	4	5	6	7
longitud metros	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75

Unidades Significativas	
Eje x (variable Independiente) Eje horizontal	→ Variable independiente (x)
<ul style="list-style-type: none"> Magnitud: Tiempo Unidad de medida: Años 	<ul style="list-style-type: none"> Magnitud: Tiempo Unidad de medida: Años
Escala : Van de uno en uno	→ Relación que guardan los valores de la variable independiente La variación entre términos consecutivos es constante
Eje y (variable Dependiente)	→ $2 - 1 = 1$

Eje vertical	Los valores de la variable independiente aumentan de uno en uno Variable dependiente (y)
<ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Longitud • Unidad de medida: Metros 	<ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Número de Individuos • Unidad de medida: Unidades
Escala: de 0.25 en 0.25	Relación que guardan los valores de la variable independiente Los valores de la variable dependiente (y) aumentan de 0.25 en 0.25
Pendiente Sentido e inclinación del trazo (La línea asciende de izquierda a derecha) (Pendiente positiva) Pendiente = 0.25	La relación que guardan los valores de las variables independiente y dependiente A medida que los valores de la variable independiente aumentan, los valores de la variable dependiente también aumentan. La relación que los valores de la variable independiente (x) tiene con los valores hallados de la variable dependiente (y) es que cada valor de la variable dependiente y_1 equivalen al producto de 0.25 por cada valor de la variable independiente correspondiente x_1

Tabla 15 Conversión registro Gráfico al registro Tabular Situación 3

CS: Si, existe correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales, ya que las magnitudes expresadas en los ejes cartesianos, sus unidades de medida y los valores de variación se encuentran enunciados en la tabla de valores asimismo el valor de la pendiente se encuentra implícita en la relación de covariación entre columnas.

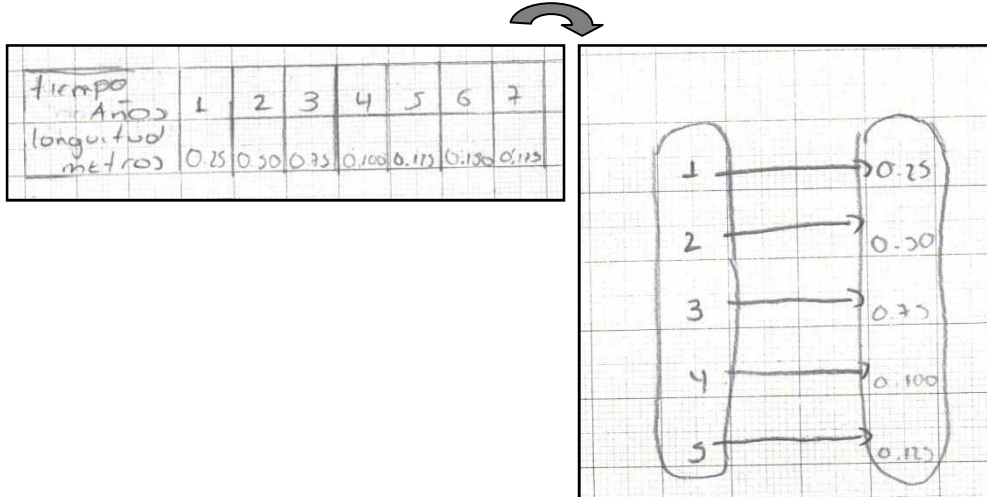
US: Si, a cada unidad significativa elemental de la representación en el registro de partida le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de llegada.

CO: Si, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en los dos registros.

La conversión entre registros de representación es congruente ya que se cumplen los tres criterios, a cada unidad significativa (variable independiente, variable dependiente, magnitudes y pendiente) presentes en el registro gráfico les corresponde de manera directa o transparente una unidad significativa en el registro de llegada, es decir existe

articulación entre la gráfica y la tabla de valores que relaciona el tiempo con la altura sobre el nivel del mar.

Registro de partida: Tabular → Registro de llegada: Figural



Unidades Significantes

<p>Variable independiente (x)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Tiempo • Unidad de medida: Años <p>Relación que guardan los valores de la variable independiente La variación entre términos consecutivos es constante</p> <p style="text-align: center;">$2 - 1 = 1$</p> <p>Los valores de la variable independiente aumentan de uno en uno</p>	→	<p>Variable independiente (x)</p> <p>Tipo de relación entre los valores de la variable independiente La variación entre términos consecutivos es constante</p> <p style="text-align: center;">$2 - 1 = 1$</p> <p>Los valores de la variable independiente aumentan de uno en uno</p>
<p>Variable dependiente (y)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Longitud • Unidad de medida: Metros <p>Relación que guardan los valores de la variable independiente Los valores de la variable dependiente (y) aumentan de 0.25 en 0.25</p>	→	<p>Variable dependiente (y)</p> <p>Tipo de relación entre los valores de la variable dependiente (y) Los valores de la variable dependiente (y) aumentan de 0.25 en 0.25</p>
<p>La relación que guardan los valores de las variables independiente y dependiente A medida que los valores de la variable independiente aumentan, los valores de la variable dependiente también aumentan.</p>	→	<p>Relación entre los valores de la variable independiente (x) y los valores hallados de la variable dependiente (y). A medida que los valores de la variable independiente aumentan, los valores de la variable dependiente también aumentan</p>

La relación que los valores de la variable independiente (x) tiene con los valores hallados de la variable dependiente (y) es que cada valor de la variable dependiente y_1 equivalen al producto de 0.25 por cada valor de la variable independiente correspondiente x_1



La relación que los valores de la variable independiente (x) tiene con los valores hallados de la variable dependiente (y) es que cada valor de la variable dependiente y_1 equivalen al producto de 0.25 por cada valor de la variable independiente correspondiente x_1

El valor que toma la variable dependiente, si la variable independiente es igual a cero Es igual a cero

El valor que toma la variable dependiente, si la variable independiente es igual a cero Es igual a cero

Tabla 16 Conversión registro tabular al registro figural. Situación 3

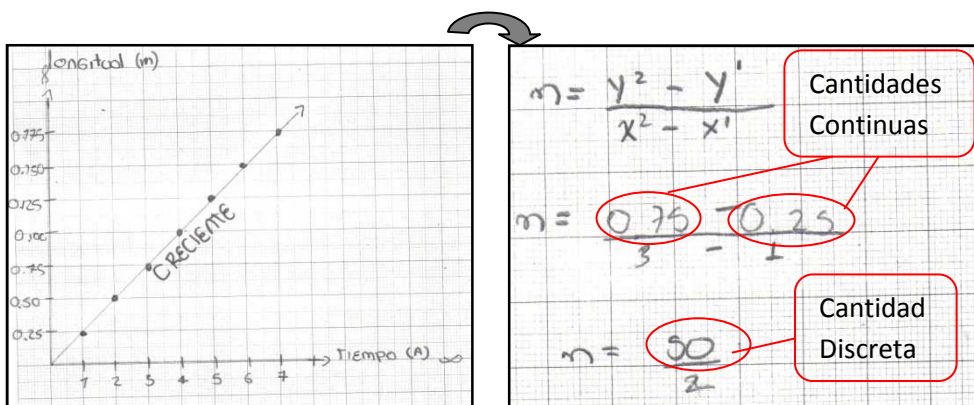
CS: No, existe correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales, ya que hay ausencia de las unidades significantes de las variables (x e y).

US: Si, a cada unidad significativa elemental de la representación en el registro de partida le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de llegada.

CO: Si, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en los dos registros
No existe congruencia en la conversión entre el registro tabular y el registro figural ya que no se cumple el criterio uno.

Esto puede darse por falta de discriminación de las unidades significantes, desconocimiento de las reglas propias de formación en cada registro o por falta de atención en el momento de hacer la conversión.

Registro de partida: Tabular → Registro de llegada: Figural



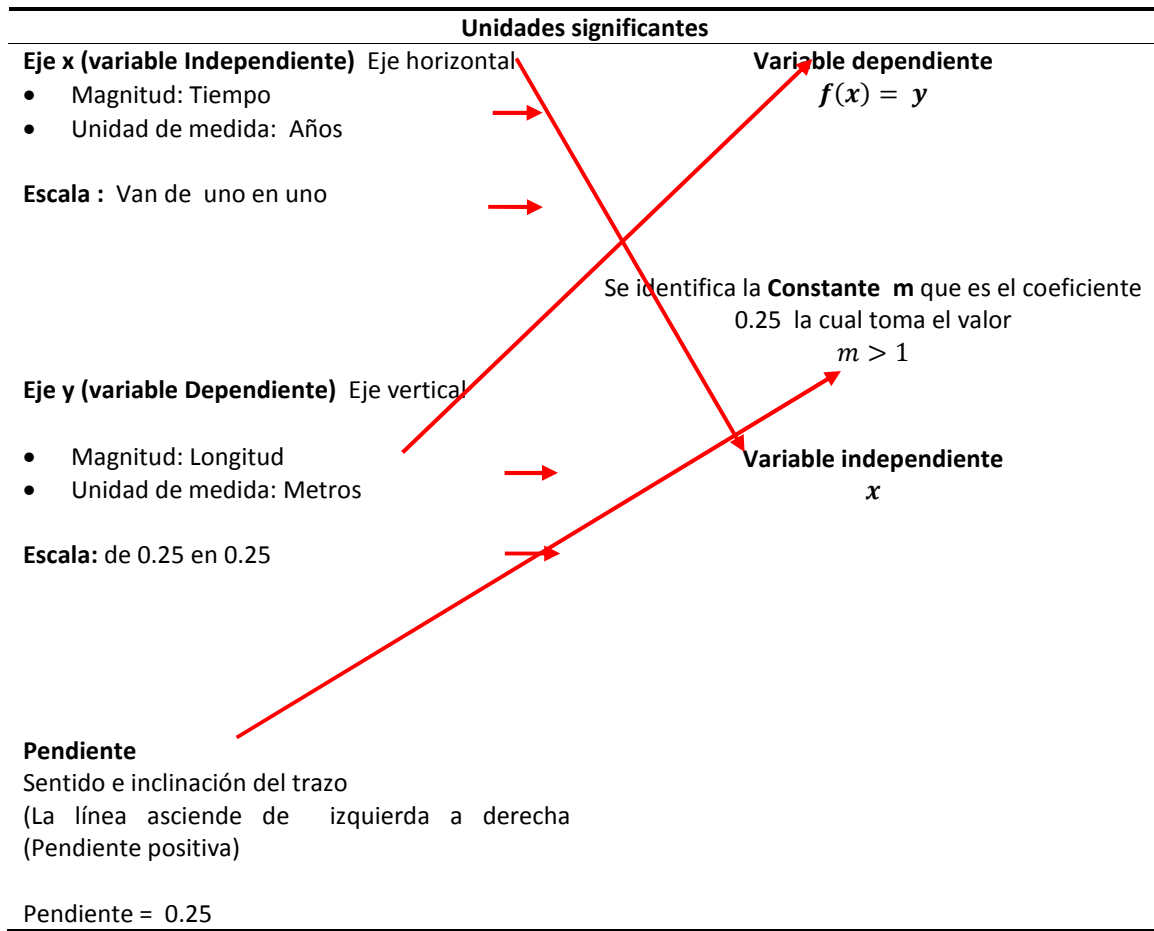


Tabla 17 Conversión registro Gráfico al registro Algebraico. Situación 3

CS: No, existe correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales, ya que la representación del concepto de función en el registro algebraico (Fórmula de la función) no se encuentra presente, los estudiantes hicieron tratamiento de la fórmula para hallar la pendiente, a partir de los puntos de la gráfica, pero no trascendió al planteamiento de la ecuación de la función.

US: No, a cada unidad significativa elemental de la representación en el registro de partida no le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de llegada, debido a la existencia de unidades significantes presentes explícitamente en el registro de partida que no se hacen presentes en el registro de llegada.

CO: No, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en los dos registros ya que no hubo conversión del registro gráfico a la fórmula algebraica de la función.

(Duval 1988) señala que *“la conversión del sistema algebraico al grafico es más fácil que el inverso, es decir del gráfico al algebraico”... También afirma que “Para la ecuación de la recta, lo que importa en la escritura $y = ax + b$ es el coeficiente a y la constante b ”* citado por (Gutierrez, 2007) para efectos de la investigación, lo que se considera importante en la expresión de la función lineal $y = ax$ es el coeficiente a , el cual fue indagado por los estudiantes a través del tratamiento de la ecuación para hallar la pendiente.

Es de anotar que los estudiantes privilegian las expresiones discretas sobre las expresiones continuas, y no reconocen la diferencia entre 0.25, 0.75 y 25, 50.

No es suficiente la fórmula que resulta en la conversión, lo realmente importante es la asignación de variables y la correspondencia entre las mismas. Lo que influye en una conversión adecuada.

Situación 4

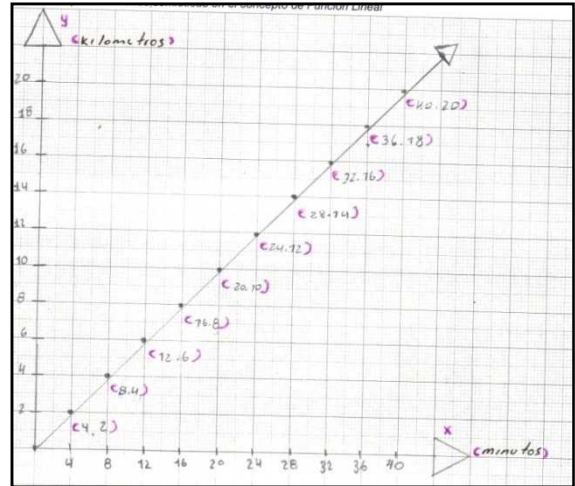
Domicilios Deliburguer

Registro de partida: verbal (lenguaje natural) → Registro de llegada: Gráfico

Camilo es el encargado de los domicilios del restaurante de comidas rápidas “Deli Burguer”, un cliente que vive a 10 km del restaurante ha hecho un pedido para una comida familiar y requiere que este sea entregado lo más pronto posible, una de las políticas del restaurante es que si el pedido demora más de 20 minutos en ser entregado este pedido no será pagado por el cliente, sino por el restaurante que le descontará a su vez el 20% del pedido a Camilo de su quincena.

Para no perder dinero de su quincena Camilo debe recorrer 10 km desde el restaurante hasta la casa del cliente en menos de 20 minutos. Camilo en su moto parte del restaurante con velocidad constante y al cabo de 4 minutos se encuentra a 2 km del restaurante, por lo que decide mantener su velocidad para llegar al tiempo propuesto.

¿Podrá Camilo entregar su domicilio a tiempo y evitar que su sueldo sea disminuido?



Unidades significantes

<p>Variable Independiente (x):</p> <ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Tiempo • Unidad de medida: Minutos 	<p>→ Eje x (variable Independiente) Eje horizontal</p> <ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Tiempo • Unidad de medida: Minutos
<p>Relación entre los valores de la variable independiente: Varían de cuatro en cuatro</p>	<p>→ Escala : Van de cuatro en cuatro</p>
<p>Variable dependiente (y)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Distancia • Unidad de medida: Kilómetros 	<p>→ Eje y (variable Dependiente) Eje vertical</p> <ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Distancia • Unidad de medida: Kilómetros
<p>Relación entre los valores de la variable dependiente (y): Varían de dos en dos</p>	<p>→ Escala: de dos en dos</p>
<p>Relación entre los valores de la variable independiente (x) y los valores hallados de la variable dependiente (y): Los valores de la variable dependiente (y) equivalen a la mitad ($\frac{1}{2}$) de los valores de variable independiente (x)</p>	<p>→ Pendiente Sentido e inclinación del trazo (La línea asciende de izquierda a derecha) (Pendiente positiva) $Pendiente = \frac{1}{2}$</p>

Tabla 18 Conversión Registro Verbal al registro Gráfico. Situación 4

CS: Si, cada unidad significativa del registro de partida está relacionada con una unidad significativa en el registro de llegada.

US: Si, a cada unidad significativa elemental de la representación en el registro de partida le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de llegada.

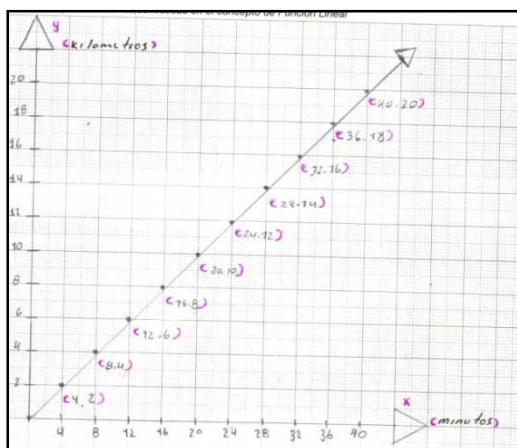
CO: Si, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en los dos registros.

La conversión del registro verbal al registro gráfico se efectuó de forma clara, trazando las descripciones suministradas en el registro de partida, por lo cual se genera un fenómeno de congruencia.

En el registro gráfico la representación corresponde al segmento que inicia en el punto de coordenadas (0,0), que tiene pendiente $\frac{1}{2}$ y como punto final (20,10) los estudiantes agregaron más puntos de covariación y la flecha en la recta para expresar la continuidad de la función.

Existe articulación entre registros ya que a la unidad significativa de razón de velocidad constante es de $\frac{1}{2}$ kilómetro por cada minuto, se hace presente en el gráfico la relación entre estos dos puntos, que es lineal y le corresponde una única unidad en el registro gráfico y en el mismo orden.

Registro de partida: Gráfico → Registro de llegada: Tabular



Tiempo (minutos)	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
Distancia (kilómetros)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

Unidades significantes	
<p>Eje x (variable Independiente) Eje horizontal</p> <ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Tiempo • Unidad de medida: Minutos 	<p>→ Variable independiente (x)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Tiempo • Unidad de medida: Minutos
<p>Escala : de cuatro en cuatro hasta 20</p>	<p>→ Relación que guardan los valores de la variable independiente</p> <p>La variación entre términos consecutivos es constante</p> $8 - 4 = 4$ <p>Los valores de la variable independiente aumentan de cuatro en cuatro</p>
<p>Eje y (variable Dependiente) Eje vertical</p> <ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Distancia • Unidad de medida: Kilómetros 	<p>→ Variable dependiente (y)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Magnitud: Distancia • Unidad de medida: Kilómetros
<p>Escala: de dos en dos</p>	<p>→ Relación que guardan los valores de la variable independiente</p> <p>Los valores de la variable dependiente (y) aumentan de dos en dos</p>
<p>Pendiente Sentido e inclinación del trazo (La línea asciende de izquierda a derecha) (Pendiente positiva)</p> $\text{Pendiente} = \frac{1}{2}$	<p>→ La relación que guardan los valores de las variables independiente y dependiente</p> <p>A medida que los valores de la variable independiente aumentan, los valores de la variable dependiente también aumentan</p> <p>La relación que los valores de la variable independiente (x) tiene con los valores hallados de la variable dependiente (y) es que cada valor de la variable dependiente y_1 equivalen a la mitad de cada valor de la variable independiente correspondiente x_1</p>

Tabla 19 Conversión del registro gráfico al registro Algebraico. Situación 4

CS: Si, existe correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales, ya que las magnitudes expresadas en los ejes cartesianos (Tiempo, Distancia) sus unidades de medida (Minutos, kilómetros), los valores de variación se encuentran enunciados en la tabla

de valores y el valor de la pendiente $\frac{1}{2}$ se encuentra implícita en la relación de covariación entre columnas.

US: Si, a cada unidad significativa elemental de la representación en el registro de partida le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de llegada.

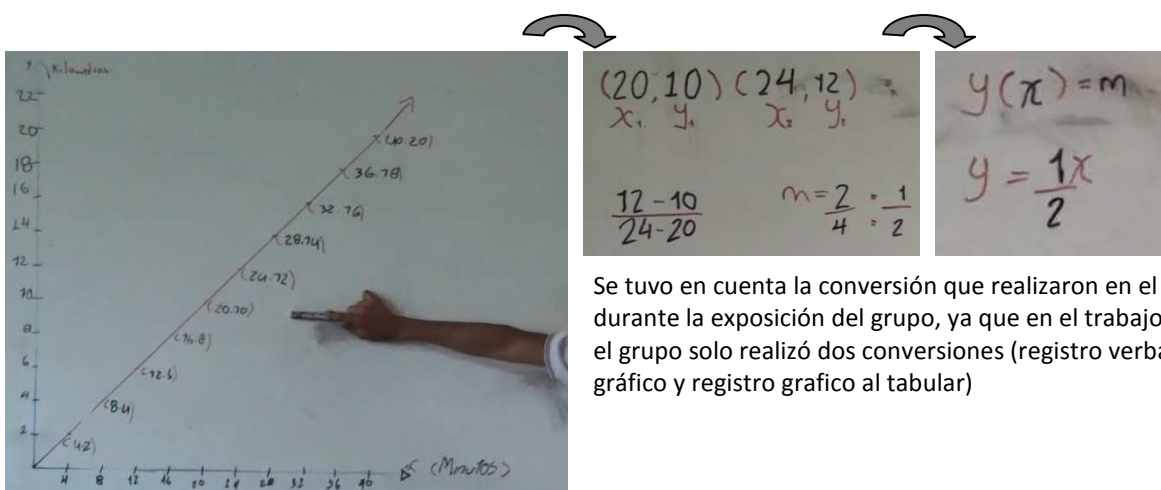
CO: Si, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en los dos registros

La conversión del registro de partida gráfico al registro de llegada tabular es congruente ya que se cumplen los tres criterios de articulación entre representaciones.

Esta conversión requiere de una interpretación global que permita encontrar la relación entre dos magnitudes que covarían, como lo son el tiempo y la distancia. Se aprecia que los estudiantes establecen esta relación mediante la aplicación de tratamientos en el registro tabular asociando cada unidad significativa con su correspondiente en el mismo registro.

Para relacionar la velocidad, posición y tiempo con la distancia recorrida por el motociclista, el grupo reconoce la invarianza de las unidades significantes (4 minutos, 2 kilómetros) el cual les permite predecir el tiempo que tardará en recorrer 10 kilómetros en forma adecuada.

Registro de partida: Gráfico → **Registro de llegada:** Tabular



Se tuvo en cuenta la conversión que realizaron en el tablero durante la exposición del grupo, ya que en el trabajo escrito el grupo solo realizó dos conversiones (registro verbal al gráfico y registro grafico al tabular)

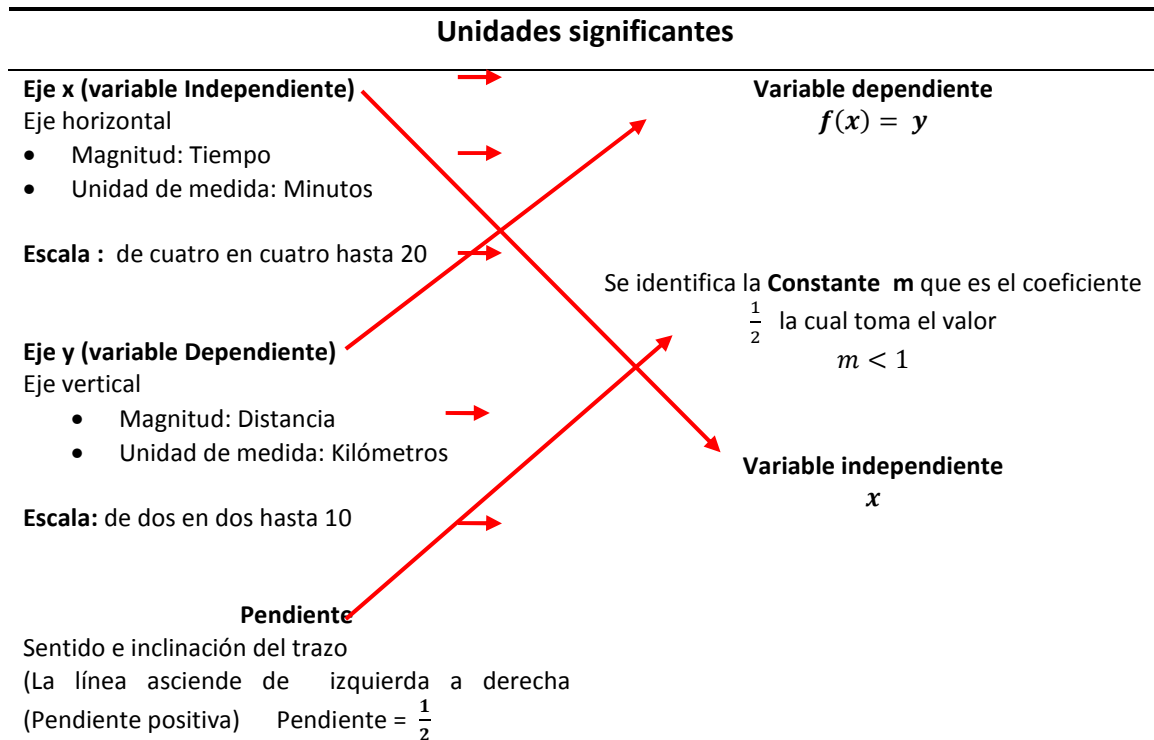


Tabla 20 Conversión del registro gráfico al registro algebraico situación 4

CS: Si, existe correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales, las magnitudes que intervienen en la situación no se hacen manifiestas en el registro de llegada sin embargo se encuentran explícitas las variables, independiente (x) y dependiente (y), igualmente la pendiente de variación está relacionada en el coeficiente (m) y los valores de covariación se encuentran implícitos en el registro de llegada, estos se pueden hallar a partir del tratamiento en la representación algebraica.

US: Si, a cada unidad significativa elemental de la representación en el registro de partida le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de llegada.

CO: No, existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en los dos registros ya que en la representación $y = \frac{1}{2}x$ las variables se encuentran en un diferente orden de aprehensión con relación al registro gráfico.

La conversión de una representación gráfica a una representación algebraica requiere discriminar las unidades significantes visuales y descubrir las unidades significantes correspondientes en los símbolos de la escritura algebraica.

La conversión del registro gráfico al registro algebraico no es congruente, el paso de una representación a la otra no es espontáneo ya que no se cumple el tercer criterio, el que se refiere al orden de aprehensión de las unidades significantes.

Los estudiantes recurrieron al tratamiento de una ecuación intermedia en el registro algebraico para hallar o confirmar el valor la pendiente (m), a partir de dos puntos de la gráfica.

El autor afirma que acciones *“cómo la vía del punteo (hacer la lectura de las coordenadas de un punto sobre la gráfica) es inadecuada para hacer una interpretación global de la gráfica cartesiana, se convierte en un obstáculo que frena el proceso de conversión de hallar la expresión algebraica que representa.* (Duval, 1992) Por ello es que los estudiantes al colocar su atención solo en los puntos, no reconocen la covarianza entre ellos y acuden a la aplicación de la ecuación intermedia para hallar la pendiente y de esta forma escribir la ecuación.

Es posible observar que cada situación modelada por el concepto de función lineal, expresada en el registro verbal al ser convertida al registro gráfico representa una línea recta que pasa por el origen de las coordenadas cartesianas, igualmente al convertirla al

registro algebraico es una ecuación de la forma $y = mx$ donde el coeficiente (m) es el valor de la pendiente.

También es posible convertirla al registro tabular, donde se hace evidente que el valor de (y) es el producto de cada elemento de (x) por el valor de la pendiente o el coeficiente (m) y de la misma forma si se convierte a una representación de parejas ordenadas, se puede observar que las ordenadas son el producto de las abscisas por el coeficiente (m).

Igualmente es posible apreciar que a pesar de que cada representación del concepto de función lineal revela diversos elementos, y cuando se presenta la conversión entre representaciones la idea de que allí hay una función lineal no se abandona. Como lo afirma Duval *“Una función no es ni una estadística de valores ni una representación gráfica ni un conjunto de cálculos ni una fórmula, sino todo ello al mismo tiempo”*. (1978) citado por (Vasquez, 2009) En el aprendizaje del concepto de función lineal, el estudiante debería poder diferenciar el concepto de sus representaciones y son las actividades de articulación entre diferentes registros las que favorecerían esta diferenciación como lo afirma Janvier *“El aprendizaje de las funciones se da siempre y cuando se desarrolle la capacidad del estudiante para interpretar y usar cada una de las representaciones del concepto de función. Así mismo la capacidad de traducción de uno a otro indica la comprensión del mismo”* (Janvier citado por García y otros, 1995) citado por (Gutiérrez, 2007).

En el marco de la teoría de Duval, las dificultades para transitar entre representaciones pueden ser interpretadas como la consecuencia de una deficiente conceptualización del concepto matemático, para verificar este hecho se buscó caracterizar las conversiones que realizaban los estudiantes antes y después del aprendizaje del concepto de función lineal

4.2.1 Conclusiones del instrumento dos

- Los estudiantes en general reconocen las magnitudes, de las situaciones presentadas (Tiempo, capacidad, velocidad, longitud) se observa dificultad cuando estas se presentan con valores continuos, exhiben un mejor manejo de los valores discretos. Este hecho demuestra el dominio de los números naturales, enteros y el poco estudio de los números reales.

- Tres de cuatro gráficos corresponden con las características de la situación, se observa una discriminación adecuada de las variables independiente y dependiente, asimismo se evidencia la asignación correcta de las magnitudes a los ejes cartesianos y proporcionalidad en la construcción de los mismos lo cual denota apropiación y reconocimiento de las unidades significantes propias del registro gráfico.

- Solo dos grupos de cuatro hicieron conversión al registro algebraico, estos además hicieron tratamiento en una ecuación intermedia para hallar la pendiente a partir de dos puntos de la gráfica para determinar el valor del coeficiente (***m***) de la expresión algebraica. Esto podría explicarse en términos del modelo que propicia la enseñanza y especialmente los libros, en donde desde la gráfica se pueden obtener puntos para determinar la pendiente y posteriormente la ecuación.

- En las conversiones hacia los registros (Simbólico, tabular y algebraico) todos los grupos usaron como referencia el registro gráfico, esto se debe a que fue el primero en el que

hicieron la conversión, con respecto a esto Duval afirma que: “En matemáticas los gráficos cartesianos se utilizan siempre en articulación con otros registros de representación” (Duval R. , 2006).

- En la conversión hacia el registro figural siempre utilizaron como referente el registro tabular, es posible considerar que la representación del concepto de función lineal en el registro tabular y en el registro figural son congruentes y reversibles ya que su proceso inverso de conversión se da de manera transparente por la naturaleza de sus unidades significantes, es decir existe una identidad directa entre sus unidades significantes.
- Dos grupos de cuatro no presentaron la situación en el registro algebraico las razones de este hecho podrían explicarse en términos de falta de discriminación de las unidades significantes o desconocimiento de las reglas propias de formación en el registro algebraico y por el fenómeno de no congruencia entre las representaciones.
- Aunque la mayoría de los estudiantes reconocen la covariación entre las magnitudes se les dificulta en la conversión de lo verbal, a lo algebraico ya que a pesar de encontrar la pendiente de variación (***m***) explícita en la situación formulada en el registro verbal, sienten la necesidad de hallarla la pendiente (***m***) a partir de la gráfica y de esta forma obtener la representación algebraica de la función, esto se debe a que en la enseñanza de las matemáticas, siempre se ha privilegiado el uso del registro simbólico sobre el uso del registro verbal considerando que el registro simbólico aporta respuestas más confiables.

4.3 Análisis comparativo del instrumento uno y dos

En el marco de la teoría de Duval, las dificultades para transitar entre representaciones pueden ser interpretadas como la consecuencia de una deficiente conceptualización del concepto matemático, para verificar este hecho se buscó caracterizar las conversiones que realizaban los estudiantes antes y después del aprendizaje del concepto de función lineal

Los estudiantes en la aplicación del primer instrumento revelaban falta de reconocimiento de los parámetros del gráfico cartesiano, de las unidades significantes propias de este registro, además se les dificultaba reconocer la relación entre las dos variables, ya que presentaban un anclaje en lo concreto de la situación, el “camino del recorrido” sin tener en cuenta la covariación entre las magnitudes intervinientes, no tenían en cuenta la proporción en la elaboración de las escalas de los ejes cartesianos, por ello sus conversiones al registro gráfico no eran congruentes.

En el trabajo con segundo instrumento los estudiantes mostraron un reconocimiento de los parámetros del gráfico cartesiano, de cada una de sus unidades significantes y se observa en la elaboración del gráfico que tuvieron en cuenta la proporcionalidad en la construcción de las escalas, además agregaron puntos de covariación entre las magnitudes y la flecha en la recta para expresar la continuidad de la función con lo cual denotan una mayor apropiación del concepto, en este sentido las conversiones del registro verbal al registro gráfico fueron congruentes.

Los estudiantes en el trabajo con el primer instrumento, con las tablas de valores, demostraron que era un registro cercano a su conocimiento previo, por el reconocimiento de sus unidades significantes, así mismo las conversiones desde el registro verbal al tabular fueron en su mayoría congruentes

A partir de este hecho, el concepto de función lineal se abordó desde las tablas de valores, con las cuales los estudiantes entraron en contacto con la covariación entre magnitudes, promoviendo intencionalmente la conversión del registro verbal al tabular.

Las conversiones entre registros de representación verbal al registro tabular fueron congruentes en el instrumento dos gracias a ese reconocimiento de que a cada unidad significativa presente en el registro verbal le correspondía de manera directa una unidad significativa en la tabla de valores.

Los estudiantes en el instrumento uno se les dificultaba encontrar todas las unidades significantes de cada registro semiótico, presentándose una ausencia de las mismas, unidades que no fueron tenidas en cuenta por los estudiantes debido al desconocimiento de los elementos propios de cada registro de representación, luego en el instrumento dos mostraban una mayor apropiación y reconocimiento de estas unidades, con las cuales hacían corresponder una unidad, con su correspondiente en otro registro de representación de manera intencional, el cual fue uno de los objetivos de esta investigación.

Los estudiantes en el instrumento uno, realizaban conversiones hacia el registro pictórico, cuando ellos elegían el sistema de representación, sin embargo, este registro no les ofrecía posibilidades de representación de las situaciones de covariación, con lo cual

agregaban números y palabras que les permitían expresar elementos de las situaciones presentadas posteriormente en el instrumento dos ya reconocían las diferentes representaciones del concepto de función los elementos de cada una de ellas y como se relacionan estas unidades significantes con otras unidades en los diferentes registros de representación, de esta forma al solicitarles que elijan el sistema de representación de llegada, tenían muchas posibilidades en los diferentes registros, abandonando de esta forma lo concreto y haciendo un acercamiento a lo abstracto.

CAPITULO 5

CONCLUSIONES GENERALES

- El contexto de la situación influye en los registros de representación y en las transformaciones que utilizan los estudiantes para resolverlas, asimismo el estudiante identifica en la situación las unidades significantes y las pone en correspondencia en los otros registros, sin embargo el registro privilegiado para esta conversión es el registro gráfico, por las numerosas unidades significantes que posee y la correspondencia de estas con el registro verbal, entre ellas las magnitudes, los valores que toma cada una de las variables, las escalas, la pendiente de covariación, la continuidad de la función, además es una representación claramente reconocida para este objeto matemático.

- Los estudiantes muestran dificultades en la conversión al registro algebraico desde otro registro que no sea el gráfico, esto tiene que ver con la falta de congruencia entre las representaciones semióticas del concepto.

- El registro seleccionado al hacer la primera conversión en todos los casos es el gráfico y a partir de este se realizan las conversiones en los otros registros, este facilitó el tránsito a otros registros de representación, ya que es un registro que permite una mayor visualización de la función lineal, mostrando elementos que en otros registros no son visibles.

- La comprensión de la actividad cognitiva de conversión que efectúan los estudiantes en el aprendizaje del concepto de función permitió observar la comprensión del concepto de función que exhiben los estudiantes y el tipo de dificultades que se pueden presentar con el uso de diferentes registros de representación semióticos.
- El análisis de las conversiones realizadas por los estudiantes a partir de los criterios de conversión (CS , US, CO) permitieron confirmar que a pesar que existen múltiples representaciones semióticas propias del concepto matemático función lineal, no todas permiten generar procesos de congruencia con otros tipos de representación semiótica, debido a que la simple conversión de registros de representación sin que existan condiciones de congruencia entre ellos, no garantiza la comprensión del concepto matemático.
- Se confirma la teoría de Duval (2004), donde se plantea que entre más representaciones semióticas se involucren en el aprendizaje de un concepto matemático (en este caso el concepto de función lineal) y al interior de estas representaciones, se faciliten condiciones de congruencia, se alcanza una mejor comprensión, logrando que el estudiante establezca la diferencia entre la representación semiótica del concepto matemático y el objeto matemático representado, discriminar sus unidades significantes y ponerlas en correspondencia en otros registros, ya que el reconocimiento de la invarianza entre estas unidades significantes es la que permite la aprehensión del concepto matemático.

- Se evidencia en este estudio el interés en la actividad cognitiva de conversión, ya que es en este proceso en el cual el estudiante puede reconocer los invariantes de cada una de las representaciones semióticas, lo cual permite que se consiga el aprendizaje del concepto matemático.
- La identificación de pre saberes de los estudiantes en el instrumento uno (ver anexo 1) previo al abordaje el concepto matemático, permitió el reconocimiento de las representaciones semióticas reconocidas por los estudiantes, asimismo favorecieron los procesos de articulación del lenguaje natural hacia el lenguaje matemático ya que este acercamiento del facilita los procesos de comprensión y es importante que desde el aula se propicie este acercamiento, ya que muchas dificultades en la comprensión del concepto es que en su enseñanza se excluye el lenguaje natural como registro de representación del concepto.
- El concepto de función debe ser abordado para su enseñanza de la misma forma como se dio epistemológicamente, desde el lenguaje natural y posteriormente realizar la conversión hacia otros registros de representación (gráfico, tabular, figural, simbólico) ya que la formula algebraica, la cual ha sido privilegiada por los docentes al inicio de la enseñanza del concepto genera una mayor dificultad en la conceptualización del mismo.

RECOMENDACIONES

- Los docentes deben incluir en sus clases situaciones de dependencia entre variables que permitan articular diferentes registros de representación semiótica para que los estudiantes desarrollen un pensamiento variacional adecuado que les permita alcanzar una mejor conceptualización de la función.

- Es importante continuar con las investigaciones en torno a las representaciones semióticas de los conceptos matemáticos, ya que estas representaciones son las que permiten el acceso a dichos conceptos debido a la naturaleza abstracta de esta ciencia, es fundamental para la enseñanza en el logro de procesos de comprensión en los estudiantes tal como lo plantea Duval desde su teoría de las representaciones semióticas.

- El análisis de los procesos de conversión entre representaciones semióticas han sido un campo poco explorado en investigación de la didáctica de las matemáticas, en el contexto del aula, es posible que muchas de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se deba al poco conocimiento que los docentes poseen sobre las representaciones y esta actividad cognitiva, es por ello que este trabajo extiende la invitación a continuar investigando en este tema.

- Es necesario considerar en el momento de abordar la enseñanza de las matemáticas específicamente el concepto de función lineal, a pesar que se tengan a disposición diversas representaciones semióticas que hacen aprehensible el concepto matemático, deberán

tomarse en cuenta principalmente aquellas que cumplan con los criterios de congruencia entre representaciones para efectos de su aprendizaje.

- Estudio de conversiones con situaciones con características diferentes a las propuestas en este estudio, con mayor grado de dificultad, en donde el registro de partida no necesariamente sea el verbal y se consideren escenarios de variación diferentes a los propuestos en esta investigación, diferentes tipos de funciones, cuadráticas, cúbicas, inversas etc. además del análisis de la actividad de tratamiento.

Bibliografía

- Casallas, L. M. (2008). Situaciones de validación en el aula en torno a la función lineal. En S. m. Vives, *Matemáticas para el siglo XXI* (págs. 19-123). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- D'Amore, B. (2004). *Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética. Interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución*. Barcelona España: Uno pág 35-106.
- Duval. (1992). Graficas y ecuaciones. La articulación de dos registros. *Antología en Educación Matemática Cinvestav*, México.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano, traducido por Myriam Vega Restrepo*. Santiago de Cali Colombia: Artes Graficas Univalle.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali, Colombia: Universidad del Valle , Instituto de educación y pedagogía, Grupo de Educación matemática.
- Duval, R. (2005). *Transformations de representations semiotiques et demarche de pensée*.
- Duval, R. (2006). Un tema Crucial en la Educación Matemática: La habilidad para cambiar el el registro d erepresentación. *La gaceta del RSME*, 143-168.
- Godino, J. (2003). *Teoría de las representaciones semióticas*. Granada: Universidad de Granada.
- Godino, J. D. (2003). *Razonamiento Algebraico y su didáctica para maestros*. Granada: ReproDigital.
- Gutierrez, S. I. (2007). *Caracterización de tratamientos y conversiones: el caso de la función afin en el marco d elas aplicaciones*. Bogotá (Colombia): Universidad Pedagógica Nacional.

Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a las funciones: voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Pag 5-21.

Hernandez Sampieri, y. o. (2006). *Metodología de investigación*. Mexico: Mc Graw Hill.

<http://es.wikipedia.org/wiki/>. (20 de 8 de 2011). <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.es>. Recuperado el 20 de 8 de 2011, de <http://es.wikipedia.org/wiki/Volumen>

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Colombia: Magisterio.

Moreira, M. a. (1991). La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área. *Instituto de Física, UFRGS* (págs. 1-25). Caixa Postal 15051 91501-970 Porto Alegre, RS: Traducción Juan D Godino.

Planchart, M. O. (2000). *La visualización y la modelación en la adquisición del concepto de función, Tesis Doctoral*. Cuernavaca: Universidad Autónoma del estado de Morelos.

Planchart, M. O. (2005). La Modelación Matemática: Alternativa didáctica en la enseñanza de precálculo. *360° en Ciencias y matemáticas*, <http://cremc.ponce.inter.edu/1raedicion/modelacion.htm>.

Vasco, C. E. (1999). *Didáctica de las Matemáticas*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Vasquez, S. y. (2008). El concepto de función a través de la historia. *Revista Iberoamericana de Educación (Union) número 16*, 141-155.

Vasquez, S. y. (2009). Aportes didácticos para abordar el concepto de función. *REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, 122.

Vergnaud, G. (1990). Teoría de los Campos Conceptuales. *Recherches en Didactique de Mathematiques* (págs. 133-170). Université René Descartes.

Wikipedia, C. d. (7 de Abril de 2011). *Wikipedia, La enciclopedia libre*. Recuperado el 21 de Junio de

2011, de

http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Funci%C3%B3n_matem%C3%A1tica&oldid=55204

991