UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

IV COHORTE

DIFICULTADES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2X2.

POR:

EMIRO BORJA PALACIOS

TUTORA:

LIGIA INÉS GARCÍA C

Manizales noviembre de 2014

TABLA DE CONTENIDOS

CAPITULO I

EL PROBLEMA

1. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

De acuerdo con lo establecido en los estándares básicos de calidad expedidos por el MEN, el estudio de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales se realiza en el conjunto de grado octavo a noveno en el componente pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos MEN (2006). El desarrollo de habilidades para resolver problemas con sistemas de ecuaciones lineales 2x2 le brinda a los estudiantes una herramienta de gran importancia para resolver situaciones al interior de las matemáticas y en otras áreas como ciencias naturales, además, este conocimiento es fundamental para abordar algunos temas de la educación superior.

La estrategia metodológica que habitualmente se utiliza en las instituciones educativas para el desarrollo de habilidades y conocimientos matemáticos, y en particular para la enseñanza de la resolución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales, es el conocido método de transferencia, que consiste en la resolución de un conjunto de problemas por parte de los docentes y luego pedir a los estudiantes que resuelvan problemas similares.

Los errores que cometen los estudiantes al resolver problemas de sistemas de ecuaciones lineales, utilizando el método de transferencia son de diferentes clases y originados por diversas causas, Segura (2004) afirma:

“Las dificultades en el aprendizaje de sistemas de ecuaciones tienen orígenes diversos. Unos están ligados a la complejidad matemática de los elementos básicos que se utilizan en la adquisición del objeto sistemas de ecuaciones lineales (números reales, función afín, ambos en vía de construcción) otros al concepto de sistemas de ecuaciones lineales y su conjunto solución, y otros más a la ruptura entre el pensamiento aritmético y el algebraico”.

Algunas investigaciones señalan que las mayores dificultades de los estudiantes cuando resuelven estos problemas, se presentan cuando tratan de construir a partir del enunciado un modelo adecuado del problema. Es así como se encontró en un experimento, que un porcentaje grande de alumnos de secundaria de la muestra fue capaz de resolver un sistema de dos ecuaciones lineales una vez planteado, San José, Valenzuela, Fortes, Solaz-Portoles (2007).

En el proceso de traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico, lo que en términos de Duval (1999), se conoce como conversión de registro semioticos, se han identificado algunos errores como los encontrado por Filloy, Puing, Rojano (2008) en donde se atribuyen las respuestas espontaneas que los estudiantes dan en el intento de representar de forma simbólica algunos enunciados, a los significados coloquiales de las palabras que predominan en esas edades, esto inhibe la traducción al sistema matemático de signos del algebra a frases formadas por esas palabras.

Además de los errores originados en la traducción del lenguaje natural al algebraico, o del aritmético al algebraico, también se presentan dificultades que surgen de los conocimientos con los que cuenta el estudiante para abordar el proceso de resolución, lo que Bachellard (1972), denomina obstáculos epistemológicos. Según Kintsch y

Greeno (1985) citado por Sanjosé, Solaz-portoles, Valenzuela (2009), la representación mental construida por un sujeto, depende de la interacción de su base de conocimientos con las proposiciones del texto.

En el caso de la resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales de 2x2, la base de conocimientos está compuesta por el dominio de operaciones en el conjunto de números racionales, el conocimiento de operaciones con expresiones algebraicas y por supuesto los métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales dos por dos. Además de las dificultades que presentan los estudiantes en la traducción entre lenguajes, no se pueden desconocer los errores que tienen que ver con el tratamiento de operaciones aritméticas. Según Malisani (1999) los estudiantes presentan dificultades para usar las operaciones más elementales en problemas verbales que involucran ecuaciones o sistemas de ecuaciones.

Una falencia muy frecuente en el proceso de resolución problemas de ecuaciones lineales o sistemas de ecuaciones lineales, consiste en que una vez consiguen la solución de las ecuaciones, no someten dicha respuesta a un proceso de revisión que permita establecer la consistencia de la respuesta encontrada con las ecuaciones planteadas, es decir, no hacen lo que Polya (1989) considera como visión retrospectiva. Malisani (1999) lo explica de la siguiente manera “De acuerdo con algunas investigaciones los estudiantes resuelven un sistema de ecuaciones lineales y no verifican la solución, es decir hay una completa desarticulación entre el objeto sistemas de ecuaciones lineales y su conjunto solución”.

Como se puede observar, las dificultades de los estudiantes para desarrollar habilidades en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales tienen diversas causas, las cuales se relacionan con los actores y elementos que intervienen en la educación matemática. Es así, como algunas incorrecciones de los estudiantes tienen origen en la relación entre el docente y el saber a enseñar, otras entre el estudiante y el saber a aprender y otras entre el docente y el estudiante. No obstante, a las particularidades de cada una de las relaciones antes mencionadas, estas se articulan para configurar y darle sentido al acto didáctico.

Entre las relaciones del acto didáctico, el proceso de enseñanza tiene como actor principal al docente en relación con el contenido a enseñar, en este sentido, el docente cumple la función de mediador entre el saber sabio y el saber a enseñar, a este proceso Chevellard (1998) lo denomina trasposición didáctica. La enseñanza tiene una relación de dependencia con el proceso de aprendizaje, y en este, el estudiante asume un papel protagónico. Para que se desarrollen procesos de enseñanza eficientes, es necesario que quien orienta la enseñanza tenga conocimiento de cómo aprenden los estudiantes, por esta razón se hace necesario identificar las dificultades que se presentan en el estudiante que tienen que ver con el desarrollo cognitivo y las que se originan en la naturaleza del conocimiento a aprender.

Dado que los procesos cognitivos en la mayoría de los casos tienen que ver con condiciones que no son fáciles de manipular, la atención de este trabajo está centrada en el saber a enseñar, en el caso particular de la resolución de problemas verbales de sistemas de ecuaciones lineales 2x2, se pretende establecer las situaciones que impiden el aprendizaje de este contenido y las características que estas presentan.

Lo anterior conlleva a plantear las siguientes preguntas:

¿Cuáles son las dificultades que se presentan en el aprendizaje de la resolución de problemas verbales de sistemas de ecuaciones lineales 2x2?

¿Cómo se caracterizan las dificultades de los estudiantes en la resolución problemas verbales de sistemas de ecuaciones lineales 2x2?

2. JUSTIFICACIÓN

El mundo actual demanda permanentes desarrollos en ciencia y tecnología, no solo para interactuar en una sociedad globalizada y competitiva, sino también para superar muchos desafíos que se le presentan a la humanidad en sectores como la industria, la salud, las comunicaciones, las actividades en el hogar, etc. Para lograr este propósito, es necesario hacer esfuerzos importantes para que las nuevas generaciones sean educadas desde temprana edad en las disciplinas que permitan el desarrollo de la ciencia y la tecnología, como humanidades, ciencias naturales y matemáticas, es decir, la escuela ha de ser un espacio donde los estudiantes acceden a conocimientos científicos y desarrollan habilidades en este campo de conocimiento.

Nuestro país tiene un desarrollo bastante escaso tanto en ciencia como en tecnología, lo cual se evidencia en el reducido número de patentes que se registran cada año. El panorama es preocupante, toda vez que la educación, que es el pilar para el desarrollo de estos dos componentes, presenta niveles muy bajos de calidad. como se observa en los informes de resultados de pruebas internacionales como las pruebas PISA 2006 y 2009, ICFES (2007; 2010) y las TIMSS 2007 ICFES (2008). Las pruebas

SABER 3ª, 5ª, 9ª y 11ª, aplicadas por el ICFES muestran que la mayoría de los estudiantes no alcanzan el nivel satisfactorio, ICFES (2012) Esta deficiencia, en especial la que presentan los estudiantes en conocimientos y habilidades matemáticas afecta la adecuada formación en pensamiento matemático, y como lo plantea Rodríguez (2011) dificulta la comprensión de conocimientos y habilidades científicas.

El desarrollo científico y los avances tecnológicos están supeditados en gran medida a la calidad de educación que reciben los niños y jóvenes colombianos, en especial en áreas como matemáticas y ciencias naturales.

Es perentorio adelantar procesos eficientes de enseñanza y de aprendizaje que aseguren el desarrollo de habilidades científicas y matemáticas. En el caso de las matemáticas urge darle una atención especial al desarrollo las competencias algebraicas, las cuales juegan un papel fundamental en la comprensión y aplicación del concepto de variable que tanto se utiliza en ciencia y tecnología, como se puede evidenciar en un estudio realizado por Escalante (2012) con estudiantes universitarios. Para hacer una intervención desde la didáctica, en procesos de enseñanza que aseguren el aprendizaje de la resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, es necesario indagar acerca de las habilidades que los estudiantes deben desarrollar, los conocimientos que deben dominar, pero ante todo se debe tener muy presente, hacer un análisis profundo y detallado de los errores que se cometen cuando los estudiantes tratan de resolver este tipo de problemas. Estos errores no aparecen de manera arbitraria, responden a una serie de situaciones de las cuales los estudiantes no son conscientes, como la utilización de conocimientos que son útiles en aritmética pero no en el álgebra. Los errores tienen unos orígenes, unas causas, que deben conocerse, explicarlas, comprenderlas e intervenirlas.

Los resultados de la investigación de las causas que originan los errores en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, contribuyen a enriquecer los elementos teóricos de la didáctica de la matemática, específicamente en lo relacionado con las competencias algebraicas. Estas construcciones teóricas tienen mucha importancia en la formación de los docentes en formación y en la cualificación de los docentes en ejercicio, es decir, son un elemento fundamental para mejorar la enseñanza, lo cual garantiza procesos de aprendizaje eficientes.

Los estudios de investigación de mayor reconocimiento acerca de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales han sido realizados en el contexto internacional, en especial en Europa, Pifarre y Sanuy (2001);San Josè et al (2009) y Norteamérica. En latino América hay registros de investigaciones en argentina, Caronia (2009) y México principalmente. En el caso de Colombia son muy escasas y poco conocidas investigaciones que tengan como objeto de estudio central este contenido como la realizada por Garcés (2009).

Para atender a los desarrollos didácticos que respondan a las necesidades de nuestro país, es fundamental tener en cuenta la condición multicultural y plurietnica con que contamos. Por tal razón, los trabajos de investigación que se adelantan en la actualidad no se pueden concentrar únicamente en la población mayoritaria, es muy importante la realización de estudios en el contexto de los afrodescendientes y de la población indígena.

Por lo anterior, este estudio se adelantará en el contexto educativo afrodescendiente, con el propósito de dar inicio a la realización de investigaciones que den cuenta de procesos de aprendizaje y de enseñanza en este contexto cultural. Además se trata plantear temáticas de investigación diferentes a la música, la danza o la historia, temáticas desde las cuales, tradicionalmente se asumen los trabajos de investigación de esta comunidad.

Si bien este trabajo no tiene el propósito de establecer puntos en común y diferencias entre el proceso de resolución de ecuaciones lineales que realizan estudiantes afrodescendientes con estudiantes de otros contextos poblacionales, tiene la intención de convertirse en un buen referente para futuras investigaciones que aborden el desarrollo de competencias algebraicas en esta minoría étnica.

La etnoeducación, cuyo desarrollo ha estado impulsado en esencia desde el ámbito de lo pedagógico, más que en el didáctico, pocas veces se ha ocupado de indagar sobre las dificultades en el aprendizaje y en la enseñanza. Por esta razón, la discusión se ha centrado en el tipo de hombre que se pretende formar, El estudio de las dificultades que se presentan los estudiantes en la resolución problemas verbales de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, apunta de manera directa al ámbito de lo didáctico, lo que hace de este trabajo una oportunidad para iniciar a elaborar referentes teóricos propios que expliquen las dificultades tanto de enseñanza como de aprendizaje en esta población en particular.

La necesidad de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, el aporte teórico para la comprensión de las dificultades del tema objeto de estudio, la valiosa contribución al desarrollo de la etnoeducación en el área de matemáticas y la posibilidad de confrontar los resultados de esta investigación con otras similares, son razones válidas para adelantar el presente trabajo de investigación.

3. OBJETIVOS

1. Identificar las dificultades que presentan los estudiantes cuando resuelven problemas verbales de sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

2. Establecer las características de las dificultades de los estudiantes en la resolución de problemas verbales de sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

CAPITULO II

MARCO TEÒRICO

1. ANTECEDENTES

Las habilidades algebraicas de los estudiantes han sido centro de atención de algunos investigadores. En el caso particular del objeto sistema de ecuaciones lineales, algunos investigadores han adelantado importantes investigaciones, cuyos resultados han contribuido a una mejor comprensión de los errores que cometen los estudiantes en el proceso de aprendizaje de este conocimiento matemático.

Entre las investigaciones más relevantes acerca de los sistemas de ecuaciones lineales tenemos.

San José; Solaz-Portoles, Valenzuela, (2009) en *"Transferencia inter-dominios en resolución de problemas: una propuesta instruccional basada en el proceso de* *traducción algebraica”,* presentan un trabajo que hacen tratamiento a la resolución de problemas verbales.

En este trabajo de investigación, se hace un estudio acerca de las dificultades que tienen los estudiantes de secundaria para resolver problemas algebraicos con enunciados. El centro de atención es el proceso de traducción algebraica, lo cual constituye un aspecto fundamental para resolver problemas en ciencias y matemáticas puesto que a partir de este, se llega a una comprensión de los problemas con enunciados lo que implica que construyan representaciones mentales en diferentes niveles de abstracción, haciendo la transición entre la representación concreta y la representación matemática.

El objeto matemático a partir del cual se desarrolla el trabajo de investigación son los sistemas de ecuaciones lineales 2x2, en particular el planteamiento de las ecuaciones a partir de un enunciado verbal.

La población objeto de estudio está conformada por estudiantes de dos centros educativos de una zona industrializada de nivel sociocultural medio. De esta población se tomó una muestra elegida por su disponibilidad sin muestreo aleatorio de 92 estudiantes de 4° ESO y de 1° de bachillerato de clase de ciencias naturales, el nivel de rendimiento de los estudiantes objeto de estudio se encuentra en bajo, medio y bueno.

La muestra se distribuyó en dos grupos de tratamiento, uno control en el cual se desarrolla una metodología tradicional de traducción sin una instrucción acerca de cómo plantear las ecuaciones y un grupo experimental, con el cual se desarrollan actividades para que se apropien y utilicen una regla para poner un problema de enunciado verbal en ecuaciones Puig (1998). Es decir se enseña explícitamente a los estudiantes el proceso de traducción del lenguaje natural al algebraico.

Se plantea una hipótesis principal en el sentido de que la metodología experimental mejora significativamente la pericia de los estudiantes a la hora de plantear problemas de temas nuevos en comparación con la metodología de control.

El estudio se aborda desde la teoría de la representación mental para resolver problemas, para lo cual los autores citan a Gil y Martinez torregosa (1983)

El experimento se desarrolló en tres fases pretest, tratamiento y transfer (postest) en las cuales los dos grupos de tratamiento deben realizar básicamente dos actividades agrupar problemas a partir de sus enunciados de acuerdo con su estructura y de acuerdo con su superficie y escribir ecuaciones a partir de enunciados. Los criterios que se tuvieron para la agrupación de problemas correcta o incorrecta y para el planteamiento de ecuaciones es erróneo (ambas ecuaciones incorrectas, o una es correcta y la otra tiene más de un error), parcialmente correcta (una ecuación correcta y la otra tiene un solo error) y totalmente correctos (sin errores).

Los resultados del trabajo confirman la hipótesis principal, tras la instrucción, el grupo experimental supera significativamente al grupo control en la construcción de las representaciones algebraicas de los problemas, lo cual apoya el trabajo de Bassok y Holyoak (1989): se requieren diseños de instrucción basados en reglas generalizadas para el transfer interdominio.

En el estudio "*Enseñanza de las ecuaciones lineales en contexto"* realizado por

Galagovsky, Cittadini, (2008) se presenta una propuesta didáctica innovadora para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales, enmarcadas en el contexto del proceso aprendizaje de algunas leyes de la economía. La población objeto de este estudio son estudiantes recién egresados de secundaria que cursaban la primera asignatura de matemáticas de las carreras de nivel universitario de marketing y comercialización de la escuela argentina de negocios (EAN).

Desde la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, se aborda el estudio con el propósito de organizar una propuesta de situaciones didácticas que fuera un escenario apropiado para le articulación entre los contenidos matemáticos puros sobre ecuaciones lineales y su aplicación en el contexto de oferta y demanda, y el punto de equilibrio entre precios y beneficios.

El estudio se desarrolló a través de una propuesta didáctica compuesta por nueve actividades secuenciales, que involucran nueve problemas basados en una historia sobre un personaje que quiere montar un negocio casero de confección de pantalones. Cada actividad fue resuelta en un primer momento de forma individual, luego de unos minutos de trabajo individual, los estudiantes son organizados en pequeños grupos de 3 o cuatro integrantes para que compartan sus respuestas, sus interpretaciones y sus dudas; finalmente, en una discusión conjunta con toda la clase, se revelan la forma de abordar el problema, recreando los conflictos cognitivos de cada estudiante, en un clima donde el error es un pretexto para construir y no para condenar.

Los principales objetivos de la propuesta didáctica implementada, están dirigidos a que los estudiantes interpreten los distintos parámetros que conforman una recta, ya sea mediante lenguaje gráfico o mediante lenguaje algebraico; apliquen las funciones lineales como herramientas fundamentales en la resolución de problemas económicos vinculadas a situaciones sencillas que pueden ser comprendidas, además se propone encontrar soluciones a problemas económicos otorgando significado generalizable y rango de aplicabilidad a los parámetros matemáticos involucrados.

Durante el desarrollo de la propuesta los estudiantes mostraron fallos conceptuales importantes y obstáculos epistemológicos de los que no habían sido conscientes durante el aprendizaje del tema de ecuaciones lineales en el bachillerato.

La propuesta desarrollada cumple con algunas recomendaciones didácticas como la interdisciplinaridad pues se articula conocimientos de la economía y de las matemáticas. La integralidad de la propuesta se evidencia en la convergencia de marcos teóricos provenientes de los conocimientos científicos, de las concepciones sobre la naturaleza de las ciencias y sus métodos de trabajo, y derivados de las teorías didácticas. Un aspecto muy importante es el propósito de la intervención didáctica de lograr un cambio conceptual desde una teoría constructivista. Otro elemento relevante es que la sugerencia de generar situaciones didácticas en matemáticas.

El desarrollo de las actividades muestra una evaluación exitosa principalmente en dos aspectos, el desempeño académico y la actitud hacia los contenidos. En cuanto al desempeño los estudiantes obtuvieron calificaciones mejores que el promedio de dicho curso y de años anteriores con exámenes estandarizados tradicionales; en el aspecto actitudinal, contrariamente a lo que ocurre tradicionalmente, ninguno de los estudiantes se retiró del examen final sin contestar las preguntas de este tema, lo que muestra un mejor nivel de auto confianza.

En los resultados de la evaluación de la propuesta no se registran las dificultades que tuvieron los estudiantes en el desarrollo de las actividades.

Otro trabajo que se ocupa de la forma como los estudiantes realizan procesos necesarios en la resolución de problemas verbales es el adelantado por Ruano, Socas, Paralea.(2008) *Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelación en algebra*.

En este trabajo se presenta un estudio con alumnos de educación secundaria sobre tres procesos específicos del lenguaje algebraico: la sustitución formal, la generalización y la modelización. Se indaga por medio de preguntas y a partir de las respuestas se clasifican los errores cometidos y se analizan sus posibles orígenes.

El marco teórico desde donde se aborda la investigación es el descrito en Socas (1997) en el que se consideran tres ejes no disyuntos que permiten analizar el origen del error. De acuerdo con lo propuesto por Socas, los errores que cometen los estudiantes se pueden situar en relación a tres orígenes distintos: Obstáculos, ausencia de sentido, y actitudes afectivas y emocionales.

Para el desarrollo de la investigación se le aplicó un cuestionario a 60 estudiantes, dos grupos de 4° ESO y un grupo de de 1° de bachillerato de la ciudad de La Laguna (Tenerife), el cuestionario se administró en dos partes, cada uno con relación a los procesos de estudio. Los alumnos no habían recibido instrucción previa a la ejecución de este cuestionario y no se les pasó ningún tipo de ayuda.

Para el análisis de la información se utilizaron dos procedimientos, la clasificación de los errores a partir de criterios y las redes sistémicas. El primero se utilizó, para caracterizar los errores con base a criterios de clasificación como el tipo de error cometido, los códigos de los alumnos, el ítem en el que han fallado y el número total de errores de cada tipo. El análisis de preguntas abiertas se hizo a través de redes sistémicas utilizando los parámetros fijados por Bliss, Monk y Ogborn (1983), con algunas modificaciones para ajustarlas al propósito del estudio.

Los resultados de la investigación, muestran que en general los errores dependen de los contenidos de las tareas presentadas y del proceso. Sin embargo, hay errores como la necesidad de clausura, la particularización de expresiones, el uso incorrecto de paréntesis y la confusión de la multiplicación con la potencia, que persisten independientemente del proceso que se utilice. Una gran cantidad de errores encontrados en el estudio corresponden a la ausencia de sentido, los cuales en muchas ocasiones están relacionados con cuestiones que han quedado sin resolver en la aritmética.

Las metodologías utilizadas en este estudio para recoger la información se pueden adaptar a muchos estudios que indagan por los errores cometidos por los estudiantes en algebra. Los cuestionarios permiten identificar los errores pero no siempre a partir de ellos se puede establecer el origen del error, por esta razón la utilización de preguntas abiertas, las cuales se analizaron a través de redes sistémicas permiten con mayor precisión establecer la génesis de los errores. El desarrollo metodológico de esta investigación hace un aporte muy importante al estudio que pretendo realizar debido a que muestra de forma clara como la información recogida a través de cuestionarios se complementa y valida con la recogida a través de preguntas abiertas.

La investigación “Un análisis desde la didáctica de las matemáticas de algunos errores en el álgebra” de Caronía, Zoppi, Polasek, Rivero, Operuk (2008).

Este trabajo es una investigación enmarcada en los paradigmas descriptivos, interpretativos y reflexivos. Busca analizar el estado de los conocimientos matemáticos en el ingreso y posteriormente en la culminación del primer año de cada carrera, además pretende describir e interpretar la transformación que sufren esos conocimientos.

En el marco teórico hace referencia a algunas teorías contemporáneas de la enseñanza y del aprendizaje, Brousseau (1998-1999) entre otros, las cuales reconocen la existencia de obstáculos, son el referente teórico desde donde se aborda la investigación, a partir de estas teorías, las investigadoras se cuestionan acerca de aspectos como los errores más frecuentes, sus características, las consistencias en los procesos de pensamiento que revelan y sus regularidades.

La metodología para la recolección de información se desarrolló a través de dos exámenes, el primero aplicado al inicio del primer curso de educación superior y el otro aplicado al finalizar dicho curso. Los contenidos evaluados tanto en el primer examen como en el segundo corresponden a tres temas tratados en la educación básica secundaria, ecuaciones, expresiones algebraicas y algunos contenidos de aritmética.

Para el análisis de los errores cometidos por los estudiantes, tomaron como referencia las investigaciones de autores como Kieran (1989); Berté(1999); Paniza, Sadovsky y Sesa (1997); Egler y otros (2004) con el fin de cotejar si lo encontrado por estos investigadores es similar a lo que ocurre con la población del estudio. De los resultados de los exámenes aplicados y con base a la tipificación de errores establecidos por los autores referenciados, el equipo investigador realizó una nueva clasificación.

En la categorización de errores que se hace desde esta investigación no se incluyen categorías nuevas, lo que se hace básicamente es darle otra denominación a algunos tipos de errores ya encontrados y definidos en otros trabajos. La clasificación definida en esta investigación, está compuesta por ocho tipos de errores, entre los cuales se identifican los siguientes: la aplicación de propiedades; los manejos operatorios; el orden en que se efectúan las operaciones; la forma de ver el signo igual; El significado que le atribuyen a las letras; la no aceptación de la falta de cierre; la posibilidad de control de sus resultados; la dificultad en la lectura y comprensión de enunciados.

En el análisis de la información de este trabajo se observa que algunos errores como la dificultad en la lectura, el manejo operatorio y el orden en que se efectúan las operaciones se presentan en todos los temas tratados. La dificultad en la lectura se presenta en todos los temas con una frecuencia de 100%; el manejo operatorio tiene un comportamiento similar en todos los temas tratados, cuando se aborda expresiones algebraicas presenta una frecuencia del 90%, en temas de aritmética 85% y cuando se trata el tema de ecuaciones se presenta en un 80%.

Entre los errores clasificados se observa que algunos tienen una relación bastante estrecha con un determinado tema. Es así como el control de resultados que tiene una frecuencia de ocurrencia del 100% en ecuaciones, no se presenta en ninguno de los otros temas; La no aceptación de la falta de cierre, aunque con una frecuencia baja

(10%), es un error exclusivo del trabajo con expresiones algebraicas; de igual manera, la forma de ver el signo igual solo se presenta cuando se tratan temas de aritmética.

Este estudio muestra que algunos errores no ocurren en determinados temas. Cuando se trabaja con ecuaciones los estudiantes no cometieron errores relacionados con la falta de cierre; el orden en que se efectúan las operaciones y la forma de ver el signo igual son errores que no se presentan en el tema expresiones algebraicas; En el trabajo con temas de aritmética los estudiantes no cometieron errores relacionados con aplicación de propiedades, el significado que le atribuyen a las letras, la no aceptación de la falta de cierre y el control de resultados.

Un aporte muy valioso de este esta investigación es el análisis de la coherencia interna del pensamiento de los estudiantes; se logra establecer que algunos errores se vinculan internamente entre sí. Se pudo reconocer procesos operatorios que subyacen en el razonamiento de los estudiantes.

Frente a la persistencia de los errores se encontró que en algunos casos estos persisten, en otros, los estudiantes no contestan ejercicios que anteriormente respondían bien, algunos estudiantes presentan nuevos errores y otros evolucionaron en sus procedimientos.

Un aporte importante al estudio sobre la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales, es el realizado por Rey, Hernández, Porcinito (2008) en el trabajo *Sistemas de ecuaciones lineales: secuencia didáctica para su enseñanza.*

En este trabajo las autoras se apoyan en un aprendizaje constructivo y significativo, que adopta la ingeniería didáctica como metodología de la investigación, busca el desarrollo de estrategias innovadoras en la enseñanza de las matemáticas, en este marco se elaboró una secuencia de problemas, que le permiten al alumno construir los conceptos referidos a sistemas de ecuaciones lineales, en base a sus conocimientos previos sobre función lineal, rectas coincidentes, paralelas y oblicuas armando un nuevo ciclo de la dialéctica instrumento- objeto.

La resolución de sistemas de ecuaciones es abordada desde una actividad lúdica en la cual en grupo resuelve los ejercicios que se les presentan al azar y utilizan diferentes métodos para encontrar las respuestas.

Las conclusiones del trabajo señalan que las actividades responden a un buen problema, los enunciados tienen sentido con relación con conocimientos previos, además el conocimiento evoluciona en niveles crecientes de complejidad a partir de la variación de las variables didácticas.

El trabajo de García, Rodríguez (2010) *Dificultades que presentan los estudiantes en torno a los conceptos de algebra elemental.* Es un referente importante para el trabajo de investigación que se pretende adelantar.

El propósito de este estudio es localizar y describir algunas dificultades presentes en estudiantes de segundo semestre de preparatoria al cursar la asignatura de matemáticas II.

El marco referencial de este trabajo lo conforma básicamente una revisión a las diferentes acepciones de lo que se entiende por dificultad. Se hace referencia a Mateos (2008) quien señala que el concepto de dificultad ha cambiado con el tiempo. Retoman a Farham-Diggory (1980) quienes definen dificultad como algo misterioso y complejo; Brunet (1998) las asocia a un conjunto de perturbaciones que se manifiestan en la adquisición y utilización de la competencia comunicativa, en el razonamiento matemático o en las habilidades sociales.

El concepto de dificultad que se asume en esta investigación es el presentado por Kas & Myclebust(1969) quienes expresan que "Dificultad en el aprendizaje es uno o más déficit significativos en los procesos de aprendizaje esenciales que requieren técnicas de educación especial para la remediación”.

El desarrollo metodológico del proyecto se realizó por medio de un estudio clínico que se le aplicó a un grupo de 230 estudiantes de preparatoria, sobre temas de algebra elemental como ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales, ecuaciones cuadráticas y algunas ideas de función.

El esquema metodológico que se siguió estaba compuesto por cuatro partes: llevar una bitácora de trabajo durante el semestre donde registren las dificultades encontradas por los estudiantes; revisar y realizar observaciones de las tareas y exámenes parciales del semestre para detectar dificultades; resumir algunas de las dificultades encontradas; y revisar artículos que permitan fundamentar los reportes que se obtengan.

Los resultados más sobresalientes hacen referencia a dificultades como los siguientes: Operar con los números enteros, racionales e irracionales; problemas al resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas; traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico; realizar correctamente los despejes para resolver ecuaciones cuadráticas; aplicar correctamente los pasos para resolver una ecuación cuadrática, por el método de completar cuadrados; resolver una ecuación cuadrática completa de la forma $x^2 + bx + c = 0$ por el método de factorización cuando los coeficientes b y c son números fraccionarios o irracionales; y reconocer ejemplos de funciones dadas por parejas ordenadas.

Dada la importancia que para la investigación que se pretende realizar acerca de la resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, se detalla los hallazgos encontrados por los investigadores en este tema.

El estudio muestra que para los estudiantes resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método gráfico no es nada fácil. Los estudiantes presentan dificultad para encontrar los valores numéricos del dominio, además les cuesta encontrar puntos en el plano cartesiano. Cuando se trata de resolver problemas que se moldean con sistemas de ecuaciones lineales, se logra detectar que la principal dificultad es traducir correctamente el enunciado al lenguaje algebraico.

De acuerdo con lo encontrado, el inconveniente que tienen los estudiantes en la traducción del enunciado verbal al lenguaje algebraico cuando resuelven problemas de sistemas de ecuaciones lineales, se presenta por que no logran detectar las operaciones que se deben involucrar y la prioridad de las mismas, además no comprenden el significado de las palabras del enunciado que se dan en lenguaje común, para encontrar las incógnitas y los datos que se dan.

Otro trabajo que nos sirve de antecedente es *Una propuesta instruccional para coadyuvar la introducción de ecuaciones lineales: el caso de la traducción del lenguaje común al algebraico y viceversa de* Rivera, García, Navarro (2010)

Esta es una propuesta en la cual los investigadores intervienen en el proceso de enseñanza por medio de una propuesta didáctica que tiene propósito de indagar acerca de las dificultades que presentan los estudiantes cuando traducen enunciados del lenguaje común al algebraico y viceversa, y además presenta situaciones que le permiten a los estudiantes superar los inconvenientes en el proceso de traducción.

La teoría de situaciones didácticas, es el marco teórico desde donde se aborda la propuesta y la metodología utilizada para su desarrollo es la ingeniería didáctica. El esquema metodológico que siguieron es el siguiente

1. Identificación de la problemática con base a investigaciones realizadas.
2. Análisis epistemológico, didáctico y cognitivo de la traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico y viceversa.
3. Diseño de la secuencia didáctica tomando como base los puntos anteriores.
4. Aplicación de la secuencia, explícitamente la etapa de formulación de la teoría de situaciones didácticas.
5. Entrevistas y explicación a los compañeros sobre sus soluciones y las razones que los llevaron para contestar las preguntas de cierta manera.
6. Análisis de resultados: se contrastan los análisis obtenidos en la secuencia con los obtenidos en el análisis cognitivo.

La propuesta se aplicó a través de nueve actividades, de las cuales las ocho primeras le permiten a los estudiantes interactuar con la última actividad, en la cual deben mostrar su capacidad traducir un enunciado a una ecuación algebraica.

El análisis de los resultados muestra que la mayoría de los estudiantes no priorizan las operaciones, le atribuyen significados diferentes a las operaciones, además tienen dificultad para distinguir y operar con términos semejantes. En la etapa de formulación, el 30% de los estudiantes contestan que no son capaces de expresar el enunciado como se pide, el 50% intentan expresarla, aunque ninguno es correcto pero al menos hay aproximación a lo que se pedía el otro 20% escriben que si lo pueden expresar pero sin justificar.

Una mínima parte de los estudiantes logro traducir adecuadamente enunciados del lenguaje común al lenguaje algebraico, para el caso de la traducción del lenguaje algebraico al común, la traducción presenta mayores inconvenientes debido a que no le dan significado a la operación que figura en la ecuación, lo que los lleva a proponer problemas absurdos.

Al comparar las concepciones obtenidas del análisis cognitivo, respecto de la propuesta hubo un leve mejoramiento como el reconocimiento del uso parcial de la incógnita, la interpretación de expresiones algebraicas, y la importancia del manejo de un lenguaje apropiado tanto coloquial como matemático.

El propósito de la propuesta de coadyuvar a los estudiantes en el proceso de traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico y viceversa, no se cumplió cabalmente, solo una parte de los estudiantes logró transitar del lenguaje común al algebraico, en el proceso inverso, se presentaron serias dificultades en la traducción. Las serias dificultades que tiene los estudiantes cuando abordan temas de algebra elemental, la insuficiencia del tiempo para realizar la gran cantidad de actividades, y el desinterés de los alumnos cuando trabajan actividades que no repercutirán en su calificación, por lo que no razonan sus respuestas y dan las primeras que se les viene a la mente, son algunos factores que influyeron notablemente para que los resultados no fueran los esperados.

De acuerdo con las respuestas obtenidas, los investigadores, recomiendan que al aplicar esta secuencia didáctica se debe involucrar más a los estudiantes para que se vean más comprometidos y se despierte el interés de ellos para participar en las actividades que se realicen con fines investigativos, así mismo afirman que a pesar de que se han realizado varias investigaciones respecto a este tema, las dificultades siguen persistiendo, en parte por el complejo funcionamiento del sistema didáctico que resulta ser inadecuado.

El trabajo *Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica de* Segura (2004) es un referente muy importante debido a que hace aportes muy importantes en relación al tratamiento que los estudiantes le dan a la solución de problemas de ecuaciones lineales 2x2

La propuesta didáctica se aplicó a 29 estudiantes de 15 años de tercer año de enseñanza media de una escuela privada en Argentina, los estudiantes no habían tenido acercamiento a los sistemas de ecuaciones lineales y la docente no tenía conocimientos de didáctica de las matemáticas. En el estudio se tratan sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, en el campo de los números reales, cuya gráfica sean dos rectas (secantes, paralelas coincidentes y paralelas no coincidentes). Este trabajo centra su atención el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales. A partir de la construcción y aplicación de una secuencia didáctica se busca facilitar el aprendizaje y solución de sistemas de ecuaciones lineales. En esta secuencia se presentan situaciones que conjugan un trabajo en diferentes registros de representación semiótica y el pasaje entre estos.

El objetivo de este trabajo es diseñar y aplicar una secuencia de enseñanza de calidad que vuelva asequible el aprendizaje y solución de los sistemas de ecuaciones lineales, con miras a propiciar comportamientos matemáticos y cognitivos en los estudiantes, haciendo que el tratamiento y pasaje de los registros de representación sea el eje alrededor del cual gire la construcción de las actividades.

Los desarrollos sobre representación semióticas de Duval(1999) son el referente teórico que fundamenta la propuesta didáctica. Desde esta conceptualización se tienen en cuenta aspectos muy importante para facilitar la enseñanza del objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales: la necesidad de evitar la confusión entre el objeto matemático y sus diferentes registros de representación semiótica; la posibilidad de permitir la realización de las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis como son la formación de una representación como imagen de un registro dado, el tratamiento y la conversión, estas actividades son necesarias para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación.

Otros aspectos importantes que se consideran en la propuesta didáctica son la conceptualización de un objeto matemático y las condiciones que deben cumplir las representaciones semióticas congruentes. Desde la perspectiva teórica de Duval, la conceptualización implica la coordinación entre los registros de representación, por lo cual, la comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales reposa en la coordinación de la relación de al menos dos sistemas de representación. En cuanto a las representaciones congruentes de objetos que provienen de sistemas semióticos diferentes, se han identificado tres condiciones fundamentales: la correspondencia semántica, el orden y la univocidad semántica terminal.

La metodología de investigación utilizada en este trabajo corresponde a la ingeniería didáctica, la cual se caracteriza por su esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase y en la validación interna que se apoya en la comparación a priori y a posteriori de la secuencia.

El proceso experimental se desarrolló en cinco fases: análisis preliminar, la concepción y análisis a priori de la secuencia de enseñanza, experimentación, análisis a posteriori, y la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

En el análisis preliminar los investigadores reportan resultados de investigaciones en las cuales se estudian las concepciones de los estudiantes, los docentes y los libros de textos. Las concepciones de los estudiantes se caracterizan porque estos identifican la ecuación con el procedimiento para resolverla; relacionan la solución con el resultado escrito a la derecha del signo igual, Panizza, Sadovsky, Sessa (1995), tienen la concepción de que la ecuación es una igualdad numérica y las letras son números a develar; existe una tendencia por el uso del registro algebraico para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales, Pérez Donoso (1988), para resolver problemas que involucran ecuaciones, con frecuencia recurren al pasaje del registro algebraico al gráfico, solo en ocasiones se hace el transito del registro gráfico al algebraico; la única forma de ver si una la solución de una ecuación es correcta es volver a realizar el procedimiento; en cuanto a la traducción del lenguaje natural al algebraico, lo hacen de manera directa, frase por frase, apoyándose solo lo sintáctico y dejando de lado el aspecto semántico.

En este trabajo se retoman las conclusiones de investigaciones sobre actitudes y creencias de los docentes que están marcadas por los esquemas abstractos que elaboran los docentes para trabajar ecuaciones lineales o que son tomados de libros de texto; el estatus inframatemático que le dan a la representación y a la solución gráfica de sistemas de ecuaciones lineales (Ramírez 1997); y aproximación estructural o algoritmación de la didáctica del algebra.

En lo relacionado a la forma como los libros de texto presentan la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, los resultados más relevantes indican que en la mayoría de los casos priorizan el tratamiento algebraico sobre el verbal y el gráfico; las actividades propuestas corresponden a los pasajes del registro verbal al algebraico y del algebraico al gráfico, en muy pocas se les solicita a los estudiantes que realicen el pasaje del registro algebraico al verbal o del gráfico al algebraico, ni aparece un ítems para articular los diferentes registros. Otro aspecto que se observa en los libros de texto es el que tiene que ver con la verificación de los resultados de los sistemas de ecuaciones lineales, la cual se hace en torno a un tratamiento geométrico y no como raíces comunes de dos polinomios.

El análisis epistemológico muestra que en la evolución histórica, el desenvolvimiento del objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales presenta obstáculos en la simbolización, en el campo numérico o en el campo conceptual desde donde se aborde. En la simbolización, se tiene en cuenta el recorrido desde el álgebra retórica, luego su paso por el álgebra sincopada y finalmente el álgebra simbólica. Los campos numéricos de desarrollo de este objeto matemático son los números naturales, los racionales positivos, los enteros y los reales. Otro aspecto objeto de análisis es el campo conceptual desde donde se ha abordado este tema, los estudios reconocen tres tratamientos, el puramente numérico (babilonios y chinos), el algebraico (Diofanto, Al-Khowarizmi, Viete) y el carácter geométrico (Descartes).

2. FUNDAMENTOS TEÒRICOS

2.1. Resolución de problemas

Para iniciar, revisamos los conceptos más sobresalientes sobre la resolución de problemas primero desde una perspectiva muy general de la psicología cognitiva, en segundo momento se le dará un tratamiento a este tópico en el campo específico de las matemáticas.

Algunas definiciones tomadas desde la psicología cognitiva, Simon (1978)

> "*Una persona se enfrenta a un problema cuando acepta una tarea, pero no sabe de antemano como realizarla. Aceptar una tarea implica poseer algún criterio que pueda aplicarse para determinar cuándo se ha terminado la tarea con éxito*"

Chi y Glaser, citado pot Varela (2002) proponen *"Un problema es una situación en la que se intenta alcanzar un objetivo y se hace necesario un medio para conseguirlo"*

Para Varela (2002), resolver un problema es el proceso en el que la situación incierta es clarificada implicando siempre la aplicación de conocimientos por parte del sujeto que resuelve”

Desde una perspectiva constructivista, la resolución de problemas depende del área de conocimiento y de la representación mental que de este se haga la persona. La resolución de problemas es un proceso de reestructuración en el cual el sujeto debe ser capaz de crear conocimientos a través de la relación de las nuevas informaciones con las que se enfrenta y los esquemas de conocimientos previos, Varela (2002)

Perspectiva asociacionista se plantea que el proceso de resolución de problemas pone énfasis en las conductas fundamentadas en el ensayo error, las jerarquías de hábitos y las cadenas de asociación. En este marco el aprendizaje se produce después de haber resuelto una serie de problemas similares.

Diferentes autores han tratado de definir lo que es un problema, entre ellos Krulik y Rudnik (1980) lo definen como una *“situación cuantitativa o no, para la cual los individuos implicados no conocen medios o caminos evidentes para obtenerla”*

Laberrere (1987) citado por Varela (2002) da una definición más relacionada con el ámbito de la educación “*El problema adquiere así una dimensión de actividad de enseñanza-aprendizaje, tanto de conceptos como de habilidades, y evaluadora no solo de dicho aprendizaje sino de los propios mecanismos cognitivos puestos en juego por el educando”.*

En cuanto a lo que significa resolver un problema varios autores han hechos aportes importantes.

Debney (1971) citado por Varela (2002) dice que el hecho de solucionar un problema significa pensar creativamente.

La National Council of Supervisor of Mach "la resolución de problemas es el proceso de aplicación de conocimientos adquiridos previamente a una situación familiar o no".

Puig (1996) citado por Santos (2008), caracteriza el proceso de resolución de problemas como "*la actividad mental y manifiesta que desarrolla el resolutor desde el momento en que presentado, sale un problema, asume que lo que tiene adelante es un problema y quiere resolverlo hasta que da por acabada la tarea".*

Lesh y Zawojewski (2007) citado por Santos (2008) Definen la resolución de problemas como "*el proceso de interpretar una situación matemáticamente, la cual involucra varios ciclos interactivos de expresar, probar y revisar interpretaciones. Y de ordenar, integrar, o redefinir grupos de conceptos matemáticos desde varios tópicos dentro y más allá de las matemáticas"*

Claude (2001) afirma *"Cuando hablo de problemas o situaciones problemas, yo no hablo de ejercicios…, de cosas rutinarias para practicar, si no que hablo de situaciones donde hay que reflexionar, hay que buscar, donde hay que investigar… donde para responder hay que investigar mucho"*

En este trabajo vamos a considerar que "*resolver un problema implica movilizar de manera creativa conocimientos, habilidades y actitudes para realizar una tarea que antes no se tenía conocimiento de cómo realizarla".*

2.2. Resolución de problemas en algebra.

Diversos investigadores se han ocupado del proceso de resolución de problemas en matemáticas, de las cuales un buen número hacen referencia a los problemas del algebra elemental. Pifarrè, Sanuy (2001) señalan que entre las variables que inciden en conseguir que los alumnos aprendan a resolver problemas algunas hacen referencia a la dimensión del aprendizaje y otras a la dimensión de la enseñanza.

En lo que tiene que ver con la forma como los estudiantes resuelven problemas, un gran número de estudios han mostrado que los buenos resolutores se caracterizan por disponer de un conjunto de estrategias generales o heurísticas que guían su acción y que les ayudan a superar las dificultades que van encontrando durante el proceso de resolución Pifarrè, Sanuy (2001).

Filloy, et al (2008) hace un detallado estudio acerca del proceso de resolución algebraico de un problema verbal, en especial del componente de los procesos cognitivos. En este sentido hace énfasis en aspectos como la cognición, la resolución de problemas, el uso competente y las tendencias cognitivas, el dominio de las tácticas intermedias y las tendencias cognitivas, la sintaxis y la memoria, el uso competente del esbozo lógico semiótico, el uso pertinente de ciertos estratos intermedios, el esbozo lógico matemático, los estratos de SMS utilizados como representación , el nivel de representación y el uso de la memoria, el uso de métodos primitivos y el uso de la memoria, los códigos personales, la resolución de problemas y la sintaxis, y la mecanización y la práctica.

Las incorrecciones de los estudiantes cuando resuelven problemas con ecuaciones 2x2 tienen su origen en diferentes obstáculos que se han construido durante su vida escolar. Los estudiantes desde temprana edad han tenido experiencia en la resolución de problemas, pero en el contexto algebraico los niveles de complejidad aumentan. Cuando se aborda el proceso de resolución de problemas en matemática, no se puede evitar hacer referencia a los aportes de Descartes (1826), citado por Puing (2003) a través de lo que hoy denominamos el método cartesiano de la resolución algebraica de problemas. Este método fue propuesto por Descartes en dos de sus obras, En *Regula,* describe a través de cuatro pasos el proceso de traducción del enunciado del problema al SMS (sistema matemático de signos) del algebra.

Los pasos que Descartes desglosa en su obra regula son los siguientes:

1. Una lectura analítica del problema que lo reduce a una lista de cantidades y relaciones entre cantidades.
2. La elección de una cantidad que va a ser representada por una letra (o unas cuantas cantidades que se van a representar con letras distintas).
3. Representación de otras cantidades mediante expresiones algebraicas que describen la relación (aritmética) que esas cantidades tiene con otras que ya han sido representadas previamente por una letra o una expresión.

4. Establecimiento de una ecuación (o tantas como letras distintas haya decidido introducir en el segundo paso) igualando dos expresiones, de las que han escrito en el tercer paso, que representan la misma cantidad.

La continuación del método de resolución de problemas de Descartes se encuentra en la obra que el tituló *Geometría.* En esta obra se supera la tradición babilónica en la cual, lo que se hace no es resolver el problema de nuevo, sino intentar transformar la configuración en otro que ya se sabe resolver. Descartes da un giro al centrar su atención en la elaboración de un catálogo de todas las configuraciones posibles, para luego avanzar hacia la idea elaborar un algoritmo para cada una de las formas canónicas posibles. En la actualidad este paso se conoce como la aplicación de la formula o algoritmo de solución a la ecuación de forma canónica.

Filloy, et al (2008) presentan el método cartesiano desglosado en los siguientes pasos:

1. Una lectura analítica del problema que lo reduce a una lista de cantidades y relaciones entre cantidades.
2. La elección de una cantidad que va a ser representada por una letra (o unas cuantas cantidades que se van a representar con letras distintas).
3. Representación de otras cantidades mediante expresiones algebraicas que describen la relación (aritmética) que esas cantidades tiene con otras que ya han sido representadas previamente por una letra o una expresión.
4. Establecimiento de una ecuación (o tantas como letras distintas haya decidido introducir en el segundo paso) igualando dos expresiones, de las que han escrito en el tercer paso, que representan la misma cantidad.
5. Transformación de la ecuación en una forma canónica.
6. Aplicación de la formula o algoritmo de solución a la ecuación de forma canónica.
7. Interpretación del resultado de la ecuación en términos del problema.

Polya (1965), en su conocido trabajo “como plantear y resolver problemas” presenta cuatro fases que se abordan a través de preguntas:

Comprender el problema.

¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos?

¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?

¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?

Concebir un plan.

¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿O ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?

¿Conoce un problema relacionado con éste? ¿Conoce algún teorema, que le pueda ser útil? Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que

le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar.

He aquí un problema relacionado al suyo y que se ha resuelto ya ¿Podría usted utilizarlo? ¿Podría utilizar su resultado? ¿Podría emplear su método? ¿Le haría a usted falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo?

¿Podría enunciar el problema en otra forma? ¿Podría Plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones'

Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? ¿Un problema más general? ¿Un problema más particular? ¿Un problema análogo? ¿Puede resolver una parte del problema?

Considere sólo una parte de la condición; descarte la otra parte ¿en qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿En qué forma puede variar? ¿Puede *usted deducir algún elemento útil de los datos?¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita o los datos o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos ente sí?*

¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?

Ejecución de un plan.

Al ejecutar su plan de la solución, compruebe cada uno de los pasos'

¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?

Examinar la solución obtenida (visión retrospectiva)

¿Puede usted verificar. el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento?

¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe?

¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?

Otro aporte importante al proceso de resolución de problemas algebraicos es el realizado por Duval (1999) en relación a la teoría de representaciones semióticas.

En este sentido se señalan tres actividades cognitivas fundamentales de la representación ligadas a la semiosis: la formación, el tratamiento y la conversión.

Cuando se acude a signos para actualizar o para sustituir la visión de un objeto se entiende que se forma una representación semiótica. La formación de representaciones semióticas debe respetar las reglas propias del sistema empleado por razones de comunicabilidad y para hacer posible la utilización de los sistemas de tratamiento que ofrece el sistema semiótico empleado. Duval (1999)

Se denomina tratamiento o expansión informacional, de las representaciones semióticas a la trasformación de un registro de representación o de un sistema. En este proceso intervienen reglas cuya aplicación produce una representación en el mismo registro de representación de partida, estas reglas son las siguientes: regla de derivación, regla de producción, reglas de coherencia temática y reglas asociativas de contigüidad y de similitud.

La conversión de registros de representación semiótica, según Duval, es la trasformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada en un registro, en una representación de este mismo objeto, esta misma situación o la misma información en otro registro. Para adelantar el proceso de conversión se debe tener en cuenta los criterios de congruencia entre representaciones como son la posibilidad de una correspondencia semántica de los elementos significantes; la univocidad semántica terminal, y el orden del arreglo que componen cada una de las dos representaciones. Duval (1999).

Dos registros de representación son congruentes cuando cumple las tres reglas de congruencia y es no congruente, si incumple una o más reglas de congruencia.

2.3. Dificultades, errores y obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas.

Uno de los temas más estudiados en didáctica de las matemáticas, tiene que ver con los errores que cometen los estudiantes en el aprendizaje de los contenidos de esta área. Cuando se estudian estos errores, es inevitable indagar por las causas que los originan y por las razones que llevan a los alumnos a cometerlos.

Algunos investigadores han identificado las principales causas que originan los errores que cometen los estudiantes. Ruano, Socas, Palarea (2008) señalan que los errores cometidos por los estudiantes se deben a obstáculos, ausencia de sentido y a actitudes afectivas y emocionales.

Con frecuencia algunos investigadores dan un tratamiento indistinto a los errores y a las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, Socas (1997) diferencia las dificultades de los errores al afirmar “estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los estudiantes en forma de errores”

Dada la importancia de la conexión existente entre obstáculos, errores y dificultades y la imposibilidad de comprender cada uno de estos elementos por separado. Procedemos a revisar el desarrollo conceptual de cada uno de estos elementos.

Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas

Son muy escasos los estudios que definen con claridad el significado de dificultad en el aprendizaje de las matemáticas. Con frecuencia se le da un tratamiento equivalente al de errores y en ocasiones se limitan a listar una serie de dificultades sin hacer alusión a lo que significa, lo anterior se puede evidenciar en investigaciones como las de Sanjosè, Valenzuela, Fortol, Soles-Potoles, (2007) y en Rico,(1995) Socas (1997) sugiere una diferencia entre obstáculos, errores y dificultades, al señalar la conexión existente entre dificultades y errores como un entramado complejo del cual surgen los errores que son la manifestación concreta de esta interacción.

Kass & Myclebust (1969) Citados en García y Rodríguez (2010), expresan que "Dificultad de aprendizaje se refiere a uno o más déficits significativos en los procesos de aprendizaje esenciales que requieren técnicas de educación especial para la remediación.

Las dificultades en matemáticas se agrupan en cinco grandes líneas, las asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos, las asociadas a los procesos de pensamiento matemático, las asociadas a los procesos de enseñanza de los estudiantes, las asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos y las asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

Como se puede observar, las dificultades no han sido definidas con claridad en los estudios de didáctica de las matemáticas, Lo anterior nos lleva establecer un referente conceptual para referirnos a dificultades en la resolución de problemas, en este sentido, consideramos las dificultades como la imposibilidad de proceder adecuadamente para resolver un problema, las cuales son originadas por obstáculos, falta de sentido o actitudes afectivas y emocionales, que se manifiestan a través de errores u omisiones.

Las dificultades que se presentan en la resolución de problemas pueden ser conscientes e inconscientes, generalmente cuando los estudiantes son conscientes de la dificultad abandonan la resolución. Cuando no lo son, acuden a esquemas inapropiados para tratar de resolver los problemas, realizando construcciones que comúnmente llamamos errores.

En la interacción entre obstáculos, dificultades y errores, los primeros originan dificultades puesto que de una u otra manera impiden una actuación que corresponda a conceptos, definiciones y procedimientos validos desde el punto de vista matemático. Los errores surgen como manifestaciones de la interacción entre obstáculos y dificultades.

Errores en el aprendizaje de las matemáticas

La idea de error que con mayor frecuencia comparte docentes y estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es presentada por Rico (1995) en los siguientes términos, "*Cuando un alumno proporciona una respuesta incorrecta a una cuestión matemática que se le plantea, se puede decir que su respuesta es errónea, y la solución proporcionada es un error en relación con la cuestión propuesta".*

La concepción de error como falta de conocimiento o desatención de los estudiantes ha sido reconsiderada a partir de diferentes de trabajos investigación en los cuales se le da una connotación diferente a estas producciones, es así, como Socas (citado por Del Puerto, Minnaard, Seminara, 2004) señala que el error debe ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema inadecuado y no solo como la consecuencia de una falta específica de conocimiento o una distracción.

Brousseau, Davis y Werner (1986) (citados por Rico, 1995) , describen algunas ideas de los estudiantes que generan la producción de errores de la siguiente manera:

1. *Se hace evidente rápidamente que los errores de los alumnos son, con frecuencia el resultado de un procedimiento sistemático que tiene alguna imperfección; pero el procedimiento imperfecto lo utiliza el alumno en forma consistente y con confianza, en estos casos los errores muestran un patrón consistente.*
2. *Los alumnos tienen con frecuencia grandes concepciones inadecuadas (misconceptions) acerca de aspectos fundamentales de las matemáticas.*
3. *Es posible observar a los alumnos y también intercambiar información con sus profesores usuales, se ve que los alumnos emplean con frecuencia procedimientos imperfectos y tienen concepciones inadecuadas que no son reconocidas por sus profesores.*
4. *También se hace evidente que los estudiantes son con frecuencia más inteligentes para inventar sus propios métodos originales de lo que se espera de ellos. Incluso cuando un método ha sido presentado por el profesor, un alumno puede desarrollar su propio método original, llegando hasta ignorar el método del profesor.*

Algunos investigadores han realizado algunas clasificaciones de los errores, entre las más sobresalientes tenemos:

Davis (citado por Rico (1995) hace la siguiente clasificación:

1. *Reversiones binarias:* $4 \times 4 = 8$; $2^3 = 6$
2. *Errores inducidos por el lenguaje o la notación: Ej* $2x - x = 2$

3. *Errores producidos por recuperación de un esquema previo: Entre estos se encuentran los errores usuales de la suma y la resta, justificados por esquemas como el de adición con dos entradas, el simétrico de la sustracción y la comparación de unidades en una relación de proporcionalidad.*
4. *Errores producidos por una representación inadecuada.*

5. *Reglas que producen reglas. Así, de la implicación* $(x-2)(x-3)=0$, $x=2$ o $x=3$

Radatz, citado por Rico (1995) parte del procesamiento de información para presentar las siguientes categorías:

1. *Errores debidos a dificultades de lenguaje: el aprendizaje de conceptos, símbolos y vocabulario matemáticos es para muchos alumnos es un problema similar al aprendizaje de una lengua extranjera. Una falta de comprensión semántica de textos matemáticos, es fuente de errores; por ello, la resolución de problemas verbales, está especialmente abierta a los errores de traducción, desde un esquema semántico en el lenguaje natural a un esquema más formal en el lenguaje matemático.*
2. *Errores debidos a dificultades para obtener información espacial: las diferencias en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales, es una fuente de dificultades para muchos niños y jóvenes en la realización de tareas matemáticas.*

3. *Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos: Incluyen todas las deficiencias de conocimientos sobre contenidos y conceptos específicos para la realización de tareas matemáticas. Estas deficiencias incluyen la ignorancia de los algoritmos, conocimiento inadecuado de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios.*
4. *Errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento. La experiencia sobre problemas similares anteriores pueden producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información. En estos casos los alumnos desarrollan operaciones cognitivas, que continúan utilizando aun cuando las condiciones fundamentales de la tarea matemática en cuestión se hayan modificado. Dentro de estas clase de errores se encuentran los siguientes:*
    - *Errores de perseveraciòn: en los que predominan elementos singulares de una tarea o problema.*
    - *Errores de asociación: que incluyen interacciones incorrectas entre elementos singulares.*
    - *Errores de interferencia: En los que operaciones o conceptos diferentes intervienen con otros.*
    - *Errores de asimilación: en los que una audición incorrecta produce faltas en la lectura o escritura.*

- *Errores de transferencia negativa a partir de tareas previas en la que se puede identificar el efecto de una impresión errónea obtenida de un conjunto de ejercicios o problemas verbales.*
- *Errores debido a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes: Este tipo de errores surgen con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenido diferente.*

Movshovitz-Hadar, Zaslavksy e Imbar, citado por Rico (1995) describen las siguientes categorías para clasificar los errores.

1. *Datos mal utilizados: incluyen discrepancia entre los datos de la cuestión y el tratamiento que le da el alumno, entre estos tenemos, añadir datos extraños, olvido de datos necesarios para la solución, se contesta algo innecesario, asignar a parte de la información significado inconsistente con el enunciado, asignar valores numéricos de una variable a otra y hacer una lectura incorrecta del enunciado.*
2. *Interpretación incorrecta del lenguaje: Incluyen errores debidos a la traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje matemático distinto, estos errores se presentan cuando, se pone un problema en ecuaciones expresando una relación diferente a la enunciada, se designa un concepto matemático expresando un símbolo diferente al usual y operando con él según las reglas usuales, y cuando hacen una interpretación incorrecta de símbolos gráficos como términos matemáticos y viceversa.*

3. *Inferencias no válidas: incluye errores que se deben a falacias del razonamiento y no al contenido específico del contenido, en esta categoría se identifican errores producidos por derivar de un enunciado condicional su reciproco o su contrario; derivar de un enunciado condicional y de su consecuente, el antecedente; concluir un enunciado en que el consecuente no se deriva del antecedente, necesariamente; utilizar incorrectamente los cuantificadores; o también realizar saltos injustificados en una inferencia lógica.*
4. *Teoremas o definiciones deformados: corresponden a errores que se producen por deformación de un principio, una regla o definición identificable. Entre estos tenemos, la aplicación de un teorema sin las condiciones necesarias; aplicar la propiedad distributiva a una función no lineal; realizar una valoración o desarrollo inadecuado de una definición, teorema o formula reconocible.*
5. *Falta de verificación en la solución: se presentan cuando cada paso de la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada, si se hubiese contrastado el resultado final con la pregunta, el error habría podido evitarse.*
6. *Errores técnicos: se incluyen los errores de cálculo, errores al tomar datos de una ecuación, errores en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos básicos.*

Obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas

En la resolución de ecuaciones lineales como en muchos contenidos del álgebra los alumnos comenten con frecuencia múltiples errores. Diversos investigadores se han ocupado de estudiar el origen de dichos errores. Gracias a los aportes de Bachelard

(1972), el error en la didáctica toma una connotación diferente a la que se le da en la cotidianidad.

El error en el contexto didáctico surge de la interacción de conocimientos previos con un nuevo conocimiento que se pretende aprender, en este sentido, Malisani 1999) plantea, “el error no es solo fruto de la ignorancia, de la duda o el azar como suponían las teorías conductista del aprendizaje, sino que es la consecuencia de un conocimiento anterior que se manifiesta falso o inapropiado en una nueva situación”.

Bachelard (1972), hace un desarrollo novedoso acerca de obstáculos epistemológicos los cuales se relacionan con la noción de error en los siguientes términos:

> *“ …. Se conoce afrontando un conocimiento anterior, destruyendo los conocimientos mal adquiridos o superando aquellos que en el espíritu mismo obstaculiza la espiritualización. Un obstáculo epistemológico se incrusta en el conocimiento no formulado. Costumbres intelectuales que fueron útiles y sanas pueden después de un tiempo obstaculizar la investigación”*

Astolfi (1998) hace una clara diferencia entre los planteamientos de Bachelard y los de Piaget. La perspectiva Piagetiana se basa en la Psicología y lleva a considerar las concepciones como representaciones de cierta clase del desarrollo y como testimonio del desarrollo cognitivo en curso, es decir, Piget explica estas concepciones como características del pensamiento del niño y del adolecente. Desde la óptica de Bachelard se interpretan más bien como los retornos regulares del pensamiento común, por lo que dichas concepciones se refieren tanto a adultos como a estudiantes. Es decir según Piaget, las concepciones son el futuro de la razón en desarrollo, mientras que según Bachelard, constituyen el pasado de la razón siempre dispuesta a la regresión. El primero insiste en la ligereza potencial de nuestra inteligencia, y el segundo en su peso experiencial.

La idea de obstáculo en Astolfi, difiere del significado tradicional de dificultad, este autor da argumentos que sustentan esta afirmación, al considerar que los obstáculos más resistentes no son necesariamente dificultades, sino más bien facilidades que se otorga la mente para pensar los fenómenos. El obstáculo corresponde a lo que este autor llama funcionamiento económico del cerebro, que pone en juego un sistema de explicación rustico y sencillo, pero disponible y cómodo para el sujeto.

Según Bachelard el obstáculo es una forma de conocimiento del cual es muy difícil deshacerse. Si hay dificultad esta consiste en evitar rechazar el uso del sentido común, en obligarnos a buscar una respuesta elaborada cuando creemos disponer de una respuesta lista para pensar. Así comprendemos que los obstáculos estén, puesto que cambiarlos implica en cierta forma una parte de sí mismo.

Luego del novedoso aporte de Bachelard, los obstáculos epistemológicos han sido objetos de atención de muchos investigadores como Brousseau, Duroux, Spagnolo, citado por Malisani (1999) entre otros.

Brouseau (1986) citado por Malisani (1999), da relevancia a la ligación existente entre ciertos conocimientos a los que los estudiantes tratan de acceder con conocimientos anteriores que si bien en algún momento fueron útiles y efectivos, se hacen provisorios, imprecisos y pocos correctos en otros contextos de aprendizaje, de esta manera relaciona la noción de obstáculos epistemológicos con la idea de aprendizaje por adaptación.

Douroux (1983) citado por Malisani (1999) hace una caracterización de los obstáculos, al establecer las condiciones necesarias que se deben cumplir para considerarlos como obstáculos epistemológicos.

1. Un obstáculo es un conocimiento, una concepción, no una dificultad o falta de conocimiento.
2. Este conocimiento produce respuestas correctas en un determinado contexto que el alumno encuentra a menudo. Pero genera respuestas falsas fuera del contexto.
3. Este conocimiento se manifiesta resistente a las contradicciones (a las cuales se confrontan) y a la sistematización de un conocimiento mejor.
4. Después de la toma de conciencia de su falta de precisión este conocimiento continúa manifestándose de manera intempestiva y obstinada.

A estas condiciones se suman las características descritas por Astolfi (1998)

1. *Su positividad* el obstáculo no es ignorancia, ni un bloqueo psicológico, sino que implica la saturación de conocimientos previos inmediatamente movilizados equivocadamente por la mente. Es un tejido de errores construidos, positivos, arraigados, solidarios. Sobre este tema, se han mencionado los esquemas peligrosos.
2. *Su facilidad:* El obstáculo es una facilidad que se concede la mente para seguir razonando de manera sencilla, inmerso en la comodidad intelectual, gracias al

juego fácil de analogías, de metáforas (demasiado) satisfactorias, de pares de oposiciones binarias, etc.

3. *Su interioridad:* Contrariamente a lo que sugiere la etimología (obstare: mantenerse delante) el obstáculo no es aquello contra lo cual vendrá a tropezar el pensamiento, sino que está en el pensamiento mismo, en las palabras, en la experiencia cotidiana, en el inconsciente… El error ocupa el centro mismo del acto de conocer y es la sombra proyectada de la razón, hasta el punto de que no se puede soñar en un aprendizaje sin obstáculos.

4. *Su ambigüedad:* toda representación es a la vez una herramienta necesaria y una fuente potencial de errores. Los obstáculos no lo son en si mismos, ya que los razonamientos que movilizan pueden a priori ser válidos. Se hablará más bien de una función obstáculo cuando esos modos de pensamiento legítimos se utilizan para la resolución de un tipo de problemas para los que no se adecuan. Lo que constituye un obstáculo es el uso ilegítimo, fuera de sus límites de validez de un determinado sistema cognitivo que por lo demás también tiene sus virtudes.

5. *Su polimorfismo:* el carácter proteiforme del obstáculo lo lleva a dimensiones y adherencias múltiples, pues no se limita al campo racional, sino que a menudo extiende ramificaciones hacia los planos afectivos, emocional, fantasmático, mítico, a menos que no sean dimensiones las que contaminen el razonamiento científico! Posee pues una carga simbólica y se caracteriza por un realismo glotón.

6. *Su recursividad:* Solo retrospectivamente el obstáculo se nos presenta como lo que es. Es el pasado de la razón cuando esta se vuelve sobre si misma para juzgarse. Por ello decía Bachelard que no hay que confundir los fundamentos con los comienzos. El fundamento es recurrente permite identificar a posteriori el comienzo como el balbuceo infantil que era, y que se revela como tal in fine, por lo que nos cuesta trabajo creer que hayamos permanecido durante tanto tiempo ´presos de esa idea que ahora nos parece tan evidente. Tomar conciencia de los obstáculos nos vuelve modestos y nos lleva a la ironía e incluso a reírnos de nosotros mismos.

Además de los conocimientos anteriores, algunos investigadores de didáctica de la matemática de la escuela francesa, Cornu (1983), Sperpinka (1985) citado por Malisani (1999) han logrado demostrar que ciertas dificultades de los alumnos se pueden encontrar en los obstáculos detectados en la historia (Cfr. también Arzello et al) citado por Malisani (1999). Según Malisali(1999) los elementos que permiten identificar estos obstáculos se deben buscar en el análisis de las resistencias que surgieron en el desarrollo histórico y en los debates que les han permitido superarlas. Pero la historia no solamente es suficiente el análisis histórico epistemológico se debe completar con un análisis con un estudio de los fundamentos de matemáticas.

La definición de obstáculos epistemológicos recibió aportes importantes por parte de Spagnolo (1995, página 81), citado por Malisani (1999).

"El obstáculo epistemológico está relacionado con el pasaje entre el campo semántico significativo en un cierta época histórica de la comunidad matemática

y el tentativo de la misma de poner a punto un nuevo lenguaje relativo a una cierta clase de problemas. Los objetos matemáticos de los campos semánticos anteriores que podrían servir para la sintáctica (en los fundamentos del nuevo lenguaje), son los obstáculos epistemológicos".

El caso de la resolución de problemas con ecuaciones lineales, la aritmética representa el campo semántico anterior, mientras que el álgebra constituye el nuevo lenguaje.

Spagnolo (1995, página 80) afirma:

"….- un lenguaje nace con ambigüedad semántica y riqueza de significados al interior de la gramática. Cuando el lenguaje se formaliza se asigna un significado a cada formula y se pierden los significados anteriores. El estudio de las concepciones históricas no es otra cosa que el estudio de los significados ligados a un cierto lenguaje en un determinado periodo histórico"

El uso de un simbolismo adecuado favorece el desarrollo del pensamiento algebraico, por este motivo, en la historia del algebra tiene importancia no solo la historia de los conceptos, sino también el sistema de símbolos utilizados para poder expresarlos, Arzarello et al citado por Malisani (1999). En la historia del algebra, Nesselman, citado por Malisani (1999) distingue tres periodos.

1. LA FASE RETÓRICA: anterior a Diofanto de Alejandría (250 d c) en la cual se usa exclusivamente el lenguaje natural sin recurrir a algún signo.

2. LA FASE SINCOPADA: Desde Diofanto hasta finales del siglo XVI, en la cual se introducen algunas abreviaturas para las incógnitas y las relaciones de uso frecuente pero los cálculos se desarrollaban en lenguaje natural.
3. FASE SIMBÓLICA: introducida por Viette (1540 a 1603) en el cual se usan letras para todas las cantidades y signos para representar las operaciones, se utiliza el lenguaje simbólico no solo para resolver ecuaciones sino también para resolver reglas generales.

CAPITULO III

MARCO METODOLÒGICO

METODOLOGÍA PROPUESTA

La investigación dificultades en la resolución de problemas verbales de sistemas de ecuaciones lineales dos por dos, tiene como propósito central la identificación y el establecimiento de las características de las dificultades que presentan los estudiantes cuando resuelven este tipo de problemas, por esta razón tiene un enfoque cualitativo, que en términos de Pérez, (2001a) se define como la comprensión de una realidad considerada desde sus aspectos particulares como fruto de un proceso histórico de construcción y vista a partir de la lógica y el sentir de sus protagonistas, es decir desde una perspectiva interna (subjetiva)

La metodología cualitativa, como lo indica su propia denominación, tiene como objetivo la descripción de las cualidades de un fenómeno. Busca un concepto que pueda abarcar una parte de la realidad. No se trata de probar o de medir en qué grado una cierta cualidad se encuentra, Mendoza (2006)

Dentro de las características principales de esta de metodología podemos mencionar Mendoza (2006)

1. La investigación cualitativa es inductiva.
2. Tiene una perspectiva holística, esto es que considera el fenómeno como un todo. Se trata de estudios en pequeña escala que solo se representan a sí mismos

3. Hace énfasis en la validez de las investigaciones a través de la proximidad a la realidad empírica que brinda esta metodología.
4. No suele probar teorías o hipótesis.
5. Es, principalmente, un método de generar teorías e hipótesis.
6. No tiene reglas de procedimiento.
7. El método de recogida de datos no se especifica previamente.
8. Las variables no quedan definidas operativamente, ni suelen ser susceptibles de medición.
9. La base está en la intuición.
10. La investigación es de naturaleza flexible, evolucionaría y recursiva.
11. En general no permite un análisis estadístico
12. Se pueden incorporar hallazgos que no se habían previsto

Los investigadores cualitativos participan en la investigación a través de la interacción con los sujetos que estudian, es el instrumento de medida. Analizan y comprenden a los sujetos y fenómenos desde la perspectiva de los dos últimos; debe eliminar o apartar sus prejuicios y creencias

Dado que se estas dificultades en la resolución de problemas son susceptibles de ser identificadas y de establecer las relaciones que se encuentran al interior de cada una de ellas, el presente estudio tienen un carácter descriptivo, entendida como estudios que buscan únicamente describir situaciones o acontecimientos; básicamente no está interesado en comprobar explicaciones, ni en probar determinadas hipótesis, ni en hacer predicciones. Con mucha frecuencia las descripciones se hacen por encuestas (estudios por encuestas), aunque éstas también pueden servir para probar hipótesis específicas y poner a prueba explicaciones.

La investigación que se pretende adelantar es cualitativa con un enfoque descriptivo

Población objeto de estudio

La población objeto de estudio está conformada por estudiantes de grado noveno de la Institución educativa femenina de enseñanza media (IEFEM) de la ciudad de Quibdó. Esta es una institución de carácter oficial dirigida por las hermanas dominicas de la presentación, atiende 2800 estudiantes y de acuerdo a la clasificación de planteles establecida por el ICFES, a partir del resultados de las estudiantes en la prueba SABER 11 en el año 2013, se encuentra ubicada categoría alta.

La población estudiantil del establecimiento está conformada por estudiantes mestizas, afrodescendientes e indígenas. La población mayoritaria la constituyen estudiantes pertenecientes a población afrodescendiente, mientras que el número de estudiantes indígenas es muy reducido.

La mayoría de las estudiantes del grado noveno son hijas de empleados públicos, trabajadores independientes y comerciantes pertenecientes a estratos 1, 2 y 3, en edades entre 14 y 15 años.

Como muestra se seleccionó al grado 902, conformado por 34 estudiantes, con edades que oscilan entre 14 y 15 años. La mayoría de las estudiantes provienen de hogares donde el núcleo familiar convive bajo el mismo techo y pertenecen a estratos 1,2 y 3, siendo este último el estrato en el cual se encuentra la mayor parte del grupo. 21 de las 34 estudiantes, ingresaron a la institución en preescolar.

En cuanto al desempeño académico de las estudiantes de la muestra en el área de matemáticas, se observa en el informe final del año 2012, que el 11,7% (4 estudiantes), alcanzó el nivel superior; el 26,4% (9 estudiantes), alcanzó el nivel alto, el 41,2% (14 estudiantes) se ubicó en nivel básico y el 20,6% (7 estudiantes) se ubicó en nivel bajo y fue necesario adelantar en proceso de recuperación para ser promovidas al grado 9º La profesora que orienta el área ha estado al frente del grupo en el grado 8º y en el grado 9º, manifiesta que los contenidos como operaciones con enteros y racionales, operaciones con expresiones algebraicas, y los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2, fundamentales para resolver problemas verbales de sistemas de ecuaciones lineales 2x2, ya fueron tratados en clase y considera que la mayoría de las estudiantes tienen una buena comprensión de estos.

En lo referente a la parte afectiva y emocional del grupo seleccionado, de acuerdo con una indagación previa se pudo establecer que solo 11 de las 34 estudiantes manifiestan que les agrada el área, el resto manifoietan cumplir con las actividades solo para ser promovidas al siguiente grado.

Instrumentos de recolección de información

Se aplicaron 18 problemas de enunciado verbal de sistemas de ecuaciones lineales 2x2, elaborados exclusivamente para el presente trabajo de investigación. Estos problemas se formularon en el contexto de la vida cotidiana de las estudiantes y las cantidades utilizadas pertenecen en algunos casos al conjunto de números enteros y en otros al conjunto de números racionales.

De acuerdo con los planteamientos de Holyoak y Koh, 1987; Holyoak, 1984 citados por Sanjosè, et al (2009) en los problemas algebraicos se distinguen dos componentes, la superficie y la estructura. La temática en particular o ámbito del mundo de los objetos y eventos que se describen en el enunciado corresponden a la superficie del problema. La estructura corresponde básicamente a "*como las cantidades se relacionan unas con otras, más que por como son las cantidades*" (Novick, 1998, p511) citado por Sanjosè, et al (2009). Teniendo en cuenta lo anterior, la superficie de los problemas formulados para el presente trabajo, atiende a situaciones de la cotidianidad de las estudiantes, mientras que la estructura varia de un grupo de problemas a otro, de tal manera que se distinguen cinco estructuras de problemas diferentes.

Un primer grupo está conformado por los problemas *P1A3, P2A1, P2B1, P2D1 (ver anexo)* corresponde a problemas que presentan una estructura con las siguientes características en el enunciado verbal:

1. En las dos ecuaciones que se deducen del texto, los coeficientes de las variables y los términos independientes se encuentran explícitos en el enunciado verbal.
2. Los coeficientes y los términos independientes de cada una de las ecuaciones aparecen con la misma secuencia en el enunciado verbal (a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2).

3. El planteamiento del sistema de ecuaciones que se deduce directamente del enunciado verbal corresponde a la forma canónica de sistemas de ecuaciones lineales 2X2.

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{aligned}\right\}$$

4. Todas las cantidades que aparecen en el enunciado verbal pertenecen al conjunto de números fraccionarios.

El segundo grupo está conformado por los problemas *P1A2, P2A2, P2B2, P2D2 (ver anexo)* y se caracterizan por lo siguiente:

1. En las dos ecuaciones, los coeficientes de las variables y los términos independientes se encuentran explícitos en el enunciado verbal.
2. Los términos independientes y los coeficientes de cada una de las ecuaciones aparecen con la misma secuencia en el enunciado verbal.
3. En las dos ecuaciones el primer término que aparece en el enunciado verbal corresponde al segundo miembro, mientras que los coeficientes del primer miembro aparecen con la misma secuencia en un segundo momento ((c_1, a_1, b_1, c_2, a_2, b_2,).
4. El planteamiento del sistema de ecuaciones que se deduce directamente del enunciado verbal, no corresponde exactamente a la forma canónica de sistemas de ecuaciones lineales 2X2, en cada una de las ecuaciones, el primer miembro está conformado por el término independiente y el segundo miembro por los coeficientes y las variables.

$$\left.\begin{aligned} c_1 = a_1x + b_1y \\ c_2 = a_2x + b_2y \end{aligned}\right\}$$

5. Algunas cantidades que aparecen en el enunciado verbal son números fraccionarios.

Los problemas *P1A4, P3A1, P3C1 (ver anexo),* conforman el tercer grupo y tienen las siguientes características:

1. En la primera ecuación, los coeficientes están implícitos y el término independiente explícito; en la segunda ecuación los coeficientes están explícitos y el término independiente implícito.
2. La secuencia en que se encuentran las cantidades en el texto no corresponde a la forma canónica del sistema, es necesario aplicar algunas reglas que se cumplen en las ecuaciones para plantear el sistema en su forma canónica.

$$\left.\begin{array}{r} ?\,x + ?\,y = c_1 \\ a_2x + b_2y = ? \end{array}\right\}$$

3. Algunas cantidades del enunciado verbal pertenecen al conjunto de números racionales (fraccionarios)

El cuarto grupo está conformado por los siguientes problemas (*P3A2, P3C2, P3D2*).

Estos problemas se caracterizan por lo siguiente:

1. Los coeficientes y términos independientes de las ecuaciones no se encuentran explícitos en el enunciado verbal, es decir, es necesario inferirlos de acuerdo con las relaciones que se puedan establecer entre las cantidades.

2. La secuencia en que se encuentran las cantidades en el texto no corresponde a la forma canónica del sistema, es necesario aplicar algunas reglas que se cumplen en las ecuaciones para plantear el sistema en su forma canónica.

$$\left.\begin{array}{l} ?\,x + ?\,y = ? \\ ?\,x + ?\,y = ? \end{array}\right\}$$

3. Algunas cantidades del enunciado verbal pertenecen al conjunto de números racionales (fraccionarios)

El último grupo corresponde a los problemas *P3A3, P3B3, P3C3, P3D3, y* se caracterizan por:

1. En una de las ecuaciones el termino independiente y uno de los coeficientes se encuentran implícitos; en la otra ecuación tanto el término independiente como los coeficientes, se y encuentran implícitos en el enunciado.
2. La secuencia en que se encuentran las cantidades en el texto no corresponde a la forma canónica del sistema, es necesario aplicar algunas reglas que se cumplen en las ecuaciones para plantear el sistema en su forma canónica.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + ?\,y = ? \\ ?\,x + ?\,y = ? \end{array}\right\}$$

3. Algunas cantidades del enunciado verbal pertenecen al conjunto de números racionales (fraccionarios).

RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

La información se recogió de manera directa con las alumnas, en cuatro sesiones de trabajo, cada una con una duración de dos periodos de clase de 60 minutos.

En la primera sesión, se realizaron actividades de exploración acerca de conocimiento y las habilidades de las estudiantes en la resolución de problemas verbales de sistemas de ecuaciones lineales 2x2. En esta sección se pudo establecer que las alumnas ya habían trabajado en clases la resolución de este tipo de problemas, además a través de la resolución de un problema se exploró el dominio de conocimientos previos como operaciones con enteros y racionales, operaciones con expresiones algebraicas y el manejo de los métodos de eliminación por reducción, igualación y sustitución.

En la segunda sesión, se le pidió a las estudiantes de manera individual que resolvieran tres problemas (*P1A2, P1A3, P1A4*). Estos problemas presentan estructuras diferentes. Se distribuyen de la siguiente manera:

Cuestionario	Estructura	Problemas	Nº de estudiantes a los que se les aplicó
C1	E2	P1A2	31
	E1	P1A3	
	E3	P1A4	

En la tercera sesión de trabajo, las estudiantes resuelven seis problemas, de los cuales (*P2A1, P2B1, P2D1*) tienen la misma estructura, mientras que los problemas (*P2A2, P2B2, P2D2*) comparten la estructura pero difieren de la de los tres primeros.

En esta sección las estudiantes trabajan en forma individual pero se les pide que resuelvan solo dos problemas, de los seis que conforman el total. La distribución es la siguiente:

Cuestionario	Estructura	Problemas	Nº de estudiantes a los que se les aplicó
C1	E1	P2A1	8
	E3	P2A2	
C2	E1	P2B1	8
	E2	P2B2	
C3	E1	P2D1	8
	E3	P2D2	

En la cuarta sesión, se formulan nueve problemas, de los cuales los problemas (*P3A1, P3C1*) tienen la misma estructura algebraica, (*P3A2,P3C2 y P3D2*) tienen otra estructura y (*P3A3, P3B3,P3C3 y P3D3*) comparten una estructura diferente la de los otros dos grupos.

En esta sección las estudiantes trabajan en forma individual pero solo deben resolver tres problemas de los seis que conforman el total. La distribución es la siguiente:

Cuestionario	Estructura	Problemas	Nº de estudiantes a los que se les aplicó
C1	E3	P3A1	10
	E4	P3A2	
	E5	P3A3	
C2	E5	P3B3	4
C2	E3	P3C1	13
	E4	P3C2	
	E5	P3C3	
C4	E4	P3D2	6
	E5	P3D3	

Luego de revisar los procedimientos utilizados por las estudiantes para resolver los problemas, se seleccionaron las estudiantes que cometieron incorrecciones para indagar acerca de las razones que las llevaron a elaborar procedimientos erróneos.

A las estudiantes seleccionadas se les aplicó una entrevista con el propósito de que las justificaran el procedimiento utilizado en la resolución de los problemas. Debido a la diversidad de errores encontrados, no se preparó un cuestionario estándar, las preguntas se formularon de acuerdo con los errores encontrados en cada una de las estudiantes

CAPITULO IV

ANÀLISIS Y DISCUSIÒN DE RESULTADOS

Para adelantar el análisis de resultados, se toma como punto de referencia el método cartesiano, este método se ha constituido en uno de los más utilizados para resolver problemas algebraicos. Fue formulado por Descartes, de donde toma su nombre y consiste en una serie de pasos que se deben seguir para resolver un problema algebraico. Estos pasos son los siguientes:

1. Una lectura analítica del problema que lo reduce a una lista de cantidades y relaciones entre cantidades.
2. La elección de una cantidad que va a ser representada por una letra (o unas cuantas cantidades que se van a representar con letras distintas).
3. Representación de otras cantidades mediante expresiones algebraicas que describen la relación (aritmética) que esas cantidades tiene con otras que ya han sido representadas previamente por una letra o una expresión.

4. Establecimiento de una ecuación (o tantas como letras distintas haya decidido introducir en el segundo paso) igualando dos expresiones, de las que han escrito en el tercer paso, que representan la misma cantidad.
5. Transformación de la ecuación en una forma canónica.
6. Aplicación de la formula o algoritmo de solución a la ecuación de forma canónica.
7. Interpretación del resultado de la ecuación en términos del problema.

Para facilitar el análisis de los resultados encontrados en el proceso de resolución de problemas se tienen en cuenta tres etapas, la traducción, la ejecución de procedimientos y la verificación de resultados. Los pasos definidos en el método cartesiano se agrupan en cada una de las etapas que hemos mencionado.

Los pasos del 1 al 5 los vamos a considerar parte de la etapa de traducción del enunciado verbal al lenguaje algebraico, el paso 6 corresponde a la etapa de ejecución de procedimientos y el paso 7 a la verificación de resultados.

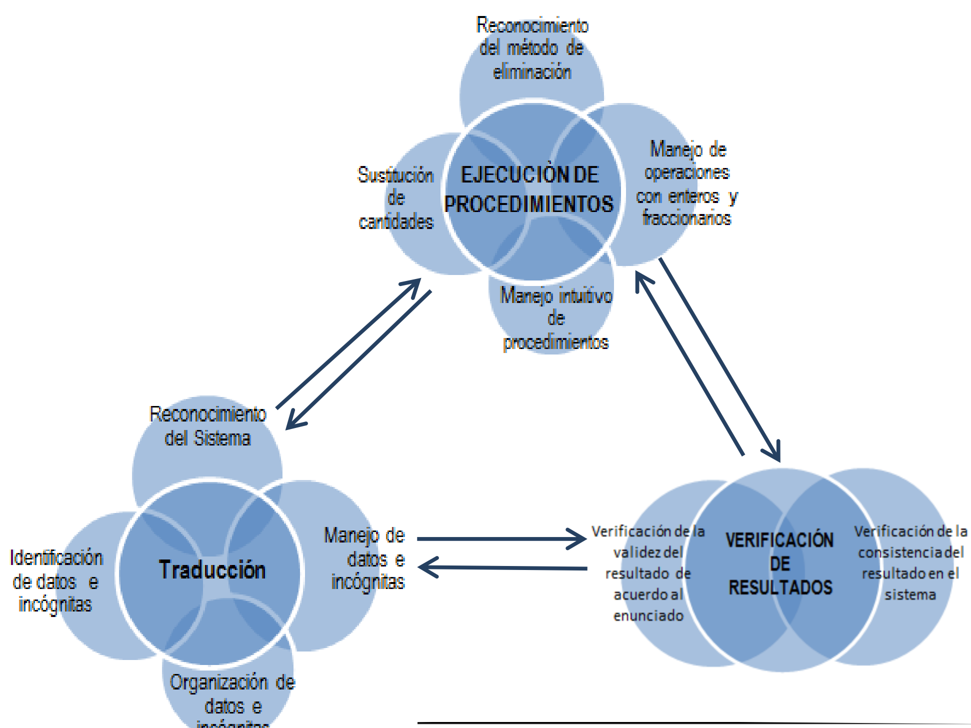
Para hacer el análisis de los resultados encontrados en la resolución de problemas, se toma un poco de distancia del acostumbrado modelo lineal, en el cual, las etapas de traducción, ejecución de procedimientos y verificación de resultados se relacionan de forma secuencial, primero en una dirección y luego en sentido contrario.

El análisis se realiza a través de un esquema que permite la comprensión de las elaboraciones de los estudiantes desde un modelo triangular. Este modelo nos permite identificar las construcciones al interior de cada etapa de la resolución y establecer las relaciones de interdependencia, entres estas etapas.

El modelo está compuesto por tres vértices que representan las tres etapas que deben seguir las estudiantes cuando resuelven los problemas. Las categorías que influyen en las producciones que hacen las estudiantes en cada una de las etapas, son elementos que no se pueden dejar de lado, motivo por el cual, se consideran parte importante de los vértices. Los lados del triángulo están compuestos por las relaciones que se establecen entre las etapas de resolución. Si bien se consideran de doble vía, no se puede asegurar que si la estudiante la establece en un sentido, también lo haga en sentido contrario.

En el presente trabajo, el análisis se realiza a través de la interacción de las categorías que se encuentran presentes en cada etapa del proceso resolución y de las relaciones que se establecen entre dichas etapas.

A continuación se presenta el modelo triangular, descrito anteriormente:



Además de la forma triangular, el modelo responde a una estructura dinámica cerrada, es decir finaliza en la misma etapa donde inicia. En el caso que nos ocupa, el proceso de resolución inicia en la traducción del enunciado verbal al sistema de ecuaciones lineales 2x2, luego pasa a la de ejecución de procedimientos que permitan resolver el sistema y en tercer lugar se verifican las respuestas encontradas en el aspecto numérico y en relación con el enunciado verbal. En caso de la verificación con respecto al aspecto numérico se trata de establecer si las respuestas encontradas son consistentes con el sistema planteado. La verificación de las respuestas en el enunciado busca determinar la coherencia y validez de las respuestas a la luz del enunciado.

En la medida en que la estudiante, logre establecer la validez y la consistencia de las respuestas en el enunciado verbal, es posible considerar que se ha alcanzado un buen nivel de comprensión del proceso de resolución de problemas y del concepto mismo de sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

Un primer análisis de los resultados se realiza a partir de las producciones de las estudiantes en cada una de las etapas de resolución de los problemas formulados.

Producciones de las estudiantes en la traducción del enunciado verbal al lenguaje algebraico

En el intento de expresar el enunciado verbal del problema en términos algebraicos, las estudiantes elaboran textos en los cuales se pueden constatar una serie incorreciones que de acuerdo con sus características, podemos organizar en cuatro categorías: la identificación, el manejo y la organización de datos e incógnitas; y el reconocimiento de la estructura del sistema de ecuaciones.

Las construcciones de las estudiantes consideradas como inapropiadas cuando traducen un enunciado verbal a lenguaje algebraico, no se pueden enmarcar de manera exclusiva en una de estas categorías, con frecuencia, estas producciones surgen de la convergencia entre varias de ellas. Para facilitar el análisis de las formas como las estudiantes proceden, se han agrupado las incorrecciones de acuerdo con las características más relevantes.

A continuación se describen las producciones de las estudiantes agrupadas en las categorías que se han definido.

En la identificación de datos, se agrupan construcciones en las cuales se definen como datos del problema, información que cumple el papel de designar ciertas características de las variables, pero que en ningún momento hacen referencia a cantidades e incógnitas. Un ejemplo de esta situación se presenta en la traducción que hace la estudiante E22 del problema P2D2 y la explicación que hace de su traducción.

Problema: P2D2

A un grupo de señoritas les ofrecen una fiesta o un crucero por el caribe para celebrar sus 15 años, algunas escogen la fiesta y otras escogen el crucero. En el primer semestre de 2013, 20 niñas cumplen los 15 años, $\frac{1}{3}$ *de las que les gusta la fiesta y* $\frac{3}{5}$ *de las que le gusta el crucero.*

A algunas de las jovencitas les gustaría que se oficiara una misa el día de su cumpleaños, $\frac{1}{4}$ *de las que les gusta la fiesta y* $\frac{1}{5}$ *de las que les gusta el crucero, a 10 niñas les gustaría que se oficiara una misa de acción de gracias por su cumpleaños ¿Cuántas niñas prefieren la fiesta? ¿Cuántas niñas prefieren el crucero?*

Traducción realizada por la estudiantes

E22	
$\frac{1}{3}x + \frac{3}{5}y = 15$ $\frac{1}{4}x + \frac{1}{5} = 10$	I: ¿Por qué, en la primera ecuación escribes 15 en el segundo miembro?
	E22: Porque en el enunciado dice que las niñas tienen 15 años.
	I: ¿Por qué, en la segunda ecuación ningún termino tiene la variable y?
	E22: Se me olvidó va en $\frac{1}{5}$

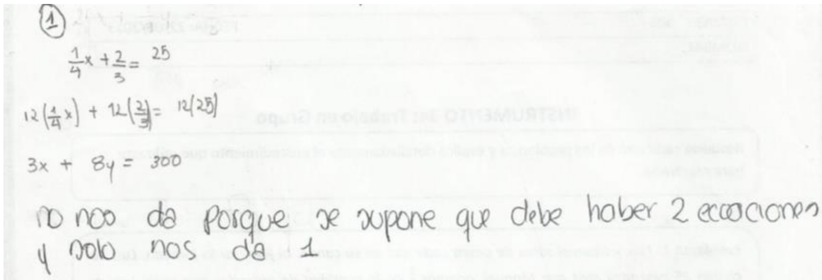
De igual manera se tienen en cuenta producciones en las que se omiten datos que no aparecen explícitos en el enunciado, pero que se pueden deducir de las relaciones que se establecen en el enunciado. Veamos la traducción que al respecto hace la estudiante E25 del Problema P3A1.

Problema P3A1

Luís y Manuel salen de pesca cada uno en su canoa, al finalizar la jornada, Luis ha cogido 25 pescados más que Manuel, además $\frac{1}{4}$ *de la cantidad de pescados que cogió Luís, es igual a* $\frac{2}{3}$ *de la cantidad de pescados que cogió Manuel. ¿Qué cantidad de pescados cogió Luís? ¿Qué cantidad de pescados cogió Manuel?*

Traducción realizada por la estudiante

E25



$$\frac{1}{4}x + \frac{2}{3} = 25$$

$$12\left(\frac{1}{4}x\right) + 12\left(\frac{2}{3}\right) = 12(25)$$

$$3x + 8y = 300$$

no nos da porque se supone que debe haber 2 ecuaciones y solo nos da 1

I: ¿Por qué planteaste una sola ecuación?

E25: *porque como hay tres términos solo se puede plantear una ecuación?*

I: ¿Por qué dices que con tres términos solo puedes plantear una sola ecuación?

E25: *porque un término va en equis, otro va en y, y el tercero va después del igual*

I: ¿Cómo sabes que $\frac{1}{4}$ es el coeficiente de x , que $\frac{1}{3}$ es el coeficiente de y, y que el segundo miembro es igual a 25 ?

E25: *porque $\frac{1}{4}$ son los pescados que cogió Luís, $\frac{2}{3}$ los que cogió Manuel, y 25 el número de pescados demás que cogió Luis?*

En cuanto al manejo de datos e incógnitas, se tienen en cuenta aspectos como la omisión de las variables en el sistema de ecuaciones y la forma inadecuada como las definen. En este sentido, se encontró que algunas estudiantes omiten las variables en las dos ecuaciones, de tal manera que el primer miembro de cada una de las ecuaciones queda reducido a sumas o restas de datos (cantidades fraccionarias o enteras) que aparecen explícitos en el enunciado del problema, mientras que el segundo está conformado por otro dato del enunciado verbal. Un ejemplo de esta situación se presenta en la traducción que hace la estudiante E21 del problema P1A2

Problema : P1A2

Para transportar a los estudiantes, algunos fueron llevados en colectivo y otros en bus escalera. 27 de los estudiantes presentaron mareos durante el viaje, $\frac{3}{5}$ de los que iban en el colectivo y $\frac{3}{4}$ de los que iban en el bus escalera. A demás 10 estudiantes viajaron en sillas unipersonales, $\frac{2}{5}$ de los que viajaron en colectivo y $\frac{1}{5}$ de los que viajaron en la escalera. ¿Cuántos estudiantes viajaron en el colectivo? ¿Cuántos viajaron en el bus escalera?

Traducción realizada por la estudiantes	
E21 $\frac{3}{5} + \frac{3}{4} = 27$ $\frac{2}{5} + \frac{1}{6} = 10$	I: ¿Por qué, en ninguna de las ecuaciones aparecen las variables x e y? E21: es que se me olvidó, pero se sabe que allí están. I: ¿Por qué dices que allí están?

	E22: porque en $\frac{3}{5}$ va x y en $\frac{3}{4}$ va Y, también en $\frac{2}{5}$va x y en $\frac{1}{6}$ va Y.

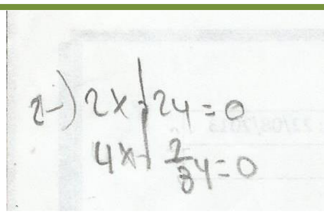
Otras estudiantes omiten las variables de forma parcial, es decir, en una ecuación tienen en cuenta las dos variables, mientras que en la otra ecuación no tienen en cuenta ninguna.

Un número considerable de estudiantes, cometen incorrecciones que podemos ubicar en la categoría de manejo intuitivo de datos e incógnitas. En los trabajos revisados, se pudo evidenciar que para establecer la relación existente entre datos e incógnitas del problema, las estudiantes asumen criterios muy superficiales como el orden en que se encuentran las cantidades en el enunciado; el empleo del cero; o el conjunto numérico al cual pertenecen. La traducción que hace del problema la estudiante E23 del problema P3A2 ilustra la forma inadecuada de introducir el cero de manera arbitraria.

Problema P3A2

Hace 2 años el tío de Martha tenía el doble de la edad de Marta. Dentro de 4 años, Martha tendrá $\frac{2}{3}$ de la edad de su tío. ¿Cuántos años tiene Martha en la actualidad? ¿Cuántos años tiene el tío de Martha actualmente?

Traducción realizada por la estudiantes	
E23	I: ¿Por qué en las dos ecuaciones el segundo miembro es igual a cero? E23: *porque no hay más números en el problema*



2-) $2x + 24 = 0$
$4x + \frac{2}{3}y = 0$

I: ¿Por qué dices que no hay más números en el problema?

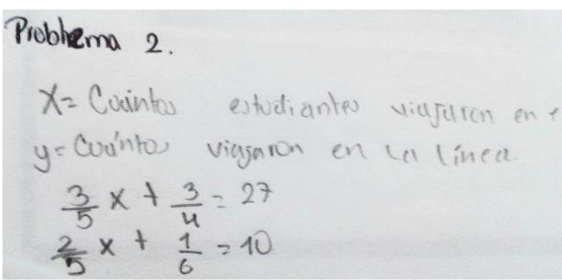
E23: *porque los únicos números que aparecen en el problema son 2,4 y $\frac{2}{3}$*

I: ¿Cuándo no hay más números se escribe cero en el segundo miembro?

E23*: Creo que si ¿entonces qué se pone?*

Un ejemplo de la utilización inadecuada del orden en que aparecen las cantidades en el enunciado del problema se presenta en la traducción que hace la estudiante E3 del problema P1A2 (citado con anterioridad)

Traducción realizada por la estudiantes



Problema 2.
X= Cuántos estudiantes viajaron en e
y= Cuántos viajaron en la línea.
$\frac{3}{5}x + \frac{3}{4} = 27$
$\frac{2}{5}x + \frac{1}{6} = 10$

I: ¿Por qué en ninguna de las ecuaciones hay un término que tenga la variable y?

E3: se me olvido, pero en el segundo término siempre va la variable y

I: ¿Por qué dices que en el segundo término siempre va la variable y?

E3: Porque se ponen en orden alfabético.

Cuando acuden al orden en que se encuentran los datos y las incógnitas en el texto como criterio relacional, en la primera ecuación, utilizan el primer dato que aparece en el enunciado como coeficiente de X, el segundo como coeficiente de Y, y el tercero como término independiente. De forma análoga, proceden con el cuarto, quinto y sexto término del enunciado, para utilizarlos como coeficientes de X e Y, y termino independiente en la segunda ecuación, sin importar si existe una relación entre los datos utilizados como coeficientes y las incógnitas.

Se observa un manejo intuitivo cuando considera el conjunto numérico al cual pertenecen los datos para establecer la relación con las incógnitas en el sistema de ecuaciones. De esta manera, en cada una de las ecuaciones, utilizan los datos que pertenecen al conjunto de números enteros como coeficientes, mientras que los fraccionarios son empleados como términos independientes.

En los problemas donde aparecen explícitos solo cuatro datos en el enunciado, algunas estudiantes, toman dos datos como coeficientes de X *e Y* en la primera ecuación y los otro dos como coeficientes de las mismas variables en la segunda. Ante la ausencia de un dato que no se pueda emplear como termino independiente, de manera intuitiva utilizan el cero en ambas ecuaciones (obsérvese la traducción del problema P3A2, realizada por la estudiante E23).

Una última agrupación, se establece de acuerdo con el reconocimiento de la estructura del sistema de ecuaciones. En este sentido, se encontró que algunas estudiantes construyeron un sistema conformado por una sola ecuación. En otros casos, definen un sistema compuesto por dos ecuaciones en el cual, en una de las ecuaciones, el primer miembro está conformado por una fracción que tiene como numerador la suma de la variable x con un dato del problema, mientras que el denominador es la suma de la variable y con otro dato del problema. De forma análoga definen el primer miembro en la segunda ecuación, pero en lugar de sumar, resta los términos, en ambas ecuaciones, el segundo miembro es un dato del problema.

Otra producción, que se puede considerar como inapropiada en el reconocimiento de la estructura del sistema de ecuaciones, consiste en igualar la variable X en la primera ecuación a la suma o resta de datos que aparecen explícitos en el enunciado, y proceder de la misma manera con la variable Y en la segunda ecuación. La traducción que hace la estudiante E19 del problema P1A2 (citado con anterioridad) es un ejemplo de esta situación.

Traducción realizada por la estudiantes

(2) $X = \frac{3}{5} + \frac{3}{4} = 27$

$y = \frac{2}{5} + \frac{1}{6} = 10$

I: ¿Por qué igualaste a x a unos datos en una ecuación a y Y, a otros datos en la otra ecuación?

E19: Porque x son los que viajaron en el colectivo y Y son los que viajaron en el bus escalera

I:¿Cómo sabes que x es igual a $\frac{3}{5} + \frac{3}{4} = 27$ y que Y es igual a $\frac{2}{5} + \frac{1}{6} = 10$?

E19: Porque los tres primeros números corresponden los que viajaron en colectivo, que se representan con x y los tres últimos números corresponden a los que viajaron en la línea que se representa con y.

I:¿En el sistema de ecuaciones que estableciste, planteas que $\frac{3}{5}+\frac{3}{4}=27\ y\ que\ Y\ es\ igual\ a\ \frac{2}{5}+\frac{1}{6}=10$, esas operaciones son correctas?

E19: um, lo que pasa es que, todavía no se ha resuelto, allí solo se está escribiendo la ecuación después es que se resuelve

---

Las incorrecciones presentadas por las estudiantes en la identificación de datos e incógnitas corresponden a lo planteado por Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inba(1987), citados por Rico (1995) en donde atribuyen estos errores a discrepancias entre los datos y el tratamiento que el alumno le da a los mismos, además aseguran que se pueden producir porque se añaden datos extraños; se olvida algún dato necesario para la solución; se contesta a algo que no es necesario; se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado; se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta; o bien, se hace una lectura incorrecta del enunciado.

En el proceso de traducción realizado por algunas estudiantes se evidencian incorrecciones que se pueden explicar a partir del catálogo de errores propuesto por Cerdán (2008), en donde se identifica tres categorías para considerar las producciones erróneas de las estudiantes: el uso de las letras, la construcción de expresiones aritméticas o algebraicas y el error de igualdad.

Con referencia a las categorías planteadas por Cerdán (2008), los errores más recurrentes de las estudiantes, se presentan en la construcción de expresiones algebraicas y en el error de igualdad. Las incorrecciones en la construcción de expresiones algebraicas están fuertemente ligadas a errores de operación, debido a que algunas operaciones planteadas en el sistema son diferentes a las que corresponden. El error en la igualdad es bastante frecuente, las estudiantes construyen igualdades entre expresiones que no son equivalentes.

El marco teórico descrito por Socas (1997) citado por Ruano, Socas, Paralea (2008) en el que define los obstáculos, la ausencia de sentido y las actitudes afectivas y emocionales, como ejes para analizar los orígenes de los errores, permite situar algunas de las producciones de las estudiantes en estas categorías, es así como en algunos sistemas formulados, se puede establecer errores por falta de sentido, en especial aquellos que tienen su origen en la aritmética pues la comprensión de la generalización de las relaciones y los procesos requiere su asimilación en el contexto aritmético. Otras incorrecciones catalogadas en la categoría de falta de sentido se presentan en situaciones donde la forma de proceder de las estudiantes está marcada por las características propias del lenguaje algebraico en especial en el sentido que le dan al signo igual y la sustitución formal.

La forma de ver el signo igual, es un aspecto que aparece frecuentemente en las incorrecciones de las estudiantes en el proceso de traducción, esta situación se explica desde los planteamientos de Kieran, Filloy, Yague, (1989),en donde hacen referencia a la idea extendida entre los estudiantes que inician el estudio del algebra de ver al signo igual la indicación de hacer algo y no como un “símbolo de la equivalencia entre los lados izquierdo y derecho de una ecuación”.

Producciones de las estudiantes en la ejecución de procedimientos

Las producciones que realizan las estudiantes al abordar la etapa de ejecución de procedimientos, se agrupan en cuatro categorías: el reconocimiento y aplicación del método de eliminación, el manejo de operaciones con enteros y fraccionarios, la manipulación intuitiva de operaciones y la sustitución de cantidades.

El reconocimiento y aplicación del método de eliminación agrupa procedimientos en los cuales se puede establecer la manera como las estudiantes identifican los métodos de eliminación y aplican los pasos para resolver el sistema de ecuaciones a partir del método seleccionado.

En el momento de seleccionar un método de eliminación, la mayoría de las estudiantes deciden utilizar el método de reducción, un número muy reducido aplica el método de igualación y ninguna de las estudiantes resuelve el sistema por sustitución. En los procedimientos que las estudiantes elaboran cuando ejecutan el método de reducción, se observa que cuando las ecuaciones tienen coeficientes fraccionarios, multiplican toda la ecuación por el mcm de los denominadores con el propósito de que todos los coeficientes sean números enteros, algunas de las estudiantes confunden este paso, con el paso propio y esencial del método de reducción, que consiste en tratar de que una de las variables tenga como coeficientes sus opuestos aditivos, para lo cual, de ser necesario, se multiplica cada una de las ecuaciones por una cantidad que permita cumplir con la condición de que al sumar las ecuaciones, una de las variables se pueda anular.

Otra elaboración que con frecuencia realizan las estudiantes cuando utilizan el método de reducción, consiste en que cuando multiplican una ecuación por una determinada cantidad, lo hacen de forma parcial, es decir, no multiplican por todos los miembros de la ecuación, generalmente omiten multiplicar por el término independiente, o solo multiplican por el coeficiente de la variable que pretenden cancelar.

En el caso de la aplicación del método de igualación, algunas estudiantes despejan la variable x, en las dos ecuaciones, en se momento, en lugar igualar las expresiones equivalentes, abandonan la resolución del problema.

En algunas construcciones se encontraron situaciones en las cuales se puede evidenciar un manejo intuitivo de los procedimientos. En este sentido, se encontró que en ocasiones, las estudiantes introducen términos o datos en el procedimiento que no resultan de la ejecución de operaciones que se viene adelantando; cancelan variables sin atender a las reglas de las operaciones del conjunto numérico correspondiente; y toman el denominador de un término como numerador, sin que medie una operación que justifique este resultado.

El tratamiento que le dan al signo menos, al desconocerlo o al introducirlo arbitrariamente; las incorrecciones al multiplicar números enteros y fraccionarios; y la aplicación inapropiada de operaciones (por ejemplo, sacarle mitad arbitrariamente a un número entero), constituyen las producciones de las estudiantes que por sus características se analizan desde la categoría manejo de operaciones con enteros y fraccionarios.

Por último, observamos ejecuciones en las cuales, las estudiantes, en el momento de reemplazar el valor que han encontrado de una variable, proceden a utilizar dicho valor para multiplicarlo por la misma variable. En otros casos, utilizan el valor encontrado de una variable, para reemplazarlo de manera arbitraria en la otra variable.

Los errores encontrados en la ejecución de procedimientos se pueden interpretar a partir de diferentes investigaciones. Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar(1987), citado por Rico (1995), al clasificar los errores cometidos por los estudiantes denominan errores técnicos a aquellos que se producen al hacer cálculos, al tomar datos de una tabla, en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos. De otra parte, Esteley – Villarreal (1990, 1992, 1996), citado por Engler, Gregorini, Muller, Vranken, Hecklein, (2004), hacen una categorización de errores, entre los cuales se destacan los errores al operar con números reales en cálculos, planteo y resolución de ecuaciones, y empleo incorrecto de propiedades y definiciones (de números o funciones), que se presentan generalmente en ejecución de procedimientos.

Pochulu, M. D. (2005) al considerar que algunos estudiantes encuentran redundante la presencia del signo menos, cuando sustituyen números negativos en una expresión en la que aparecen restas, y en otros casos, conciben que cualquier letra representa un número negativo, y que si simboliza un número negativo, se le antepone un signo menos, describe incorreciones que coinciden con las producciones de la población objeto de estudio.

Algunos de los procedimientos de las estudiantes, se pueden explicar a partir del marco teórico de Socas (1997) citado por Ruano et al (2008), en donde en una de las categorías, establece que las actitudes afectivas y emocionales, generan errores por excesiva confianza, bloqueos, olvidos, entre otros.

Producciones de los estudiantes en la verificación de resultados

Las producciones de las estudiantes en la verificación de resultados son bastante escasas, en su mayoría se limitan a revisar el procedimiento para tratar de establecer errores en las operaciones. La revisión del procedimiento en la mayoría de los casos, está supeditada a la confianza que les genere los resultados encontrados, es así como generalmente si los resultados encontrados son fracciones, números negativos o números de más de cuatro cifras, aumenta el nivel desconfianza en la respuesta encontrada.

De acuerdo con los plateamientos de Kieran (1989) la forma de ver el signo igual como señal de hacer algo y no como un simbolo de la equivalencia entre los lados izquierdo y derecho, dificulta que las estudiantes utilicen este principio para verificar la consistencia de las respuestas en contradas en el sistema de ecuaciones.

Ademàs no establecen relaciòn entre las condiciones y atributos de las incognitas presentes en el enunciados con las respuestas numericas encontradas, por tal motivo, les es indiferente que una cantidad que en la cotianidad se exprese en un conjuto numerico determinado, estè definida en las respuestas en un conjunto numèrico diferente.

Análisis de producciones de las estudiantes en todo el proceso de resolución de problemas de sistemas verbales de ecuaciones lineales 2x2.

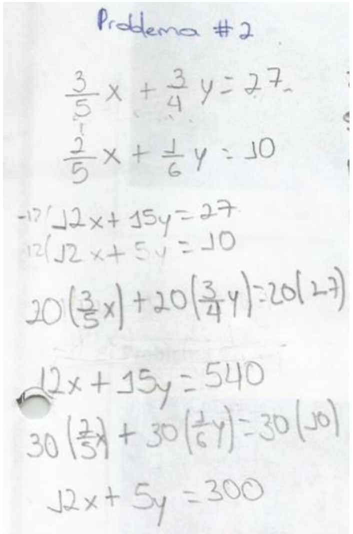
Para hacer un análisis global de las producciones de las estudiantes cuando resuelven problemas verbales de sistemas de ecuaciones 2X2, se han seleccionado tres casos bastantes representativos, de las formas como los estudiantes proceden en cada una de las etapas de la resolución y la relación de interdependencia que establecen entre estas etapas.

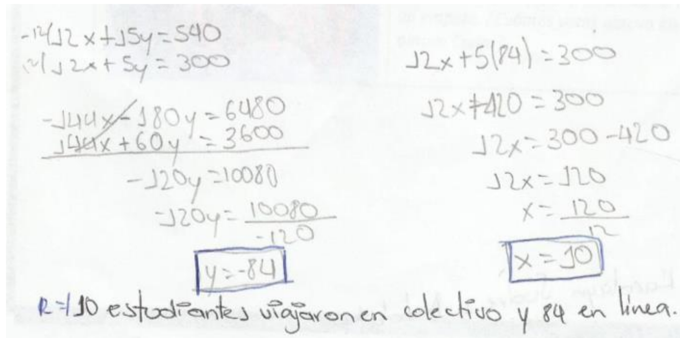
A continuación se presentan tres casos bastante representativos de las producciones de las estudiantes, Los cuales se analizan de acuerdo con del esquema triangular propuesto:

Estudiante E33

Problema: P1A2

Para transportar a los estudiantes, algunos fueron llevados en colectivo y otros en bus escalera. 27 de los estudiantes presentaron mareos durante el viaje, $\frac{3}{5}$ de los que iban en el colectivo y $\frac{3}{4}$ de los que iban en el bus escalera. A demás 10 estudiantes viajaron en sillas unipersonales, $\frac{2}{5}$ de los que viajaron en colectivo y $\frac{1}{5}$ de los que viajaron en la escalera. ¿Cuántos estudiantes viajaron en el colectivo? ¿Cuántos viajaron en el bus escalera?





La estudiante hace un planteamiento correcto el sistema de ecuaciones lineales 2x2. Es decir en el sistema se puede evidenciar que identifica los datos y las variables, establece las relaciones existentes entre estos, y establece en cada ecuación la relación de igualdad entre los términos que ha definido.

En la etapa de ejecución de procedimientos, inicia multiplicando cada una de las ecuaciones por el mcm de los denominadores, de esta manera logra conseguir correctamente que los coeficientes del sistema sean todos números enteros. Tan pronto logra que todos los coeficientes de la ecuación sean enteros, procede a resolver el sistema utilizando el método de reducción, para lo cual, multiplica la primera ecuación por el opuesto aditivo del coeficiente de X y la segunda por el coeficiente de X.

Si bien este paso, no se puede considerar como una incorrección, resulta innecesario debido a que como los coeficientes de x son iguales, bastaba con multiplicar cualquiera de las dos ecuaciones por (-1) y luego cancelar la variable x.

Al multiplicar las ecuaciones por el opuesto aditivo de x en la primera y por el coeficiente de x en la segunda, solo tiene en cuenta la ley de los signos para los términos del primer miembro en la primera ecuación, en el segundo miembro, no aplica esta ley, motivo por el cual, el término le queda positivo cuando de acuerdo con la ley de los signos debería ser negativo. La segunda ecuación la multiplica correctamente por el coeficiente de x.

Como resultado de la suma de las dos ecuaciones, obtiene una ecuación con una sola incógnita (en función de la variable y) debido a que cancela la variable x, suma los términos de Y, y hace lo propio con los términos independientes. Como al multiplicar el termino independiente ecuación por el opuesto aditivo del coeficiente de x en la primera, la estudiante no tuvo en cuenta la ley de los signos, el resultado obtenido de la suma de los términos es inapropiado para resolver el sistema, por esta razón consigue un valor equivocado para y.

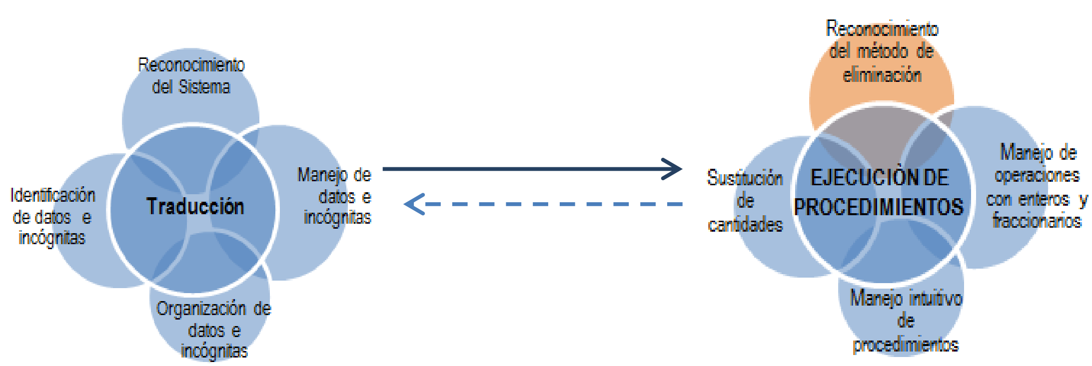
Reemplaza el valor de y en la segunda ecuación, pero dado la incorrección de dicho valor, consigue también un valor equivocado para x, no obstante de haber realizado correctamente las operaciones que se le presentan en el proceso.

Las respuestas encontradas no fueron verificadas, es decir no se reemplazó estos valores en las ecuaciones para establecer su consistencia y mucho menos estableció la validez de dichas respuestas de acuerdo al enunciado.

En las producciones de la estudiante podemos evidenciar un manejo mecánico del procedimiento, de tal manera que para conseguir que los coeficientes de x fueran opuestos aditivos, era suficiente con multiplicar cualquiera de las dos ecuaciones por (-1), pero dado de que la estudiante en repetidas ocasiones ha multiplicado la primera ecuación por el coeficiente que tiene la variable en la segunda ecuación y la segunda ecuación por el coeficiente que tiene la variable en la primera ecuación (con signos cambiados de ser necesario), aplica el procedimiento que acostumbra a realizar sin percatarse de la sencillez y rapidez de multiplicar cualquiera de las dos ecuaciones por (-1).

Como se puede observar, la incorrección de la estudiante se presentó en la ejecución de procedimientos, en donde multiplica parcialmente la ecuación, desconociendo que la igualdad en una ecuación se mantiene al multiplicar todos los términos de ambos miembros por la misma cantidad. Este procedimiento sugiere una actuación mecánica, en donde se centra la atención en la necesidad de que los coeficientes de una de las dos variables sean opuestos aditivos para poder cancelar y no es consciente de que este cometido, está supeditado a la aplicación de las reglas de equivalencias de ecuaciones.

A continuación ilustramos el modelo desde el cual se explica la forma como la estudiante aborda cada una de las etapas y las relaciones que establece entre estas para resolver el problema.



De acuerdo con el proceso utilizado por la estudiante para resolver el problema, se puede deducir que la estudiante procede a partir de un modelo lineal en el cual, se reconoce dos etapas, la traducción y la ejecución de procedimientos. Desconoce la verificación del resultado, la estudiante se limita a enunciar las cantidades encontradas en función de las variables establecidas con anterioridad.

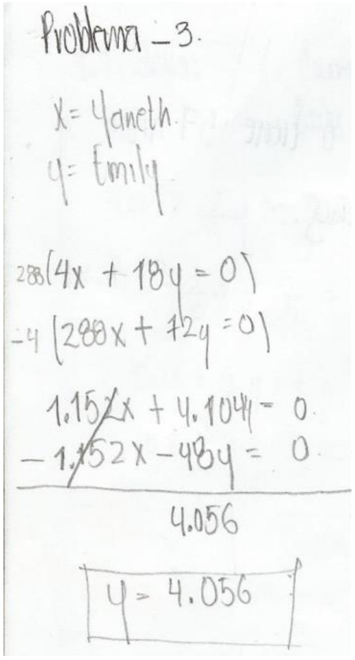
En cuanto a las relaciones que subyacen del modelo utilizado por la estudiante, se observa una relación unidireccional que parte de la etapa de traducción y finaliza en la etapa de ejecución de procedimientos, no establece relación en sentido contrario.

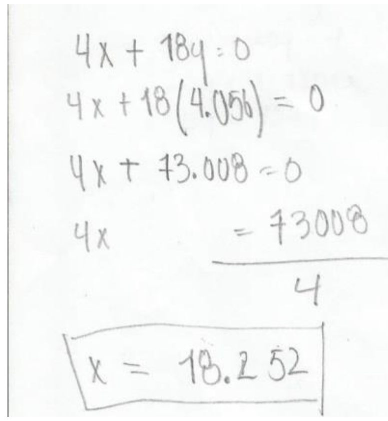
En la ejecución de procedimientos la estudiante comete el error de multiplicar en forma parcial la primera ecuación por el coeficiente de equis en la segunda ecuación, esta incorrección coincide con los errores técnicos indicador por Mosvshovitz, et al (1987)y por los que Engler, Gregorini, Muller, Vranken, Hecklein (2004) denominan errores al operar con números reales en cálculos, planteo y resolución de ecuaciones.

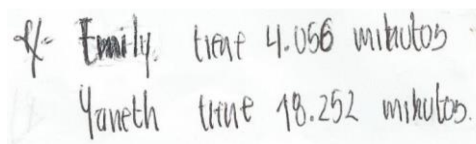
Estudiante E5

Problema: P3C3

Yaneth tiene en su celular, 4 veces la cantidad de minutos de los que tiene Emily. Si Yaneth le regala 18 minutos a Emily, ambas tendrían la misma cantidad de minutos. ¿Cuantos minutos tiene Yaneth? ¿Cuantos minutos tiene Emily?







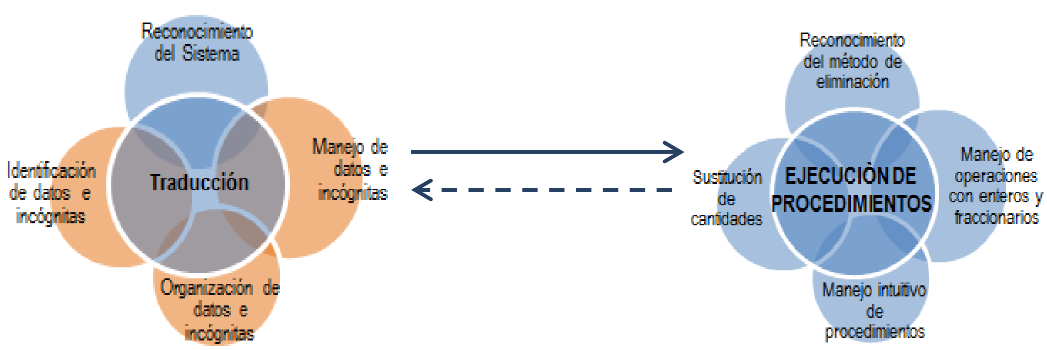
En la etapa de traducción, la estudiante plantea un sistema de ecuaciones en el cual se observan producciones que se enmarcan en las categorías de identificación, manejo y organización de datos e incógnitas. En la primera ecuación utiliza los datos numéricos que aparecen en el enunciado como coeficientes de *x* e *y* respectivamente y en la segunda, los coeficientes están conformados por los resultados de multiplicar a 72 por 4 y a 18 por 4. Tanto en la primera ecuación como la segunda, el segundo miembro es cero.

Algunos datos que aparecen en el enunciado están presentes en el sistema, mientras que otros se deducen de manera intuitiva, además, la organización de los datos no responde al establecimiento de relaciones entre los datos y las variables.

Para resolver el sistema utiliza el método de reducción, por lo cual multiplica la primera ecuación por el coeficiente de equis en la segunda y la segunda por el opuesto aditivo del coeficiente de equis en la primera ecuación, sumas las ecuaciones y consigue un valor para ***y,*** luego reemplaza el valor de y en la primera ecuación y consigue el valor de X.

El procedimiento y las operaciones realizadas durante la ejecución son correctas pero dado que el sistema está mal planteado, las respuestas encontradas son incorrectas. La omisión de la verificación de los valores encontrados para ***x*** e ***y*** , no le permite percatarse de la incorrección de las respuestas.

A continuación ilustramos el modelo desde el cual explicamos la forma como la estudiante, resuelve el problema



Al igual que en el caso anterior, la estudiante utiliza un modelo lineal, unidireccional, en el cual se parte de la traducción del enunciado verbal al lenguaje algebraico como punto de partida. La ejecución de procedimiento que corresponde a la solución del sistema, es el punto de llegada. La etapa de verificación de resultados no es tenida en cuenta en el proceso de resolución del problema.

Obsérvese que la estudiante plantea de manera incorrecta el sistema pero ejecuta el procedimiento de forma adecuada, es decir opera con ecuaciones mal formuladas. En la traducción comete incorrecciones que tienen que ver con la identificación, el manejo y la organización de datos e incógnitas

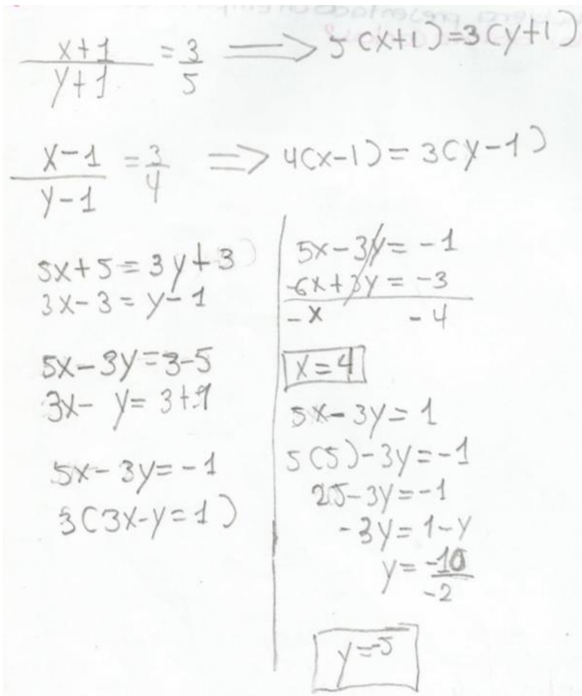
En cuanto a las relaciones que subyacen del modelo utilizado para analizar el proceso de resolución de la estudiante, se observa una relación unidireccional que parte de la etapa de traducción y finaliza en la etapa de ejecución de procedimientos.

La forma como las estudiantes proceden al utilizar los datos en la primera ecuación de acuerdo al orden en que aparecen en el enunciado, corresponden a lo planteado por Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar(1987), citados por Rico (1995) en donde atribuyen estos errores a discrepancias entre los datos y el tratamiento que el alumno le da a los mismos, además aseguran que se pueden producir porque se añaden datos extraños; se olvida algún dato necesario para la solución; se contesta a algo que no es necesario; se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado; se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta; o bien, se hace una lectura incorrecta del enunciado. Esteley – Villarreal (1990, 1992, 1996) denomina "*Deducción incorrecta de información o inventar datos a partir de la dada",* a las producciones como las realizadas por las estudiantes cuando establecen los coeficientes de la segunda ecuación.

Estudiante E31

Problema: P1A2

(El mismo problema resuelto por el estudiante E33)


$$\frac{x+1}{y+1}=\frac{3}{5} \Longrightarrow 5(x+1)=3(y+1)$$
$$\frac{x-1}{y-1}=\frac{3}{4} \Longrightarrow 4(x-1)=3(y-1)$$
$$5x+5=3y+3$$
$$3x-3=y-1$$
$$5x-3y=3-5$$
$$3x-y=3+1$$
$$5x-3y=-1$$
$$3(3x-y=1)$$
$$5x-3y=-1$$
$$-6x+3y=-3$$
$$-x \quad -4$$
$$\boxed{x=4}$$
$$5x-3y=1$$
$$5(5)-3y=-1$$
$$25-3y=-1$$
$$-3y=1-y$$
$$y=\frac{-10}{-2}$$
$$\boxed{y=5}$$

El sistema planteado por la estudiante, presenta una construcción bastante particular; en la primera ecuación, el primer miembro corresponde a una fracción en la cual el numerador es la suma de la variable x con uno, en el segundo miembro se suma la variable y con uno; para establecer la igualdad se iguala el primer miembro a un dato que aparece explícito en el problema.

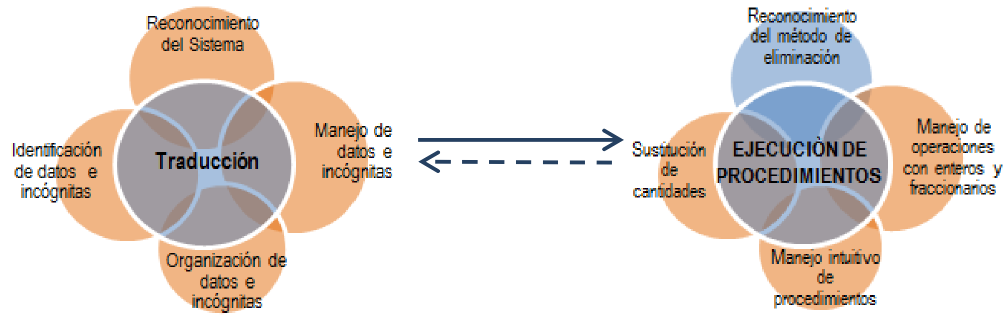
La segunda ecuación está construida de forma parecida a la primera, pero en el primer miembro en lugar de sumar se resta, la expresión del primer miembro se iguala a otro dato que aparece explícito en el enunciado, En la traducción que la estudiante elabora, se observa como hace un manejo intuitivo de los datos y las incógnitas; la organización de datos e incógnitas en el sistema obedece a relaciones que no se deducen del enunciado; identifica algunos datos pero desconoce otros y además incluye datos que no se puede considerar que se encuentran implícitos en el problema.

Para darle solución al sistema planteado, multiplica en cruz el numerador del primer miembro con el denominador del segundo y el denominador del primer miembro con el numerador del segundo, este proceso lo realiza en las dos ecuaciones. En la primera ecuación realiza correctamente las multiplicaciones, pero en la segunda comete algunos errores.

Con el propósito de que los coeficientes de la variable Y sean sus opuestos aditivos para cancelar dicha variable, multiplica la segunda ecuación por 3, cometiendo un error al multiplicar por el coeficiente de x, luego les cambia el signo a todos los miembros de la segunda ecuación.

Al sumar las ecuaciones, cancela la variable y y consigue un valor para x, que debido a los errores cometidos en el planteamiento del problema y en la multiplicación de algunas cantidades, es incorrecto. Luego utiliza la primera ecuación para reemplazar el valor de x, pero de manera inexplicable, utiliza un valor diferente al encontrado, como es de esperarse encuentra en valor equivocado para la variable y .

Al igual que la mayoría de las estudiantes no verifico el resultado encontrado, razón por la cual no se percata de las incorrecciones delas respuestas y mucho menos de los errores cometidos en la traducción ni en la ejecución de procedimientos.



El modelo desde el cual se trata de explicar la forma de proceder de la estudiante E31, es lineal y unidireccional, aborda la etapa de la traducción, donde comete errores en la identificación, manejo, organización de datos e incógnitas y en el reconocimiento del sistema. En la ejecución de procedimientos, las incorrecciones presentadas corresponden las categorías de manejo de operaciones con enteros y fraccionarios, manejo intuitivo de procedimientos y sustitución de cantidades.

Al igual que la mayoría de las estudiantes no verifican las respuestas encontradas.

En la producción de la estudiante se puede constatar la relación que establece entre el sistema planteado y el procedimiento utilizado para resolver el sistema, no se observa que establezca relación entre el procedimiento utilizado y el sistema, es decir solo establece relación entre la traducción y la ejecución de procedimiento.

El proceso de traducción que realiza la estudiante, presenta algunas incorrecciones que se pueden explicar de acuerdo a los desarrollos de Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar(1987), citados por Rico (1995), en especial, cuando atribuyen estos errores a discrepancias entre los datos y el tratamiento que el alumno le da a los mismos y asignan a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado.

Las operaciones incorrectas planteadas en el primer miembro de cada una de las ecuaciones, atienden a las indicaciones de Cerdán (2008), que establece que los errores más recurrentes se presentan en la construcción de expresiones algebraicas debido a que algunas operaciones planteadas en el sistema son diferentes a las que corresponden en el enunciado verbal.

En la ejecución de procedimiento la estudiante presenta una serie de errores que se pueden analizar de acuerdo con lo establecido por diferentes investigadores como Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar(1987), citado por Rico (1995), que consideran aquellos errores que se producen al hacer cálculos, al tomar datos de una tabla, en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos, como errores técnicos. Engler, Gregorini, Muller, Vranken,y Hecklein (2004), los categorizan como errores al operar con números reales en cálculos, planteo y resolución de ecuaciones, y empleo incorrecto de propiedades y definiciones (de números o funciones).

Al igual que los dos casos anteriores, la estudiante E31, no hace verificación de las respuestas. Esta etapa, fundamental para validar las respuestas encontradas y en especial para hacer control de las etapas de traducción y de ejecución, además de establecer las relaciones de estas con las respuestas, es ignorada con frecuencia por las estudiantes.

CONCLUSIONES

Del análisis de las producciones de las estudiantes se obtienen las siguientes conclusiones:

Las estudiantes presentan dificultades en la traducción del enunciado verbal del problema al lenguaje algebraico. Estas dificultades se deducen de incorrecciones que los estudiantes cometen cuando tratan de plantear el sistema de ecuaciones. En la etapa de traducción las mayores dificultades de las estudiantes se presentan con relación a los datos y las incógnitas en cuanto a la identificación, el manejo y la organización de estos en el sistema de ecuaciones. De igual manera se les dificulta reconocer la estructura del sistema de ecuaciones.

La dificultad para identificar los datos y las incógnitas se deduce de incorrecciones como la utilización de información que designa características de las incógnitas como cantidades en el sistema de ecuaciones; y de la omisión de datos que no aparecen en el enunciado pero que se pueden deducir del mismo.

Errores originados por el manejo intuitivo que las estudiantes dan a los datos e incógnitas, en los cuales se observa la utilización de criterios superficiales como el orden en que se encuentran en el enunciado, la utilización arbitraria del cero y la determinación de coeficientes y términos independientes de acuerdo al conjunto numérico al que pertenecen, permiten reconocer la dificultad para establecer relaciones entre datos e incógnitas a partir del razonamiento matemático.

Las estudiantes presentan dificultad para reconocer la estructura del sistema de ecuaciones lineales 2x2 en problemas verbales. Incorrecciones como el planteamiento de una sola ecuación y el planteamiento de sistemas en donde en cada ecuación se define en función de una sola variable dan cuenta de esta dificultad.

En la ejecución de procedimientos para resolver el sistema de ecuaciones, las estudiantes presentan dificultad para aplicar el método de eliminación, para operar en diferentes conjuntos numéricos y para utilizar el razonamiento matemático en la deducción de términos en el procedimiento. Estas dificultades se determinan a partir de errores como multiplicación parcial de una ecuación por un término, cálculos incorrectos en el conjunto de los números entero y fraccionarios, introducción improcedente de términos, cancelación incorrecta de variables, y sustituciones equivocadas.

La marcada omisión de las estudiantes para verificar los resultados encontrados, es muestra de la dificultad existente para validar el procedimiento y la formulación del problema a la luz de las respuestas. Esta dificultad no se establece a través de construcciones de las estudiantes que se pueden considerar errores, está determinada por la inadvertencia de la importancia de verificar los resultados y por asumirla simplemente como la revisión del proceso realizado.

Los errores encontrados en la traducción del problema, coinciden con los planteados por Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inba(1987), citados por Rico (1995); Cerdán (2008); y Kieran,C y Filloy, Yague, E (1989).

Hallazgos conseguidos por Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar(1987), citado por Rico (1995); Esteley – Villarreal (1990, 1992, 1996), citado por Engler,A. Gregorini, M, Muller, D. Vranken,S y Hecklein,H. (2004), y Pochulu, M. D. (2005) coinciden con los encontrados en el presente trabajo en la etapa de ejecución de procedimientos.

SUGERENCIAS

Para facilitar el aprendizaje de la resolución de problemas verbales de sistemas de ecuaciones 2x2 se propone que se tengan en cuenta la formulación de problemas y las actividades de enseñanza que le presentan a los estudiantes.

En cuanto a la formulación de problemas es muy importante presentar problemas en los cuales se les preste especial atención a las estructuras algebraicas y al contexto de la situación. La diversidad en las estructuras de los problemas permite que se reconozca diferentes formas de traducir un enunciado e interioricen que en cada situación hay una manera particular de establecer relaciones entre datos y las incógnitas. De igual la utilización de diferentes contextos en especial, los de la cotidianidad, permiten despertar mayor interés en la resolución de problemas y encontrar utilidad al tema tratado.

El diseño y la implementación de actividades de aula que permitan hacer una buena revisión de conocimientos previos y de actividades de traducción del lenguaje verbal al algebraico, y del algebraico al verbal, pueden ser una valiosa ayuda para resolver los problemas. La revisión de contenidos que ya deben dominar los estudiantes como operaciones con enteros y racionales (fracciones en especial) y las reglas que se cumplen en una ecuación para la permanencia de la igualdad, permiten hacer ajustes que sin lugar a dudas favorecen la resolución de problemas.

Un aspecto que reviste gran importancia en el momento de implementar procesos de enseñanza tiene que ver con la necesidad de que el punto de llegada de la resolución de un problema pase de ser el encontrar resultados numéricos a dimensionar la verificación de las respuestas como un elemento fundamental que le da sentido al procedimiento y formulación del problema, permite el control y la autorregulación de las producciones de las estudiantes y garantiza la comprensión del proceso realizado.

BIBLIOGRAFÍA

ASTOLFI, J. (1998). El tratamiento didáctico de los obstáculos epistemológicos. Conferencia dictada en el marco del primer congreso de enseñanza de la física, celebrado en la universidad de Antioquia en 1998.

BACHELARD, G (1972). *La formación del espíritu científico*. Contribución al psicoanálisis del conocimiento objetivo (siglo XXI: Buenos Aires).

CARONIA, S. ZOPPI, A. M. POLASEK, M. RIVERO, M. OPERUK, R.(2008)“Un análisis desde la didáctica de las matemáticas de algunos errores en el álgebra, Revista premisa, Vol 39 pp 27-35

CARONIA, S. (2009). *Sistemas de ecuaciones, una meta reflexión sobre la práctica profesional.* Revista Premisa, (2009) pp 25-35

CERDÁN, F. (2008). *Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraica: un catálogo de errores*, PNA 4(3), 99-110

CHEVELARD, Y. (1998). *Transposición didáctica, del saber sabio al saber enseñado.* Tercera edición, AIQUE, grupo editor.

CLAUDE, D. (2001). Tendencias actuales en la resolución de problemas. Transcripción de conferencia pronunciada el 15/12/2001 en Bilbao. *Revista sigma 2001, Nº 19 pp 51-63*

DEL PUERTO, S. MINNAARD, C. SEMINARA, S. (2004). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas. *Revista iberoamericana de educación (ISSN:1681-5653)*

DUVAL, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano, registros semióticos y aprendizajes intelectuales. *Universidad del Valle, Instituto de educación y pedagogìa, grupo de educación matemática.*

ENGLER,A., GREGORINI, M. I., MULLER, D., VRANKEN,S Y HECKLEIN,H. (2004), *Los errores en el aprendizaje de matemáticas*. Premisa 6(23) SOAREN. (23-32)

ESCALANTE, J, CUESTA, A. (2012). *Dificultades para comprender el concepto de variable: un estudio con estudiantes universitarios.* Educación matemática, vol 24, abril de 2012, pp 107-132

FILLOY,E., PUING,L. y ROJANO,T.(2008). Estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Revista enseñanza de las ciencias 26(3) pp 327-340.*

FONT, V.(2002). Una organización de los programas de investigación en didáctica de las matemáticas. *Revista EMA. 2002, Vol 7 N° 2 pp 127-170.*

GALAGOVSKI, L., CITTADINI, P (2008). *Enseñanza de las ecuaciones lineales en contexto.* Revista enseñanza de las ciencias 26(3) pp359-374

GARCÈS, E. L. (2009). Influencia del geogebra en la resolución de problemas de ecuaciones lineales 2x2, Universidad Autónoma de Barcelona.

GARCÌA, J. RODRIGUEZ F.M. (2010). *Dificultades que presentan los estudiantes de nivel de bachillerato en torno a los conceptos de algebra elemental.* Universidad Autónoma de Guerrero (pp 248-255) Memoria de la XIII escuela de invierno de matemática educativa.

ICFES (2007). Colombia en PISA 2006, síntesis ejecutiva.

ICFES (2008). Resultados de Colombia en TIMSS 2007

ICFES (2010). Colombia en PISA 2009, síntesis ejecutiva.

KIERAN C. Y FILLOY, YAGUE, E (1989). *El aprendizaje del algebra escolar desde una perspectiva psicológica.* Revista enseñanza de las ciencias 7 (3), 229-240

KIERAN, C. (1994). El aprendizaje y la enseñanza del algebra escolar. *En la página electrónica de una empresa docente: www.uniandes.edu.co (traducción de Vilma Mesa).*

KRULIK, S. y RUDNICK, K. (1980). Problem solving in school mathematics. National council of teachers of mathematics. Year Book. Virginia: Reston

MALISANI, E (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo de pensamiento algebraico. *Revista IRICE N° 13 de 1999.*

MENDOZA, R. P. (2006). *Investigación cualitativa y cuantitativa: Diferencias y limitaciones.* PIURA. PERÛ

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y competencias ciudadanas, pp. 46-94.

MURCIA, N.(2008). Investigación cualitativa. La complementaridad. *Editorial Kinesis 2° ed 2008.*

PANIZZA, M. SADOVSKY, P. SESSA (1995) Los primeros aprendizajes algebraicos. *Comunicación REM. 95-96.*

PEREZ DONOSO, L (1998). Pasaje de registros: ecuaciones. Tesis de magister en enseñanza de las ciencias con *mención en didáctica de las matemáticas. Universidad católica Valparaiso- Chile.* PANIZZA, M. *,* SADOVSKY, P., SESSA (1995).

PEREZ, G. (2001b). *Investigación cualitativa, retos e interrogantes.*t, Madrid, La Muralla

PIFARRÉ, M. y SANUY, J. (2001). *La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la eso1: un ejemplo concreto. Revista* Enseñanza de las ciencias, 2001, 19 (2), 297-308

POCHULU, M. D. (2005): *Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática.* Revista Iberoamericana de Educación, N° 35/4 (ISSN: 1681-5653)

POLYA, G (1989). *Como plantear y resolver problemas*. Editorial trillas, décimo quinta reimpresión.

PUIG, L. (1998). Poner un problema en ecuaciones. Consultado el 3 de junio de 2012 en <http://www.uv.es/puigl/ppe.pdf>.

PUING, L. (2003). *Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de las matemáticas educativas.* Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Valencia.

RODRIGUEZ, M (2011).*La matemática y su relación con la ciencia como recurso pedagógico.* Números, revista de didáctica de la matemática, julio de 2011, vol 77 pp 35-49

RAMIREZ, M. (1997). El uso de la calculadora graficadora y la resolución de problemas algebraicos verbales en el estudio de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

REY, M. HERNANDES, C. PORCINITO, S (2008) *Sistemas de ecuaciones lineales: secuencia didáctica para su enseñanza.* Acta latinoamericana de matemática educativa Vol 21, pp 128-135

RICO, L. (1995). *Errores en el aprendizaje de las Matemáticas*. En Kilpatrick, J. Rico, L.y Gómez, P. Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica. Méjico.

RICO, L. CASTRO, E. CASTRO,E. CORIAT, M. MARIN, M. PUING, L. SIERRA,M. SOCAS, M. (1997) La educación matemática en la enseñanza secundaria. Cap. V Editorial Universidad de Barcelona

RIVERA, M.I. GARCIA, J. NAVARRO, C. (2010*) Una propuesta instruccional para coadyuvar la introducción de ecuaciones lineales: el caso de la traducción del lenguaje común al algebraico y viceversa.* Memoria de la XIII Escuela de invierno de matemática educativa

RUANO, R. M., SOCAS, M. M. Y PALAREA, M. M. (2008). *Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra*. *PNA 2*(2), 61-74.

SAN JOSÉ, V., VALENZUELA, T., FORTES, M.C. y SOLAZ-PORTOLES,J.J. (2007). Dificultades algebraicas en la resolución de problemas por transferencias. *Revista electrónica de enseñanza de las ciencias,6(3), 538-561,* en http://www.saum.uvigo.es/reec

SAN JOSÉ, V, SOLAZ-PORTOLES,J.J, VALENZUELA, T(2009). *Transferencia inter-dominios en resolución de problemas: una propuesta instruccional basada en el* *proceso de «traducción algebraica*. Revista enseñanza de las ciencias, 2009, 27(2), 169–184 169

SANTOS, M. (2008) La resolución de problemas: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica.

SEGURA, DE H. S.(2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista Latino Americana de Investigación en Matemática Educativa, marzo, año/vol 7. N°oo1. Pp 49-78*

SIMON, H. A. (1978). Modelos de pensamiento, Vol I, Yale university.

SOCAS, M. (1997).Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria

VARELA, M. P. (2002). *La resolución de problemas en la enseñanza de las ciencias, aspectos didácticos y cognitivos*. Tesis doctoral, universidad complutense de Madrid.

ANEXO 1

PROBLEMAS APLICADOS PARA LA RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

Para celebrar el día del amor y la amistad, los estudiantes de 9° del INSTITUTO AFROAMERICANO MARTIN LUTHER KING, desean organizar una convivencia al Municipio de Certegui. Conforman una comisión para que organice todo lo concerniente al evento.

A la comisión se le han presentado algunas situaciones, y para resolverlas necesita de tu ayuda.

Problema : P1A1	
	*Para elegir el (la) coordinador de la actividad han postulado a Carlos y a Kissy, como reconocimiento a su compañerismo. Kissy obtuvo 5 veces la cantidad de votos que obtuvo Carlos. Si 14 personas de las que votaron por Kissy, Hubieran votado por Carlos, se hubiera presentado un empate. ¿Cuántos votos obtuvo Kissy? ¿Cuántos votos obtuvo Carlos?*

Problema : P1A2

<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Para transportar a los estudiantes, algunos fueron llevados en colectivo y otros en bus escalera. 27 de los estudiantes presentaron mareos durante el viaje, $\frac{3}{5}$ de los que iban en el colectivo y $\frac{3}{4}$ de los que iban en el bus escalera. A demás 10 estudiantes viajaron en sillas unipersonales, $\frac{2}{5}$ de los que viajaron en colectivo y $\frac{1}{5}$ de los que viajaron en la escalera. ¿Cuántos estudiantes viajaron en el colectivo? ¿Cuántos viajaron en el bus escalera?</td></tr>
</table>

Problema: P1A3


Para el almuerzo han programado comer pescado frito y patacones. Para preparar los patacones, compran 12 plátanos y 5 bananos, que cuestan 6660 pesos, posteriormente regresan al mercado y compran 3 plátanos y 3 bananos por 1980 pesos. ¿Cuánto cuesta un plátano?¿Cuánto cuesta un banano?

<table>
<tr><td colspan="2">Problema: P1A4</td></tr>
<tr><td></td><td>Para el refrigerio, los organizadores llevan jugo Hit y sándwiches. Luego de entregar a cada uno de los asistentes un jugo Hit y un sándwich, quedaron 20 jugos hit. Uno de los organizadores afirma que $\frac{2}{7}$ de la cantidad de sándwiches que compraron, es igual a $\frac{1}{6}$ de la cantidad de jugos Hit comprados. ¿Qué cantidad de jugo Hit compraron? ¿Qué cantidad de sándwiches compraron?</td></tr>
</table>

Problema: P2A1

En una cafetería tienen 2 ofertas.

Oferta 1: 6 empanadas y 4 vasos de gaseosa por 5400 pesos.

Oferta 2: 5 empanadas y 2 vasos de gaseosa, por 3900 pesos

¿Cuánto cuesta una empanada? ¿Cuánto cuesta un vaso de gaseosa?

Problema: P2A2

Un grupo de amigos van a una heladería. Algunos piden helados de chocolate y otros de vainilla, 17 de ellos piden que sus helados sean acompañados de galletas, por tal razón, $\frac{2}{3}$ de los helados de chocolate y $\frac{3}{5}$ de los de vainilla son servidos con galletas. Al terminar de comer, $\frac{1}{4}$ de las personas que comieron helados de chocolates y $\frac{1}{3}$ de los que comieron helado de vainilla pidieron un vaso de agua, el mesero entonces, sirve 8 vasos de agua. ¿Cuantas personas comieron helados de vainilla?

Problema P2 B1:

En un puesto de venta de frutas, un cliente compra 6 limones y 4 lulos por $ 2900. Otro cliente compra 3 limones y 3 lulos por$1800 pesos. ¿Cuánto cuesta un limón? ¿Cuánto cuesta un lulo?

Problema P2B2

*Los programas favoritos de un grupo de jóvenes Son: **El Desafío "África el origen"** y **La Selección.** 15 de ellos ven su programa favorito todos los días, $\frac{3}{4}$ de los que les gusta el **Desafío** y $\frac{2}{5}$ de los que les gusta **La Selección.** Algunos jóvenes afirman que solo ven su programa favorito una vez han cumplido con sus tareas, de los cuales $\frac{1}{4}$ tienen preferencia por el **Desafío** y $\frac{1}{5}$ prefieren **La Selección;** 6 de los jóvenes ven sus programas favoritos después de cumplir con sus tareas.*

¿Cuántos jóvenes prefieren el Desafío? ¿Cuántos prefieren la Selección?

Problema: P2D1

En una tienda venden 12 confites de anís y 10 de chocolate por $2400, además venden 15 confites de anís y 5 de chocolate por $2100.

¿Cuánto cuesta un confite de anís? ¿Cuánto cuesta un confite de chocolate?

Problema: P2D2

A un grupo de señoritas les ofrecen una fiesta o un crucero por el caribe para celebrar sus 15 años, algunas escogen la fiesta y otras escogen el crucero. En el primer semestre de 2013, 20 niñas cumplen los 15 años, $\frac{1}{3}$ *de las que les gusta la fiesta y* $\frac{3}{5}$ *de las que le gusta el crucero.*

A algunas de las jovencitas les gustaría que se oficiara una misa el día de su cumpleaños, $\frac{1}{4}$ *de las que les gusta la fiesta y* $\frac{1}{5}$ *de las que les gusta el crucero, a 10 niñas les gustaría que se oficiara una misa de acción de gracias por su cumpleaños ¿Cuántas niñas prefieren la fiesta? ¿Cuántas niñas prefieren el crucero?*

Problema P3A1

Luís y Manuel salen de pesca cada uno en su canoa, al finalizar la jornada, Luis ha cogido 25 pescados más que Manuel, además $\frac{1}{4}$ *de la cantidad de pescados que cogió Luís, es igual a* $\frac{2}{3}$ *de la cantidad de pescados que cogió Manuel. ¿Qué cantidad de pescados cogió Luís? ¿Qué cantidad de pescados cogió Manuel?*

Problema: P3A2

Hace 2 años el tío de Martha tenía el doble de la edad de Marta. Dentro de 4 años, Martha tendrá $\frac{2}{3}$ *de la edad de su tío. ¿Cuántos años tiene Martha en la actualidad? ¿Cuántos años tiene el tío de Martha actualmente?*

Problema: P3A3

Jorge y Camilo, juegan a encestar con un balón de baloncesto. Jorge ha encestado 5 veces la cantidad de veces que ha encestado Camilo. Si en 6 oportunidades Jorge hubiera errado y Camilo hubiera encestado, ambos hubieran encestado igual número de veces. ¿Cuántas veces encestó Jorge? ¿Cuántas veces encestó Camilo?

Problema: P3B3

Martha y Eliza, están ahorrando cada una en una alcancía monedas de \$500. Eliza ha ahorrado 3 veces la cantidad de monedas que ha ahorrado Martha. Si Eliza le regala 24 monedas de las que ha ahorrado a Martha, ambas tendrían la misma cantidad de monedas. ¿Qué cantidad de monedas ha ahorrado Martha? ¿Qué cantidad de monedas ha ahorrado Eliza?

Problema: P3C1

Carlos y Carmen hacen pandeyucas en una cafetería, luego de una jornada de trabajo, Carlos ha preparado 15 pandeyucas más que Carmen. Además $\frac{2}{5}$ *de la cantidad de pandeyucas que preparó Carlo, es igual a* $\frac{3}{5}$ *de la cantidad de pandeyucas. que preparó Carmen ¿Qué cantidad de pandeyucas preparo Carlos? ¿Qué cantidad de pandeyucas preparó Carmen?*

Problema: P3C2

Hace 3 años el tío de Laura tenía el cinco veces la edad de Laura. Dentro de 6 años, Laura tendrá $\frac{1}{2}$ *de la edad de su tío. ¿Cuántos años tiene Laura en la actualidad? ¿Cuántos años tiene el tío de Laura actualmente?*

Problema: P3C3

Yaneth tiene en su celular, 4 veces la cantidad de minutos de los que tiene Emily. Si Yaneth le regala 18 minutos a Emily, ambas tendrían la misma cantidad de minutos. ¿Cuantos minutos tiene Yaneth? ¿Cuantos minutos tiene Emily?

Problema: P3D2

Hace 8 años el tío de Luís tenía el doble de la edad de Luís. Dentro de 2 años, Luís tendrá $\frac{2}{3}$ *de la edad de su tío. ¿Cuántos años tiene Luís en la actualidad? ¿Cuántos años tiene el tío Luís?*

Problema: P3D3

Andrea tiene 5 veces la cantidad de pares de Zapatos que tiene su hermana. Si Andrea le regala 4 pares de zapatos a su hermana, ambas tendrían igual cantidad. ¿Cuantos pares de zapatos tiene Andrea? ¿Cuantos pares de zapatos tiene la hermana de Andrea?

ANEXO 2

ERRORES DE LAS ESTUDIANTES EN CADA ENA DE LAS ETAPAS DE LOS DIFERENTES PROBLEMAS

SISTEMATIZACIÒN - INSTRUMENTO 1

Etapa	Error	P1A2	P1A3	P1A3
Traducción	Reconocimiento del sistema			
	Identificación de datos e incógnitas	1,3,4,31, 7		
	Organización de datos e incógnitas	2, 16,21,26,31		1,7,14,22, 1,14,22
	Manejo de datos e incógnita	1,21,26	4,5,15	1,7,14,22
Ejecución	Reconocimiento del sistema de eliminación			
	Sustitución de cantidades	4,6,10		
	Manejo intuitivo de procedimientos	4,34, 4,5, 4,15,18	33	

	Manejo de operaciones con enteros y fraccionarios	8,10,14,15,21,26,28,31,33, 5,10,15		
Verificación	Verificación de la consistencia del resultado de acuerdo al sistema			
	Verificación de la validez del resultado de acuerdo al sistema			

SISTEMATIZACIÒN - INSTRUMENTO 2

Etapa	Error	P2A1,P2B1, P2D1	P2A2,P2B2, P2D2
Traducción	Reconocimiento del sistema		
	Identificación de datos e incógnitas		4,6
	Organización de datos e incógnitas		6
	Manejo de datos e incógnita		6
Ejecución	Reconocimiento del sistema de eliminación		
	Sustitución de cantidades	8	6
	Manejo intuitivo de procedimientos	15,17, 10,12,13, 12,16,22,27	15,32
	Manejo de operaciones con enteros y fraccionarios	10,19, 1,6,10,22,32	22,27, 22,6
Verificación	Verificación de la consistencia del resultado de acuerdo al sistema		
	Verificación de la validez del resultado de acuerdo al sistema	12	

SISTEMATIZACIÒN - INSTRUMENTO 3

Etapa	Error	P3A1,P3C1,	P3A2,P3C2, P3D2	P3A3,P3B3,P3C3, P3D3
Traducción	Reconocimiento del sistema	11,30,25,34	25,34,4,22	25,34
	Identificación de datos e incógnitas	2,3,9,13	25,34,9,13,6,12	25,34,9,13
	Organización de datos e incógnitas	11,30,2,3	18	18
	Manejo de datos e incógnita			

Ejecución	Reconocimiento del sistema de eliminación			
	Sustitución de cantidades			
	Manejo intuitivo de procedimientos	6,12, 9,13,		
	Manejo de operaciones con enteros y fraccionarios	9,13		
Verificación	Verificación de la consistencia del resultado de acuerdo al sistema			
	Verificación de la validez del resultado de acuerdo al sistema			6,12, 9,13,

ANEXO 3

PORCENTAJE DE ESTUDIANTES CON INCORRECCIONES EN CADA UNA DE LAS ETAPAS DE LOS DIFERENTES PROBLEMAS

SISTEMATIZACIÒN - INSTRUMENTO 1

	P1A2		P1A3		P1A4	
	Nº Est	% Est	Nº Est	% Est	Nº Est	% Est
Presentación del taller	31	91,17	31	91,17	31	91,17
Planteamiento correcto del sistema de ecuaciones	26	83,87	18	58,06	2	6,45
Planteamiento incorrecto del sistema de ecuaciones	**5**	**16,12**	**2**	**6,45**	**5**	**16,12**
No realizan el planteamiento del sistema de ecuaciones	0	0	11	35,48	24	77,41
Ejecución correcta de procedimiento de eliminación	10	32,25	8	25,8	2	6.45
Ejecución incorrecta de procedimiento de eliminación	**19**	**61,29**	**7**	**22,58**	**1**	**3,22**
No ejecución del procedimiento de eliminación	2	6,45	16	51,61	28	90,32
Verificación correcta de respuestas	0	0	0	0	0	0
Omisión de verificación de respuestas	**14**	**45,16**	**10**	**32,25**	**2**	**6,45**
No llega a etapa de verificación	17	54,83	21	67,75	29	93,54

SISTEMATIZACIÒN - INSTRUMENTO 2

	P2A1,P2B1, P2D1		P2A2,P2B2, P2D2	
	Nº Est	% Est	Nº Est	% Est
Presentación del taller	30	88,28	30	88,28
Planteamiento correcto del sistema de ecuaciones	23	76,66	16	53,33
Planteamiento incorrecto del sistema de ecuaciones	**2**	**6,66**	**5**	**16,66**
No realización de planteamiento del sistema de ecuaciones	5	16,66	9	30
Ejecución correcta de procedimiento de eliminación	10	33,33	9	30
Ejecución incorrecta de procedimiento de eliminación	**15**	**50**	**8**	**26,66**

No ejecución del procedimiento de eliminación	5	16,66	13	43,33
Verificación correcta de respuestas	0	0	0	0
Omisión de verificación de respuestas	**25**	**83,33**	**17**	**56,66**
No llega a etapa de verificación	5	16,66	13	43,33

SITEMATIZACIÒN - INSTRUMENTO 3

	P3A1,P3C1,		**P3A2,P3C2, P3D2**		**P3A3,P3B3,P3C3, P3D3**	
	Nº Est	% Est	Nº Est	% Est	Nº Est	% Est
Presentación del taller	33	97,05	33	97,05	33	97,05
Planteamiento correcto del sistema de ecuaciones	0	0	1	3,03	1	3,03
Planteamiento incorrecto del sistema de ecuaciones	**29**	**87,87**	**26**	**78,78**	**18**	**54,54**
No realización de planteamiento del sistema de ecuaciones	4	12,12	6	18,18	14	42,42
Ejecución correcta de procedimiento de eliminación	9	27,27	11	33,33	4	12,12
Ejecución incorrecta de procedimiento de eliminación	**9**	**27,27**	**7**	**21,21**	**9**	**27,27**
No ejecución del procedimiento de eliminación	15	45,45	15	45,45	20	60,6
Verificación correcta de respuestas	0	0	0	0	0	0
Omisión de verificación de respuesta	**18**	**54,54**	**18**	**54,54**	**13**	**39,39**
No llega a etapa de verificación	15	45,45	15	45,45	20	60,6