INFLUENCIA DE LOS PROBLEMAS RETO EN LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE ÁREA EN ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO

WILMER YAIR CORTES AMAYA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
MANIZALES – CALDAS.
2.016

INFLUENCIA DE LOS PROBLEMAS RETO EN LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE ÁREA EN ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO

WILMER YAIR CORTES AMAYA

Proyecto presentado como requisito para optar al título de Magister en Enseñanza de las Ciencias

Directora:
Magíster YANETH MILENA AGUDELO MARÍN

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
MANIZALES – CALDAS.
2.016

AGRADECIMIENTOS

A Dios por darme la sabiduría y por proveerme los recursos para cumplir este sueño.

A mi esposa, Rocio y a mi hijo Juan José por su comprensión, ánimo y apoyo durante el proceso de elaboración de ésta tesis.

A mi mamá, Rosalba, que siempre estuvo presta a colaborarme en lo que necesitara.

A la Magister Yaneth Milena Agudelo Marín que como directora de ésta tesis, me oriento, me apoyo, me aconsejo y me animo en los momento oportunos y transcendentales de esta investigación.

A los profesores de la maestría que me brindaron su apoyo y guiaron mi desarrollo profesional por el camino correcto.

A la Institución Educativa Municipal Ciudad Eben Ezer del municipio de Fusagasugá y en especial a los estudiantes de grado séptimo, que tuvieron toda la disposición de colabórame en este trabajo.

SÍNTESIS

Este proyecto analiza el papel que tienen los problemas reto o no rutinarios para favorecer la construcción del concepto general de la magnitud área en los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Municipal Ciudad Eben Ezer del municipio de Fusagasugá Cundinamarca. Para lograr la construcción robusta de este concepto se diseñó y se aplicó una unidad didáctica con actividades conformadas por problemas no rutinarios que favorecieran la motivación, la participación, el compromiso, la habilidad, el ingenio, el conocimiento y las destrezas matemáticas de los estudiantes. La unidad didáctica se desarrolló con un curso de 38 estudiantes con edades que oscilan entre los 12 y 14 años. De esta población se tomó un 30% al azar para realizar el análisis, con el fin de obtener las conclusiones y recomendaciones de esta investigación.

PALABRAS CLAVES

Resolución de problemas, problemas reto, pensamiento métrico, área.

ABSTRACT

This project examines the role that challenge or non-routine problems to promote the construction of the general concept of the magnitude area in the seventh grade students of School Municipal City Eben Ezer the municipality of Fusagasuga Cundinamarca. To achieve the robust construction of this concept was designed and a teaching unit made up of non-routine problems favoring motivation activities, participation, commitment, skill, ingenuity, knowledge and math skills of students applied. The teaching unit was developed with a course of 38 students with ages ranging between 12 and 14 years. Of this population took a 20% random for analysis, in order to obtain the conclusions and recommendations of this research.

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE GRAFICOS

ÍNDICE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

Cuando el docente de matemáticas ingresa al aula de clase para ejercer su labor como educador se encuentra con un grupo de estudiantes, los cuales algunos se sienten desmotivados y por ende con cierto rechazo hacia la matemática, otros tantos presentan dificultades al enfrentar diversos procesos, problemas o contenidos de dicha ciencia , quizás esta dificultad de los estudiantes se ha venido desarrollando con cierta influencia de la metodología tradicional que se ha implementado en las clases de matemáticas durante varios años; el proceso de enseñanza y el proceso de aprendizaje de las matemáticas, tienen un paradigma difícil de erradicar y es el de querer abarcar todos los contenidos matemáticos programados en cualquier curso o grado escolar por extensos que sean, es decir, el docente se ve en la obligación de alcanzar la mayor cantidad de temas durante un curso, por lo cual muchos temas tienen que versen de manera muy rápida, lo que causa que no sean comprendidos por los estudiantes, convirtiéndose esto en un obstáculo en la enseñanza de esta ciencia.

Ahora bien, en ocasiones este afán del profesor por alcanzar los temas propuestos en un curso hace que las matemáticas se conviertan en una adquisición y almacenamiento de conocimientos y esto conlleve a una enseñanza conductista en donde los procedimientos mecánicos sin algún significado para el estudiante forman parte importante de la enseñanza de las matemáticas.

> Es una realidad que la imagen social hacia las matemáticas, los matemáticos y los docentes de matemáticas es muy negativa. Para un amplio sector de la sociedad las matemáticas son difíciles, inútiles y poco comprensibles. A diario los estudiantes toman decisiones sobre su vida futura teniendo como un referente su fobia hacia las matemáticas. De otro lado, la imagen de quienes se

> desempeñan como matemáticos o como docentes, también es negativa, son considerados arrogantes, locos, despistados, desligados del mundo real, inhumanos. Esta imagen negativa ha sido formada, en la mayoría de las veces, en la experiencia educativa de cada uno de los sujetos; mencionando como causas la poca utilidad que la matemática fuertemente estructurada brinda para su proyecto de vida y la preponderancia de la educación que Freire ha criticado, éstas prácticas contribuyen a que la fobia por las matemática sea uno de esos males resistentes, persistentes y casi históricos. (MEN, 2014, pág. 7)

Por lo anterior se hace relevante que la enseñanza de las ciencias sea enfocada de un modo distinto al tradicional, es decir, una enseñanza en la que los estudiantes le puedan ver un sentido a las matemáticas y adquieran diferentes habilidades que sean utilizables en el medio en que se desenvuelven. Pero para que esto sea posible se debe contar con profesores idóneos que no sólo se preocupen por enseñar datos a los estudiantes sino que se preocupen por generar con estos datos un aprendizaje profundo, es decir un profesor integral, que se inquiete por conocer su disciplina y que se caracterice por su conocimiento pedagógico y didáctico. El conocimiento disciplinar es imprescindible pues si el profesor no conoce lo que va a enseñar es muy difícil que pueda ilustrar a los estudiantes y aún más difícil que los estudiantes aprendan. Este conocimiento disciplinar no se puede desligar del conocimiento pedagógico y didáctico dado que primero hay que saber qué enseñar y luego es necesario detenerse a pensar cómo se va a enseñar. Los docentes de matemáticas deben construir, innovar o rediseñar estrategias de enseñanza que promuevan un pensamiento profundo, donde se aporte al desarrollo del pensamiento crítico y lógico de los estudiantes. Pero debe quedar claro que aunque el docente utilice diferentes estrategias de enseñanza no se puede asegurar el aprendizaje en todos los estudiantes.

La resolución de problemas es una competencia de gran dificultad en los estudiantes de todo nivel, ya que exige un razonamiento que debe ser acompañado de un conocimiento matemático. Las diferentes pruebas a nivel nacional e internacional contienen una gran cantidad de problemas, que requieren que los estudiantes tengan una capacidad para afrontarlos, ya que de esto dependerá en gran parte su desempeño. Es por ello que es de gran importancia crear estrategias que contribuyan a la capacitación y mejoramiento de esta competencia.

Este proyecto aborda la resolución de problemas no rutinarios o problemas reto, (Pérez, 2004), menciona que los problemas reto, son problemas que no son rutinarios, son problemas que hacen pensar a los estudiantes, que requieren ingenio y cuya respectiva solución ayuda al estudiante a mejorar conceptos y a desarrollar competencias matemáticas. Además los problemas retadores no solo prueban el conocimiento o las destrezas matemáticas, sino además la habilidad e ingenio que tiene el estudiante, por tal motivo el fin de este proyecto es mejorar en los estudiantes las habilidades en la competencia de resolución de problemas, al mismo tiempo en que se utilizan para construir el concepto robusto de área, a través de la aplicación de una unidad didáctica.

El área es una temática que se presenta y se utiliza en nuestro diario vivir a veces de forma directa o indirecta, lo cual le da gran importancia y significado para los estudiantes, ya que ellos pueden poner en práctica de forma real este conocimiento lo cual hace que los conceptos se interioricen mas fácilmente, además en las diferentes pruebas nacionales e internacionales el conocimiento métrico está presente, lo cual exige que los estudiantes posean herramientas que les faciliten el abordaje de este pensamiento y en particular del tema de área..

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 JUSTIFICACIÓN

La escuela tradicional ha creado en la mayoría de estudiantes un sentimiento de rechazo hacia las matemáticas.

> Los estudiantes, excepto aquellos con evidente talento para las matemáticas, no parecen estar interesados en lo absoluto. Nuestra conjetura es que esto se debe al enfoque general en el aula tradicional, donde el objetivo, según lo presentado y defendido por el profesor, es que el estudiante desarrolle habilidades en los procedimientos de cálculo, el estudiante no puede aprender estos procedimientos a través de la comprensión, mientras que él o ella es presentado por el profesor con una forma libre de conflictos - imitar y memorizar. Pero la imitación y memorización no dan lugar a construcciones cognitivas y el resultado es que el deseo de los estudiantes de aprender a través del crecimiento se suprime. (Dubinsky, 2002, pág. 97)

Por lo tanto es importante encender de nuevo en el estudiante ese sentimiento natural de querer aprender, no dejando que las matemáticas se conviertan en una adquisición y almacenamiento de conocimientos memorísticos, donde los procedimientos mecánicos sin significado alguno para el estudiante formen parte importante de la enseñanza de las matemáticas. Los algoritmos y los ejemplos memorísticos no construyen significado en los estudiantes, a pesar de que son necesarios, es apenas una etapa inferior del pensamiento matemático. Es importante continuar la construcción de conocimiento hacia niveles más avanzados donde el estudiante tenga la capacidad de razonar, cuestionar, abstraer, unir conocimientos, explorar diferentes caminos para obtener la solución, entre otras.

Por otro lado las diferentes pruebas a nivel nacional e internacional como olimpiadas de matemáticas de diferentes Instituciones, exámenes de admisiones, pruebas SABER, pruebas PISA, entre otras, exigen a los estudiantes no solamente tener conocimiento memorístico y procedimental, sino tener ciertas capacidades matemáticas para afrontar los diferentes puntos que allí se presentan, que en la mayoría de los casos son problemas. Por tal razón es importante innovar y crear nuevas estrategias que contribuyan a un desempeño competente de los estudiantes en el área de las matemáticas, por lo tanto la resolución de problemas se convierte es una estrategia de enseñanza de las matemáticas que adquiere su relevancia en la actualidad, ya que es una manera de aplicar los diferentes conceptos matemáticos, además de desarrollar el pensamiento lógico y crítico en los estudiantes.

No obstante la resolución de problemas no garantiza una afectividad en el proceso de enseñanza de las matemáticas, y muchas veces es por las situaciones planteadas en estos, las cuales no motivan a los estudiantes; por esta razón este trabajo utiliza los problemas reto para el desarrollo del pensamiento métrico. Pérez (2004), menciona que los problemas reto, son problemas que no son rutinarios, son problemas que hacen pensar a los estudiantes, que requieren ingenio y cuya respectiva solución ayuda al estudiante a mejorar conceptos y a desarrollar competencias matemáticas. Además los problemas retadores no solo prueban el conocimiento o las destrezas matemáticas, sino además la habilidad e ingenio que tiene el estudiante. Por otro lado, las pruebas nombradas anteriormente, plantean problemas sobre el pensamiento métrico. En este orden de ideas se presenta otro propósito en la investigación y es que el estudiante mejore la comprensión del concepto de longitud y área.

Por último con el fin de contribuir al desarrollo de la ciencia y tecnología de Colombia la cual está en manos de futuros científicos, ingenieros, investigadores etc., y en las que las matemáticas desempeñan un papel importante, se hace necesario motivar y preparar de la mejor manera a los estudiantes en dicha ciencia.

1.2 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Santos Trigo (2008), menciona que muchos currículos a nivel internacional centra la resolución de problemas como eje organizador de contenidos a pesar de las diferencias entre los sistemas educativos. El reconocimiento de la resolución de problemas en algunos sistemas educativos y curriculares no implica la utilización de iguales métodos, principios o actividades que promuevan el desarrollo del pensamiento matemático. Las investigaciones en este campo pueden abordar diferentes temas relacionados con la resolución de problemas, ya que muchos psicólogos, pedagogos y matemáticos tienen distintos puntos de vista y concepciones, además también se encuentra discrepancias en la utilización del concepto de resolución y de problema.

A nivel internacional se pueden encontrar varios autores con aportes teóricos acerca de la resolución de problemas. Algunos nombrados por Santos Trigo(2008) son:

> Artigue & Houdement (2007) consideran dos perspectivas en la resolución de problemas: La investigación didáctica y la selección curricular. A nivel antropológico estos mismos autores distinguen la relación entre la resolución de problemas y el desarrollo del conocimiento matemático; Hino (2007), autor japonés identifica líneas de investigación sobre el comportamiento de los estudiantes en los procesos de resolver problemas, en aspectos de estructura y contexto de los problemas, y el desarrollo de habilidades atreves de la resolución de problemas; Da Ponte (2007) presenta aspectos de la resolución de problemas que se han desarrollado en Portugal; y muchos otros con interesantes referentes teóricos.(pág. 14)

La resolución de problemas es un tema principal que actualmente abordan los países debido a las diferentes evaluaciones que se les hacen a los estudiantes, donde califican el sistema educativo del país. Entré ellas están las reconocidas pruebas PISA, que han dejado muy mal a la educación Colombiana, y que generan la construcción y cambios por parte del MEN de nuevas estrategias y métodos de evaluación, muchos basados en la resolución de problemas. Los cambios o restructuraciones que se le hacen a la educación debido a las pruebas internacionales, son hechas en diferentes países. Los países con más altas calificaciones, sugieren que se debe centrar en el desarrollo del pensamiento crítico y la resolución de problemas. Estas pruebas nos llevan a reflexionar sobre la necesidad de realizar investigaciones que conlleven a mejorar los procesos de enseñanza, con el fin de que los estudiantes adquieran un aprendizaje profundo y un pensamiento crítico en el área de las matemáticas, a través de la resolución de problemas.

Se realizó una actividad diagnostica en diferentes grados, la cual consistía en reflexionar y contestar una serie de preguntas de manera individual sobre las dificultades que ellos veían en los procesos de enseñanza y aprendizaje del área de matemáticas. Algunas dificultades que mencionaron los estudiantes fueron: La realización de otras actividades mientras el docente explica, falta de compromiso y disciplina de los estudiantes, clases más dinámicas y actividades que motiven aprender, conocimiento de la aplicabilidad de los temas, no hacer la corrección o retroalimentación de las actividades que se dejan, no trabajar conjuntamente algoritmos y procesos repetitivos con problemas , versen enfrentados a un problema y no saber cómo abordarlo, entre otras.

Después de realizar un análisis de las diferentes reflexiones y observando más detenidamente las perspectivas de los estudiantes más sobresalientes en el área de matemáticas, estos estudiantes coincidían en que una de las mayores dificultades que ellos presentaban era resolver un problema, pues ellos comentaban que tenían el conocimiento para desarrollar algoritmos y procesos, pero no se sentían seguros a la hora de abordar un problema. Esta perspectiva que tiene los estudiantes sobresalientes en el área de matemáticas, también la tienen los docentes, pues a través del trabajo en el aula, se observa que una de las grandes dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje es la resolución de problemas; además muchas pruebas que han presentado mis estudiantes a nivel municipal, departamental y nacional y otras pruebas que he tenido la posibilidad de conocer, tienen un gran porcentaje de resolución de problemas, lo que conlleva a que los estudiantes en un alto porcentaje reduzcan su valoración, debido a la poca experiencia y conocimiento para desarrollar problemas.

La resolución de problemas como se mencionó anteriormente, es una competencia muy importante en el contexto actual del campo educativo, es aplicable a diferentes ramas, pensamientos y temas de las matemáticas, como por ejemplo al concepto de área, el cual es un tema significativo para los estudiantes ya que se presenta y se utiliza en diferentes campos del diario vivir.

Zapata Grajales & Cano Velásquez (2007) en el artículo del Encuentro Colombiano de Matemática Educativa "La enseñanza de la magnitud área" dicen:

> "la enseñanza de la magnitud área involucra los variados contextos y situaciones donde ésta tiene gran utilidad práctica básicamente en situaciones de reparto, de recubrimiento, el territorio de un estado, una pared para ser pintada, un prado que hay que cortar, un campo de fútbol, una pantalla de cine, cuerpos para vestir, el área de un bosque para juzgar su evaporación e intercambio de gas, problemas de empaquetamiento y envoltorios, construcción de manualidades (sombreros, cerámicas, teselados…), elaboración de planos y mapas… En este sentido el trabajo en la escuela se debe redimensionar pues el tratamiento que se le debe dar a la magnitud área debe ser a partir de situaciones de aprendizaje donde el estudiante construya el concepto de ésta" (p, 5)

La magnitud área es una temática de gran importancia, ya que está presente en muchos aspectos de nuestra vida y en diferentes contextos. En los diferentes colegios, el plan de estudios plantea la enseñanza de la magnitud área de manera superficial y al final del año lectivo si se alcanza, con lo cual no se le da la importancia que se merece y no se valora lo indispensable que es para los estudiantes, pues es evidente que la magnitud área desempeña un papel preponderante en la vida práctica, como lo menciona el artículo del Encuentro Colombiano de Matemática Educativa "La enseñanza de la magnitud área" descrito anteriormente.

Las valoraciones anteriores permiten establecer la siguiente **pregunta de investigación:**

¿Cómo influye el uso de los problemas reto en la construcción del concepto de área en los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Municipal Ciudad Eben Ezer de Fusagasugá Cundinamarca?

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 OBJETIVO GENERAL

Describir la influencia de los problemas reto en la construcción del concepto de área en los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Municipal Ciudad Eben Ezer de Fusagasugá Cundinamarca.

1.3.2 OBJETIVO ESPECÍFICO

- Describir con detenimiento las dificultades y avances que presentan los estudiantes al enfrentarse a un problema reto.

CAPITULO 2

REFERENTE CONCEPTUAL

2.1 ANTECEDENTES

Los antecedentes que se presentan a continuación son resúmenes de artículos y tesis que contextualizan y aportan a los principales intereses de esta investigación.

- **Arenas M. (2012). Propuesta didáctica para la enseñanza de áreas y perímetros en figuras planas (Tesis de Maestría), Universidad Nacional, Medellín, Colombia.**

  Esta investigación se realizó con estudiantes de grado sexto, con el uso de herramientas TIC (moodle) y material concreto (tangram), con el que podían interactuar y construir conceptos como perímetro y área en figuras planas. Dicha propuesta se fundamentó a partir de la teoría sociocultural de Vigotsky y la teoría sicológica de David Ausubel, desde las cuales se pretende la construcción del aprendizaje significativo en los estudiantes, teniendo en cuenta el contexto donde se aplica la práctica pedagógica y la estructura cognitiva existente en los estudiantes y los procesos que se desarrollan para modificarla en estructura más complejas.

  El investigador observaba como los estudiantes de grado sexto tenían dificultad en entender y apropiarse de los conceptos de perímetro y área, por ese motivo planteó la estrategia didáctica de utilizar herramientas tecnológicas (moodle) y materia didáctico (tangram) para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje donde se construyeran conceptos adecuados de estos dos temas, al tiempo que propendía porque la clase fuera diferente y motivadora para los estudiantes, donde le pudieran dar sentido al conocimiento que adquirían. Para el desarrollo de la estrategia didáctica implementarón actividades donde el estudiante era el protagonista y el profesor sólo intervino de guía (aclarando las dudas que presentaron los estudiantes a nivel conceptual y técnico).

Las conclusiones a las que llegó el autor es que el desarrollo de las estrategias planteadas permite que el estudiante visualice, manipule y participe activamente en su proceso de enseñanza, también se potencia un aprendizaje significativo, un trabajo autónomo y colaborativo. Menciona que la enseñanza de la geometría y la métrica permite al estudiantes desarrolla diferentes habilidades de pensamiento, análisis comunicación, la visualización, y lectura del mundo físico, pero que es necesario implementar estrategias diferentes en la metodología tradicional, con el fin de que el estudiante sienta agrado por aprender matemáticas. El investigador describe que el desarrollo de estrategias innovadoras logra acercar al estudiante a su proceso de enseñanza aprendizaje, al ser involucrado en situaciones reales, de construcción y medición, que son desarrolladas dentro y fuera del aula, también concluye algo muy interesante y es que las situaciones problemas en contexto favorecen el desarrollo de competencias matemáticas, científicas, tecnológicas, lingüísticas y ciudadanas.

El autor recomienda que toda actividad que se realice se debe evaluar para analizar los alcances y dificultades de esta en el proceso de enseñanza, al igual que crear las estrategias de mejoramiento. También manifiesta la importancia de enseñar los temas geométricos-métricos, ya que en los estándares publicados por MEN (2003) se reconoce su importancia en el desarrollo de habilidades y destrezas, que favorecen los procesos de enseñanza aprendizaje en diferentes áreas del conocimiento.

Esta tesis nos presenta una propuesta de enseñanza atractiva para los estudiantes con el fin de interiorizar los temas de área y perímetro. El autor concluye que salirse de la metodología tradicional le da un nuevo aire a la clase y crea un ambiente propicio para el conocimiento, lo cual es un aspecto muy importante para tener en cuenta en la presente investigación, ya que la propuesta metodológica de este proyecto se basa en problemas reto; otro aspecto representativo que se manifiesta en esta tesis, es la importancia de la enseñanza de la geometría para los estudiantes, lo cual respalda la temática escogida para este proyecto.

- **Rodríguez (2006). Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de matemáticas. Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico. (Tesis Doctoral). Universidad Complutense de Madrid, España.**

“Esta tesis doctoral gira en torno a un problema educativo clásico: la preocupación de la escuela por formar a los alumnos en la resolución de problemas no rutinarios, lo que supone, en particular, que los alumnos puedan transferir sus aprendizajes a nuevos ámbitos no estudiados previamente y también que movilicen estrategias llamadas de segundo orden o metacognitivas. Utilizando el enfoque antropológico de lo didáctico se muestra cómo puede integrarse la resolución de problemas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas através de los denominados Recorridos de Estudio e Investigación. Se analizan las restricciones didácticas de los distintos niveles de codeterminación que dificultan la incorporación de la resolución de problemas como eje integrador de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, mostrando en qué sentido la propuesta de instrucción presentada pretende huir de ellas. El modelo de actividad matemática utilizado por el enfoque antropológico de los didácticos permite explicitar a nivel disciplinar los aspectos clásicamente considerados como metacognitivos y que aquí se interpretan como ingredientes del trabajo matemático que va más allá del estudio puntual de problemas aislados. Esto hace posible su enseñanza intencionada y con ello favorece la formación de alumnos competentes en la resolución de problemas. Además, dos experiencias llevadas a cabo en la puesta en práctica de los Recorridos de Estudio e Investigación en torno a la comparación de tarifas de telefonía móvil en primero de Bachillerato muestran cómo esta propuesta de instrucción hace aflorar en la actividad de los alumnos aspectos tales como la planificación, regulación y evaluación del proceso y el producto del estudio, que dejan de estar bajo la responsabilidad exclusiva del profesor para formar parte del propio trabajo de resolución de la cuestión en que están inmersos los alumnos. También son analizados los dispositivos necesarios para la implementación de esta propuesta de enseñanza-aprendizaje y las dificultades que se han detectado, así como la eficacia lograda." (Rodríguez , 2006, pág. 2)

La tesis doctoral manifiesta lo importante de formar y hacer competentes a los estudiantes en la resolución de problemas en los estudiantes, pero no los problemas clásicos, ya que muchos de estos no tienen significancia para los estudiantes ni interiorizan los conceptos y habilidades que se requieren, por lo tanto se enfocan en los problemas no rutinarios, lo cual es muy interesante y me permite observar que la resolución de problemas no rutinarios, es una metodología pertinente para integrarla al proceso de enseñanza y aprendizaje.

Algunas conclusiones que se obtuvieron de la investigación fueron:

- ✓ Las tareas son problemáticas para un sujeto en la medida en que difieren de aquellas tareas que éste sí sabe realizar.
- ✓ Diferentes tipos de aspectos problemáticos en una tarea permitiría determinar diferentes tipos de influencia según el tipo de instrucción.
- ✓ El análisis del carácter problemático de una tarea, partiendo de los conocimientos previos de los alumnos, fruto del proceso de estudio que han vivenciado, es de importancia fundamental para interpretar el origen de las dificultades que aparecen en su resolución.
- ✓ El análisis de las dificultades de un grupo de alumnos frente a la resolución de una tarea problemática nos da luz sobre los problemas fundamentales de los que adolecen los alumnos, especialmente al comparar los resultados obtenidos con la información resultante de estudios semejantes.
- ✓ Realmente ¿qué papel puede o debe jugar la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas? Y una vez contestada esta pregunta deberemos plantearnos ¿cómo puede lograrse la implementación de un sistema de enseñanza dirigido a la resolución de problemas?
- ✓ La atribución asignada a la resolución de problemas como actividad estructuradora del currículum se convierte, debido a la ausencia de un cuestionamiento de los niveles superiores al tema, en un tema más, por la imposibilidad de transponerlo, sin salir del

nivel temático, en el contenido común y dinamizador de todo el proceso de enseñanza-aprendizaje.

- ✓ Los mismos saltos que se detectan en los documentos curriculares se observan también en la investigación relativa a la resolución de problemas. Encontramos, por un lado, investigaciones preocupadas por enseñar a resolver problemas en cuanto a proceso básico e independiente del contenido y, por otro, planteamientos situados en el puntual o a lo sumo temático dentro del área disciplinar.
- ✓ La ausencia de transposición de la resolución de problemas de matemáticas a los niveles intermedios lleva a que su "transposición" directa al nivel puntual sea deficiente.

La resolución de problemas nos permite indagar sobre las falencias y carencias al abordar diferentes situaciones y temáticas; pero estos problemas deben ser diferentes a los que se acostumbran a colocar en la escuela tradicional donde se enfatizan en un tema, con una única solución y con un proceso repetitivo, lo cual no es transcendental para los estudiantes. Los problemas deben trascender a niveles superiores donde desarrollen en los estudiantes diferentes capacidades que se puedan poner en práctica en distintas situaciones de su diario vivir, aunque todo el proceso debe iniciar con los conocimientos previos de los estudiantes, donde se indagaran fortalezas y debilidades, lo cual nos debe conducir a realizar un plan y unas estrategias adecuadas que conduzcan a un proceso firme y adecuado que los conlleva a un nivel eficiente en la resolución de problemas.

- **Castro (2008). Resolución de Problemas Ideas, tendencias e influencias en España. Universitat de Valencia. Recuperado de http://www.uv.es/puigl/castroseiem2008.pdf**

Castro Martínez afirma que la resolución de problemas es parte ineludible de la ciencia, pero que cada ciencia la aborda de una manera distinta, por ello los acercamientos y las técnicas de solución varían. Menciona que la investigación en ciencias sobre resolución de problemas es indispensable en el proceso de enseñanza aprendizaje y en el modelo educativo, para mejorar diferentes habilidades en los estudiantes. La resolución de problemas no es solamente una actividad científica, también se constituye en una actividad educativa que contribuye al desarrollo intelectual y científico de los estudiantes.

El primer tema que aborda el autor es la Resolución de Problemas en Educación Matemática, en el cual menciona varios autores y de diferentes ramas que han estudiado este aspecto, como lo son filósofos, psicólogos, matemáticos profesionales, y especialistas en Educación y Didáctica de la Matemática y muchos otros, cada uno de estos con un enfoque propio lo cual nos permite tener diferentes investigaciones y puntos de vistas que ayudaran a profundizar en la investigación.

El segundo tema que trata es Líneas de investigación en resolución de problemas. Para iniciar una investigación en o con resolución de problemas es necesario tener en cuenta los distintos agentes que intervienen, los cuales son tres componentes según Kilpatrick (citado en Castro E. 2008): el problema, interrogante o cuestión que se plantea, el alumno (o los alumnos) a quien se plantea el problema para que lo resuelva, y la situación en que resuelve el problema, que en el ámbito educativo es el aula, manejada por el profesor. Con estos tres componentes ya sean juntos o separados, se puede desarrollar diferentes líneas de investigación. Lester (como se citó en Castro E. 2008) considera que se pueden utilizar variables para clasificar las líneas de investigación: Factores de la tarea, del sujeto, del proceso, ambientales, y factores de instrumentación y metodología de la investigación. Al investigar en resolución de problemas, las investigaciones se pueden agrupar en dos líneas: a) enseñar a resolver problemas y b) estudios sobre cómo pensamos cuando resolvemos problemas. Esta consideración es bastante importante ya que me lleva a reflexionar sobre qué línea de investigación deseo hacer en mi trabajo de grado.

El tercer tema que trata Castro es Enseñar a resolver problemas, donde manifiesta que este aspecto es fundamental en cualquier parte del mundo y destacan a Polya (citado por citado en Castro E. 2008) como uno de los principales investigadores en resolución de problemas. Polya (citado en Castro E. 2008) el cual da origen a una línea de investigación en didáctica de la matemática denominada resolución de problemas, en la cual establece cuatro etapas o fase para la resolución de un problema: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y verificar la solución obtenida.

El cuarto tema se refiere a estudios centrados en el pensamiento, donde la psicología ha dado grandes aportes, ya que fue la primera en realizar investigaciones sobre la resolución de problemas. Castro E. (2008) menciona la teoría sobre del procesamiento de la información, donde dio a la resolución de problemas un gran impulso en las investigaciones. Esta teoría se destaca dos procesos mentales en la resolución de problemas. El primero la construcción de una representación del problema y el segundo empleo de una estrategia para guiar la búsqueda de solución. Estos dos procesos mentales se deben tener en cuenta para obtener los resultados que pretendo en mi trabajo, ya que estos son los pilares para la resolución de problemas: comprender el problema y solucionar el problema. Algunos factores que se deben tener en cuenten la resolución de problemas es comprensión y representación, enfoque en la resolución de problemas enunciados verbalmente y los problemas compuestos, que en la línea de investigación de la maestría ameritan gran importancia a los que se encaminen por el pensamiento algebraico.

El quinto tema se refiere a la atención a la diversidad (niños con talento). En todas las instituciones educativas y en cada aula de clase encontramos con estudiantes que poseen habilidades en ciencias mayores a las de sus compañeros, en particular en el área de las matemáticas aunque es una minoría, existen estudiantes con esa habilidad que sería extraordinario encaminarla a niveles superiores, pero esto nos exige y nos convoca a realizar investigaciones que posibiliten un desarrollo de pensamiento avanzado.

Las reflexiones finales que realiza el autor de esta investigación son:

1. Los estudiantes con talentos en ciencias merecen un espacio adecuado donde puedan desarrollar todo su potencial.

2. La investigación en resolución de problemas tiene la facultad de llegar a mostrar diferentes estrategias que conduzcan a su solución, lo cual puede generar propuestas teóricas.

3. La tecnología es una herramienta importante para la educación.

4. Las actitudes de los estudiantes es importante en el momento de las resoluciones de problemas.

La resolución de problemas es parte esencial de las ciencias y debe ser llevado a los diferentes niveles de la educación, lo cual contribuirá al desarrollo de diferentes capacidades y habilidades en los estudiantes para su desempeño en distintas situaciones del diario vivir. Es muy importante comprender que hay distintas posturas y visiones sobre la resolución de problemas, pero todas ellas pueden aportar desde su enfoque al proceso de enseñanza y al proceso de aprendizaje.

La resolución de problemas se puede presentar en diferentes líneas de investigación de la matemática, pero se debe tener en cuenta que las líneas deben estar involucrados en los contextos de los estudiantes para obtener mejores resultados. La educación debe encaminarse por enseñar a resolver y abordar problemas en todos los niveles, y una de las mejores maneras para lograr esto, es a través de las diferentes investigaciones. En la actualidad es muy importante la utilización de los medios tecnológicas en los proceso de enseñanza, y la resolución de problemas no debe ser ajeno a esto. Un aspecto que es muy relevante a la hora del proceso de aprendizaje y que se debe tener muy en cuenta, es la actitud y la motivación de los estudiantes al momento de cualquier proceso de enseñanza.

- **Zolkower & Bressan (2002). La relevancia de los contextos en la Resolución de Problemas de Matemática: una experiencia para docentes y sus capacitadores. Rev. Paradigma (1); 59-94.**

Este ensayo da a conocer una experiencia didáctica realizada, como trabajo de evaluación/aplicación final de un curso de capacitación docente, en dos quintos grados de una escuela de San Carlos de Bariloche, Argentina. La investigación examina los primeros pasos hacia la adopción de un nuevo estilo didáctico por parte de los docentes, un estilo en el que la consideración de los contextos en la resolución de problemas de matemática se vuelve central al Que hacer en el aula. Después de analizar las posibilidades y dificultades que este proceso conlleva, se propone aquí una redefinición de la tarea de capacitación docente, con miras a desarrollar la capacidad de estos últimos para diseñar situaciones problemáticas realistas, robustecer los métodos utilizados para el análisis de sus experimentos didácticos y mejorar la capacidad de introspección y transformación crítica de la práctica tanto de los docentes de matemática como de sus capacitadores.

Los objetivos de esta investigación fueron:

- Lograr que los alumnos consideren los contextos específicos en los que se inscriben las situaciones (problemas dados) y pongan en juego sus conocimientos acerca de tales contextos.

- Problematizar la matemática y su enseñanza
- Revisar de qué modo los docentes transforman su práctica a partir de lo aprendido en las instancias de capacitación.

En línea con la perspectiva realista, la evaluación de esta experiencia didáctica estuvo guiada por las siguientes preguntas: ¿En qué medida se logró en estas aulas redefinir la matemática como actividad organizadora de la realidad (y de la matemática misma)? y ¿Hasta qué punto fue posible renegociar el contrato didáctico de modo de dar a los alumnos la responsabilidad de reinventar objetos, operaciones y modelos, reservando para el docente un rol de guía de estos aprendizajes?

En el curso del año 2000, las docentes--coautoras de este artículo, eligieron la temática y diseñaron la experiencia utilizando materiales proporcionado por las capacitadoras pero con amplia libertad para crear su propia secuencia didáctica. El trabajo conjunto se llevó a cabo de acuerdo Zolkower, y Bressan, (como se citó en Zolkower & Bressan, 2002) con la siguiente planificación:

1) Evaluación inicial: Esta consistió en un problema a resolver en forma individual, con discusión a posteriori de las soluciones realizadas por los alumnos. Problema de inicio: 1438 pájaros están sentados en varios árboles del bosque. Algunos cazadores vienen y les disparan a 725 pájaros. ¿Cuántos pájaros permanecen sentados en los árboles luego de los disparos?

2) Evaluación diagnóstica: Esta incluyó cinco problemas no rutinarios, esto es, problemas en los cuales el contexto es relevante para su resolución. Los alumnos trabajaron de manera individual. Si bien los problemas se presentaron en inglés, la docente se aseguró de que todos los alumnos comprendieran el significado de las palabras utilizadas en los enunciados. No se dieron explicaciones de ningún tipo con respecto a la resolución de los problemas presentados.

3) Sesiones de resolución de problemas realistas en base a contenidos vinculados con los temas Curriculares de aritmética planificados para esa época del año. Este proceso duró tres meses, a razón de tres bloques semanales de 40 minutos cada uno. En estas sesiones, las cuales fueron debidamente registradas, los alumnos trabajaron en grupos pequeños y heterogéneos o en forma individual, con puestas en común a posteriori. En estas discusiones se encararon los siguientes temas:

   - La identificación y la comprensión de las situaciones problemáticas planteadas.
   - Las distintas estrategias y modelos utilizados por los alumnos.
   - La comparación de estas producciones desde el punto de vista de su sentido y su adecuación para la resolución de los problemas en cuestión.
   - La elección y justificación, por parte de los alumnos y guiada por la docente, de las estrategias de resolución más eficaces para los problemas dados.

4) Evaluación final: Se administró una evaluación final con problemas similares a los presentados en la evaluación diagnóstica. En esta ocasión, se requirió que el trabajo fuera

individual y no se proporcionaron explicaciones de ninguna índole a los alumnos. Durante el período en que se realizó esta experiencia, las docentes sostuvieron reuniones semanales para analizar los registros e interpretar los datos obtenidos, evaluar el trabajo y reformular la propuesta didáctica en base a las necesidades surgidas de lo implementado en el aula.

Finalmente, y como era de esperar, los problemas en contextos donde los alumnos parecieran tener mayor experiencia obtuvieron el mayor porcentaje de respuestas lógicas y correctas. Los alumnos que más se involucraron en el proyecto fueron generalmente aquellos más fuertes en el área de matemática y éstos son también los que realizaron un avance mayor del pre al post test que los otros.

No todos los problemas presentaron para todos los alumnos el mismo nivel de dificultad. Muchos tuvieron dificultades para comprender las situaciones, sobre todo en los casos en que los contextos no les resultaban familiares. Algunos alumnos mostraron una tendencia a cuestionar la información dada enlosa problemas, aduciendo que tal como estaban éstos no podían resolverse.

En muchos casos, los alumnos se vieron influidos por sus pares en cuanto a la interpretación de los contextos, lo cual genero un cambio en la cultura del aula: se comenzó a valorar el escuchar, hacerse comprender y pedir y dar razones y justificaciones. Enfrentarse con situaciones en las que la aplicación de las operaciones aritméticas requeridas a primera vista por la estructura del problema daban lugar a respuestas incorrectas y soluciones absurdas, llevó a los alumnos a reconsiderar sus supuestos acerca de la relevancia de los contextos. A medida que los alumnos se fueron acostumbrando a trabajar con esta metodología se fueron entusiasmando y comenzaron a tomarle el gusto a la matemática.

Los problemas de contextos realistas son más significativos para los estudiantes lo cual genera más entusiasmo para su solución y mejores resultados, esto se puede evidenciar en la anterior investigación, lo cual es un aporte que se debe tener muy en cuenta en el planteamiento e indagación de los problemas reto para el proyecto que se pretende realizar.

Es bien sabido y lo confirma esta investigación y es que los estudiantes con un mayor rendimiento en el área de matemáticas se van a involucrar más en la investigación y le sacaran mayor provecho, por tal razón se deben buscar problemas de diferentes niveles de exigencia que conlleven a que todos los estudiantes de acuerdo a sus capacidades estén motivados y comprometidos con el proyecto.

Al venir los estudiantes de una enseñanza tradicional, se debe estar consiente que iniciar un proyecto con una metodología diferente, generara posibles confusiones y dificultades como lo afirma la anterior investigación, pero que estas se deben superar a medida que avanza el proyecto y los estudiantes se acostumbran a la propuesta de investigación. Esto nos invita a realizar una unidad didáctica clara y con una secuencia que lleve a los estudiantes a una familiarización y aun proceso que conlleve a los estudiantes a niveles cada vez más avanzados en la resolución de problemas

- **Rabino, (2012). Enseñar matemáticas a través de problemas ¿pero cómo?. Rev. Novedades Educativas (261). 66 – 71**

Una idea central, sino la más importante de la educación matemática realista (EMR), es que la matemática debe ser conectada con la realidad, permanecer cercana a los alumnos y ser relevante para la sociedad en orden a constituirse en un valor humano. (Bressan , Gallego, Pérez y Zolkower,2016, pag 2).

Desde hace algunos años algunas corrientes didácticas e investigación propician enseñar matemáticas a través de problemas. La educación matemática realista (EMR) plantea que para que los problemas generen un aprendizaje matemático y sean significativos para los estudiantes, estos deben permiten relacionar los conocimientos y experiencias previas en contextos realista, de tal modo que el estudiante se sienta motivado a resolverlos.

> Es importante enfatizar que el significado del término realista en esta corriente proviene del holandés, zich realis-eren y significa imaginar; o sea, una situación es realista si se presenta ante el sujeto que aprende como razonable, realizable o susceptible de ser imaginada. (Bressan & Zolkower, 2015, pág. 6)

Los problemas que se deben presentar a los alumnos deben ser abiertos para que los estudiantes generen preguntas y realicen cuestionamientos, y si es necesario que busque información diferente al que se presenta en el problema. Además debe comprometer y motivar a los estudiantes a realizarlos, a la vez que construye conocimiento matemático y habilidades matemáticas para ser utilizados en diferentes contextos.

Algunos problemas que se encuentran al querer implantar las ideas sobre la resolución de problemas basados en la educación matemática realista es:

1. Las ideas o preconcepciones que siempre se han tenido los estudiantes y que los docentes muchas veces se las hemos inculcado es que la solución de un problema tiene solamente un camino y una respuesta.

2. Aunque se reconoce por parte de los docentes que los estudiantes traen ideas y conocimientos previos y muchas veces conocimientos y habilidades matemáticas, el docente no sabe encaminar o utilizar esto que trae el alumno como apoyo para el proceso de enseñanza aprendizaje.

3. Los currículos se enfatizan por tener extensas temáticas, que propenden la recepción de muchos conocimientos y temáticas, dejando de lado la construcción de habilidades matemáticas, con el fin de utilizarlas en diferentes contextos.

Muchos de los problemas que se presentan en los textos y que utilizan los docentes muchas veces están descontextualizados y ya que se han editado años anteriores y no corresponden con los temas y características de la realidad, además estos son realizados para poner en práctica un algoritmo, lo cual permiten una escasa imaginación del estudiante y les dan muy poca motivación. Aunque actualmente los textos tienden a que sus problemas sean lo más cercanos a la realidad, estos se realizan más para ejemplificar un conocimiento matemático que para un aprovechamiento real por parte de los estudiantes. Corresponde al docente modificar estos problemas o crear nuevos problemas contextualizados, que motiven a los estudiantes y que generen en ellos habilidades que las puedan utilizar en diferentes situaciones.

Un problema bien escogido es aquel que contempla los intereses de los estudiantes y que les permiten abordarlos con los conocimientos y herramientas que ellos poseen para luego por medio colaborativo entre compañeros y docentes esquematizar y formalizar los contenidos. Por otro lado un problema rico permite el abordaje de diferentes puntos de vista, y después de resolverlos el docente puede mostrar a los estudiantes los diferentes contenidos y conceptos involucrados que los estudiantes utilizaron. Otro aspecto a tener en cuenta en la presentación de los problemas, deben ser claros y que permitan llevar al estudiantes e los razonamientos que el docente quiere, como son problemas son abiertos, los docentes deben estar preparados para contestar los diferentes interrogantes y posibles respuestas que tengan los estudiantes.

Algunas pautas para plantar o buscar problemas teniendo en cuenta las ideas de la corriente didáctica de matemática realista de Freudenthal (como se citó en Rabino, 2012), son:

1. Estar atentos cuando leemos no solo textos de matemáticas, cuando miremos televisión o escuchemos comentarios de los estudiantes, que puedan ser punto de partida para materializar los contenidos que queremos enseñar en nuestras clases.

2. Crear un archivo con material adecuado para trabajar.

3. Generar preguntas abiertas después de analizar este archivo en función del contexto

4. Distinguir los contenidos que se pueden ligar a los diferentes problemas de contexto real.

5. Armar un banco de preguntas y problemas

6. Organizar el banco de problemas teniendo en cuenta objetivos, contenidos y características de la actividad.

Un artículo de EMR (Novedades Educativas, 2012) plantea que “todos los docentes, si dominamos el tema, podemos poner en actividad nuestro potencial creativo. Así es, ¡no solo los artistas “crean”! miremos a nuestro alrededor con “ojos matemáticos”. ¡Y a estar atentos, que en cualquier momento puede darse algo!”(P 68).

Algo trascendental de la EMR y que es muy pertinente para la investigación que se va a desarrollar sobre la resolución de problemas reto, es que los problemas deben ser significativos, realistas y cercanos para los estudiantes, lo cual es muy adecuado para mejorar el proceso de enseñanza. Por otro lado, la postura de esta teoría de que los problemas realistas son aquellos que son imaginables y razonables para los estudiantes, abre puertas en la búsqueda de problemas que sean motivantes y trascendentales para los estudiantes.

La EMR es una teoría muy interesante, con la cual comparto muchas ideas y planteamientos. Esta teoría da tics sobre los tipos de problemas que se deben buscar o crear para realizar una investigación más efectiva, como son problemas que deben tener diferentes caminos y soluciones, que lleven al estudiante a indagar, a cuestionarse a generar diferentes capacidades y habilidades que puedan ser utilizadas en diferentes situaciones, además deben ser problemas llamativos y que le causen curiosidad y entusiasmo a los estudiantes en el momento de resolverlos, entre otras

Existen diferentes investigaciones y artículos sobre la resolución de problemas muy pertinentes para el campo de la educación, cada uno con características propias y enfocadas a distintos temas y contextos, que dejan muchas conclusiones y recomendaciones, pero la presente investigación tiene una característica particular y es el trabajo con problemas reto, los cuales favorecen el interés de los estudiantes al tiempo que les exige aptitudes como crear, razonar, indagar, cuestionar, explicar razonamientos, entre otras. Además estos problemas se trabajaran con un tema presente en la vida diaria como lo es el concepto de área, el cual es resaltado en diferentes investigaciones pero no con problemas reto.

2.2 REFERENTE TEÓRICO

2.2.1 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La resolución de problemas es una estrategia de aprendizaje que está siendo muy estudiada e investigada por los educadores Coronel & Curotto, (2008). La educación enfatiza en el desarrollo de competencias en los estudiantes, para lo cual la resolución de problemas en diversos contextos se considera un elemento esencial. La resolución de problemas involucra y desarrolla diferentes habilidades, como: razonar, generalizar, crear, cuestionar, coordinar, representar, conjeturar, abstraer, entre otros más.

> Al resolver problemas se aprende a matematizar, lo que es uno de los objetivos básicos para la formación de los estudiantes. Entre los fines de la resolución de problemas podemos nombrar:
>
> - Hacer que el estudiante piense productivamente.
> - Desarrollar su razonamiento.
> - Enseñarle a enfrentar situaciones nuevas.
> - Darle la oportunidad de involucrarse con las aplicaciones de la matemática.
> - Hacer que las clases de matemática sean más interesantes y desafiantes.
> - Equiparlo con estrategias para resolver problemas.
> - Darle una buena base matemática (MEN, 2015, pág. 3)

Desarrollar diferentes habilidades y competencias en los estudiantes para su vida debe ser un objetivo de la educación, y el trabajo con problemas nos ofrece muchas alternativas y situaciones para cumplir con este objetivo, pero depende de cada persona darle el enfoque de acuerdo al fin que dese conseguir.

> La OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos) señala que los jóvenes latinoamericanos y por supuesto los colombianos, no muestran capacidades para resolver problemas con algún grado de complejidad y solamente pueden responder problemas simples y utilizando en muchas ocasiones el ensayo y el error para elegir la respuesta, y tampoco demuestran habilidades para resolver problemas de la vida real que involucren el uso de TIC. (MEN, 2014, pag. 13).

Este informe nos invita a reflexionar sobre la manera en que los docentes están llevando el proceso de enseñanza, además de reconocer la importancia y la urgencia de hacer investigaciones en este campo, ya que la resolución de problemas desempeña un papel primordial en el desarrollo cognitivo de los estudiantes. El Ministerio de Educacion Nacional menciona que para que un estudiante sea matemáticamente competente debe poder:

- Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, del mundo de las ciencias y del mundo de las matemáticas mismas.
- Dominar el lenguaje matemático y su relación con el lenguaje cotidiano; así como usar diferentes representaciones
- Razonar y usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración.
- Dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz. (MEN 2014, pág. 7)

Una característica importante para ser matemáticamente competente como lo menciona el MEN, es la resolución de problemas, el cual es una de las grandes falencias que tiene el sistema educativo en especial el área de las Matemáticas.

> Si se conciben las matemáticas como actividad entonces el aprendizaje del estudiante se genera <<haciendo matemáticas>>, de tal manera que la actividad de plantear y resolver situaciones problema, es el método privilegiado, con el propósito de promover el desarrollo de competencias matemáticas. Esta forma de entender la matemática como actividad permite concebir la Matematización según Freudenthal, como uno de los procesos más importantes en el marco de la resolución de problemas (MEN, 2014, pag 21).

La resolución es un medio privilegiado para el desarrollo de diferentes capacidades, entre ellas el pensamiento lógico y crítico. Es muy importante realizar investigaciones que promuevan el avance del pensamiento matemático en los diferentes niveles, tratando de llevar a los estudiantes a que puedan construir un modelo matemático, para dar solución a problemas de la realidad concreta.

El Ministerio de Educación Nacional en el año 2015, saca la primera versión de los Derechos Básicos de Aprendizaje, los cuales

> "son un conjunto de saberes fundamentales dirigidos a la comunidad educativa que al incorporarse en los procesos de enseñanza promueven condiciones de igualdad educativa a todos los niños, niñas y jóvenes del país. Los Derechos Básicos de Aprendizaje se plantean para cada

año escolar degrado primero a grado once, en las áreas de lenguaje y matemáticas y se han estructurado en concordancia con los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias" (MEN 2015, P 4).

En la resolución de problemas, se pueden identificar distintas variables dependiendo de la investigación y el contexto. Los estudiantes han tenido dificultad para la resolución de problemas no solamente por no tener habilidades en matemáticas sino por falta de razonamiento, actitud, creencia de que todo problema tiene una formula y por miedo de abordarlos. La creatividad es un gran elemento que ayuda a la resolución de problemas. En las estrategias para la resolución de problemas se plantean varios autores, que muestran diferentes estrategias, dificultades y conductas para afrontar la resolución de problemas. Polya es uno de los principales investigadores en resolución de problemas, el cual da origen a una línea de investigación en didáctica de la matemática denominada resolución de problemas, en la cual establece cuatro etapas o fases para la resolución de un problema: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y verificar la solución obtenida.

Mazarío (2009, p. 12) expresa: "… aceptar que resolver problemas es un elemento vital en el aprendizaje de la Matemática, implica la necesidad de que se tenga una idea clara de lo que se entiende por problemas y cómo los incorporamos en las clases"

Muchos autores han propuesto sus propias definiciones sobre problema, algunas de estas son:

"Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata" Polya (1981)

En consecuencia de la definición anterior de Polya (1981), hay allí unos elementos básicos que se tienen que identificar, en lo que significa tener un problema según este enfoque. Ellos son:

1. Un sujeto que tiene como intención solucionarlo, pues se encuentra motivado por diversas razones. En el ámbito escolar son de índole académico.

2. Cumplir con el objetivo de resolverlo, pero para llegar a cumplir dicho objetivo no existe en principio un camino que conduzca inmediatamente a su solución.

3. Genera situaciones como: angustia, desafío y provocación. Ha de encontrar nuevas relaciones entre los elementos que posee y dispone para tratar de desenmarañar lo oculto en la situación que enfrenta.

4. Satisfacción por hallar la solución.

Krulik & Rudnik (como se citó en Tomas , Cristina, & Perla, 2011) dicen que un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma.

Un problema es determinada situación en la cual existen nexos, relaciones, cualidades de y entre los objetos que no son accesibles directa e indirectamente a la persona. (Labarrere, 1988, pág. 6)

En la resolución de problemas es necesario tener en cuenta los distintos agentes que intervienen, los cuales son tres componentes: "el problema, interrogante o cuestión que se plantea, el alumno (o los alumnos) a quien se plantea el problema para que lo resuelva, y la situación en que resuelve el problema, que en el ámbito educativo es el aula, manejada por el profesor." (Kilpatrick, 1978, pág. 3)

La importancia de la resolución de problemas ha originado algunas propuestas de enseñanza, entre las más destacadas encontramos:

Dewey (1933) Señala las siguientes fases en el proceso de resolución de problemas:

1. Se siente una dificultad: localización de un problema.
2. Se formula y define la dificultad: delimitar el problema en la mente del sujeto.
3. Se sugieren posibles soluciones: tentativas de solución.
4. Se obtienen consecuencias: desarrollo o ensayo de soluciones tentativas.
5. Se acepta o rechaza la hipótesis puesta a prueba.

Polya (1945) contempla cuatro fases principales para resolver un problema:

1. Comprender el problema.
2. Elaborar un plan.

3. Ejecutar el plan.

4. Hacer la verificación.

En el modelo de Mason, Burton y Stacey (1989), aparecen las siguientes fases:

1. Abordaje.
2. Ataque.
3. Revisión

Guzman (1994) presenta el siguiente modelo:

1. Familiarízate con el problema.

2. Búsqueda de estrategias.

3. Lleva adelante tu estrategia.

4. Revisa el proceso y saca consecuencias de él.

Puing L. (1992), Aprender a resolver problemas, aprender resolviendo problemas. Revista Aula de Innovación Educativa 6, señala que los profesores en ciencias y en general, se han preocupado más por saber qué es lo que el estudiante conoce, o dicho de otra manera cuáles son los datos que él ha memorizado, que por enseñarles a usar esos datos para aprender a resolver problemas y de esta manera aprender resolviendo problemas. Según Pozo & Gómez (2004):

> Los hechos o los datos deben aprenderse literalmente, de un modo reproductivo; no es necesario comprenderlos y, de hecho, frecuentemente cuando se adquieren contenidos factuales o no hay nada que comprender o no se está dispuesto o capacitado para hacer el esfuerzo de comprenderlo. (p 86)

> En este sentido, se hace relevante que el trabajo educativo sea encaminado hacia el desarrollo del pensamiento, particularmente en lo relacionado con procesos de resolución de problemas. Puing L. (1992), menciona que resolver problemas va más allá de saber datos. Pero, ¿cómo se concibe la tarea de resolver problemas? Por lo general se considera que los problemas se planteen en las aulas para mostrar que se sabe aplicar un concepto aprendido o un método, algoritmo o procedimiento rutinario, y, con ese fin, la tarea consiste en encontrar la solución. Por lo cual las prácticas usuales hacen, pues, que los estudiantes conciban que un problema de matemáticas es cualquier cosa, que es una tarea que le propone el profesor, para ellos es lo mismo un problema o ya sea un ejercicio de reconocimiento, un ejercicio algorítmico o un problema de aplicación. (pag 4)

Polya (1982), considera que en el campo de las matemáticas, la resolución de problemas consiste tanto en un proceso de aprendizaje como en un objetivo en sí mismo, así como una técnica básica que debe ser desarrollada.

Desde que Polya(1982), propuso un modelo ideal para describir el proceso de resolución de problemas se han propuesto otros modelos que son variantes del propuesto por Polya; todos ellos incluyen una última fase de revisión del trabajo desarrollado. Para Puig (1992) esta última fase es crucial para que la tarea de resolución de problemas dé origen a aprendizajes significativos. Si por supuesto se considera “revisión” más que lo que la palabra indica pues se trata no sólo de mirar de nuevo sino como dice Puig (1992) consiste en:

> Examinar lo que se ha hecho para encontrar la solución para ver si es correcto no basta para que se aprenda gran cosa, hace falta ver si el problema se puede resolver de otra manera -que a lo mejor se había descartado inicialmente, pero con la solución ya obtenida se puede volver a ella-; relacionar, si es posible, una y otra manera de resolverlo; examinar qué problemas relacionados con el que se ha resuelto están también resueltos al haber resuelto éste; a qué otros se puede extender el procedimiento de resolución de forma natural; a cuáles podría hacerse con ajustes menores; cuáles podrían abordarse con lo que se acaba de obtener, aunque no se sepa muy bien si se podrían resolver. (p.2)

Por tanto la finalidad no ha de ser resolver el problema, sino aprender de la situación, y la tarea no termina cuando se encuentra la solución, sino cuando uno tiene la sensación de que ya no puede aprender nada nuevo.

En la resolución de problemas de esta investigación se tendrá en cuenta las fases descritas por Mason , Burton, & Stacey (1989): abordaje, ataque y revisión.

En el desarrollo de los problemas reto, más que la respuesta correcta se tendrá en cuenta las emociones, la manera de abordar el problema, el razonamiento, los métodos utilizados para la solución, además de la destreza que vallan adquiriendo los estudiantes a medida que avanza en la investigación,

2.2.2 ETAPAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (POLYA, 1945)

El método de Polya consiste en un conjunto de cuatro pasos y preguntas que orientan la búsqueda y la exploración de las alternativas de solución que puede tener un problema. las cuatro etapas o fases:

- ✓ comprender el problema
- ✓ concebir un plan
- ✓ ejecutar el plan y
- ✓ verificar la solución obtenida

Seguir los paso que propone Polya (1945) no asegura que se va a obtener la respuesta correcta del problema, puesto que la resolución de problemas no se limita a seguir un algoritmo, requiere de la utilización de habilidades y competencias, pero si nos orientara el proceso de solución del problema.

Polya (1945) recomienda que para desarrollar la capacidad de resolución de problemas es fundamental estimular, en los alumnos, el interés por los problemas así como también proporcionarles muchas oportunidades de practicarlos. Las fases que plantea Polya, van acompañadas por una serie de preguntas que nos permiten entender en qué consiste cada etapa. En el siguiente cuadro se muestran las etapas y las preguntas.

Tabla 1: Fases del Polya

ETAPAS	**PREGUNTAS**
Comprender el problema	¿Cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos?, ¿cuál es la condición?, ¿es la condición suficiente / insuficiente / redundante/contradictoria para determinar la incógnita?
Concebir un plan	¿Es semejante a un problema conocido?, ¿ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?, ¿conoce algún teorema que le pueda ser útil?, ¿le haría a usted falta introducir algún elemento auxiliar? ¿Podría imaginarse un problema análogo más simple/ general/particular?, ¿puede resolver una parte del problema?, etc.
Ejecutar el plan	¿Puede comprobar cada uno de los pasos al ejecutar su plan de la solución? ¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?
Examinar la solución obtenida	¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento? ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe? ¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?

2.2.3 MASON, BURTON Y STACEY (1989)

Murcia S.M. (2013) señala a Mason, Burton y Stacey (1989), los cuales proponen un modelo para abordar un problema y resolverlo de manera eficaz, estableciendo durante el proceso estados emocionales y cómo ir aprendiendo de la experiencia. Demuestran que lo que se busca en los estudiantes es el razonamiento matemático, que se mejora mientras más se practica y se trabaja sobre un problema, pero que es primordial que ese razonamiento matemático esté dado por el interés y la motivación del estudiante.

Este modelo (Mason 1989) analiza el pensamiento y la experiencia matemática en general, que engloba como un caso particular la resolución de problemas. Muestra la influencia que tiene el desarrollo matemático en el conocimiento de nosotros mismos y del mundo que nos rodea. Las emociones de quien resuelve el problema, son elementos indispensables en el proceso de razonar matemáticamente. El objetivo de estos autores es mostrar cómo acometer cualquier problema, es decir, cómo abordarlo de una manera eficaz y cómo ir aprendiendo de la experiencia. Se basan en los trabajos de Polya (1945) y Schoenfeld(1985). En este modelo aparecen las fases:

1. Abordaje.
2. Ataque.
3. Revisión

Este modelo (Mason 1987) considera tres fases presentes en el proceso de resolución de los problemas; elementos que emergen del desarrollo del pensamiento matemático y contribuyen al proceso del pensamiento y los estados emocionales del sujeto. Ahora bien, en el trabajo realizado por Mason, Burton y Stacey (1987), se establecen un conjunto de procesos, fases y rótulos que se constituyen no sólo en herramientas que permiten formalizar y concretar los momentos en que se encuentra un individuo dentro del proceso de resolución de un problema, sino que permiten monitorear y autoevaluar éste proceso,

Mason (1989), propone tres fases en el proceso de resolución de problemas: Entrada, Ataque y Revisión; afirmando que contribuyen al desarrollo del razonamiento matemático, mediante la investigación y los estados emocionales, a partir de los procesos de particularizar, generalizar, conjeturar y convencer. Éste autor, establece y desarrolla una metodología de resolución de problemas específicos, donde pone de manifiesto las fases enunciadas anteriormente asociadas a lo que llama rótulos, aconsejados durante el proceso de resolución y que nos ayudaran a sistematizarlo con el fin de hacer el análisis posterior. Las fases se presentan a continuación

Fase de abordaje: Empieza cuando el resolutor por primera vez se enfrenta con el problema y termina cuando el resolutor se introduce en el problema y comienza a resolverlo. Esta fase comienza a menudo con particularizaciones para familiarizarse con el problema. Los rótulos asociados a esta fase son **¿Qué es lo que sé?** Está relacionado con lo que se por el enunciado del problema y lo que se conoce del enfrentamiento a problemas similares, **¿Qué es lo que quiero?** Lo que dirige la atención a cuál es el objetivo del problema, la interpretación que se le da**¿Qué puedo usar?** lo que dirige la atención a cuál es el objetivo del problema, la interpretación que se le da. Estas preguntas permiten estructurar el trabajo del resolutor en esta fase.

Fase de ataque: Esta fase permite dar lugar a la solución o soluciones del problema. Se está en la fase de ataque, cuando se ha instalado el problema dentro de la mente y ya es propiedad del resolutor. En esta fase, se involucran los procesos de conjeturar y de justificar. Los rótulos asociados a esta fase son: intentar, podría ser, pero ¿por qué?, además de ¡Atascado! y ¡Ajá!: el primero permite reconocer el momento en el que no es posible continuar con el desarrollo del problema, el segundo corresponde a la ocurrencia de una idea que permite desbloquear el camino, o realizar algún proceso alterno, aunque no lleve a la solución del problema.

Fase de revisión: Es aquella donde se comprueba todo el trabajo realizado, se reflexionan sobre los procesos y las dificultades encontradas y se trata de elaborar una generalización tanto del problema como de la resolución. Esto requiere mirar hacia atrás para comprobar lo que se ha hecho y reflexionar en los hechos clave y mirar el resultado en un contexto más amplio que refiere al generalizar. Para esta fase se usan los siguientes rótulos:

I. Intentar, podría ser: tiene que ver con llevar a cabo la idea encontrada en el aja, y conlleva a un momento de realizar conjeturas respecto a elementos para la solución del problema.

II. ¿Por qué?: tiene que ver con el proceso de justificación de la conjetura.

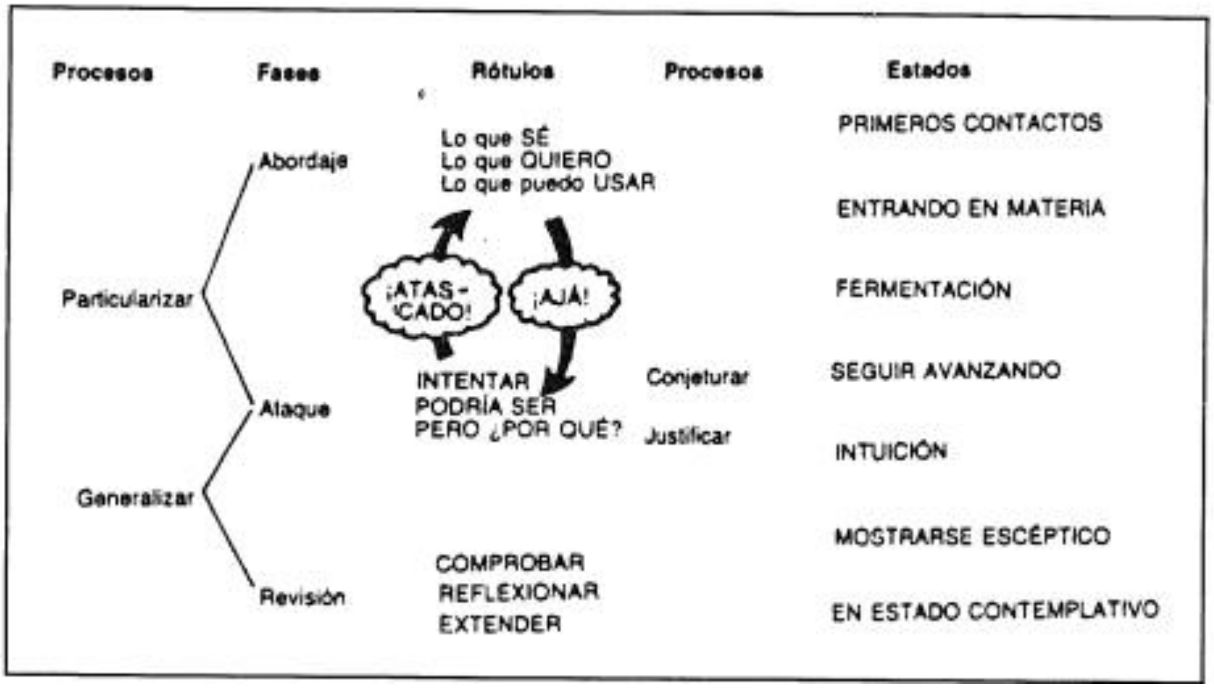
III. Comprobar la solución.

IV. Reflexionar: acerca de los momentos importantes del proceso.

V. Generalizar: colocar el problema en un contexto más amplio.

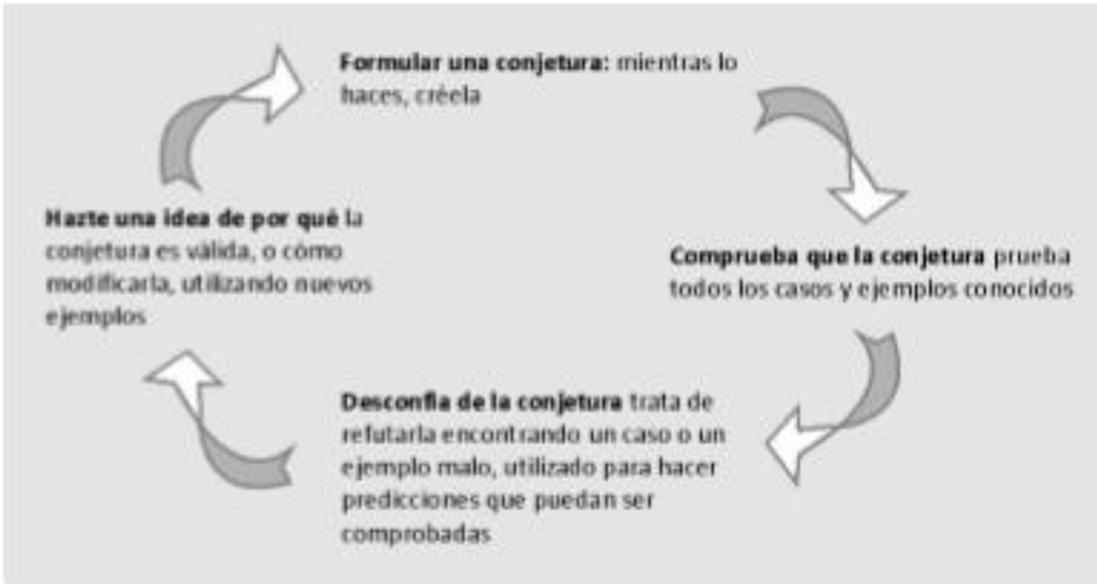
La figura que se presenta a continuación se muestra las fases, rótulos y procesos del modelo de resolución de problemas de Mason (1989, p. 83):

Figura 1: Pensar matemáticamente



Conjeturación: Hacer conjeturas se considera la actividad central dentro de la fase de ataque, donde "una conjetura es una afirmación que parece razonable. Pero cuya veracidad no ha sido demostrada" Mason,J., Burton, L. & Stacey, K. (1989).siendo ésta un proceso cíclico enmarcado en la particularización y elaboración de analogías; en las que formular, comprobar y modificar conjeturas se consideran procesos que constituyen la espina dorsal de la resolución de problemas, y que forman parte del razonamiento matemático. El proceso de conjeturar, según Mason está acompañado de los éxitos anteriores y de relajar las tensiones internas que acompañan el sentimiento de estar ¡Atascado!, y de rótulos como intentar…, podría ser que… y ¿pero por qué? Que surgen a partir de dos procesos fundamentales: de particularizar y de hacer analogías.

Figura 2: proceso de conjeturar



Nota: Mason,J., Burton, L. & Stacey, K. (1989,p. 119)

En la figura 2, podemos apreciar que el proceso de conjeturar se describe como un proceso cíclico que involucra un razonamiento matemático, "se piensa que una cierta propiedad tiene que ser cierta, y una conjetura sobre ella suele empezar como un vago sentimiento rondando en la oscuridad, en el fondo de la mente." Mason,J., Burton, L. & Stacey, K. (1989). Luego, ese sentimiento va saliendo con el ánimo de exponerlo de la forma más clara posible, para que la conjetura pueda ser luego investigada. Si resulta falsa, se modifica o abandona; pero si se puede justificar de modo convincente, entonces pasa a ocupar su lugar en el conjunto de conjeturas y justificaciones que constituyen la resolución de problemas.

2.2.4 EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA (EMR)

> La corriente conocida internacionalmente como Educación Matemática Realista, reconoce como fundador a Hans Freudenthal (1905-1990) - matemático y educador alemán que realizó la mayor parte de su trabajo en Holanda. Esta corriente didáctica nace en los años 60 como reacción al enfoque mecanicista de la enseñanza de la aritmética que se sustentaba en Holanda y a la aplicación en las aulas de la matemática moderna o "conjuntista". Una idea central, sino la más importante de la EMR, es que la matemática debe ser conectada con la realidad, permanecer cercana a los alumnos y ser relevante para la sociedad en orden a constituirse en un valor humano. Los principios en que se basa la Educación Matemática Realista son: a) Los contextos y situaciones problemáticas realistas como generadores de la actividad matematizadora de los alumnos. b) El uso de modelos (materiales, esquemas, diagramas y símbolos) como herramientas para simbolizar y organizar estos contextos y situaciones. c) La centralidad de las construcciones y producciones de los alumnos en el proceso de enseñanza /aprendizaje. d) El papel clave del docente como guía. e) La importancia de la interacción, tanto grupal como de toda la clase. f) La fuerte interrelación e integración de los ejes curriculares de la matemática. . (Bressan , Gallego, Pérez y Zolkower,2016, pag 2).

La Matemática realista es muy interesante ya que propone una idea que es muy pertinente, y es que la matemática debe ser conectada con la realidad, ya que si los estudiantes ven la aplicabilidad y el uso de las matemáticas en su entorno, tendrán mayor motivación en aprenderla y no se quedara solamente en conceptos repetitivos y algorítmicos que no tienen significado para ellos.

Freudenthal (1971, mencionado por el Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática GPDM) dice:

> La Matemática es una actividad de resolución de problemas, de buscar problemas, pero también es una actividad de organizar un objeto de estudio. Este puede ser un objeto de la realidad que tiene que ser organizado de acuerdo a patrones matemáticos, si los problemas reales necesitan ser resueltos. También puede ser una cuestión matemática, resultados nuevos o viejos, propios o de otros, que tienen que ser organizados de acuerdo a nuevas ideas, para comprenderlos mejor, en un contexto más amplio, o a través de un enfoque axiomático (pag 4)

Para la EMR, Freudenthal (1991) menciona que el Contexto significa ese dominio de la realidad el cual, en algún proceso de aprendizaje particular, es revelado al alumno en orden a ser matematizado. Un contexto es un evento, una proposición o situación derivada de la realidad, la cual es significativa para los alumnos o la pueden imaginar y conduce a usar métodos matemáticos desde su propia experiencia. La EMR trata de presentar los problemas realistas, en principio en contextos de la vida diaria, de modo tal que los alumnos puedan imaginar las situaciones en cuestión y, a partir de ahí, utilizar su sentido común y poner en juego los procedimientos de cálculo, las estrategias de resolución y los modelos matemáticos que mejor sirvan para organizarlas. Es importante enfatizar que el significado del término realista en esta corriente, proviene del holandés, zich realis-eren y significa imaginar; o sea, una situación es realista si se presenta ante el sujeto que aprende como razonable, realizable o susceptible de ser imaginada. Además de los contextos situacionales, vinculados a la cotidianeidad, Freudenthal considera contextos también a aquellos puramente matemáticos (contextos desnudos o puros), en tanto sean significativos para los niños presentándose a ellos como juegos o desafíos: buscar regularidades en tablas y tableros, construir pirámides numéricas trabajando operaciones inversas, completar cadenas de operaciones buscando relaciones entre los números que las integran, etc. El que un contexto sea o no realista depende de la experiencia previa de los alumnos y/o de su capacidad para imaginarlo o visualizarlo.

Dentro de esta corriente, Freudenthal (1991) señala que los contextos realistas cumplen un papel esencial en el aprendizaje matemático de los alumnos, en tanto:

a. son puntos de partida en el proceso de enseñanza y en el proceso de aprendizaje para producir matemática
b. bien buscados, resultan de interés para los alumnos.
c. se constituyen en objetos de trabajo, tornando accesible el contenido matemático y permiten que los estudiantes trabajen en diferentes niveles de conceptualización en base a sus posibilidades.
d. proveen estrategias para la resolución del cálculo implicado al relacionarlo con el sentido común.
e. son abiertos (permiten estrategias variadas y/o varias soluciones) dando lugar a valiosas discusiones matemáticas entre los alumnos.

El modelo es simplemente un intermediario, a menudo indispensable, a través del cual se idealiza o simplifica una realidad o teoría compleja con el fin de volverla susceptible a un tratamiento matemático formal. Los modelos en la EMR no solo son pensados como representaciones sino también como objetos de trabajo y reflexión en sí mismos, sobre los cuales se realizan acciones y operaciones y se visualizan, explican, comparan, contrastan, y comprueban relaciones. Los modelos y la reflexión colectiva son los instrumentos básicos para el cambio de nivel. Cabe aclarar que desde la perspectiva de la EMR el término modelo no se refiere a modelos pre constituidos e impuestos desde la matemática formal, sino de modelos emergentes. En la EMR se habla de modelos emergentes: no vienen de la matemática formal, no son impuestos, nacen de la actividad informal de los alumnos o de la historia de la matemática. Un modelo se transforma en “modelo de” en “modelo para”. Estos modelos deben satisfacer varias condiciones importantes: Estar enraizados en contextos realistas, Tener suficiente flexibilidad para ser aplicados en un nivel más avanzado o más general y ser viables.

En la EMR se respetan los modelos que surgen de los propios alumnos y se acercan otros inspirados en las estrategias informales ya sea utilizadas por los estudiantes o que aparecen en la historia de la matemática, estudiados a partir de la fenomenología didáctica. La búsqueda de contextos y modelos que den lugar de modo más o menos natural a la matematización corresponde a lo que Freudenthal denomina fenomenología didáctica. . La fenomenología didáctica se nutre de la historia de la matemática y de las producciones y construcciones de los alumnos que van surgiendo durante el proceso de instrucción.

> “Transmitir a los alumnos una Matemática pre-fabricada, producto de la actividad de los matemáticos o del autor del libro de texto es, según Freudenthal (1973) una inversión antididáctica. A cambio, propone enseñarles a matematizar.

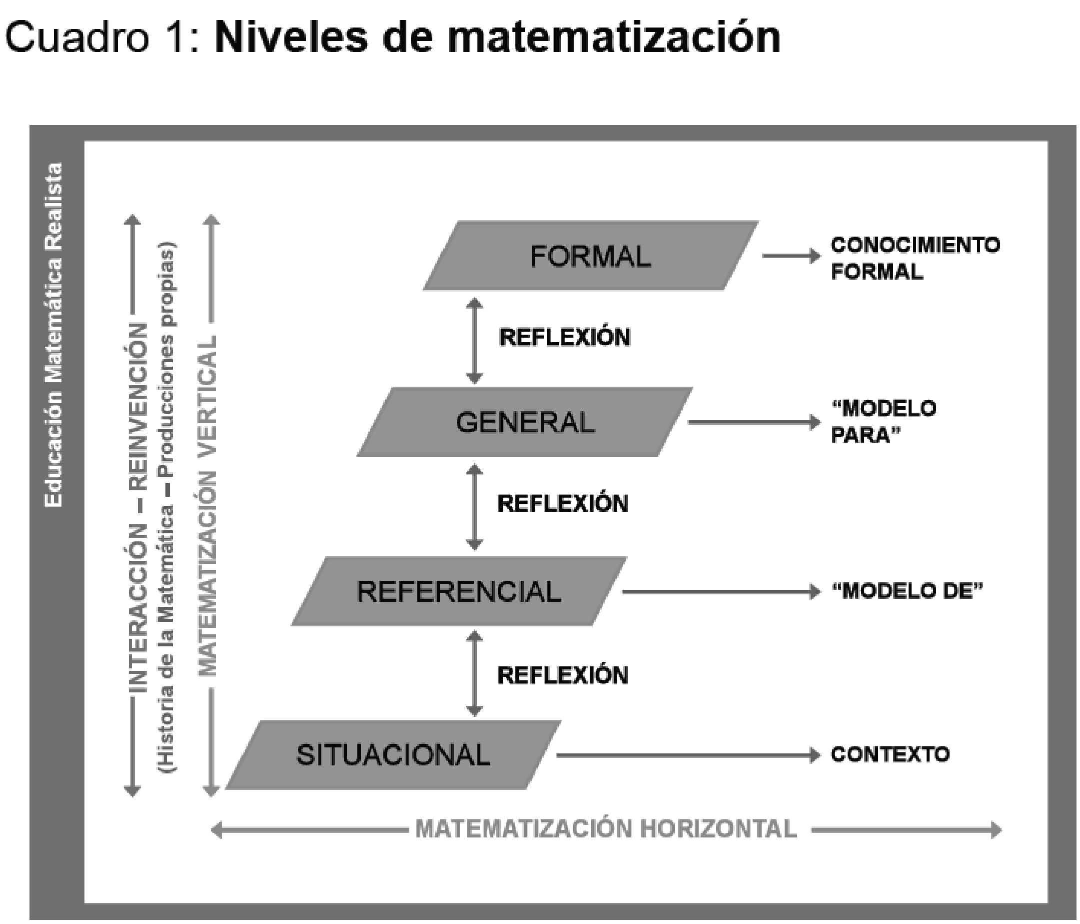
Freudenthal (1991) propone como objetivo de la enseñanza desarrollar en los alumnos una disposición matemática la cual incluye: buscar lo esencial en situaciones, problemas, procedimientos, algoritmos, simbolizaciones y sistemas axiomáticos; descubrir en estos características comunes, similares, analogías e isomorfismos; ejemplificar ideas generales; descubrir objetos y operaciones nuevas; hallar atajos, abreviar estrategias e inventar simbolizaciones; y reflexionar acerca de la propia actividad considerando la cuestión a mano desde diferentes perspectivas o puntos de vista." (Pochulu & Rodríguez , 2012, pág. 159)

La matemática es una ciencia que siempre ha tenido una imagen de difícil y aburrida para los estudiantes, por lo cual la posición de Freudenthal (1991) de presentar una matemática donde los estudiantes tengan disposición de aprenderla es muy acertada, ya que si utilizamos diferentes maneras de presentarla y hacerla más entendible, daremos un gran paso en el proceso de enseñanza, además contribuiremos a cambiar la imagen a esta ciencia.

El objetivo de Freudenthal fue estudiar cómo pasa el alumno del conocimiento informal, al preformal y de allí al formal, y cómo ayudarlo en ese pasaje. La EMR admite que los alumnos pasan por distintos niveles de comprensión, caracterizados por distintos tipos de actividades mentales y lingüísticas. El proceso de matematización Freudenthal (1991) lo observa bajo dos formas: *La de matematización horizontal, que consiste en convertir un problema contextual en un problema matemático, basándose en la intuición, el sentido común, la aproximación empírica, la observación, la experimentación inductiva. La de matematización vertical, ya dentro de la matemática misma, que conlleva estrategias de reflexión, esquematización, generalización, prueba,* *simbolización y rigorización (limitando interpretaciones y validez), con el objeto de lograr mayores niveles de formalización matemática.*(Rodríguez, 2013, p. 4)

Los estudiantes a medida que avanzan en los diferentes procesos, deben ir adquiriendo conocimientos más avanzados, deben pasar por diferentes niveles informal, preformal y formal, como lo plantea Freudenthal en los niveles de Matematización.

<u>Figura 3: Niveles de Matematización</u>



Nota: POCHULU. M Y RODRÍGUEZ M (2016). Niveles de Matematización. Figura, educación matemática, aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos

> En estos procesos los modelos desempeñan un papel fundamental. El pasaje de un nivel a otro, el cual suele darse de modo súbito marcando discontinuidades en el aprendizaje, involucra la simbolización esquemática de una situación por medio de un modelo. Poco a poco, el modelo de se va desprendiendo de la situación referencial hasta convertirse en un modelo para, una herramienta para organizar situaciones homólogas a la inicial. Como lo indica la Figura 1, esta distinción entre modelo de y modelo para involucra cuatro niveles: situacional, referencial, de generalización y formal. En el nivel situacional, la situación problemática se organiza por medio de estrategias que surgen de la misma. En el nivel referencial (modelo de) aparecen los modelos gráficos, notaciones y procedimientos que esquematizan el problema, pero estos todavía se refieren de un modo u otro a la situación particular. Al nivel general (modelo para) se llega a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior distanciándose de toda referencia al contexto. En el nivel formal se trabaja ya con procedimientos y notaciones generales y convencionales desligadas de los contextos y situaciones que les otorgaron su significado inicial. Para promover estos procesos es crucial trabajar en torno a problemas que puedan resolverse usando diversas herramientas y poniendo en juego múltiples estrategias. (Pochulo y Rodriguez, 2012, p. 172)

En la EMR, se considera al aprendizaje de la matemática como una actividad social donde la reflexión colectiva lleva a niveles de comprensión más altos. La enseñanza de la matemática debe tomar la forma de reinvención guiada (Freudenthal, 1991).La educación matemática debe dar a los alumnos la oportunidad guiada por el maestro de reinventar la matemática (no crean, ni descubren, sino que reinventan modelos, conceptos, operaciones y estrategias matemáticas con un proceso similar a los que usan los matemáticos al inventarlas). Para orientar adecuadamente este proceso es importante la capacidad de anticipación, observación (y auto-observación) y reflexión del docente acerca de los aprendizajes a corto y largo plazo de sus alumnos.

El quehacer matemático es una actividad estructurante y organizadora (matematización) que está al alcance de todos los seres humanos, de allí la premisa de una matemática para todos. Freudenthal (1973 citado por Bressan, Gallego, Pérez, Zolkower, 2016, pag 2).

2.2.5 PROBLEMAS RETO

> El tratamiento y resolución de problemas en las clases de matemáticas no garantiza la efectividad de los procesos de enseñanza, pues no siempre las situaciones planteadas logran motivar a los estudiantes. Los problemas retadores son problemas que animan al estudiante a pensar autónomamente, a indagar, a cuestionar, a razonar y a explicar su razonamiento. Los problemas retadores exigen la integración de conceptos relacionados y el establecimiento de nexos con otras áreas de la matemática (argumentos y elementos), se pretende lograr un dominio y una comprensión profunda de la matemática elemental sin tratar de extender los conocimientos de los estudiantes hacia conceptos propios de la matemática superior. Los problemas retadores no solo prueban de manera directa el conocimiento o las destrezas matemáticas, sino además la habilidad que tiene el estudiante de encarar retos más generales en la vida e involucran el desarrollo del razonamiento lógico y la habilidad de manejar situaciones no esperadas. (UAN-MEN, 2010)

Hoy en día las Olimpiadas de Matemáticas y los diferentes exámenes nacionales e internacionales estructuran sus pruebas con un alto porcentaje de problemas que implican y ponen a prueba el poder creativo y la solidez de nuestro pensamiento matemático.

> la realización de olimpiadas llevó a la consolidación en Hungría de una de las comunidades matemáticas más productivas del siglo XX, reconocemos los nombres de Polya, Ordos, Posa, y muchos más, formados en primera instancia y marcados para siempre por estas competencias retadoras de solución de problemas originales, singulares, desafiantes y bellos. (Falk de Losada, 2001, pág. 4)

La resolución de problemas retadores como lo dice la Losada (2001) exige a los estudiantes en el fondo que establezcan redes o mapas conceptuales cada vez más enriquecidos. La investigación ha demostrado que el cerebro cambia estructuralmente además de funcionalmente como resultado del aprendizaje y de la experiencia. Las oportunidades regulares de enfrentar y esforzarse por dominar problemas matemáticos retadores tienen el potencial de cambiar el cerebro de por vida.

> Paradójicamente la memorización de técnicas básicas no se logra por medio de la solución de problemas rutinarios, que es precisamente el objetivo de la práctica de poner al estudiante a resolver grandes cantidades de ejercicios idénticos en lugar de asignarle tareas matemáticamente más sustanciales. Los estudios de la memoria adelantados por LURIA (2004) sostienen la conclusión que: "entre más difícil sea una actividad intelectual, más conduce a la memorización de los materiales sobre los cuales versa". El hecho crucial de la solución de problemas es que el estudiante sólo puede construir significado para las operaciones que el problema exige que se efectúen – es decir, éstas sólo pueden verse como estructuras con significado – cuando él las contextualice dentro de un marco más amplio; en otras palabras, sólo por medio de la solución de problemas más exigentes. (Falk de Losada, 2001)

Los problemas rutinarios solo ejercitan lo procedimental y repetitivo, dejando de lado competencias básicas esenciales como la creatividad, la lógica, la explicación, entre otras. Según Losada (2001) los problemas con mayor dificultad y que lleve a los estudiantes a utilizar diferentes competencias matemáticas, son más relevantes para los estudiantes, lo que les proporcionara una mejor memorización de la temática que se está viendo y utilizando para la solución de estos.

"Los problemas retadores son problemas que invitan al estudiante a pensar autónomamente, a indagar, a cuestionar, a razonar y a explicarse razonamiento". (Pérez, 2004)

A distinción de los problemas retadores se presenta a continuación lo que se entiende por un problema no rutinario. Él tiene como característica elemental generar cierto grado de creación y originalidad por parte del estudiante. La resolución puede requerirle un verdadero compromiso de investigación, pero no lo realizará si no tiene motivos para ello. Un problema no rutinario sería:

- *"Hacer que el estudiante piense productivamente.*
- *Desarrollar su razonamiento.*
- *Enseñarle a enfrentar situaciones nuevas.*
- *Darle la oportunidad de involucrarse con las aplicaciones de la matemática.*
- *Hacer que las clases de matemática sean más interesantes y desafiantes.*
- *Equiparlo con estrategias para resolver problemas.*
- *Darle una buena base matemática".(MEN, 2015)*

Para que los problemas generen motivación e interés en los estudiantes deben tener tres características especiales, ‘‘... que sea una situación que estimula el pensamiento, que sea interesante para el alumno, y que la solución no sea inmediata. (Losada. 1980, p. 12).

Los problemas retadores son una gran herramienta en el desarrollo del pensamiento, son problemas que se salen de lo común y que invitan a los educandos a utilizar diferentes capacidades del pensamiento, además son atractivos y hacen que la clase de matemáticas cambie de rutina, lo que conlleva a que los estudiantes centren su atención en el tema que se quiere enseñar.

Todas las herramientas que se utilicen en el proceso de enseñanza y que sean motivantes para los estudiantes, además de que les exija un razonamiento, tendrán un efecto en su proceso de aprendizaje.

2.2.6 MAGNITUD ÁREA

2.2.6.1 PENSAMIENTO MÉTRICO

El desarrollo del pensamiento matemático involucra procesos de razonamiento y factores de experiencia cuando se desempeña cualquier clase de funciones, en el sentido de la actividad matemática como una forma especial de actividad humana. De este modo el maestro debe interesarse por entender las razones, los procedimientos, las explicaciones, y las formulaciones

> verbales que el alumno construye para responder a una tarea matemática, del mismo modo que se debe ocupar por descifrar los mecanismos mediante los cuales la cultura y el medio contribuyen en la formación del pensamiento matemático. En este sentido, es de interés analizar las ejecuciones de los alumnos ante tareas matemáticas, tanto simples como complejas, como formas de entender el proceso de construcción de los conceptos y procesos matemáticos; al mismo tiempo que se sabe que, en esa labor, su propio pensamiento matemático, está también en pleno curso de construcción. (Losada. 1980, p. 16)

Uno de los objetivos que debe cumplir las ciencias, es desarrollar el pensamiento crítico y lógico de los estudiantes, para ello se debe acudir a diferentes herramientas que puedan permitir al docente evidenciar los alcances, las capacidades y habilidades que el estudiante va desarrollando, así mismo, también observar las falencias y las dificultades, para hacer los ajustes correspondientes, siempre en pro del desarrollo del pensamiento de los educandos.

El área de matemáticas, según los estándares está formado por 5 pensamientos (numérico, geométrico, métrico, aleatorio y variacional). Todos los pensamientos son de gran importancia, cada uno con características específicas. El pensamiento métrico en el cual está inmersa esta investigación tiene una característica muy favorable y es que está presente en nuestro entorno, en los lugares donde trabajamos, además muchas personas en su diario vivir aplican conceptos sin saber que pertenecen a este pensamiento.

Los conceptos y procedimientos propios de este pensamiento hacen referencia a la Comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones. Tomado de MEN (2015, pg 64).

En los Lineamientos Curriculares, de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas del MEN (2002), se especifican conceptos y procedimientos relacionados con este tipo de pensamiento, como:

• La construcción de los conceptos de cada magnitud.

• La comprensión de los procesos de conservación de magnitudes.

• La estimación de la medida de cantidades de distintas magnitudes y los aspectos del proceso de "capturar lo continuo con lo discreto".

• La apreciación del rango de las magnitudes.

• La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos y procesos de medición.

• La diferencia entre la unidad y los patrones de medición.

• La asignación numérica.

• El papel del trasfondo social de la medición

El Pensamiento Métrico implica el dominio de los conceptos de cada magnitud y sus medidas. Este dominio exige la comprensión de una serie de procesos que permiten abstraer las magnitudes y facilitar su comprensión en contextos.

Según Gutiérrez y Vanegas (2005, p. 18) el Pensamiento Métrico se refiere a la: Comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes, su capacidad para abstraerlas de los fenómenos, para medirlas, para compararlas entre sí, operar con sus medidas y aplicarlas en diferentes contextos; utilizando como herramienta básica los sistemas de medidas.

Los elementos y temas del pensamiento métrico son herramientas indispensables en nuestro entorno, por tal motivo están presentes y deben enseñarse en el sistema educativo.

El MEN (2003, pag 5) menciona los Estándares Básicos de Matemáticas que definen el pensamiento Métrico como la:

> Comprensión de las características mensurables de los objetos tangibles y de otros intangibles como el tiempo; de las unidades y patrones que permiten hacer las mediciones y de los instrumentos utilizados para hacerlas. Es importante incluir en este punto el cálculo aproximado o estimación para casos en los que no se dispone de los instrumentos necesarios para hacer una medición exacta. Margen de error. Relación de la matemática con otras ciencias.

La medición es un tema de la matemática que es muy significativo para los estudiantes, ya que está asociada en diferentes aspectos de su realidad.

> La medición ha estado en todos los aspectos sociales de la vida del hombre desde los orígenes de las civilizaciones hasta la actualidad donde su uso es indispensable para efectuar todo tipo de actividades comerciales y de la vida diaria. En este sentido es como cobra importancia la enseñanza del pensamiento métrico y sistemas de medida, debido a que el proceso de medir permite no solo preparar a los alumnos para las necesidades cotidianas, sino que, además, involucra aspectos geométricos, aritméticos, de resolución de problema, ayudando al desarrollo de destrezas y habilidades. (OLMO, 1993, pág. 11)

El pensamiento métrico, ya que se puede contextualizar fácilmente, permite ser utilizado para involucrar diferentes procedimientos matemáticas, entre ellos la resolución de problemas, por lo tanto los docentes no deben dejar de lado este pensamiento o no darle la importancia que se merece.

El análisis realizado al sistema educativo, permite observar que la formación matemática de los alumnos desde el Pensamiento Métrico debe ser motivo de estudio, la medición de superficies plantea un caso particularmente crítico que amerita una mayor atención por parte de los maestros y en general de todo el sistema educativo.(Zapata Grajales, Mendía Caldas, Cano Velásquez, 2013, p. 3)

Hay que decir que las dificultades en el estudio de las magnitudes surgen al ser tratadas como fenómenos separados de las situaciones reales, con tal suerte, que las dificultades dan lugar a confusiones y no a relaciones entre magnitud y medida, volumen y capacidad, volumen y peso, volumen y superficie, área y perímetro, masa y peso entre otras. Al respecto, Chamorro, M. & Belmonte, J., (1991) consideran que esta dificultad se debe a que para trabajar con medidas directas (las que pueden ser medidas directamente o mediante un aparato calibrado: longitud, masa, tiempo, voltaje…) se dan errores que van desde el uso indebido de los sentidos y de los instrumentos de medida, hasta dificultades para contar unidades no enteras. Pero para trabajar con medidas indirectas (las que atañen a esta investigación por no medirse directamente ya sea por su tamaño o forma, siendo necesario calcularlas mediante fórmulas a partir de magnitudes medidas directamente: velocidad, volumen, superficie…), no solo intervienen las dificultades ya señaladas para las medidas directas, sino que además se añaden dificultades relacionadas con la elección de la unidad de medida adecuada, la comprensión del lenguaje algebraico, las confusiones ya mencionadas entre diferentes magnitudes y los problemas con datos erróneos o no reales, motivo por el cual se concluyo que los errores en los procesos indirectos de medición están asociados por una parte al mal uso de las fórmulas y por otra a los cambios de unidades o a la omisión de la unidad cuando se expresa una cantidad.

2.2.6.2 ÁREA

Medir siempre ha sido una necesidad del hombre. Antiguamente las personas utilizaban las partes del cuerpo como unidades de medida. También se utilizaron diferentes medidas y objetos dependiendo de la civilización, la región o el país, lo cual traía muchos inconvenientes ya que muchas tenían el mismo nombre pero los valores eran distintos, por lo tanto se hacía necesario crear unas medidas universales, un sistema confiable y que fuera igual para todos.

Sistema Métrico: El sistema métrico decimal o simplemente sistema métrico es un conjunto de unidades de medida, basadas en el metro y relacionadas entre sí por múltiplos o submúltiplos de 10. El Sistema Métrico Decimal lo utilizamos en la medida de las siguientes magnitudes: Longitud, Masa, Capacidad, Superficie, Volumen. Algunas definiciones importantes del sistema métrico son:

- ✓ Una magnitud es cualquier propiedad que se puede medir numéricamente.
- ✓ Medir es comparar una magnitud con otra que llamamos unidad.
- ✓ La medida es el número de veces que la magnitud contiene a la unidad

Área:

El área de una figura es la medida de la superficie que ocupa la figura. El área se simboliza con la letra A. Para determinar el área de una figura se elige una unidad cuadrada y se cuenta la cantidad de estas unidades necesaria para recubrir la figura. Este procedimiento se llama recubrimiento. La unidad fundamental de área es el metro cuadrado y se simboliza m^2 que corresponde a la medida de la superficie de un cuadrado cuyo lado mide 1 m. el área de polígonos se puede calcular sin necesidad de utilizar recubrimiento. Para esto se utilizan determinadas expresiones en las cuales es necesario conocer las medidas de algunos elementos del polígono.(Ortiz Wilches, 2013, p 18)

En particular el concepto de Magnitud Área puede ser entendido cognitivamente como “la extensión de la superficie. El rasgo o característica de los cuerpos que se mide cuantitativamente es el área o extensión”. (Godino, 2002, pág. 17)

Existen diferentes investigaciones donde se observa la importancia de la enseñanza de área, utilizando diferentes herramientas y métodos. En estas se argumenta lo esencial e importante que es para los estudiantes comprender y aplicar la definición de área en sus vidas. Dante (2011) afirma que:

> Desde los egipcios que procuraban medir y demarcar sus tierras (donde surgió el nombre geometría – medida de tierra), hasta hoy, cuando topógrafos, geólogos y arquitectos hacen sus cartografías y planos, el cálculo del área tiene una preocupación constante en la historia de la matemática. (pág. 419)

Teles &Araujo (2010) afirman que “en el contexto actual el cálculo de área de figuras geométricas planas, constituye un conocimiento relevante para resolver situaciones teóricas y prácticas” (pág.2)

En las diferencias investigaciones también se ponen de manifiesto las dificultades y sugerencias para enseñar esta tema. Hoy en día los docentes tienen la oportunidad de crear y utilizar diferentes estrategias didácticas y metodológicas para mejorar el proceso de enseñanza y el proceso de aprendizaje.

Hart (como se citó en Bohórquez 2004) aplicó una serie de instrumentos que lo llevaron a determinar problemas en la comprensión del concepto geométrico de área a partir de las estrategias de solución de problemas de área usadas por estudiantes de secundaria entre doce y catorce años. Este investigador encontró que el error más frecuente que presentaban estaba asociado a la confusión entre área y perímetro. En muchos casos los niños calculaban el área y el perímetro y le asignaban el dato de mayor valor al área y el de mor valor al de perímetro.

Uno de las grandes dificultades que se observa en aula de clase, es que los estudiantes no tienen bien definido el concepto de área y por este motivo caen en distintos errores, en muchos casos confundiendo área con perímetro. Además, varias veces se cae en el error de asimilar la superficie de un área a un número, sin dimensionar lo que es realmente el área de una figura.

La doctora Corberan (1996) afirma que:

> En las investigaciones consultadas hemos encontrado algunos resultados relativos a la concepción que los alumnos poseen sobre el área. Todos ellos coinciden al afirmar que la mayoría de los alumnos desarrolla casi exclusivamente una concepción numérica del área. Para los estudiantes, el área es un número que se calcula. De ahí la fuerte tendencia que tienen a recurrir a los números y por ello, reducen la comparación de las áreas de superficie a la comparación de números. (pág. 29)

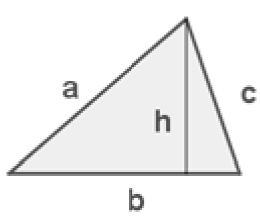
Se ha comprobado que incluso para algunos alumnos el área se reduce a longitud por anchura. Tierney, Boyd , & Davis (1990) en su trabajo con futuros profesores de primaria, al preguntarles sobre lo que enseñarían a niños de 10 años sobre área, encontraron que el 80% de ellos dibujó un rectángulo y escribió "L x A" (largo por ancho) cerca de este.

Perrin (1992) advierte de que la concepción de área como un número que se puede calcular se manifiesta como un obstáculo para el desarrollo del área como una propiedad que se conserva por recorte y pegado. Mhaer & Beattys (1986) encontraron que la mayoría de los estudiantes de 11 a 13 años no aplicó el concepto de área para describir el tamaño de una región.

> Arenas M. (2012,) Concluye que La enseñanza de la geometría permite al estudiante el desarrollo de las habilidades de pensamiento, análisis comunicación, la visualización y lectura del mundo físico desde la geometría, pero es necesario, modificar los métodos de enseñanza tradicional y abstracta, a unos métodos lúdicos y atractivos, que motiven al estudiante al aprendizaje de las matemáticas.

ÁREAS DE LAS FIGURAS PLANAS[1]

ÁREA DE UN TRIÁNGULO



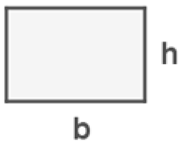
$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

[1]http://www.ditutor.com/geometria/areas.html

Área de un cuadrado

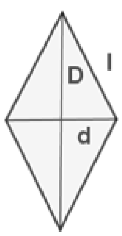
$$A = l^2$$

Área de un rectángulo



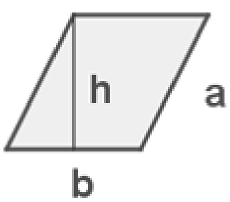
$$A = b \cdot h$$

Área de un rombo



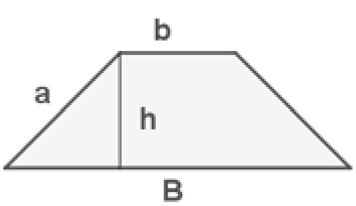
$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

Área del romboide



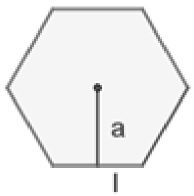
$$A = b \cdot h$$

Área del trapecio



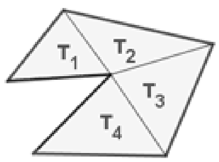
$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Área de un polígono regular



$$A = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$$

Área de un polígono



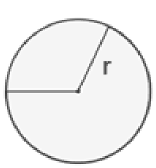
El *área* se obtiene *triangulando el polígono* y *sumando el área* de dichos triángulos.

$A = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$

<u>Área de un círculo</u>

$$A = \pi \cdot r^2$$

<u>Área del sector circular</u>



$$A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360°}$$

CAPITULO 3

METODOLOGÍA

El objetivo de la investigación está centrado en mirar el papel de los problemas reto en la conceptualización del área, para esto se desarrolló una unidad didáctica basada en actividades y problemas reto, que se aplicaron a los estudiantes a través de guías y talleres, donde se observaba el desempeño, la actitud y el desenvolvimiento de estos al momento de solucionarlos. A medida que los estudiantes estaban desarrollando las guías, eran grabados con el fin de tener otro instrumentó de análisis. De la población de estudiantes se tomó un 30% para analizar los datos centrándonos en la prueba de inicio, la Evolución del momento 1, y la prueba final.

3.1 TIPO DE INVESTIGACIÓN

El trabajo se enmarca en la investigación cualitativa metodología propia de las ciencias de la educación.

"La investigación cualitativa en educación se centra en explorar los acontecimientos diarios en la escuela aportando datos descriptivos acerca de los medios y contextos de los participantes implicados en la educación y así descubrir patrones de comportamiento de las relaciones sociales dinámicas como las que se producen en el contexto educativo". (Delgado y Gutiérrez, 1995, p 3)

El proyecto se ubica dentro del enfoque de una investigación Descriptiva-cualitativa, ya que se considerará el reconocimiento de las situaciones, costumbres y actitudes predominantes a través de la descripción exacta de las actividades, objetos, procesos y personas. “Su meta no se limita a la recolección de datos, sino a la predicción e identificación de las relaciones que existen entre las variables a trabajar, que permitan describir y evidenciar el proceso de aprendizaje de los estudiantes con la aplicación de esta estrategia metodológica.” (Arenas M. , 2012, pág. 26)

3.2 POBLACIÓN

La presente investigación se desarrolló en un grupo de aproximadamente 38 estudiantes, de los cuales se sacará una muestra del 30%, lo cual es porcentaje representativo. Se tomaran estudiantes que tienen diferente desempeño en el área de matemáticas, para realizar el respectivo análisis. Los estudiantes pertenecen a la educación pública con edades que oscilan entre 11 y 13 años del sector urbano, del grado sexto de la Institución Educativa Municipal Ciudad Eben Ezer del municipio de Fusagasugá Cundinamarca.

3.3 ESQUEMA GENERAL DEL DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

La presente investigación se desarrollará en tres etapas.

Etapa I. Estructuración Teórica: Las tareas concretas para esta etapa son:

a. Descripción de diferentes investigaciones relacionadas con los objetivos y el planteamiento del problema de la presente tesis.

b. Fundamentación teórica del pensamiento métrico, resolución de problemas, problemas reto, magnitud área y unidad didáctica.

c. Construcción de la unidad didáctica

Etapa II. Aplicación y experimentación. En esta etapa de la investigación se hará la aplicación de la unidad didáctica y la recolección de datos y tiene como objetivo observar y registrar el desarrollo de éstas por parte del estudiante en el aula de clase.

Etapa III. Análisis y sistematización. Se refiere a los análisis y a la presentación de los resultados obtenidos después de realizar todo el proceso de aplicación de la unidad didáctica. Las tareas a realizar son:

a. Organización y análisis de las tareas realizadas por los estudiantes

b. Análisis de las diferentes actividades de la unidad didáctica

c. Conclusiones y recomendaciones

CAPITULO 4

UNIDAD DIDÁCTICA (UD)

4.1 DEFINICIÓN UD

Las definiciones que presento a continuación fueron tomadas de Díaz (2009).

Díaz (2009) cita a Antúnez (1992, pág. 104) el cual dice que la unidad didáctica o unidad de programación será la intervención de todos los elementos que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje con una coherencia metodológica interna y por un período de tiempo determinado.

Díaz (2009) cita a Ibáñez (1992, pag.13) el cual dice que la unidad didáctica es la interrelación de todos los elementos que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje con una coherencia interna metodológica y por un periodo de tiempo determinado.

Díaz (2009) cita a MEC (1992) el cual dice que la unidad didáctica es Unidad de programación y actuación docente configurada por un conjunto de actividades que se desarrollan en un tiempo determinado, para la consecución de unos objetivos didácticos. Una unidad didáctica da respuesta a todas las cuestiones curriculares al qué enseñar (objetivos y contenidos), cuándo enseñar (secuencia ordenada de actividades y contenidos), cómo enseñar (actividades, organización del espacio y del tiempo, materiales y recursos didácticos) y a la evaluación (criterios e instrumentos para la evaluación), todo ello en un tiempo claramente delimitados.

Díaz (2009) cita a Escamilla (1993, 39) el cual dice que la unidad didáctica es una forma de planificar el proceso de enseñanza-aprendizaje alrededor de un elemento de contenido que se convierte en eje integrador del proceso, aportándole consistencia y significatividad. Esta forma de organizar conocimientos y experiencias debe considerar la diversidad de elementos que contextualizan el proceso (nivel de desarrollo del alumno, medio sociocultural y familiar, Proyecto Curricular, recursos disponibles) para regular la práctica de los contenidos, seleccionar los objetivos básicos que pretende conseguir, las pautas metodológicas con las que trabajará, las experiencias de enseñanza-aprendizaje necesarios para perfeccionar dicho proceso.

Como se observó en las anteriores definiciones de unidad didáctica, esta es una herramienta esencial para el desarrollo de una investigación, pues en ella se realiza la planificación, las actividades y demás elementos organizativos para llevar de manera adecuada el proceso de enseñanza y el proceso de aprendizaje.

En resumen y simplificando, podemos señalar que la unidad didáctica es la unidad básica de programación, es una forma de organizar la investigación de planearla y de saber cuales osn los instrumentos que se pretenden utilizar para llegar al objetivo.

Se puede decir que se entiende por unidad didáctica toda unidad de trabajo de duración variable, que organiza un conjunto de actividades de enseñanza y aprendizaje y que
Responde, en su máximo nivel de concreción, a todos los elementos del currículo: qué,cómo y cuándo enseñar y evaluar. Por ello la unidad didáctica supone una unidad detrabajo articulado y completa, en la que se deben precisar los objetivos y contenidos, lasactividades de enseñanza y

aprendizaje y evaluación, los recursos materiales y laorganización del espacio y el tiempo, así como todas aquellas decisiones encaminadas aofrecer una más adecuada atención a la diversidad del alumnado. (Díaz 2009, p. 2)

De lo expuesto anteriormente se puede entender que una unidad didáctica es una guía de trabajo donde está incluido todo lo necesario para realizar la aplicación de una investigación como lo es el tema, los objetivos, los tiempos, las actividades, los materiales, la evaluación…, es decir la planificación que conllevara a la ejecución del proyecto.

En el presente proyecto de investigación se realizó y se usó una unidad didáctica, debido a que está permite organizar adecuadamente las actividades y guías que se querían aplicar a los estudiantes, además de los recursos, el tiempo de ejecución y otras variables que son indispensables en el momento de una investigación.

4.2 INTRODUCCIÓN UD

El proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, en particular el concepto de área, está presente en la mayoría de los currículos, esto se afirma con los derechos básicos de aprendizaje de matemáticas emanados por el Ministerio de Educación Nacional en el 2015, donde en los diferentes grados está presente la temática correspondiente a la magnitud área. Estos derechos básicos de aprendizaje (DBA) son los temas indispensables que deben aprender los estudiantes. Por otro lado, la utilización de la resolución de problemas como herramienta para la enseñanza es indispensable y pertinente en la actualidad.

Hacia la búsqueda de una formación y estructura adecuada del concepto de área, partiendo de la resolución de problemas y teniendo en cuenta los conocimientos existentes y el marco teórico asumido en esta tesis, se diseñaron las actividades que se presentan en este capítulo,

4.3 OBJETIVOS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

- Construir el concepto de área, a través de actividades fundamentadas en el referente teórico presentado por esta tesis.
- Fomentar el aprendizaje autónomo y colaborativo
- Potenciar la utilización de conceptos y definiciones matemáticas en la solución de los problemas reto.
- Evaluar la estrategia didáctica de problemas reto a través del desempeño de los estudiantes.

4.4 ESTRUCTURA DE LAS ACTIVIDADES

Las actividades que se proponen propician la experimentación, la exploración y la búsqueda de la construcción del concepto de área, donde se estimula y se desarrolla el pensamiento métrico en los estudiantes.

Las actividades están diseñadas con la intención de tener problemas atractivos y motivadores para el estudiante. Se busca que el estudiante en el desarrollo de las mismas sea capaz de:

- Hallar soluciones a través del empleo de diferentes estrategias.

- Exponer los razonamientos matemáticos empleados de forma escrita o verbal y argumentar claramente la utilización de los mismos.
- Llegar a conclusiones y validar sus respuestas.

Estas actividades tienen como fin promover un aprendizaje autónomo en el estudiante, a desarrollar conocimientos fundamentales y a generar un aprendizaje profundo. Se pretende que con la utilización de diferentes actividades ylos problemas reto, se genere un ambiente de interés por el conocimiento matemático. La unidad didáctica se estructura con el fin de que los estudiantes vayan construyendo el concepto de área, desde actividades y problemas sencillos hasta actividades y problemas con mayor dificultad, promoviendo la explicación y razonamiento de los estudiantes al desarrollarlas.

El docente intervendrá cuando sea necesario y las condiciones lo ameriten para guiar la solución de los estudiantes a cada una de las actividades planeadas en el salón de clases.

Las actividades que se presentan están basadas en problemas retadores para favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de área, en estudiantes de grado sexto. En su mayoría se estructuran en objetivo, materiales y desarrollo de la actividad.

Las actividades se trabajarán en forma individual fomentando el trabajo autónomo y en forma grupal favoreciendo el trabajo colaborativo.

4.5 MOMENTOS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

La unidad didáctica está estructurada de manera que presenta tres momentos: ubicación, desubicación y reenfoque.Dentro de la unidad didáctica van problemas reto, obtenidos a partir de una revisión bibliográfica de pruebas y olimpiadas de matemáticas de la Universidad Antonio Nariño, Universidad del Valle, Universidad de Antioquia, pruebas Saber, Olimpiadas matemáticas de México y olimpiadas Canguro.

4.5.1 Ubicación

En este primer momento se identifican las ideas previas que poseen los estudiantes. Este momento se realizará en la primera sesión.

Sesión uno: Ideas previas

4.5.2 Desubicación

Este momento está compuesto por 6 sesiones que tienen el fin de llevar a los estudiantes a construir el concepto de área.

Sesión dos: área como cantidad de plano ocupado por la superficie

Sesión tres: El área como número de unidades que recubren la superficie

Sesión cuatro: El área como número de unidades que recubren la superficie a través del tangram

Sesión cinco: Deducción fórmulas de áreas (triangulo, rectángulo y cuadrado)

Sesión seis: El área y la forma de la superficie

Sesión siete: Descomposición de la superficie en partes iguales

4.5.3 Reenfoque

Este momento consta de dos sesiones. La primera sesión es la Evolución del momento 1, para analizar los cambios conceptuales en los estudiantes al implementar esta estrategia pedagógica, se aplica nuevamente la prueba inicial y desde esta se realiza el análisis respectivo. La segunda sesión es una prueba final basada en problemas retos.

Sesión 8: Evolución momento1

Sesión 9: Taller final

CAPITULO 5

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA PROPUESTA

Para el análisis de los resultados se trabajaron dos grandes categorías de acuerdo a la investigación, tomando los tres momentos que maneja la universidad: ubicación, desubicación y reenfoque. Las categorías que se trabajaron fueron: área y resolución de problemas reto, las cuales serán analizados a la luz del referente teórico. Estas categorías son a priori. Dentro de estas categorías se trabajaron dos subcategorías: construcción del concepto de área y la manera de abordaje de los problemas reto. La manera de analizar estas categorías fue tomar las actividades de las diferentes sesiones y seleccionar las preguntas que correspondían a cada una, para luego analizar detalladamente la opinión o el desempeño de los estudiantes en las diferentes preguntas de cada categoría.

Lo estudiantes por ser menores de edad y no tener el consentimiento de sus padres para incluir sus nombres en esta investigación, a cada estudiante se le asignara un código que será el mismo para todas las actividades. El código es la letra E seguida de un número.

Para tabular los resultados se tendrán en cuenta las respuestas de los estudiantes acerca de cada categoría en distintas sesiones, clasificándolas en:

Amarillo si poseen **todos** los elementos de la categoría, es decir si la respuesta es correcta y las opiniones si las hay, son claras y acertadas, Azul si poseen **algunos** elementos de la categoría, es decir, la respuesta contiene unos elementos verdaderos pero no suficientes para obtener una solución correcta. Rojo si **no tiene** elementos de la categoría, es decir la respuesta y las opiniones difieren totalmente de la solución correcta.

CATEGORÍAS

5.1 CATEGORÍA ÁREA

5.1.1 CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE ÁREA

5.1.1.1 UBICACIÓN

Sesión uno: Ideas previas

El objetivo de la prueba inicial es Identificar los saberes previos de los estudiantes de séptimo grado en la temática de área a través de la resolución de problemas.

Para realizar esta actividad, se diseñó una prueba inicial, desde la cual se analizaron los conceptos previos existentes en los estudiantes respecto al concepto de área y la manera de afrontar problemas reto, esta prueba se les aplicó a 36 estudiantes de grado séptimo de los cuales se tomó una muestra de 12 estudiantes, la prueba estaba diseñada con 9 preguntas, donde se evidenciaron falencias en la lectura e interpretación de las preguntas.

La prueba de ideas previas contiene preguntas que nos muestran el pensamiento que tienen los estudiantes acerca de la categoría de área.

Preguntas:

1.1 Cuando le nombran el concepto de área, usted en que piensa.

Está pregunta es abierta y se obtuvieron textualmente las siguientes respuestas (estudiante "E"):

"E1: concepto de área significa como cuando tus profesores te dictan el concepto del área"

“E2: para mí el área es parte del tangram con sus unidades”

“E3: es la que cuando uno cuenta lado y lado cuanto tiene”

“E4: cuando me hablan sobre área yo saco el concepto del espacio y sacamos el contorno de las figuras geométricas soco la base, la altura, el ancho”

“E5: Área pienso que es el volumen de una figura. Para saber su área se multiplica lado por lado y saco el área, que es el volumen de la figura”

“E6: pienso que son partes que se quitan como una unidad o un cuarto o un medio”

“E7: es la superficie de una figura”

“E8: para mi área es una parte de cada tangram”

“E9: es medir el área de un cuadrado o triangulo”

“E10: el área es la parte interior de una figura”

“E11: cuando nombran el concepto de área yo pienso en el área de la carretera”

“E12: es el centro de una figura o partes”

Grafico 1: Respuesta – pregunta 1.1 - ideas previas

Todos los elementos de la categoría

Algunos elementos de la categoría

No tienen elementos de la categoría

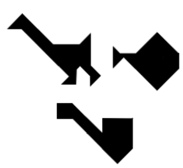
Es la superficie de una figura

Cuando me hablan sobre área yo saco el concepto del espacio y sacamos el contorno de las figuras geométricas saco la base, la altura, el ancho

Concepto de área significa como cuando tus profesores te dictan el concepto del área

Para resolver esta pregunta se dieron las pautas y las indicaciones necesarias para responderla. Las respuestas son variadas, E2 y E8 relacionan el área con una parte del tangram; E3, E4, E5, y E9 tiene una confusión entre área, volumen y perímetro; E1 menciona área como una asignatura, E6 y E12 menciona el área como partes; E11 relaciona el área con la extensión; E7 y E8 mencionan el concepto correctamente, es decir solamente un16,6% de los estudiantes de la muestra.

1.9 Cada una de las figuras que a continuación se te presentan se construyen con las siete piezas del tangram.



Responde de forma razonada a la siguiente pregunta: ¿tienen todas estas figuras la misma área, explica?

En la pregunta se obtuvieron las siguientes respuestas textuales:

“E1: no todos tienen la misma área, solo 2 tienen la misma área

“E2: no, porque tienen diferentes medidas”

“E3: no son iguales y el área no es la misma porque yo medí cada uno a ver si estaban iguales”

“E4: Todos no tienen la misma área porque si contamos sus vértices no nos da igual uno es de 15, 8, 9”

“E5: no tienen la misma área porque tienen diferentes lados unos mayores que otros”

“E6: no todos, no tienen la misma área porque son de diferentes tamaños y los puntos no son iguales”

“E7: no, porque cada una es diferente, por lo tanto no es la misma área”

“E8: no, porque todas tienen diferentes medidas”

“E9: no, porque no tienen la misma área correspondiente”

“E10: no todos tienen la misma área, porque una figura las tiene completa y la otra no sé, casi y la última más o menos.”

“E11: no porque no tiene la misma área”

“E12: si porque ninguna tiene área”

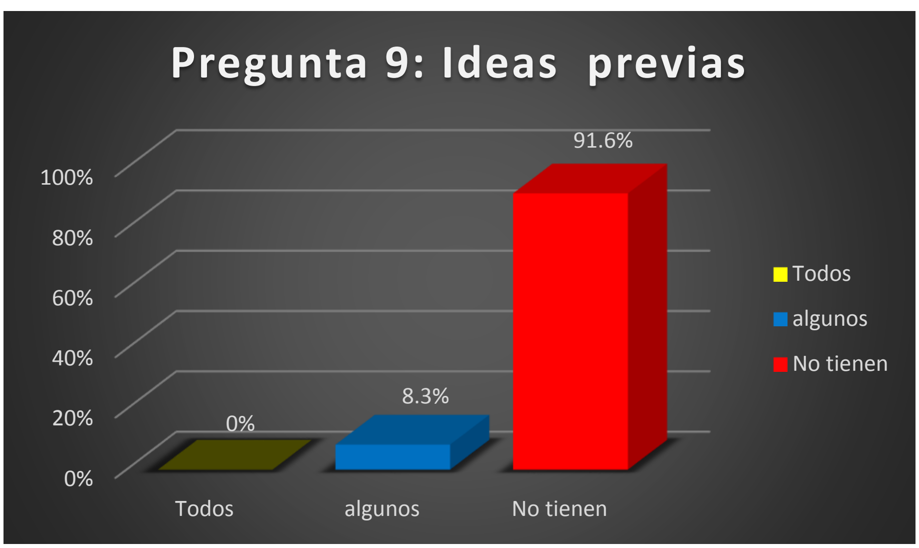


Grafico 2: Respuesta - pregunta 1.9 - ideas previas

Todos los elementos de la categoría
Algunos elementos de la categoría
No tienen elementos de la categoría

No todos tienen la misma área, solo 2 tienen la misma área

No todos, no tienen la misma área porque son de diferentes tamaños y los puntos no son iguales

La novena pregunta era abierta, y tenía la característica de mostrar si los estudiantes entendían y manejaban el concepto de la magnitud área. De las respuestas se pudo extraer que ninguno de los estudiantes contestó de manera correcta la pregunta, además las explicaciones mostraron que los educandos no tenían clara la conceptualización de área. Además, esta pregunta deja ver que los estudiantes no leen a profundidad por lo cual no entienden ni interpretan adecuadamente.

5.1.1.2 DESUBICACIÓN

En la parte de desubicación se realizaron siete sesiones, donde se encuentran comentarios de los estudiantes concernientes a la categoría de área, los cuales presento a continuación textualmente:

<u>SESIÓN 2: área como cantidad de plano ocupado por la superficie</u>

Pregunta

2.1 La casa de Paco y la de Hugo tienen un corral donde se crían las gallinas. Fundamenta tu respuesta ¿En cuál de los dos corrales hay más espacio para que se muevan las gallinas?

Figura 4.comparación de superficies

E1: "Según mi trabajo es más grande la B porque no me alcanzo el corral A para rellenar el B".

E2: "El corral que caben más gallinas es el A porque B con los pedacitos del papel sobraría espacio".

E3: "La primera granja es más pequeña que la segunda y hay más espacio para las gallinas".

E4: "En el corral A hay más espacio para las gallinas porque yo calque la b y la recorte y la pegue en la A en pedacitos y no me alcanzo los pedacitos de la B así que en la A hay más espacio"

E5: "La figura A es mayor que la B porque recorte la figura B y tapo todos los lados de la figura B y sobro".

E6: "En el corral A hay más espacio para las gallinas porque yo calque la B y la recorte y la pegue en la A en pedacitos y no me alcanzo los pedacitos de la B así que en la A hay más espacio".

E7: "El primero es más pequeño que la B en la B hay más espacio que la A"

E8: "El corral más grande es A porque B picándolo en cuadritos siguen quedando espacios en la A".

E9:"A, porqué hay más espacio para que se críen las gallinas porque si recortamos y pegas en la figura B veras que hay más espacio en la A".

E10: "En el corral hay más es espacio para las gallinas porque yo calque la B y la recorte y la pegue en la A en pedacitos y no me alcanzo los pedazos de la B así que la A es mayor".

E11: "El corral más grande es la de la b y tiene más espacio para que se muevan las gallinas. "

E12: "En el corral de paco es más grande porque mide más que el de Hugo"

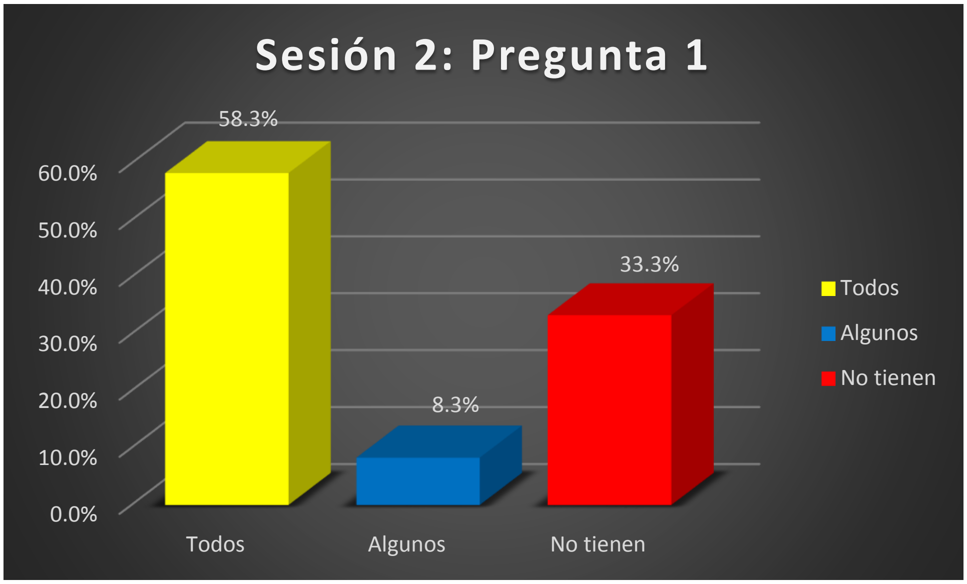


Grafico 3: Respuesta – pregunta 2.1 - área como cantidad de plano ocupado por la superficie

Todos los elementos de la categoría
Algunos elementos de la categoría
No tienen elementos de la categoría

En el corral A hay más espacio para las gallinas porque yo calque la b y la recorte y la pegue en la A en pedacitos y no me alcanzo los pedacitos de la B así que en la A hay más espacio

El corral que caben más gallinas es el A porque B con los pedacitos del papel sobraría espacio

corral más grande es la de la b y tiene más espacio para que se muevan las gallinas

En este punto de esta sesión, se pudo ver cómo los estudiantes como primer procedimiento para hallar la solución, trataron de medir las figuras A y B con el fin de saber cuál de ellas era la más grande, pero como eran figuras irregulares esto no fue nada fácil, además de que no los llevó a saber con claridad en cuál de las dos había más espacio. Después de ver que este procedimiento numérico no arrojaba resultados concisos, decidieron realizar un segundo procedimiento que fue el recorte inicial de las siluetas para realizar una comparación de las figuras. Al poner las figuras una encima de la otra, la comparación no era posible para determinar la diferencia de tamaños ya que una era alargada y la otra era como ovalada y ancha, por este motivo los estudiantes decidieron recortar la silueta de una de las figuras en pedacitos, para luego colocarla encima de la otra figura y observar si todos los pedacitos recubrían exactamente a la otra, o sobraba espacio o por lo contario los pedazos recubrían toda la figura sobrando algunos o saliéndose de esta.

La experiencia permitió ver el sentido de cooperación entre los estudiantes, pues siempre se prestaron el material entre sí, socializaban el procedimiento para fortalecer el desarrollo de la actividad. Se pudo además asimilar la idea de espacio de una figura, con el fin de que más adelante la asociaran con el área. Otro logro fue que los estudiantes imaginaron y conocieron otra forma de comparar el espacio de dos figuras a través de procedimientos no numéricos, que daban buena cuenta de la solución de la actividad.

A pesar que la actividad fue motivadora y que se obtuvieron significantes logros, también se presentaron dificultades como:

- Algunos estudiantes no tenían la motricidad, ni la paciencia y ni la finura para calcar las figuras, recortarlas y pegarlas encima de la otra, lo que les causaba dificultad para obtener la solución adecuada.
- El procedimiento numérico propuesto para la solución del problema por parte de algunos estudiantes, que consistía en la utilización de la regla para medir la longitud de los lados de una figura, no era conveniente, ni efectiva en figuras irregulares, además no era

pertinente para la solución del problema, debido a que son figuras no rectilíneas y la utilización de la regla no es efectiva a la hora de calcular el área de este tipo de figuras.

<u>SESION 3: El área como número de unidades que recubren la superficie</u>

3.5 ¿Cuántos cuadrados como el de la izquierda caben en el rectángulo de la derecha? ¿Cómo lo calculaste?

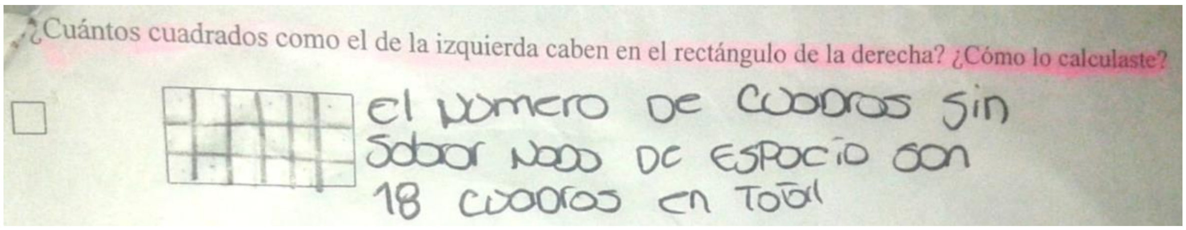


Figura 5. Recubrimiento de un rectángulo.

E1: "El número de los cuadros sin sobrar nada de espacio son 18 cuadros en total".

E2:"Caben 18 cuadros como el de la izquierda. Lo calculamos midiendo el cuadro de la izquierda y después medir el grande y así nos dio resultado".

E3:"Caben 6 en la izquierda 6 en la derecha"

E4:"Caben 21 cuadros lo calcule partiendo el rectángulo en tres partes iguales y comencé a separar los cuadritos".

E5:"16 y un medio de cuadros se necesitaron para cubrir el rectángulo, hay 15 cuadros iguales pero 3 a la mitad, uní 2 y quedo uno por fuera, quedando sola la mitad".

E6:"16 se midió el cuadro que mide 10 cm y sacamos la medida y lo hicimos y sacamos 16 cuadros".

E7:"hay que medir el cuadro pequeño para que quepan en el cuadro grande: 15".

E8:“Caben 18 cuadros como el de la izquierda. Lo calculamos midiendo el cuadro de la izquierda y después medir el grande así nos dio el resultado”.

E9:“15 porque si hago, los primero de arriba los cuento los multiplicamos por los de abajo.”

E10:“En el rectángulo caben 15 cuadros como el de la izquierda porque al medir el cuadro y ponerlo en el rectángulo caben 15 cuadros.”

E11:“Caben 16 veces se midió el cuadro se mide 10 cm y sacamos la medida”

E12:“En total son 18 cuadritos y los calcule haciendo el área”.

Grafico 4: respuesta – pregunta 3.5- El área como número de unidades que recubren la superficie

Todos los elementos de la categoría
Algunos elementos de la categoría
No tienen elementos de la categoría

Caben 18 cuadros como el de la izquierda. Lo calculamos midiendo el cuadro de la izquierda y después medir el grande así nos dio el resultado.

15 porque si hago, los primero de arriba los cuento los multiplicamos por los de abajo

Caben 6 en la izquierda 6 en la derecha

El punto 5 varia un poco de los anteriores puntos de la guía, ya que deben saber cuántas veces cabe un cuadrado pequeño en un rectángulo, que tiene la particularidad de que no está divido en cuadricula. La mayoría de estudiantes construyeron una cuadricula utilizando la medida del cuadrado pequeño, esto les ayudó a observar la cantidad de cuadrados que se utilizaban para llenar el rectángulo, además de establecer si la forma y el tamaño de estas figuras influía en la cantidad de superficie.

La actividad requiere el trabajo de escribir lo que se piensa o se hace. La pregunta le exige a los estudiantes que explique la manera como pensó la solución. Esta actividad es difícil ya que estamos acostumbrados en matemáticas solamente a realizar los procesos y algoritmos que nos lleven a la respuesta, pero muy pocas veces nos sentamos a escribir como lo hice, cuál fue mi manera de razonar. Por lo tanto, es un logro que el estudiante comience escribir sobre su manera de pensar. La mayoría de los estudiantes desarrollaron la actividad, pero no les fue nada fácil escribir de manera entendible y coherente el procedimiento realizado para la solución de este punto.

SESION 4: El área como número de unidades que recubren la superficie a través del tangram

Pregunta

4.8 Un triángulo equilátero se cubre de la siguiente manera. ¿Con cuántas fichas triangulares pequeñas se cubre la zona sombreada de gris? Justifica tu respuesta

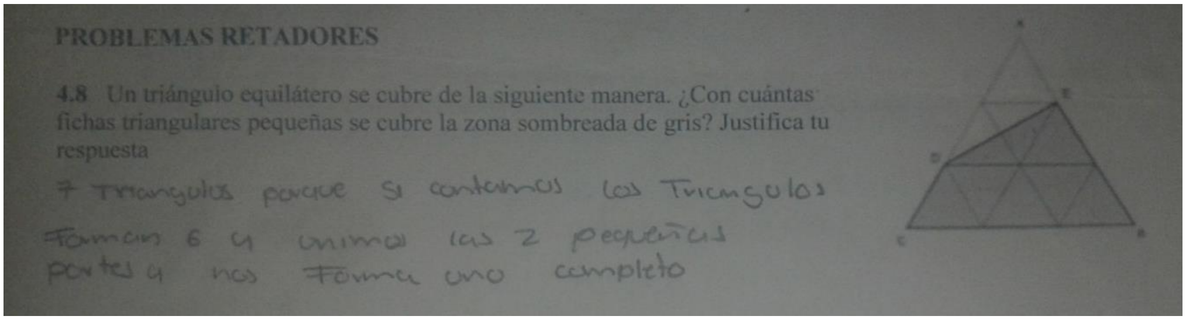


Figura 6. Problema retador 4.8.

E1: “serian 7 porque contando y resolviendo se lograra un resultado contando lo gris lo lograras”.

E2: “hay 6 triángulos pero las dos mitades que sobran se unen y quedan 7 triángulos”.

E3: “se cubren 6 y había medio triangulo y medio triangulo y los uni y me dio 7”.

E4:”7 Triángulos porque si contamos los triángulos forma 6 y unimos las 2 pequeñas partes nos forma uno completo”

E5:”Hay 7 triángulos pequeños en el área sombreada porqué hay 6 triángulos pequeños y dos mitades de triángulos, los uní, forman un triángulo entero, en la parte superior sombreada hay 2 triángulos y en la parte exterior hay 5 triángulos”.

E6: “son 7 porque al contar las dos mitades se puede crear el espacio para crear un triángulo”.

E7: “7, los triángulos más pequeños ocupan solo 1 porque están divididas en la mitad”.

E8:”Hay 7 triángulos porque si juntas las dos mitades van a hacer 1”.

E9: “los triángulos que cubren son 7 triángulos, porque hay 6 completos y 1 dividido y si los unen forman uno”.

E10: “en la área que esta sombreada hay 7, porque hay 6 completos y hay 2 mitades pero al unirlos forman un triángulo y en total serian 7”.

E11:”caben 8 triángulos en el área sombreada”

E12: “Hay 7 triángulos pequeños en el área sombreada porque hay 6 triángulos enteros y 1 de mitades”.

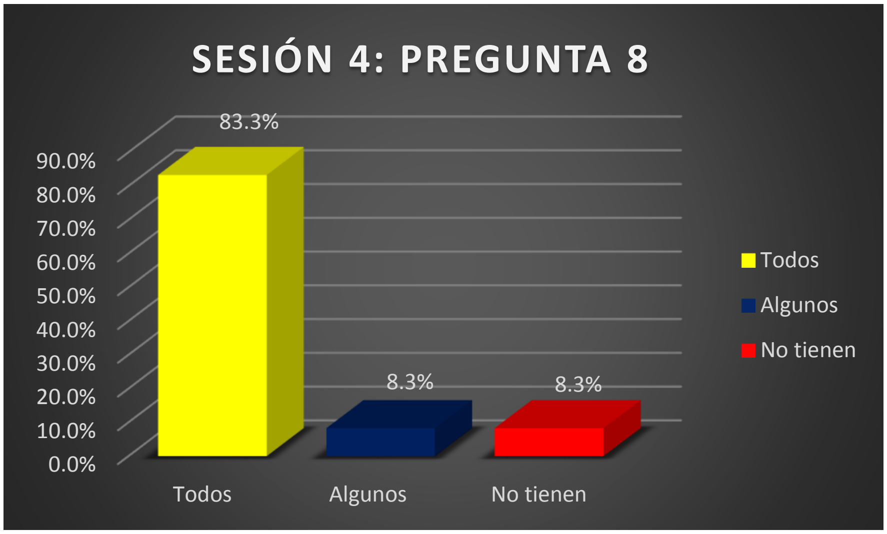


Grafico 5: respuesta – pregunta 4.8- El área como número de unidades que recubren la superficie a través del tangram

Todos los elementos de la categoría
Algunos elementos de la categoría
No tienen elementos de la categoría

7 Triángulos porque si contamos los triángulos forma 6 y unimos las 2 pequeñas partes nos forma uno completo

Serian 7 porque contando y resolviendo se lograra un resultado contando lo gris lo lograras

Caben 8 triángulos en el área sombreada

En este punto se observa que los estudiantes entendieron y resolvieron el problema adecuadamente. Un 83% respondió convenientemente dando una explicación clara y entendible, un 8% contesto de manera correcta pero no dio una explicación entendible y solamente un 8% tuvo la respuesta errada. Lo anterior nos muestra un avance en la explicación que realizan los estudiantes de sus procesos, lo cual conlleva a una formación del concepto de área.

SESION 5: El área y la forma de la superficie

5.4 ¿Cuáles de las siguientes figuras ocupan más superficie? Justifica la respuesta

Figura 7. Comparación de superficies con polígonos.

E1: "Si tienen la misma área porque dividen todos son iguales".

E2:"Todas tienen la misma superficie porque se mide el área de todas las figuras y son lo mismo".

E3:"Todas las figuras ocupan la misma superficie".

E4:"Todas son iguales porque si las separamos en cuadros nos da la misma cantidad".

E5:"Las cuatro figuras ocupan la misma área o superficie porque son diferentes formas pero siempre se dividen en 4 cuadros iguales".

E6:"Todas las figuras ocupan la misma cantidad"

E7:"Ninguna todas tienen la misma área: 4"

E8:"la 2 la 3 y al cuatro tienen la misma área si las mides ocupan el mismo espacio".

E9:"4 por más largo"

E10:"Si porque al tomar una medida igual y al ponerla a todas las figuras en total en cada figura hay cuadros ósea que si tienen la misma área, superficie"

E11:"La 3 tiene mayor superficie porque al medir es la mayor".

E12:“La 2 y la 3 y la cuatro tienen la misma área si las miden te darán iguales todas ocupan el mismo espacio y el mismo área porque ninguna tiene más que otra.”

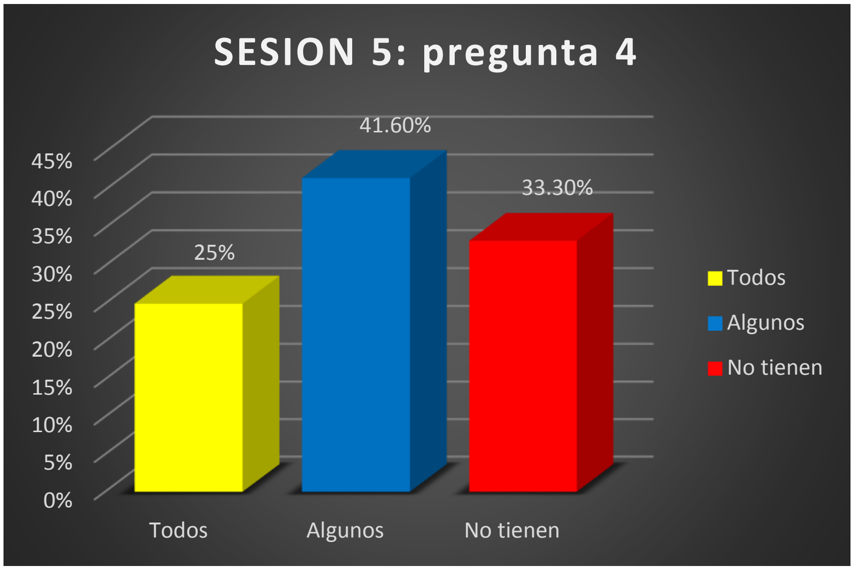


Grafico 6: respuesta – pregunta 5.4 - El área y la forma de la superficie

Todos los elementos de la categoría
Algunos elementos de la categoría
No tienen elementos de la categoría

Las cuatro figuras ocupan la misma área o superficie porque son diferentes formas pero siempre se dividen en 4 cuadros iguales.

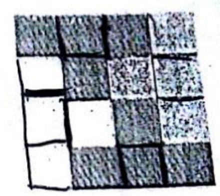
Todas las figuras ocupan la misma cantidad

La 3 tiene mayor superficie porque al medir es la mayor.

En el punto 4, lo estudiantes demostraron la habilidad que habían adquirido en las otras guías para comparar la superficie de diferentes figuras, primero tomaron una unidad de medida o un patrón para luego ubicar este patrón en todas las figuras para de este modo saber cuál tenia mayor o menor área. El 33,3% de los estudiantes desarrollaron de manera incorrecta la actividad, el restante porcentaje debido a la experiencia y la secuencia en el desarrollo de las guías de las sesiones anteriores, se enfrentaron con buena disposición y con mayor habilidad y destreza a las actividades, aunque con la dificultad de no expresar, ni escribir adecuadamente la solución y respuesta de este punto.

SESION SEIS: Descomposición de la superficie en partes iguales

6.10 Se ha divido un cuadrado en cuatro regiones iguales en área. ¿Qué se puede decir con respecto a la parte del cuadrado correspondiente a cada región?



6.8 Se ha divido un cuadrado en cuatro regiones iguales en área. ¿Qué se puede decir con respecto a la parte del cuadrado correspondiente a cada región?

Que tienen el mismo Area, que son 4 figuras y que tienen de a 4 cuadros.

Figura 8. Cuadrado dividido en regiones iguales.

E1: "son las mismas figuras así que tienen la misma superficie".

E2: "que todos tienen misma forma y misma área".

E3:"que cada región tiene igual forma e igual área".

E4: "que tiene la misma área, son 4 figuras que tienen de a 4 cuadrados"

E5:"se puede decir que las 4 figuras son iguales, ocupan el mismo espacio y es la misma fracción".

E6:"que tiene la misma área, son 4 figuras y que tienen de 4 cuadrados".

E7: "1= 4/16 2= 4/16 3= 4/16 4= 4/16"

E8: "que todos tienen igual forma y la misma área"

E9:"todas tienen la misma área, la misma figura y la misma superficie".

E10: "que tiene la misma área y son parecidos a una T"

E11: "que tiene la misma área, que son 4 figuras y que tienen de a 4 cuadros".

E12:"que tienen el mismo área, que son 4 figuras y que tiene 4 cuadrados"

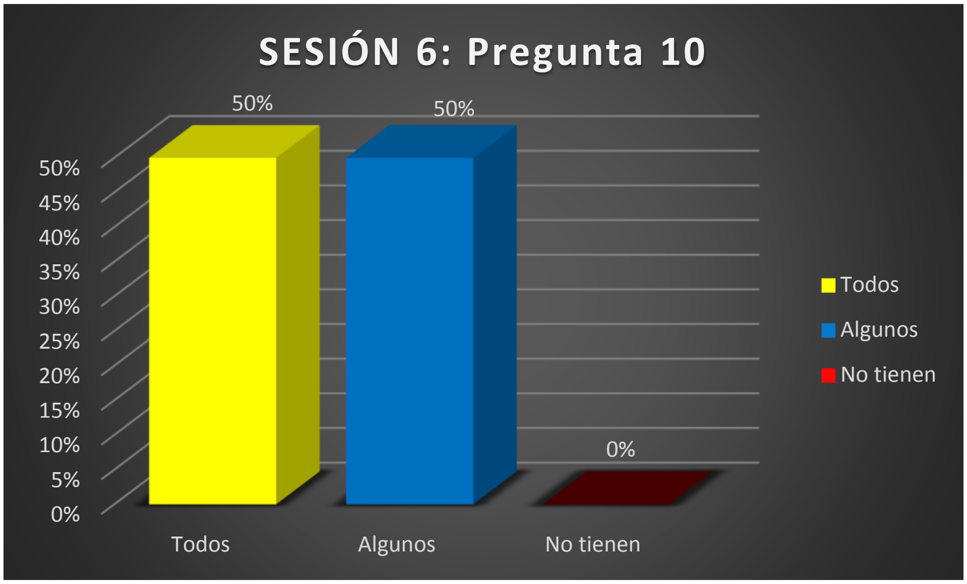


Grafico 7: respuesta – pregunta 6.10 - Descomposición de la superficie en partes iguales

Todos los elementos de la categoría
Algunos elementos de la categoría
No tienen elementos de la categoría

Puede decir que las 4 figuras son iguales, ocupan el mismo espacio y es la misma fracción.

Que tiene la misma área y son parecidos a una T

En este punto, debido a la experiencia adquirida por los estudiantes, todos se ubicaron en el color azul y en el color amarillo, lo cual muestra un avance en la categoría de área. La falla que se evidencia, para que todos no se encuentren en el color amarillo, es que el 50% probablemente realizaron adecuadamente el punto, pero no tuvieron la facilidad de expresar la manera de cómo pensaron y actuaron para darle solución.

<u>SESION 7: Deducción de fórmulas de área (triangulo, rectángulo y cuadrado)</u>

7.9 Calcula el área en centímetros cuadrados que recubren el triángulo de la figura, sabiendo que cada lado de los cuadrados pequeños miden 1.

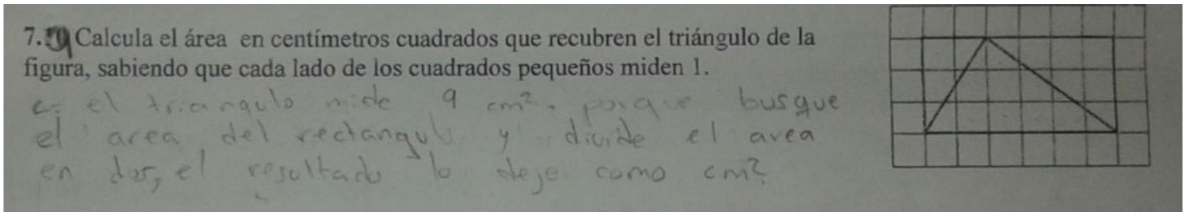


Figura 9. Cálculo del área en centímetros cuadrados.

E1:"El área del rectángulo es 22"

E2:"9cm^2"

E3:"hay 8"

E4:"10 cm"

E5:" El triángulo mide 9cm^2, porque busque el área del rectángulo y dividí el área en dos, y el resultado lo deje en cm cuadrados".

E6:"El área del rectángulo es de 22"

E7:"A: 18 cm de área y B: 9cm de área". B es el triángulo y A es la parte restante

E8: " 9"

E9:"13 cm"

E10:"el área del triángulo es de 22 cm"

E11:"el área del rectángulo es de 22"

E12:"porque el triángulo mide cm^2, lo hice contando los cuadros y los que quedaron unirlos con los otros y nos darán 9"

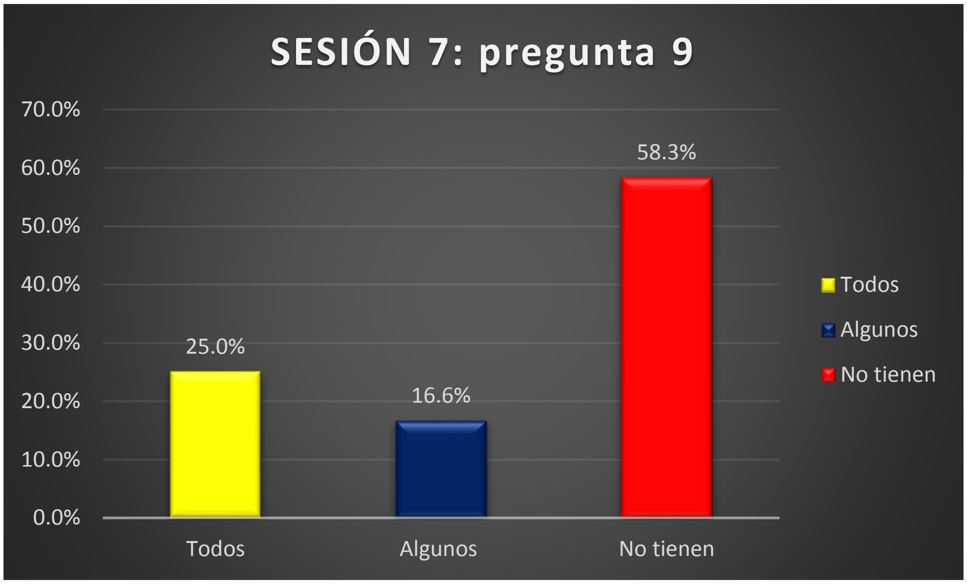


Grafico 8: respuesta – pregunta7.9 -Deducción de fórmulas de área (triangulo, rectángulo y cuadrado)

Todos los elementos de la categoría
Algunos elementos de la categoría
No tienen elementos de la categoría

El triángulo mide 9cm^2, porque busque el área del rectángulo y dividí el área en dos, y el resultado lo deje en cm cuadrados.

A: 18 cm de área y B: 9cm de área". B es el triángulo y A es la parte restante

El área del rectángulo es de 22

En el problema 9, se observó cómo los estudiantes buscaron un camino correcto para obtener la respuesta, esto fue tomando como unidad el cuadrado y contando cuantas unidades habían en el total de la figura; pero el 58, 3% no leyeron detenidamente la pregunta del problema ya que respondieron sobre el área del cuadrado y no sobre la del triángulo que estaba dentro, que era lo que se preguntaba. Otra falencia que se observo fue que los educandos en sus respuestas solo colocaban el número de cuadrados que había en la figura y no ponían la medida cm^2, lo cual también hacia parte la respuesta. El 16,6 % de los estudiantes colocaron la cantidad correcta de cuadraditos que recubren al triangulo, pero les falto las unidades dadas en cm^2, solamente 25% obtuvieron la respuesta correcta como la pedía el problema.

5.1.1.3 REENFOQUE

En este apartado se analizaron los resultados, de la prueba inicial, es decir la prueba de ideas previas aplicada en la primera sesión, comparándola con la Evolución del momento 1 realizada en la sesión ocho, lo cual nos da un reflejo sobre el impacto de la aplicación de esta investigación.

SESION 8: Evolución del momento 1

En el momento de reenfoque se aplicó la prueba de la Evolución del momento 1 en la sesión ocho que fue la misma de ideas previas, resuelta en la primera sesión, esto con el fin de comparar los resultados, después de un trabajo de siete sesiones.

A continuación se describe textualmente lo que respondieron los estudiantes referentes a esta categoría.

Preguntas:

8. 1 Cuando le nombran el concepto de área, usted en que piensa

- E1: **Inicial:** "concepto de área significa como cuando tus profesores te dictan el concepto del área". **Evolución:** "yo pienso que es el área que ocupa una figura"
- E2: **Inicial:** "para mí el área es parte del tangram con sus unidades". **Evolución: "**yo pienso que el área de cada figura se hace sumando lado x lado le da el resultado del área de la figura o si no haciendo una gráfica de cuadrados y se cuentan los cuadrados".

- E3: **Inicial:** “es la que cuando uno cuenta lado y lado cuanto tiene” **Evolución: “**es cuando uno calcula o cuenta lo de un cuadrado etc., el relleno”.
- E4: **Inicial:** “cuando me hablan sobre área yo saco el concepto del espacio y sacamos el contorno de las figuras geométricas soco la base, la altura, el ancho” **Evolución:** “pues el área es la superficie de una figura que se compone de base, alto, ancho”.
- E5: **Inicial:** “Área pienso que es el volumen de una figura. Para saber su área se multiplica lado por lado y saco el área, que es el volumen de la figura” **Evolución:** “Es el espacio o superficie que ocupa una figura”
- E6: **Inicial:** “pienso que son partes que se quitan como una unidad o un cuarto o un medio”. **Evolución:** “creo que es una figura con espacio, lo que tiene por dentro, es el área que ocupa y llena una figura”.
- E7: **Inicial:** “es la superficie de una figura”. **Evolución: “**es el espacio que se ubica en la figura”
- E8: Natalia Arévalo; **Inicial:** “para mi área es una parte de cada tangram” **Evolución: “**es el espacio que ocupa una figura”.
- E9: **Inicial:** “es medir el área de un cuadrado o triangulo”. **Evolución: “**es la línea de un cuadrado”
- E10: **Inicial:** “el área es la parte interior de una figura” **Evolución: “**Es el espacio que ocupa una figura”
- E11 **Inicial:** “cuando nombran el concepto de área yo pienso en el área de la carretera”. **Evolución: “**el área es lo que está dentro de la figura”.
- E12: **Inicial:** “es el centro de una figura o partes”. **Evolución: “**es el espacio que

ocupa una figura, la superficie"

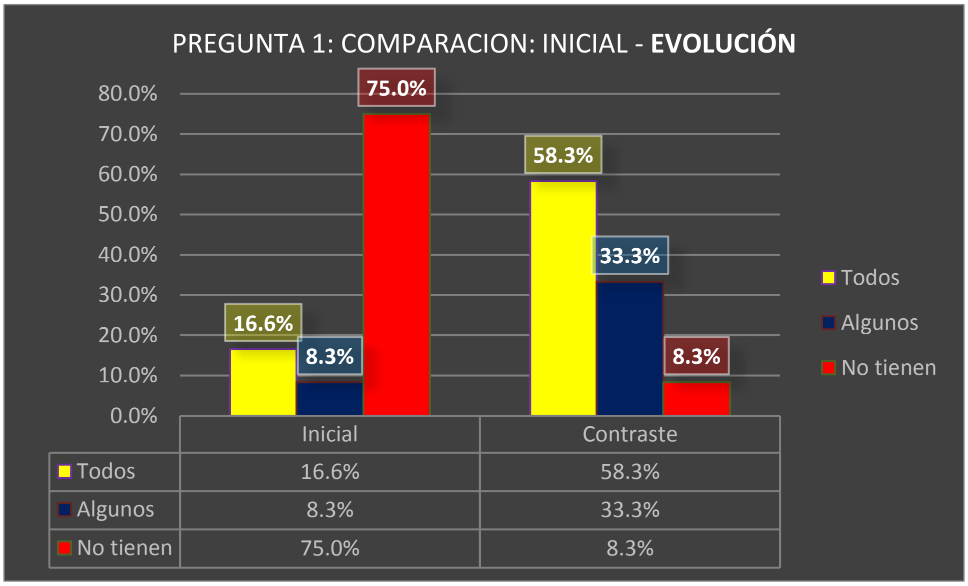


Grafico 9: comparación – pregunta 8.1 – prueba de Evolución y prueba inicial.

Todos los elementos de la categoría
Algunos elementos de la categoría
No tienen elementos de la categoría

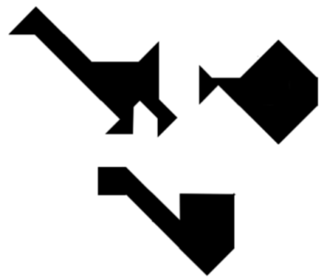
el espacio o superficie que ocupa una figura

Pues el área es la superficie de una figura que se compone de base, alto, ancho

Es la línea de un cuadrado

En esta pregunta se puede evidenciar como lo estudiantes cuando les hablan sobre área lo relacionan con el espacio que ocupa una figura, lo que está dentro de ella. Ellos tienen en su pensamiento debido a las actividades de anteriores sesiones, tomar una unidad y ver cuántas veces cabe en una figura, lo que les da la noción de área. Con la implementación de esta estrategia fue posible que la mayoría de estudiantes tuvieran una noción de área, pasando de un 16,6 % con respuesta acertada en la prueba inicial a un 58,3% con respuesta acertada en la prueba de evolución del momento 1, además se logró bajar de un 75% de estudiantes que no poseían ningún elemento de la categoría de área en la prueba inicial a un 8% en la prueba de evolución del momento 1, lo cual se debe considerar como un avance en esta categoría.

8.9 Cada una de las figuras que a continuación se te presentan se construyen con las siete piezas del tangram.



Responde de forma razonada a la siguiente pregunta: ¿tienen todas estas figuras la misma área, explica?

La pregunta es abierta en donde se obtuvieron las siguientes respuestas:

- E1: **Inicial: "**no todos tienen la misma área, solo 2 tienen la misma área".
  Evolución: "si tiene la misma área".
- E2: **Inicial: "**no, porque tienen diferentes medidas". **Evolución:** "si porque todos tienen la misma área"
- E3: **Inicial:** "no son iguales y el área no es la misma porque yo medí cada uno a ver si estaban iguales". **Evolución:** "si tiene la mismas fichas."
- E4: **Inicial: "**Todos no tienen la misma área porque si contamos sus vértices no nos da igual uno es de 15, 8, 9". **Evolución:** "si porque si son construidas con las 7

piezas del tangram pues todas tienen la misma área"

- E5: **Inicial: "**no tienen la misma área porque tienen diferentes lados unos mayores que otros". **Evolución: "si** porque todas las figuras tienen 7 piezas, que hace que tengan la misma área".
- E6: **Inicial: "**no todos, no tienen la misma área porque son de diferentes tamaños y los puntos no son iguales". **Evolución:** "si porque todas las figuras están con las mismas piezas".
- E7: **Inicial: "**no, porque cada una es diferente, por lo tanto no es la misma área". **Evolución:** "si porque todas las figuras están construidas por las 7 piezas, todas son iguales de área"
- E8: **Inicial: "**no, porque todas tienen diferentes medidas". **Evolución:** "si porque todas tienen la misma área"
- E9: **Inicial: "**no, porque no tienen la misma área correspondiente". **Evolución:** "si, porque utilizas todas las piezas del tangram"
- E10: **Inicial: "**no todos tienen la misma área, porque una figura las tiene completa y la otra no sé, casi y la última más o menos." **Evolución:** "si, son diferentes figuras pero son iguales porque utilizan las mismas partes del tangram"
- E11: **Inicial: "**no porque no tiene la misma área" **Evolución:** "si porque todas las piezas están hechas con las mismas piezas"
- E12: **Inicial: "**si porque ninguna tiene área". **Evolución: "**si porque todas las figuras se realizan con las mismas fichas solo que en diferente orden, pero todas tienen la misma área o sea todas tienen 7 fichas"

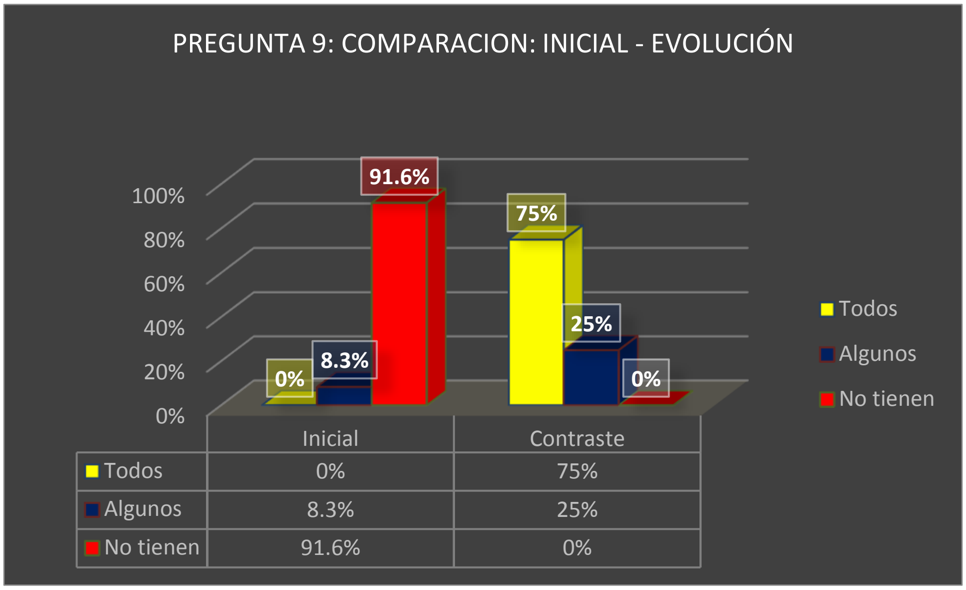


Grafico 10: comparación – pregunta 8.9 – evolución momento 1 y prueba inicial.

Todos los elementos de la categoría
Algunos elementos de la categoría
No tienen elementos de la categoría

porque todas las figuras están construidas por las 7 piezas, todas son iguales de área.

Si tiene la misma área

Esta pregunta nos deja ver en gran medida el impacto de la estrategia en los estudiantes, donde se puede observar si los estudiantes han asimilado el concepto de área como la superficie de una figura. Los resultados muestran que en la prueba inicial, es decir en la sesión de ideas previas, ningún estudiante dio una respuesta acertada a la pregunta que se le estaba haciendo en este punto, pero en la prueba de evolución momento 1 después de varias actividades el 100% de los estudiantes contestaron acertadamente, con un 75% que justificaron su respuesta, lo que nos lleva a concluir que los educandos han asimilado y comprendido a lo que se refiere cuando se les habla del área de una figura. Ellos a través de su experiencia y esfuerzo comprenden que la superficie está relacionado con el espacio que ocupa una figura.

RECURRENCIA: CATEGORÍA ÁREA

En este apartado se analizara las situaciones, actitudes, mecanismos y procesos que los estudiantes repitieron o se manifestaron frecuentemente en el desarrollo de las diferentes actividades., respecto a esta categoría.

En la pregunta 1, de la sesión de ideas previas nos permite observar que la mayoría de los estudiantes no poseen elementos de esta categoría, ya que sus respuestas evidencian que están equivocados en la concepción que tienen sobre la magnitud área. El punto 9 de esta misma sesión reafirma que no tienen claro el concepto y por lo tanto no saben no como, ni en qué momento se aplica. En la pregunta 1 de la sesión dos: área como cantidad de plano ocupado por la superficie, se inicia el proceso para que el estudiante comience a construir el concepto de área, donde el trabajo manual, permito en primer lugar despertar el interés por la clase y como segundo sustentar una respuesta en base a lo que habían hecho.

En la pregunta 5 de la sesión tres: el área como número de unidades que recubren la superficie, se observa que los estudiantes comienzan a utilizar un método grafico para hallar el área, que consiste en dividir la figura en una unidad patrón y luego contar cuantas unidades hay en todo la figura, aunque sin tener todavía mayor precisión. En la pregunta 8 de la sesión 4: El área como número de unidades que recubren la superficie a través del tangram, para el desarrollo del punto los estudiantes buscaron una unidad patrón, para luego inferir que el área de la región era las veces que estaba esa unidad patrón dentro de esta, lo cual fue muy acertado y lógico.
En la pregunta 5 de la sesión 5: El área y la forma de la superficie, los estudiantes debían

comparar áreas de tres figuras, para ello utilizaron el método que venía siendo recurrente en las actividades anteriores, entonces buscaron una unidad y dividieron las tres figuras para ver cuál podía contener más, pero un error que cometían era que la unidad no la hacía del mismo tamaño, lo cual generaba errores para la respuesta. En el punto 10 de la sesión seis: Descomposición de la superficie en partes iguales, también se trataba de hacer la comparación del área de cuatro regiones de un cuadrado, en lo cual reafirmaron el método que venían trabajando para hallar áreas, ya que les proporcionaba mayor facilidad y seguridad para encontrar la respuesta.

En el punto 9 de la sesión 7: Deducción de fórmulas de área (triangulo, rectángulo y cuadrado), los estudiantes se encontraron con una dificultad y era que a la unidad patrón que se tenía para hallar el área, le daban una medida, lo cual les generó confusión debido a que están acostumbrados a un proceso repetitivo debido a su formación tradicional y cuando les toca hacer algo diferente muy pocos se toman el tiempo para razonarlo y buscarle la solución. En el punto 1 y en el punto 9, de la prueba de evolución del momento 1, de acuerdo a los resultados obtenidos, se verifica que la mayoría de los estudiantes construyeron y comprendieron el concepto de área.

Dentro de lo analizado en la categoría de área, se puede evidenciar que los estudiantes al inicio de la investigación tenían muy poco conocimiento sobre el concepto de esta magnitud, al realizar la pregunta en la prueba inicial sobre este aspecto solamente el 16,6 % contesto correctamente, y al colocar un ejemplo en el punto 9 de esta misma prueba donde la respuesta iba ligada al conocimiento del concepto de la magnitud área, ningún estudiantes logro contestar correctamente. Al iniciar el desarrollo de las guías después de haber aplicado la prueba inicial, se observó que los estudiantes fueron evolucionando en la conceptualización de esta magnitud, donde de manera repetitiva se evidencio en el desarrollo de las guías de los momentos de desubicación y reenfoque, que los estudiantes para hallar el área siempre buscaban una unidad o patrón que recubriera totalmente la superficie de la figura. Esta era la idea general y repetitiva de los estudiantes para hallar el área en muchas actividades, lo cual en algunas ocasiones era causante de dificultad, debido a que no tenían ninguna pieza como unidad para cubrir la figura, y por lo tanto quedaban atascados y no buscaban otros mecanismos para hallar el área.

5.2 CATEGORÏA: RESOLUCION DE PROBLEMAS RETO

5.2.1MANERA DE ABORDAJE DE LOS PROBLEMAS RETO

En esta categoría se analizaran problemas retos de los diferentes momentos: ubicación, desubicación y reenfoque, teniendo en cuenta los resultados, los aportes y la manera de abordaje de estos por parte de los estudiantes.

5.2.1.1 UBICACIÓN

<u>SESIÓN UNO: Ideas previas</u>

Pregunta:

1.2 ¿Cuál de las áreas es mayor?

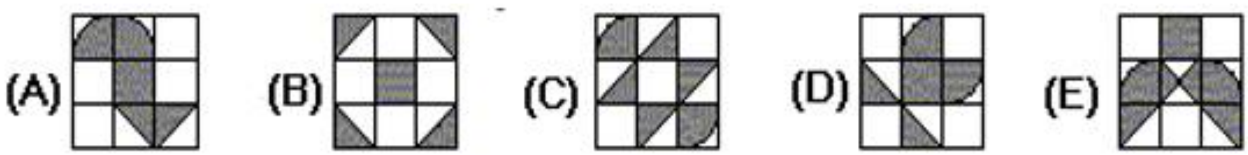


Figura 10. elección del área mayor

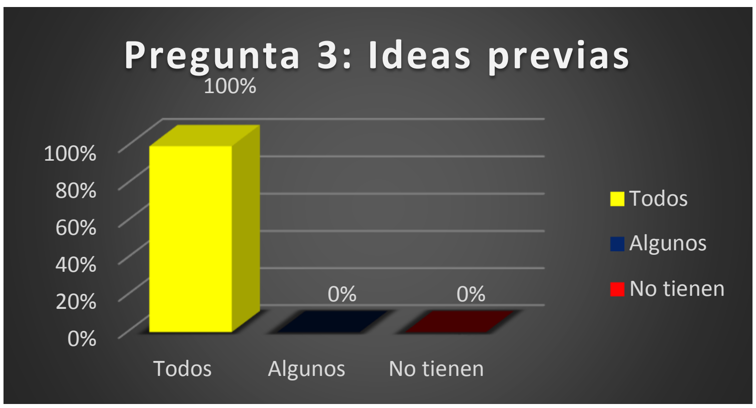


Grafico 11: respuestas-pregunta 1.3, ideas previas

Respuestas	N° Estudiantes
A	
B	
C	
D	
E	12
NO RESPONDE	

Tabla 1: respuestas pregunta 1.3

Todos los elementos de la categoría
Algunos elementos de la categoría
No tienen elementos de la categoría

En la tercera pregunta de la guía de ideas previas, la cual era de selección múltiple con única respuesta, los estudiantes no tenían claro qué debían hacer, porque no comprendían el concepto de área, pero al explicar la actividad y dar muy detalladamente las indicaciones, todos los estudiantes realizaron la actividad, y por la respuestas obtenidas donde el 100% marco la respuesta acertada, se concluye que los estudiantes estuvieron muy receptivos a las indicaciones. Aunque otro aspecto que se debe tener en cuenta cuando los estudiantes presentan pruebas y más de selección múltiple con única respuesta, es que muchos no tienen confianza en sus conocimientos y análisis, lo cual los lleva a copiarse de la respuesta de uno de sus compañeros, aun sabiendo que esta prueba no tenía una implicación numérica en su nota.

1.4¿Cuál de las piezas de abajo hay que añadir al cuadrado (incompleto) de la figura para que las áreas blanca y negra sean iguales?

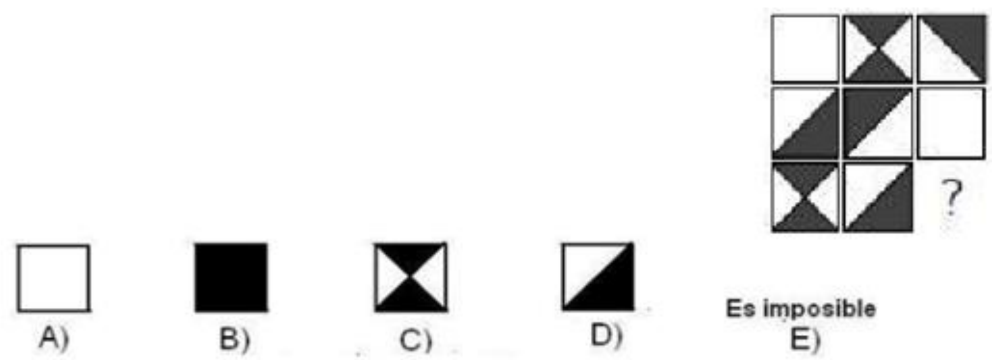


Figura 11. Ilustración punto 1.4

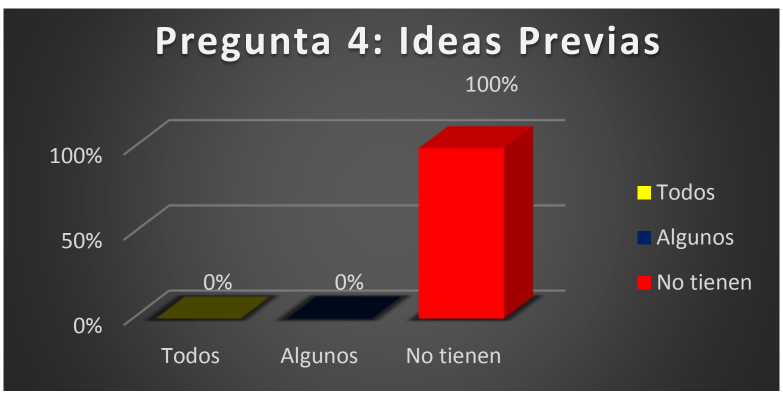


Grafico 12: Respuesta – pregunta 1.4 – ideas previas.

1. Respuestas	N° Estudiantes
A	
B	3
C	2
D	7
E	
NO RESPONDE	

Tabla 2: respuesta pregunta 1.4

Todos los elementos de la categoría
Algunos elementos de la categoría
No tienen elementos de la categoría

En la cuarta pregunta ninguno de los estudiantes obtuvo la respuesta acertada, lo cual es muy desconcertante ya que en la anterior pregunta que tiene la misma estructura todos contestaron acertadamente. Un aspecto que se debe considerar fue por la explicación detallada que se efectuó en la anterior pregunta, lo cual no se realizó en este punto ya que se presumía que con la explicación anterior era suficiente, además los estudiantes no solicitaron ilustración en este punto. Otro detalle a considerar es que aunque el problema tiene la misma estructura que el anterior, la forma de plantearlos fue diferente, lo cual posiblemente causo confusión en los estudiantes, y por esto los resultados de los dos problemas fueron tan diferentes.

5.2.1.2DESUBICACIÓN

En este momento se realizaron siete sesiones, donde al final de cada actividad, se desarrollaban específicamente problemas retadores, enfocados en el tema de especifico de la guía. Se escogerán problemas retadores de las diferentes sesiones donde se analizaron la respuesta y lo escrito textualmente por los estudiantes (E)

<u>SESIÓN 2: área como cantidad de plano ocupado por la superficie</u>

Pregunta

2.7 ¿Imagínate que estos son dos pasteles y tú tienes mucha hambre?, ¿cuál preferirías tener? ¿Por qué dices eso?

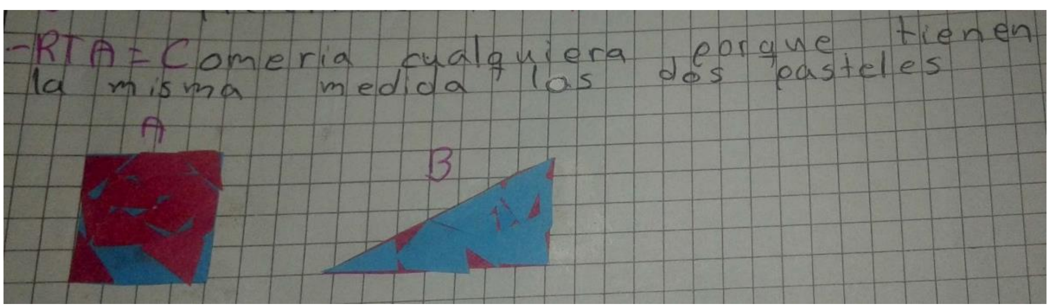


Figura 12. Problema reto 2.7.

E1: “el B porqué es más grande. La conclusión que sacamos recortando, calcando y pegando por pedacitos”.

E2: “Comería cualquiera porque tienen la misma medida los dos pasteles”

E3: “La A es más grande para comer, la diferencia es que la A mide 20 cm y la B 1,3cm”.

E4: “Cualquiera de los dos, porqué si los corto y los recojo en una loza me dará la misma cantidad”.

E5: “cualquier pastel me comería porque son iguales, cada figura sus lados son iguales”.

E6: “Me gustaría tener el B porque es más grande y más ancho que el A”

E7:”B es más grande que A, la suma de sus lados da su área”

E8: “Me prefiero comer la A porque es más grande que la B”.

E9: “B, porque es más grande, además si lo mides es más grande que la A”.

E10: “la A es más grande”

E11: “Yo elegiría la B porqué mide más centímetros que la otra”

E12: “cualquier pastel me comería porque son iguales, cada figura sus lados son iguales, aunque si tuviera mucha hambre me comería los 2 porque pues tengo mucha hambre”

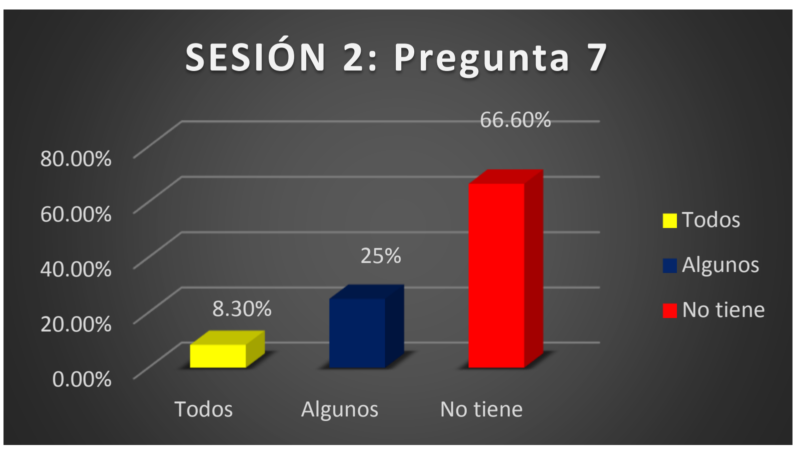


Grafico 13: respuestas – pregunta 2.7 - área como cantidad de plano ocupado por la superficie

Todos los elementos de la categoría
Algunos elementos de la categoría
No tienen elementos de la categoría

Comería cualquiera porque tienen la misma medida los dos pasteles

Cualquier pastel me comería porque son iguales, cada figura sus lados son iguales

Yo elegiría la B porqué mide más centímetros que la otra

En este punto los estudiantes se dejaron guiar por la percepción visual, por el que ellos consideraban que era el más grande, lo cual llevo a que un 66.6% tuvieran una respuesta errónea, el demás porcentaje trato de hacer procedimientos como medir los lados de las figuras, construir un cuadro en el triángulo con las mismas medidas del que está en la izquierda, y otros intentaron cubrir un pastel recontando en cuadritos una figura para llenar la otra, todo esto con el fin de obtener la solución.

SESION 3: El área como número de unidades que recubren la superficie

3.8 ¿cuáles dos piezas de la derecha hay que usar para cubrir exactamente el área no cuadriculada de la figura de la izquierda? Justifica tu repuesta

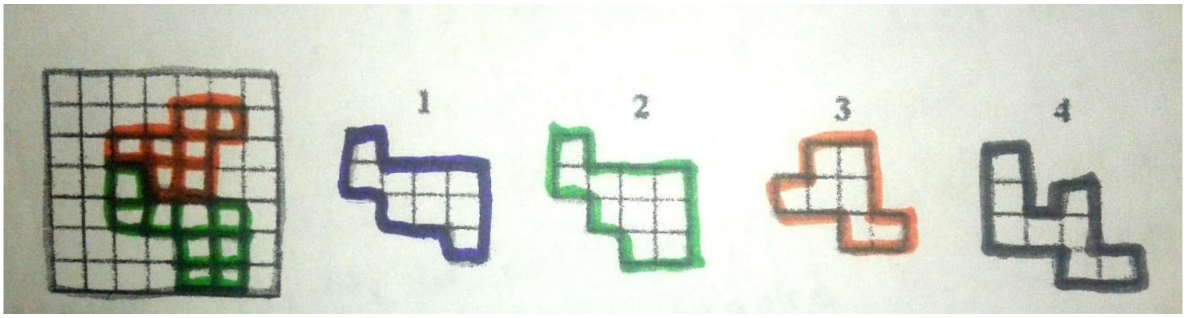


Figura 13. Piezas para cubrir parte del área.

E1: "Se utiliza la número 1 abajo y la 3 calcándola hacia arriba"

E2:" Utilice la figura N° 2 y la N° 3, si no que la figura N°3 toca voltearla"

E3:"la 2 es la que encajaba"

E4:"2, porque tenemos que diseñar los cuadrados de la figura y así podemos saber cuántas son"

E5:"La figura 2 y 3 son las que se necesitan para cubrir exactamente el área, use el número de las figuras y las voltee para encajar"

E6:" 2 y 4, porque es casi todo el cuadrado y la que ocupa más espacio"

E7:”la 2 pero no cubren ninguna totalmente”

E8:”se utilizaron la 2 y la 3 para cubrir la parte de área que está en blanco”

E9:” 2 y 3, si las une da en el cuadrado”

E10: No respondió

E11:” 2, porque es casi todo el cuadrado y la que ocupa más espacio”

E12:”la cuatro es la que cubre más área”

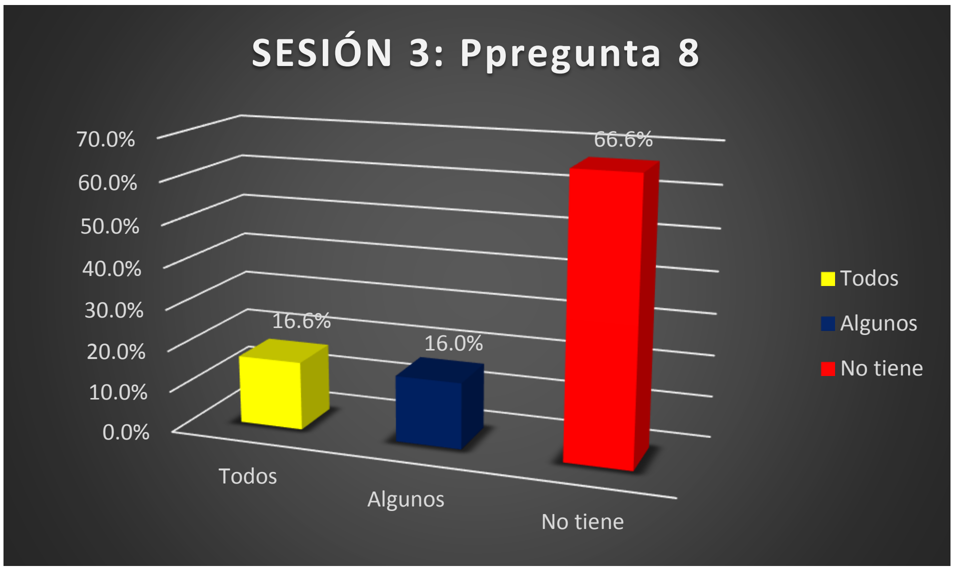


Grafico 14: respuesta – pregunta 3.8 - El área como número de unidades que recubren la superficie

Todos los elementos de la categoría
Algunos elementos de la categoría
No tienen elementos de la categoría

Utilice la figura N° 2 y la N° 3, si no que la figura N°3 toca voltearla

Se utilizaron la 2 y la 3 para cubrir la parte de área que está en blanco

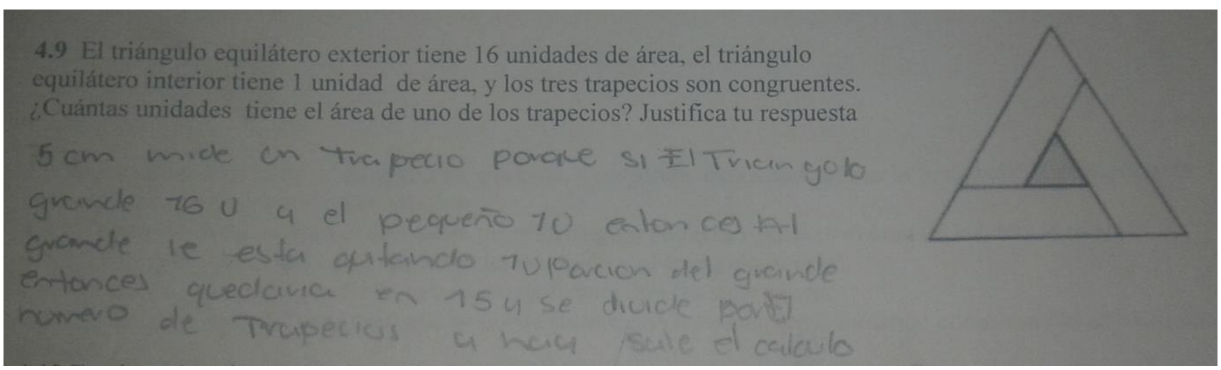
La cuatro es la que cubre más área

Los estudiantes construyeron la cuadricula faltante de la figura con el fin de observar cuales eran las dos piezas que servían para cubrir exactamente el espacio del cuadrado. El 66.6% de los estudiantes no logro realizar la actividad. El procedimiento general que realizaron fue completar la cuadricula del cuadrado, para luego observar cual o cuales figuras servían para llenar el espacio. La dificultad que se evidencio en los estudiantes fue la falta de habilidad para girar la figura, lo cual era esencial para obtener la respuesta.

<u>SESION 4: El área como número de unidades que recubren la superficie a través del tangram</u>

Pregunta

4.9 El triángulo equilátero exterior tiene 16 unidades de área, el triángulo equilátero interior tiene 1 unidad de área, y los tres trapecios son congruentes. ¿Cuántas unidades tiene el área de uno de los trapecios? Justifica tu respuesta



4.9 El triángulo equilátero exterior tiene 16 unidades de área, el triángulo equilátero interior tiene 1 unidad de área, y los tres trapecios son congruentes. ¿Cuántas unidades tiene el área de uno de los trapecios? Justifica tu respuesta

5 cm mide un trapecio porque si El Triangulo grande 16 U y el pequeño 1U entonces Al grande le esta quitando 1U porcion del grande entonces quedaria en 15 y se divide por el numero de Trapecios y hay /sale el calculo

Figura 14. Problema reto 4.9.

E1: “Cada uno tiene un área de 5 divide las 16 y te dan los resultados de cada uno el pequeño tiene 1 unidad”.

E2: “Hay 5 unidades de área en el trapecio, lo calcule haciendo de la unidad 1 en un trapecio y contar cuantas da el resultado”.

E3: “El trapecio 1 midió 5 unidades el trapecio 2 midió 5 y el trapecio midió 5 como lo hice si triangulo mide 1 entonces comencé a rellenar uno por uno y así lo hice y midió 16”.

E4: “5 cm mide un trapecio porque si el, triángulo grande16 y el pequeño 10 entonces al grande le está quitando 10 porción del grande entonces quedaría en 15 y se divide por el número de trapecios y hay sale el cálculo”.

E5: “Cada trapecio tiene 5 triangulos como la de la figura del anterior, ese triángulo tiene 1 cm y el largor del exterior trapecio de la figura es de 3cm y el interior que mide 2cm los tres trapecios juntos caben 15 triángulos pequeños”.

E6: “Por ejemplo cada trapecio tiene 5 unidades de el ejemplo de la mitad y entonces puede haber 15 unidades menos la de la mitad”

E7: “5 si divide uno de los trapecios en triangulos podrá saber el área de uno o todos el triángulo completo 15 unidades.”

E8: “El área del trapecio son cinco cada uno y el triángulo son 16 y el interior tiene uno porque solo hay un triángulo de los que caben en el exterior”.

E9: “El área de los trapecios son de cinco triangulos de unidad y entre todo el triángulo son 16 triangulos”.

E10: “La unidad que tiene cada uno de los trapecios es de cinco unidades”.

E11: “Caben 15 en el triángulos por que están divididos en triángulos”.

E12: “Cada trapecio tiene cinco unidades de triangulo, el triángulo del centro tiene una unidad, en los tres trapecios juntos caben 15 unidades de triángulos”.

Grafico 15: respuesta – pregunta 4.9 - El área como número de unidades que recubren la superficie a través del tangram

Todos los elementos de la categoría
Algunos elementos de la categoría
No tienen elementos de la categoría

Cada trapecio tiene cinco unidades de triangulo, el triángulo del centro tiene una unidad, en los tres trapecios juntos caben 15 unidades de triángulos.

Hay 5 unidades de área en el trapecio, lo calcule haciendo de la unidad 1 en un trapecio y contar cuantas da el resultado

Caben 15 en el triangulos por que están divididos en triángulos.

En la respuesta de los estudiantes a esta pregunta se muestra que el 8.3% carece de elementos verdaderos, el porcentaje restante de los educandos buscaron maneras creativas para obtener la solución, como dividir las figuras en partes, con el fin de comprender y darle solución al problema.

SESION 5: El área y la forma de la superficie

5.9 Un triángulo rectángulo isósceles se subdivide en dos regiones como se muestra.

5.9.1 ¿Las dos regiones representan la misma área? explica

5.9.2 ¿Qué criterio uso para tal comparación?

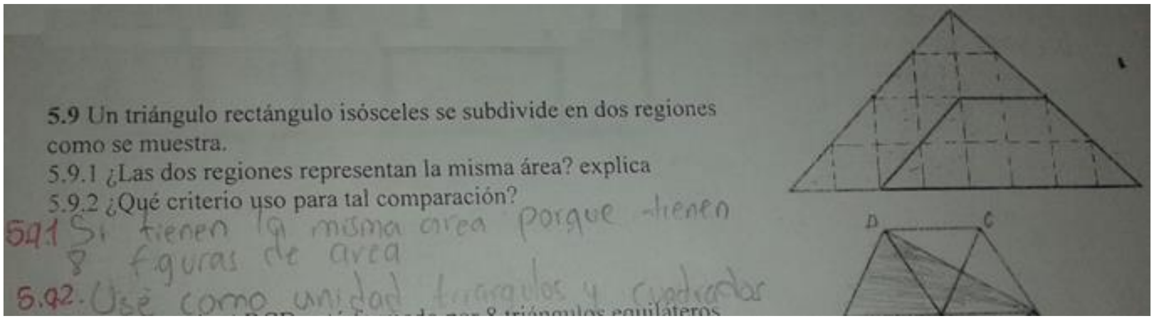


Figura 15. Problema reto 5.9.

E1:"5.9.1 no porque cuentas la de arriba y tiene 12 y la 2 tiene 10, son diferentes"

E2:"5.9.1 las dos regiones tienen la misma área porque se cuentan los cuadritos y les va dar el mismo resultado"

E3: no respondió

E4:"5.9.1 si, porque si contamos los cuadrados completos uniendo los triángulos que quedan. 5.9.2contar los cuadros y unir los residuos"

E5:"5.9.1 si tienen la misma área porqué tienen 8 figuras de área. 5.9.2 use como unidades triángulos y cuadrados"

E6: No respondió

E7: "5.9.1 no porque creo que su tamaño no es igual, que la figura de adentro es un trapecio"

E8:"5.9.1 si porque medí los 2 pares de lados y el área es igual. 5.9.2 medí el área"

E9: "5.9.1 no, porque la otra área tiene más. 5.9.2 contar"

E10:" 5.9.1 Si ambas tienen lo mismo, ambas tiene 8 unidades cuadriculadas"

E11:"5.9.1 si, porque si contamos los cuadrados y los triángulos que quedaron. 5.9.2contar los cuadros, unir los residuos"

E12:”5.9.1 si porque tienen la misma área 8. 5.9.2 cuadros y triángulos”

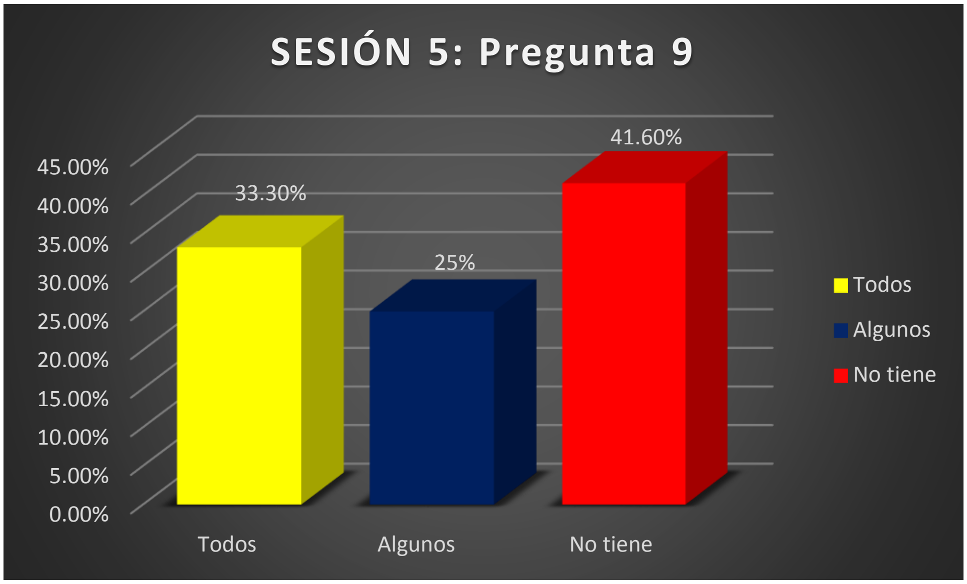


Grafico 16: respuesta – pregunta 5.9 - El área y la forma de la superficie

Todos los elementos de la categoría
Algunos elementos de la categoría
No tienen elementos de la categoría

5.9.1 si, porque si contamos los cuadrados y los triángulos que quedaron. 5.9.2 contar los cuadros, unir los residuos

Si ambas tienen lo mismo, ambas tienen 8 unidades cuadriculadas

No porque cuentas la de arriba y tiene 12 y la 2 tiene 10, son diferentes

En el puntos 9 se evidencio que los estudiantes para obtener la solución elegían una unidad que recubriera la figura y contaban cuantas habían piezas habían dentro de las figuras, luego unían partes para formar la pieza. Esta manera fue utilizada y acogida como una herramienta útil para este procedimiento. A pesar de tener un forma adecuada para obtener la solución, el 41.6% de los estudiantes no llegaron a una respuesta correcta.

__SESION SEIS: Descomposición de la superficie en partes iguales__

6.10 ¿Qué parte de la región cuadrada está sombreada? Las tiras son del mismo ancho y la figura está dibujada a escala.

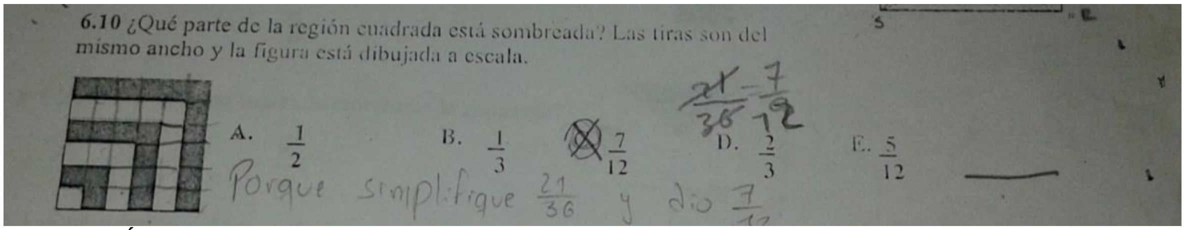
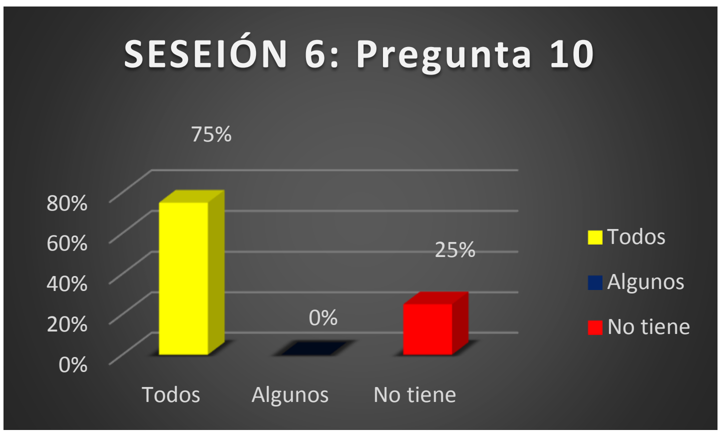


Figura 16. Área de la región sombreada.



Respuestas	N° Estudiantes
A	
B	3
C	9
D	
NO RESPONDE	

Tabla 3: respuestas pregunta 6.10

Grafico 17: respuesta-pregunta 6.10-Descomposición de la superficie en partes iguales

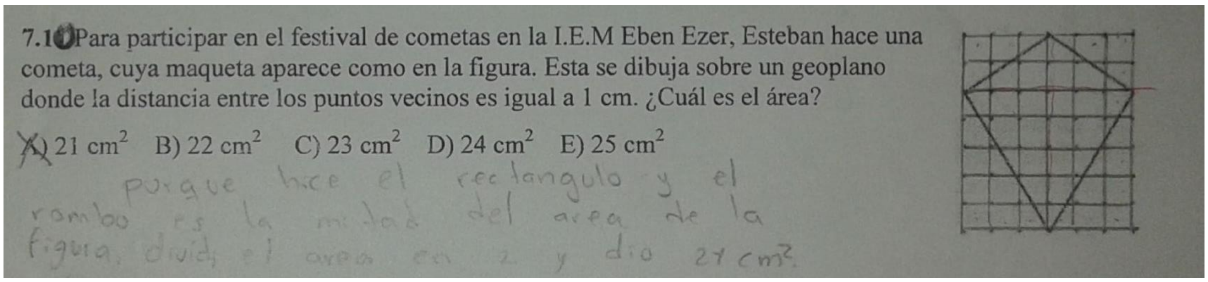
Todos los elementos de la categoría
Algunos elementos de la categoría
No tienen elementos de la categoría

En el punto 10, solo el 25% de las respuestas fueron incorrectas, por lo tanto hubo una interpretación adecuada del problema. Los estudiantes consiguieron dividir la figura en cuadricula lo cual les facilito llegar a la respuesta.

SESIÓN 7: Deducción fórmulas de áreas (triangulo, rectángulo y cuadrado)

7.10 Para participar en el festival de cometas en la I.E.M Eben Ezer, Esteban hace una cometa, cuya maqueta aparece como en la figura. Esta se dibuja sobre un geoplano donde la distancia entre los puntos vecinos es igual a 1 cm. ¿Cuál es el área?

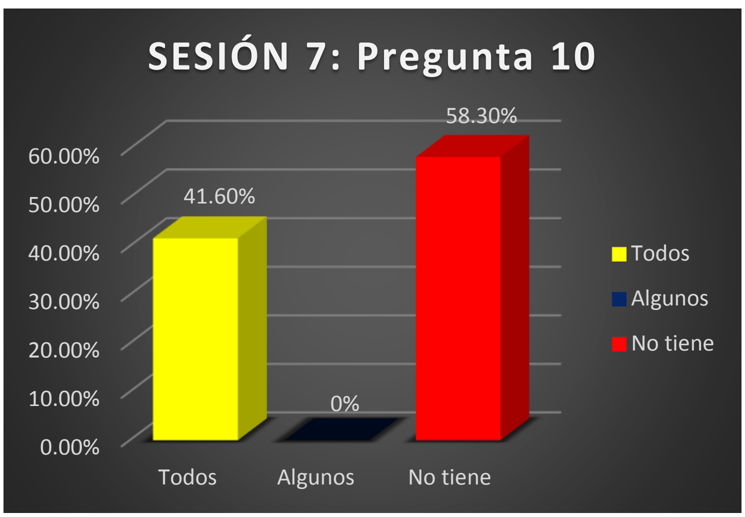
A) 21 cm^2B) 22cm^2C) 23cm^2D) 24 cm^2E) 25 cm^2


7.10 Para participar en el festival de cometas en la I.E.M Eben Ezer, Esteban hace una cometa, cuya maqueta aparece como en la figura. Esta se dibuja sobre un geoplano donde la distancia entre los puntos vecinos es igual a 1 cm. ¿Cuál es el área?

A) 21 cm^2 B) 22 cm^2 C) 23 cm^2 D) 24 cm^2 E) 25 cm^2

porque hice el rectangulo y el rombo es la mitad del area de la figura, dividí el area en 2 y dio 21 cm^2.

Cortes W. (2016). Área de una figura dibujada en geoplano. Figura 17



Respuestas	N° Estudiantes
A	5
B	
C	4
D	1
E	2
NO RESPONDE	1

Tabla 4: respuestas pregunta 7.10

Grafico 18: respuestas – pregunta 7.10- Deducción fórmulas de áreas (triangulo, rectángulo y cuadrado)

Todos los elementos de la categoría
Algunos elementos de la categoría
No tienen elementos de la categoría

En este punto los estudiantes demuestran la misma técnica para hallar la solución, que es utilizar el cuadrado como unidad que recubre la superficie, ellos tienen la idea y la manera de cómo lo van a abordar, pero algunos fallaban en el conteo de cuantos había en la figura (cometa), esto debido a que en algunas partes hay pedazos de diferente tamaños, que no es tan fácil saber conque otros unirlos para obtener un cuadrado completo. El 41,6% de los estudiantes obtuvieron la respuesta correcta, donde se observó que algunos se apoyaron con rectángulos, dividiendo la figura en partes, donde era más cómodo contar las unidades de estos para luego dividir el resultado en dos y así llegar más fácil obtener la respuesta.

5.2.1.3 REENFOQUE

<u>SESIÓN 8: Evolución momento 1</u>

PREGUNTAS

8.3 ¿Cuál de las áreas es mayor?

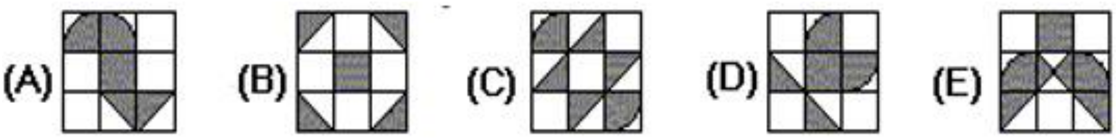


Figura 18: comparación de áreas de un cuadrado

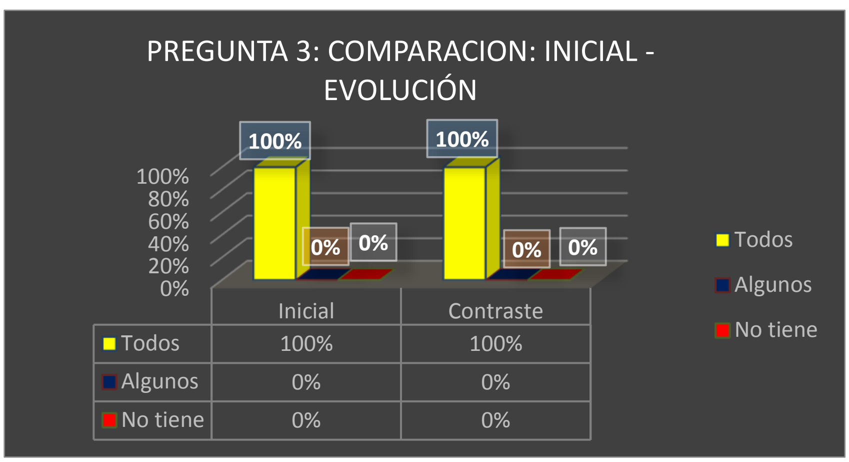


Grafico 19: comparación-pregunta 8.3- prueba inicial y evolución del momento 1

Respuestas	Inicial	Evolución
A		
B		
C		
D		
E	12	12
NO RESPONDE		

Tabla 5: respuesta pregunta 8.3

Todos los elementos de la categoría
Algunos elementos de la categoría
No tienen elementos de la categoría

En esta pregunta, debido a la experiencia que habían adquirido los estudiantes con las guías anteriores, y sabiendo a que se refiere el área de una figura, no hubo necesidad en entrar en detalles para solucionar el punto. En esta actividad igual que en la prueba de inicio el 100% marco la respuesta correcta, con la diferencia que en esta prueba los estudiantes tenían conocimiento sobre el concepto de área, por lo tanto no hubo la necesidad de explicar detalladamente el punto como en la prueba inicial.

8.4 ¿Cuál de las piezas de abajo hay que añadir al cuadrado (incompleto) de la figura para que las áreas blanca y negra sean iguales?

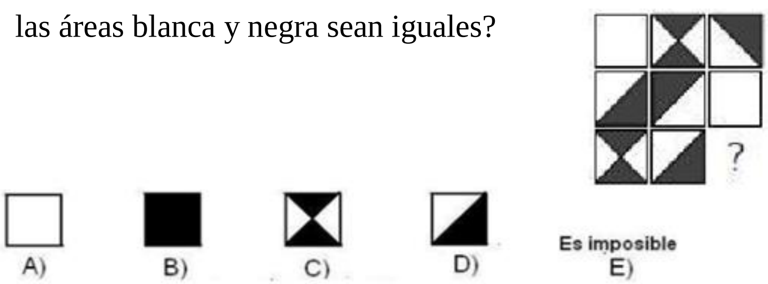


Figura 19: ubicar la pieza

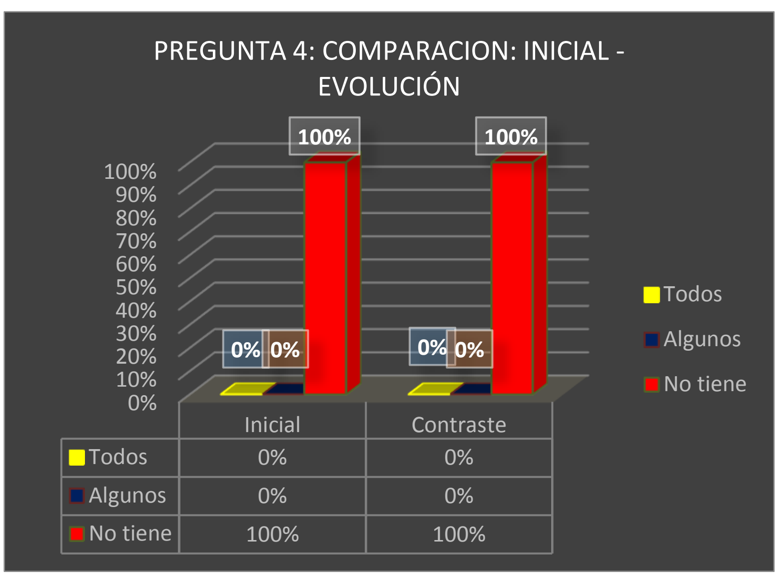


Grafico 20: comparación-pregunta 8.4- prueba inicial y evolución del momento 1

Respuestas	Inicial	Evolución
A		
B	3	3
C	2	1
D	7	8
E		
NO RESPONDE		

Tabla 6:respuestas pregunta 8.4

Todos los elementos de la categoría
Algunos elementos de la categoría
No tienen elementos de la categoría

En este punto, como lo muestra la tabla no hubo ningún estudiante con la respuesta correcta ni en la prueba inicial, ni en la prueba de evolución del momento 1. Esta pregunta tenía como objetivo, comprobar el razonamiento y la lógica de los estudiantes. Según lo observado en la tabla y analizando el punto anterior donde se obtuvo el 100% de las respuestas correctas, se puede concluir que los estudiantes tienen falencias cuando los puntos no tienen la misma estructura de lo que venían trabajando. Los estudiantes son muy metodistas debido a su formación en una escuela tradicional.

SESIÓN NUEVE: prueba final

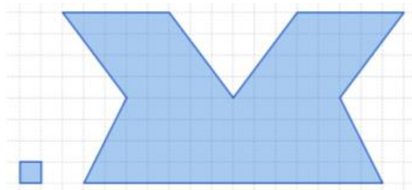
Esta prueba tenía la finalidad de observar el avance que habían logrado los estudiantes para abordar problemas retadores.

Esta prueba fue diseñada exclusivamente con problemas reto de acuerdo a la que plantea Pérez (2004) “Los problemas retadores son problemas que invitan al estudiante a pensar autónomamente, a indagar, a cuestionar, a razonar y a explicarsu razonamiento”.

En esta prueba cada punto solo habrán dos opciones: Amarillo si poseen **todos** los elementos de la categoría, y rojo si **no tiene** elementos de la categoría. Esto debido a que las preguntas eran de selección múltiple con única respuesta.

PROBLEMAS RETADORES

9.1 Sobre una malla cuadriculada, se ha dibujado la siguiente figura. ¿Cuál es el área de la figura, si se tiene en cuenta que el área del cuadrado sombreado es 1 cm^2?



A) 84 cm^2 B) 88 cm^2 C) 92 cm^2 D) 96 cm^2 E) 102 cm^2
Explica tu respuesta.

Figura 20. Abordaje de una figura para hallar el área.

Respuestas	N° Estudiantes
A	4
B	4
C	3
D	1
E	
NO RESPONDE	

Tabla 7: respuesta pregunta 9.1

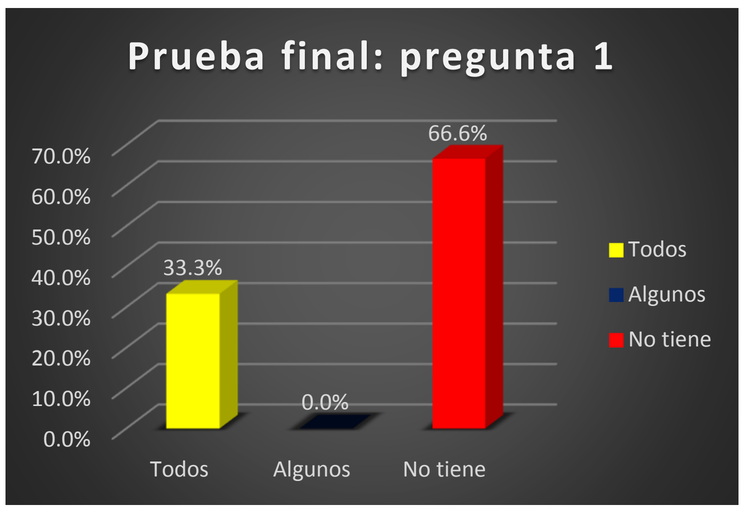


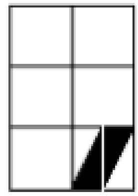
Grafico 21: respuesta – pregunta 9.1-prueba final

Todos los elementos de la categoría
Algunos elementos de la categoría
No tienen elementos de la categoría

Utilizando la experiencia de las anteriores sesiones, la mayoría de los estudiantes comenzaron a contar los cuadrados completos que había en la figura, luego trataban de formar un cuadrado con las partes de los cuadrados que no estaban completos. A través de esta forma el 33.3 % de los estudiantes constataron acertadamente sobre el área de la figura

9.2¿Qué fracción de la figura es negra?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{10}$ D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{1}{15}$



Explica tu respuesta.

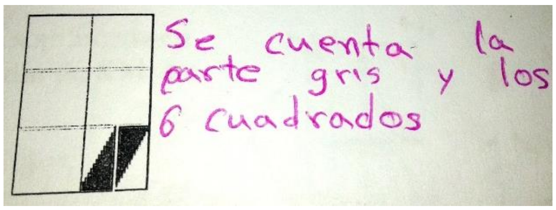


Figura 21: fracción de área

Respuestas	N° Estudiantes
A	8
B	
C	
D	4
E	
NO RESPONDE	

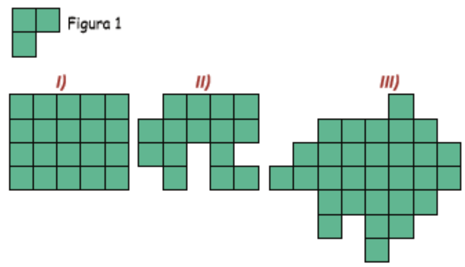
Tabla 8: respuesta pregunta 9.2-prueba final

Grafico 22: respuesta – pregunta 9.2-prueba final

Todos los elementos de la categoría
Algunos elementos de la categoría
No tienen elementos de la categoría

Desde las sesiones anteriores, se observó gran dificultad de los estudiantes para trabajar e interpretar fracciones, lo que se corrobora con los resultados obtenidos en este punto, ya que solamente el 33,3% obtuvieron la respuesta correcta. Aunque hubo un avance en este aspecto, para mejorar en estas actividades, se debe contar con una idea clara sobre representación y simplificación de fracciones.

9.3 Señala cuál o cuáles de las figuras abajo podrías cubrir utilizando la Figura 1, sabiendo que cada cuadrito solo puede cubrirse una vez.



A) Solo I B) solo II C) solo III
D) solo II y III E) I, II y III

Explica tu respuesta.

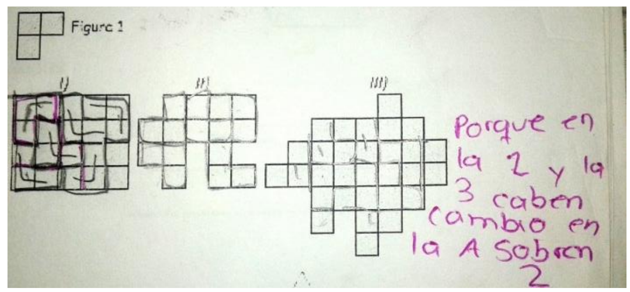


Figura 22: cubrimiento de figuras

Respuestas	N° Estudiantes
A	
B	4
C	
D	7
E	1
NO RESPONDE	

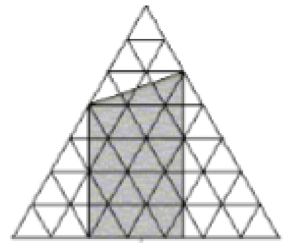
Tabla 9: repuestas pregunta 9.3

Grafico 23: respuesta – pregunta 9.3-prueba final

Todos los elementos de la categoría
Algunos elementos de la categoría
No tienen elementos de la categoría

En este problema los estudiantes se basaron en el recubrimiento de figuras trabajadas en sesiones anteriores, lo cual no fue complicado papa ellos, obteniendo el 58,3 % la respuesta correcta. El porcentaje no fue mayor debido a que los estudiantes no leen detenidamente el problema, ,lo cual conllevo a que el 33,3% de los estudiantes solo colocaron como respuesta la primera figura la cual se podía recubrir totalmente con la unidad dada.

9.4 En la figura, los triángulos equiláteros pequeños tienen un área de una unidad. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



A) 20 B) 22,5 C) 23,5 D) 25 E) 32

Explica tu respuesta.

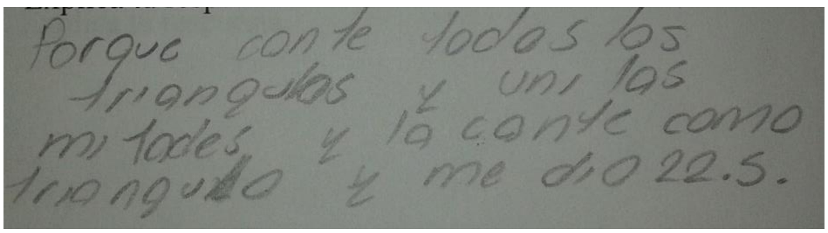
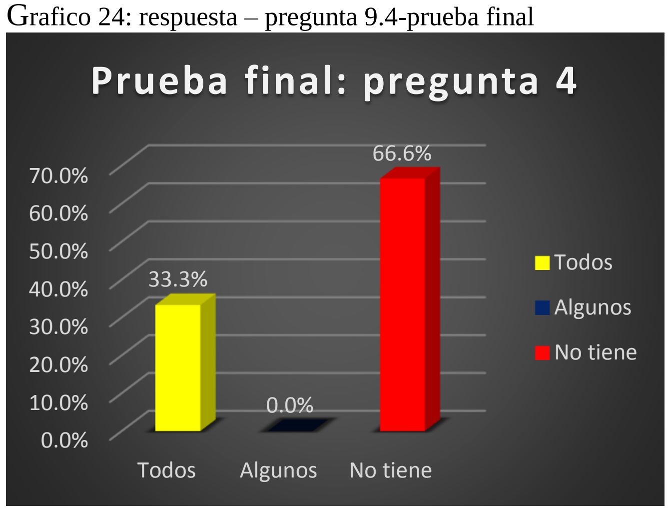


Figura 23: área de una región sombreada

Respuestas	N° Estudiantes
A	2
B	4
C	2
D	4
E	
NO RESPONDE	

Tabla 10: respuesta pregunta 9.4

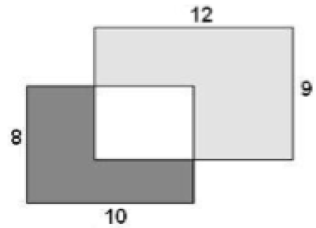
Grafico 24: respuesta – pregunta 9.4-prueba final



Todos los elementos de la categoría
Algunos elementos de la categoría
No tienen elementos de la categoría

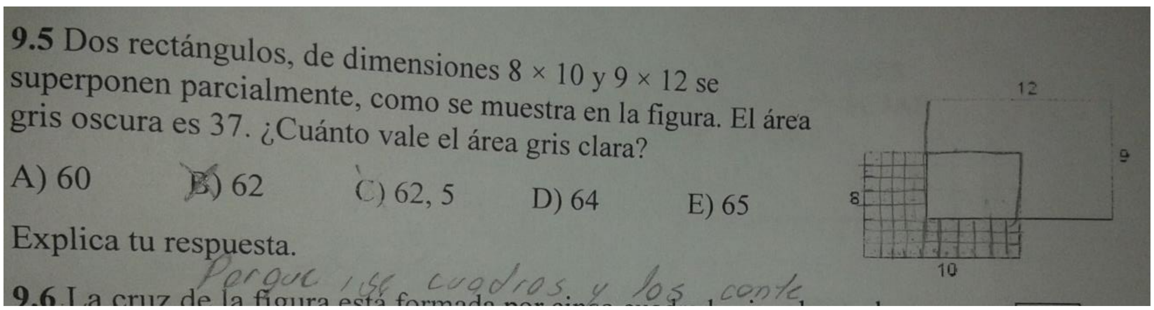
Este problema retador, fue muy llamativo para los estudiantes fue un problema que los animó a pensar autónomamente, a razonar y a explicar su razonamiento. Todos los estudiantes no llegaron a la respuesta correcta, aunque ya tenían en sus mentes a que se refería cuando se hablaba de área, por lo tanto trataron de saber cuántos triángulos pequeños había en la figura sombreada, donde el 33,3% obtuvo la respuesta correcta.

9.5 Dos rectángulos, de dimensiones 8 × 10 y 9 × 12 se superponen parcialmente, como se muestra en la figura. El área gris oscura es 37. ¿Cuánto vale el área gris clara?



A) 60 B) 62 C) 62, 5 D) 64 E) 65

Explica tu respuesta.



9.5 Dos rectángulos, de dimensiones 8 × 10 y 9 × 12 se superponen parcialmente, como se muestra en la figura. El área gris oscura es 37. ¿Cuánto vale el área gris clara?

A) 60 B) 62 C) 62, 5 D) 64 E) 65

Explica tu respuesta.

Porque [illegible] cuadros y los conte

9.6 La cruz de la figura está formada por cinco [illegible]

Figura 24. Área donde se superponen dos rectángulos.

Respuestas	N° Estudiantes
A	1
B	1
C	3
D	1
E	6
NO RESPONDE	

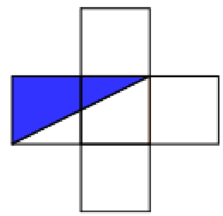
Tabla 11: respuestas pregunta 9.5

Grafico 25: respuesta – pregunta 9.5-prueba final

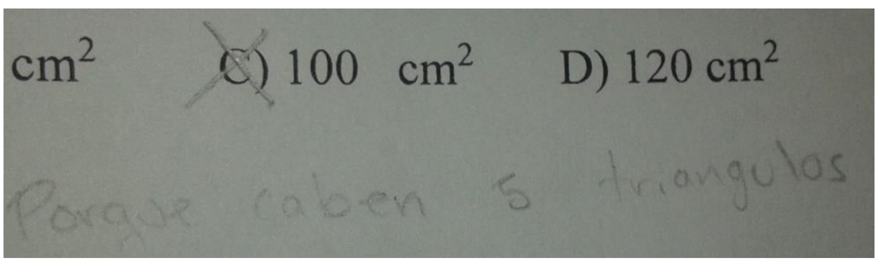
Todos los elementos de la categoría
Algunos elementos de la categoría
No tienen elementos de la categoría

Aunque el 50% de los estudiantes obtuvieron la respuesta correcta; este problema retador fue más complicado de comprender para los estudiantes que los anteriores, ya que ellos a pesar de las guías que ya habían hecho y de la experiencia que habían adquirido, preguntaban la manera de resolverlo y buscaban ayuda y pistas , esto debido a que los estudiantes para obtener el área se encerraron con el recubrimiento de una figura, y cuando está se presenta numéricamente, no podían establecer exactamente la relación entre hallar el área por recubrimiento o utilizando parte numérica, lo cual causo dificultad para obtener la solución.

9.6 La cruz de la figura está formada por cinco cuadrados iguales y el área del triángulo que se muestra es 20 cm^2. ¿Cuál es el área de la cruz?



A) 20 cm^2 B) 50 cm^2 C) 100 cm^2 D) 120 cm^2
E) 150 cm^2 Explica tu respuesta.



cm^2 C) 100 cm^2 D) 120 cm^2

Porque caben 5 triangulos

Figura 25. Área de la cruz.

Respuestas	N° Estudiantes
A	
B	
C	9
D	2
E	1
NO RESPONDE	

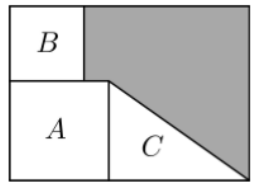
Tabla 12: respuesta pregunta 9.6

Grafico 26: respuesta – pregunta 9.6-prueba final

Todos los elementos de la categoría
Algunos elementos de la categoría
No tienen elementos de la categoría

El problema fue desarrollado por los estudiantes, utilizando herramientas que habían adquirido en módulos anteriores, como la de verificar cuantos triangulos azules se pueden ubicar en la cruz, de allí se desprende que el 75% obtuvo la respuesta correcta

9.7 Las figuras A y B son cuadrados. Si el área del cuadrado A es 144 cm^2, el área del cuadrado B es 81 cm^2 y el área del triángulo C es 102 cm^2, ¿cuánto vale el área de la región sombreada?



A) 327 cm^2 B) 204 cm^2 C) 17 cm^2 D) 609 cm^2 E) 282 cm^2

Explica tu respuesta.

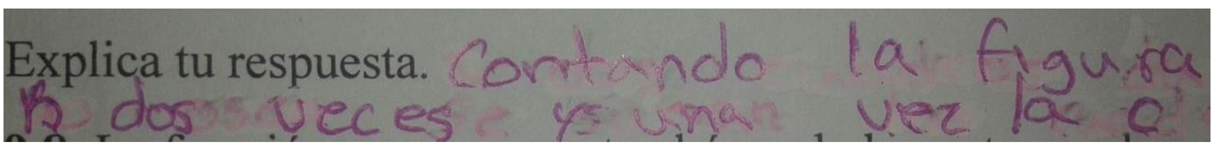


Figura 26. Explicación punto 9.7.

Respuestas	Inicial N° Estudiantes
A	8
B	1
C	
D	2
E	1
NO RESPONDE	

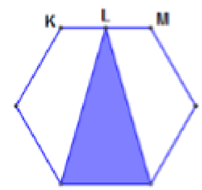
Tabla 13: respuestas pregunta 9.7

Grafico 27: respuesta – pregunta 9.7-prueba final

Todos los elementos de la categoría
Algunos elementos de la categoría
No tienen elementos de la categoría

Este problema puso a prueba competencias básicas esenciales como la creatividad, la lógica, la explicación, entre otras. La tabla muestra que el 8.33%, obtuvo la opción verdadera, esta porcentaje tan bajo se debió a que los estudiantes se dejaron guiar solamente por la perspectiva visual y no lo trabajaron más detalladamente y más a fondo para buscar la respuesta correcta. Los estudiantes trataron de recubrir el área sombreada de diferentes maneras según su perspectiva como por ejemplo 2 veces más el cuadro B y una vez el triángulo C, o una vez más el cuadro B, una vez el cuadro A y una vez el triángulo C, entre otras, lo cual no daba la medida exacta del área de la región sombreada.

9.8 La fracción que representa el área de la parte sombreada en el siguiente hexágono regular, siendo L punto medio de KM, es:



Explica tu respuesta.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{6}$ E) $\frac{4}{5}$

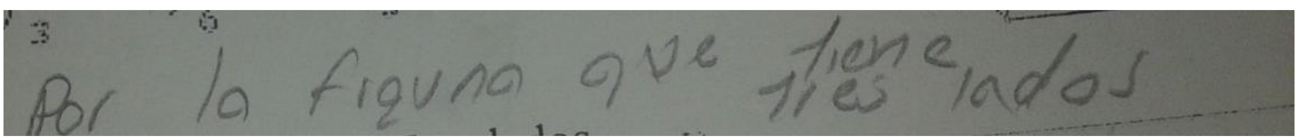


Figura 27. Respuesta punto 9.7.

Respuestas	Inicial N° Estudiantes
A	1
B	10
C	
D	1
E	
NO RESPONDE	

Tabla 14: respuestas pregunta 9.8

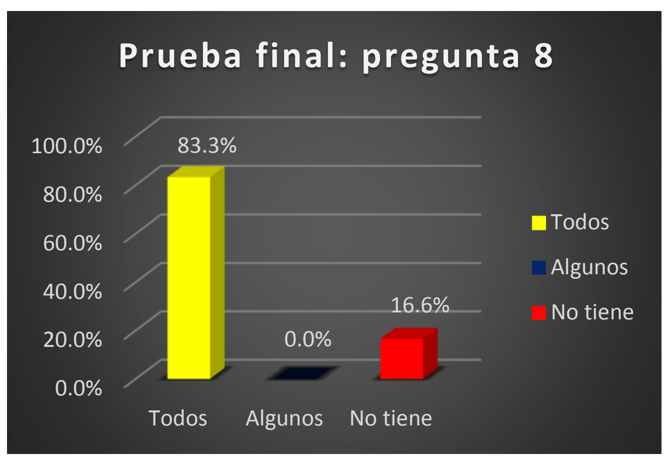
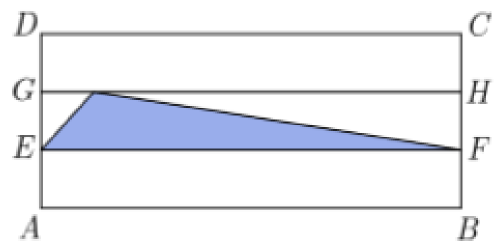


Grafico 28: respuesta – pregunta 9.6-prueba final

Todos los elementos de la categoría
Algunos elementos de la categoría
No tienen elementos de la categoría

En este punto aunque se trabaja con fracciones, se contó con un porcentaje de acierto del 83, 3%, lo que manifiesta que los estudiantes estaban adquiriendo la noción sobre lo que debían hacer cuando les pedían que hallaran la fracción que representa el área de una parte sombreada, lo que para su lenguaje era cuantas veces cabía la parte sombreada en el total de la figura. Este problema permitió abordar diferentes caminos para la solución, ésta no era inmediata lo cual es una característica de los problemas retadores. Los estudiantes según su visión realizaron diferentes divisiones al hexágono para obtener la respuesta.

9.9 En la figura, ABCD es un rectángulo. Los lados AD y BC se han dividido en tres partes iguales para trazar los segmentos EF y GH. Si el área sombreada es 32cm^2, ¿Cuál es el área del rectángulo ABCD?



A) 32 cm^2 B) 64 cm^2 C) 192 cm^2 D) 96 cm^2 E) 160 cm^2

Explica tu respuesta.

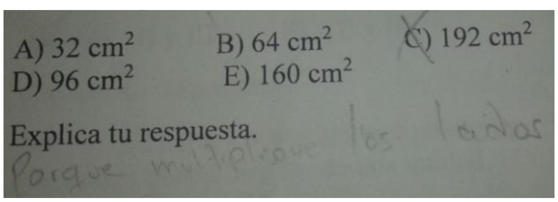


Figura 28. Explicación punto 9.9.

Respuestas	Inicial N° Estudiantes
A	2
B	1
C	5
D	3
E	1
NO RESPONDE	

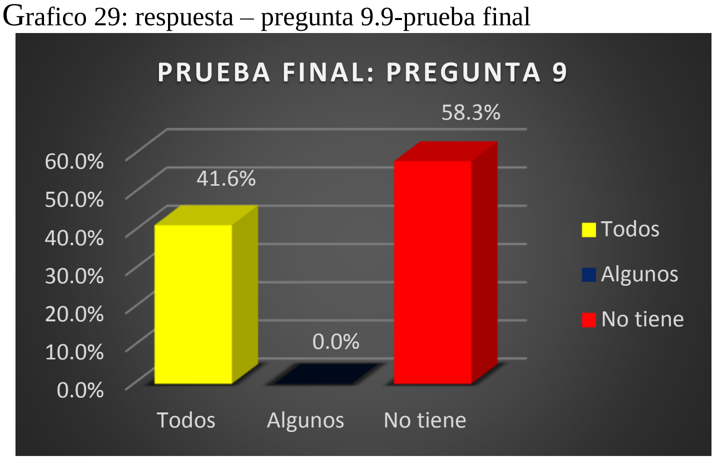
Tabla 15: respuestas pregunta 9.9

Todos los elementos de la categoría

Algunos elementos de la categoría

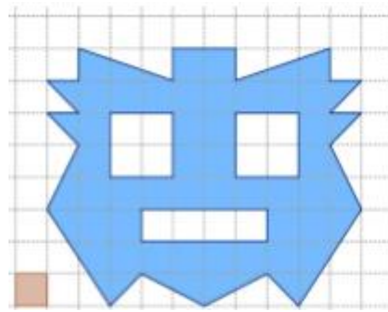
No tienen elementos de la categoría

Grafico 29: respuesta – pregunta 9.9-prueba final



La tabla muestra que todas las opciones fueron marcadas, pero la de mayor cantidad de estudiantes era la verdadera, lo que corresponde a un 41,6%. Una dificultad que se vio en este punto es que los estudiantes no sabían que significaba o representaban las letras en el ejercicio, uno porque no leían bien el problema y dos porque no se acordaban la manera de nombrar polígonos ni segmentos por medio de sus vértices.

9.10 Sobre una malla cuadriculada, se ha dibujado una máscara. ¿Cuál es el área en cm^2 de la máscara, si se tiene en cuenta que el área del cuadrado sombreado es 1cm^2? Explica tu respuesta.



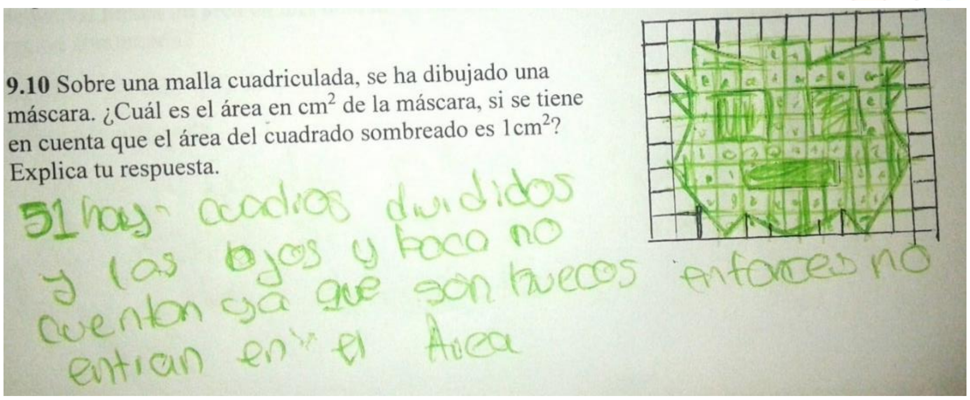


Figura 29.. Repuesta pregunta 9.10.

Esta pregunta contó con numerosas respuestas, pero lo que resalta es que el 75% de los estudiantes sabían lo que tenían que hacer, se observó que ya habían asimilado el concepto de superficie, el cual lo relacionaban con el área, esto debido a que todos los educandos comenzaron a contar y a verificar cuántos cuadritos contenía la máscara, donde se obtuvieron las siguientes respuestas: 58 cm^2, 72 cm^2, 88.2 cm^2, 101 cm^2, 7 cm^2,   101 cm^2,   51 cm^2,   72 cm^2,   101 cm^2, 3 estudiantes no respondieron la pregunta. Aunque unos estuvieron más cerca de la respuesta correcta que era 53 cm^2, se notó diferentes estrategias para poder saber la respuesta, unos contaban los cuadrados completos y los pedazos los unían con otros visualmente, para completar una unidad. Otros trataban de formar rectángulos con las partes incompletas, y de allí deducían que la parte sombreada era la mitad del rectángulo, lo que era más acertado para poder hallar la respuesta.

RECURRENCIA: CATEGORÍA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS RETO

En esta categoría también se analizaran los cuestionamientos, actitudes, actividades y procesos que los estudiantes repitieron o realizaron con cierta frecuencia o de manera iterativa en el desarrollo de los puntos de esta categoría.

En la pregunta 3 de la sesión de ideas previas, se constituyó en un problema con una estructura diferente donde se evidencio que no tenían un concepto formal de área, lo cual causo incertidumbre en cómo abordar el problema para llegar la solución. En el punto cuatro de esta misma sesión nos lleva a concluir que si no tenemos un conocimiento mínimo del tema es muy difícil abordar los problemas por fácil que sean.

El punto 7 de la sesión 2, los estudiantes se sintieron motivados por el planteamiento del problema, ya que estaba contextualizado en algo que les agradaba, de ahí algunas respuestas jocosas, lo que demuestra que si el problema está más cercano a los estudiantes, lo solucionaran de mejor manera y con mayor entusiasmo. En el punto 8 de la sesión 3, los estudiantes colocaron a prueba su ingenio, su destreza y habilidad para girar y unir figuras, aunque esto no fue fácil para ellos, ya que no contaban con la experiencia de solucionar problemas reto, pues están acostumbrados a los problemas tradicionales que se encuentran en los textos.

El problema reto del punto 9 de la sesión cuatro, fue llamativo para los estudiantes, ya que lo pudieron afrontar con la práctica que habían adquirido en las sesiones anteriores; además del ingenio para obtener la solución, se enfrentaron a otra experiencia que muy pocas veces lo realizan en las clases de matemáticas y es escribir la manera de como pensaron y de qué forma llegaron a la respuesta, lo cual no fue nada fácil para ellos, las miradas en alto, el tocarse la barbilla fueron expresiones comunes, que demuestra que no fue un ejercicio fácil para ellos.

Las respuestas del problema reto del punto 9 de la sesión cinco, nos muestra que los estudiantes analizaron y buscaron un método para llegar a la solución, se apoyaron sobre lo que habían hecho anteriormente, lo que manifiesta un mejoramiento tanto en disposición como en el abordaje de los problemas reto. En el punto10 de la sesión seis, los estudiantes mostraron buen entusiasmo por realizar el problema ya que estaban motivados porqué tenían un plan para poderlo solucionar que era cuadricular la figura, en este ejercicio se evidencio en ellos imaginación, razonamiento y creatividad, pero se presentó una dificultad para escoger la respuesta correcta y era que para ello debían tener conocimiento de simplificación de fracciones, lo que permite concluir que no siempre basta con tener solamente ingenio y lógica para solucionar un problema reto, se debe contar con conocimiento y un bagaje matemático.

En la sesión 7 del punto 10, según las respuestas y lo visto en la actividad, los estudiantes tuvieron buena disponibilidad y abordaron el problema de una manera lógica, inclinándose a una solución gráfica, pero ya teniendo un recorrido y una experiencia en resolver problemas reto sobre área, se esperaba que estos avanzaran a otro nivel y obtuvieron unas formulas generales para hallar la solución, lo cual no ocurrió, debido a que en la educación tradicional no se exige crear sino repetir.

En la prueba final aplicada a los estudiantes se evidencio que los problemas reto son un instrumento motivador para el aprendizaje, haciendo llamativo la solución de estos, ya que son distintos a los que ellos generalmente resuelven, además les exigen aplicar habilidades distintas al desarrollo procedimental como lo es la creatividad, el razonamiento, la integración de conocimientos, entre otras , lo que genera una mejor interiorización y un aprendizaje más significativo y profundo sobre el tema en el cual se esté trabajando.

Algo que se evidencio en los diferentes problemas reto era que los estudiantes se casaban con estilo de solución y no lograban llevar o trasformar este, a un nivel más riguroso y formal de la matemática.

En la categoría de problemas retadores los estudiantes en las distintas sesiones mostraron una particularidad que se repetía con cierta frecuencia en diferentes actividades y en toda la muestra, y era la dificultad que tenían para expresar su pensamiento, es decir, no mostraban una claridad, ni secuencia al escribir el proceso y el razonamiento que habían realizado para solucionar las actividades. Una de las causas de esta dificultad es que en la matemática que se enseña tradicionalmente, nunca se les exige a los estudiantes que escriban, basta con realizar el proceso algorítmico, por lo cual no están acostumbrados a explicar su razonamiento matemático.

COMPARACIÓN DE LA PRUEBA INICIAL Y EVOLUCIÓN MOMENTO 1

Grafico 30: **comparación prueba inicial y evolución del momento 1**

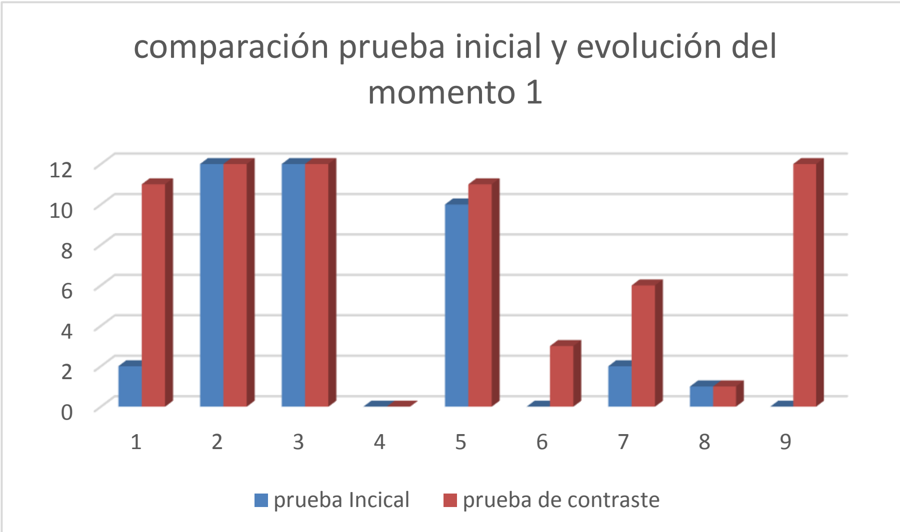


Tabla 16: comparación prueba inicial y evolución del momento 1 (estudiantes que respondieron correctamente)

punto	prueba Inicial	Evolución
1	2	11
2	12	12
3	12	12
4	0	0
5	10	11
6	0	3
7	2	6
8	1	1
9	0	12

La tabla anterior compara las respuestas correctas entre la prueba inicial y la prueba de evolución del momento 1, punto por punto. Allí se observa que en general predominan las respuestas acertadas en la prueba de evolución del momento 1. Es muy notorio la diferencia en los puntos 1 y 9, las cuales correspondían a preguntas abiertas, lo que nos permite mencionar que hubo un avance en el pensamiento, la conceptualización y el razonamiento de los estudiantes con respecto a la magnitud área y al abordaje de los problemas retos.

FASE INTERPRETATIVA

Los estudiantes mostraron gran interés en el desarrollo de las guías presentadas en las diferentes sesiones, el cambiar la rutina de la clase tradicional de marcador y tablero, por guías que permitían un trabajo autónomo y cooperativo, fue esencial para que los estudiantes se comprometieran con un mejor trabajo en la clase de matemáticas, como lo afirma Mason (1989), los estados emocionales, contribuyen y son importantes para realizar un mejor razonamiento matemático**.**

El utilizar material en el desarrollo de algunas guías, fue otro punto llamativo y motivante. En la sesión dos, los estudiantes mostraron gran interés en el desarrollo de la actividad, pues el poder solucionar las actividades presentadas con diferentes tipos de papel y de colores, fue distinto a la clase tradicional y magistral que el docente suele hacer. El ambiente de aula cambió y el trabajo en grupos les dio mayor gusto por desarrollar las actividades. En la sesión 4, se trabajó con el tangram, un material didáctico, divertido y entretenido, el cual permitió que los estudiantes compartieron vivencias y conocimientos, sobresaliendo el trabajo colaborativo. Por otra parte el desarrollo de las guías conllevo a que los estudiantes se concentraran en la solución de estas, mejorando la disciplina a nivel individual y grupal.

En la categoría área se pudo evidenciar que es un tema llamativo para trabajar, el cual permite a los estudiantes imaginar las situaciones, algunas de ellas de su entorno, lo que conlleva a una mejor actitud en el momento de realizar las actividades.

El concepto de área que construyeron los estudiantes fue propio de ellos mismos al ir desarrollando las guías, ya que las intervenciones del docente era más para guiar y orientar en la conceptualización de lo que se estaba trabajando; luego la apropiación del concepto fue personal y por consiguiente mucho más significativa de lo que usualmente se realiza en las clases de matemáticas. Ello guarda coherencia con la reinvención guiada de la Educación Matemática Realista (EMR).

La mayoría de los estudiantes a medida que trascurrían las diferentes sesiones asociaban el área con la cantidad de unidades (cuadrados, triangulo,…) que recubrían una figura. En la fase de revisión según el modelo de Mason (1989), una de las dificultades de este método que tuvieron unos estudiantes, fue que al formar unidades completas con los pedazos que había en la figura, muchos de estos no se podía decir con certeza si formaban una unidad totalmente completa, lo que conllevaba a que las unidades aumentaran o disminuyeran.

Al avanzar en las sesiones, los estudiantes se afirmaban cada vez más en conceptualizar el área como la cantidad de unidades que caben en una figura. El darle un valor numérico a la pieza que recubre una figura, y con esto hallar el área total, no fue comprendido correctamente, ni con facilidad por los estudiantes, ya que se habían acostumbrado a ubicar las piezas en diferentes lugares y posiciones, hasta recubrir totalmente la figura y de esta manera contar cuantas piezas habían, para obtener el área de una figura. Esto asevera lo que dicePerrin - glorian (1992), los cuales advierten de que la concepción de área como un número que se puede calcular se manifiesta como un obstáculo para el desarrollo del área como una propiedad que se conserva por recorte y pegado.

Una de las mayores dificultades presentadas en la categoría de área, fue observada en la sesión 6, donde en el desarrollo de la guía, los estudiantes no se acordaban y en muchos casos no manejaban las fracciones (representación y simplificación), temática que se enseña desde primaria, continuando en grado sexto y séptimo, lo que afirma que la memorización de técnicas básicas no se logra por medio de la solución de problemas rutinarios, que es precisamente el objetivo de la práctica de poner al eestudiante a resolver grandes cantidades de ejercicios idénticos en lugar de asignarle tareas matemáticamente más sustanciales, Losada (2001).

Las guías de las diferentes sesiones, se concibieron con el ánimo de que los estudiantes fueran construyendo el concepto de área hasta llegar a deducir formulas básicas para obtener esta magnitud. Pero la investigación mostro que los estudiantes según Freudenthal (1991), se desenvolvieron en un contexto realista, lo cual significa que los estudiantes visualizaron e imaginaron las diferentes situaciones y actividades sobre la magnitud de área, y, que a partir de ahí, utilizaron su sentido común y pusieron en juego estrategias de resolución. Pero cabe resaltar que dentro de las estrategias de resolución, no trascendió el cálculo y la utilización de fórmulas.

Las nociones del concepto de área que tienen las estudiantes al terminar la aplicación de las guías están en concordancia con lo definido por Ortiz Wilches (2013, pg 18)

> El área de una figura es la medida de la superficie que ocupa la figura. El área se simboliza con la letra A. Para determinar el área de una figura se elige una unidad cuadrada y se cuenta la cantidad de estas unidades necesaria para recubrir la figura. Este procedimiento se llama recubrimiento. La unidad fundamental de área es el metro cuadrado y se simboliza m^2 que corresponde a la medida de la superficie de un cuadrado cuyo lado mide 1 m. el área de polígonos se puede calcular sin necesidad de utilizar recubrimiento. Para esto se utilizan determinadas expresiones en las cuales es necesario conocer las medidas de algunos elementos del polígono.

Sin embargo, se evidencio una limitación de los estudiantes con respecto al concepto general de área de Ortiz W. (2013), y fue que los estudiantes se sintieron muy cómodos con el recubrimiento de figuras, a tal punto que les causo dificultad y muchos no avanzaron a calcular el área con expresiones en las cuales debían utilizar las medidas de los elementos del polígono.

En el desarrollo de algunos puntos y actividades de las diferentes sesiones, se evidencio en algunos estudiantes la confusión de área con perímetro. Chamorro, M. (2003), explica que esta dificultad deriva de la metodología empleada por el profesor, originada gracias a una aritmetización de la Geometría y la Medida que invita a “sustituir magnitudes por números, con falta de suficientes experiencias necesarias para la conceptualización del sentido de magnitud y de su medida”. Este es un error bastante frecuente, en una investigación llevada a cabo por Wagman en 1982, se constató que un tercio de los sujetos que intervinieron en él, confundía el área con el perímetro. La frecuencia con la que se presenta este error se puede entender si revisamos la metodología que generalmente se utiliza. A los niños se les presentan las mismas actividades, basadas en los mismos dibujos para determinar tanto el área y como el perímetro.

En la categoría de la resolución de problemas, se confirmó que los problemas retadores son un instrumento novedoso y llamativo para los estudiantes, ya que cambian de los problemas rutinarios que en su mayoría son memorísticos y procedimentales, a unos que les exigen diferentes habilidades como lo menciona Pérez (2004), son problemas que hacen pensar a los estudiantes, que requieren ingenio y cuya respectiva solución ayuda al estudiante a mejorar conceptos y a desarrollar competencias matemáticas.
Algo muy interesante de los problemas reto, es que además de que exigen conocimientos matemáticos, también ponen a prueba distintas habilitadas como la creatividad, el ingenio, la toma de decisiones las cuales son muy útiles para para el desenvolvimiento en diferentes situaciones de la vida real.

La utilización de los problemas retos para la construcción del concepto de área, fue una estrategia motivadora que permitió que los estudiantes sintieran agrado y entusiasmo por desarrollar las guías, lo que fue muy importante, ya que como lo menciona Mason (1989) el estado emocional de los estudiantes tiene incidencia el desarrollo del razonamiento matemático.

La destreza que se iba adquiriendo con el paso de las sesiones, además del esfuerzo durante este proceso, permitió evidenciar características de los problemas retadores mencionadas por Pérez (2004), donde estos problemas hicieron que los estudiantes indagaran, razonaran, se cuestionaran y algo que fue muy novedoso para ellos, trataran de explicar su razonamiento.

Expresar de manera escrita y verbal la forma como se abordaron los problemas reto, para obtener la solución, no fue nada sencillo para los estudiantes, ya que la escuela tradicional se prioriza en los procesos repetitivos y algorítmicos para obtener la respuesta, sin darle importancia a la manera de cómo pensó y se imaginó el problema para llegar a la solución. Los problemas retadores no solo prueban de manera directa el conocimiento o las destrezas matemáticas, sino además la habilidad que tiene el estudiante de encarar retos más generales en la vida e involucran el desarrollo del razonamiento lógico y la habilidad de manejar situaciones no esperadas (UAN-MEN, 2010).

La resolución de los problemas retadores, se analizaron a la luz del método de Mason, Burton y Stacey (1989), donde se observa en la fase de ataque como los estudiantes comienzan a poner en práctica lo que imagina, deducen y argumentan con el fin de solucionar correctamente cada problema. En esta fase se evidencio como la mayoría de estudiantes al enfrentarse a un problema retador con una estructura diferente a los que venía trabajando, se quedaban en el rotulo "Atascado", sin saber qué hacer, ni cómo hacer, por lo cual había la necesidad de explicarles, orientarlos y encaminarlos a lo que menciona Mason (1989), el ¡Ajá!, para desbloquearlos, con el fin de que surgieran ideas de cómo llegar a la solución del problema. Esto evidencia una dificultad para entrelazar las experiencias y los conocimientos al momento de afrontar un problema reto. La resolución de problemas retadores como lo dice la Falk de Losada (2001) exige a los estudiantes en el fondo que establezcan redes o mapas conceptuales cada vez más enriquecidos.

El estudio realizado muestra que los problemas retadores son propicios para la construcción de significados en los estudiantes, ya que hace que los nuevos conceptos sean más significativos y estén más enlazados a situaciones realistas (Freudenthal,1991), además de propiciar un ambiente de motivación e interés. Para estudiantes que no son muy hábiles en operaciones matemáticas, el trabajo con problemas reto fue una buena opción para construir significados matemáticos, ya que estos estimulan el pensamiento e incentivan al alumno, (Losada, 1980), además de que les permitió imaginar y visualizar diferentes caminos para llegar a la respuesta, ya que su solución no era inmediata.

CONCLUSIONES

El proceso de investigación sobre el papel que cumple el uso de los problemas reto en la construcción del concepto de área en los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Municipal Ciudad Eben Ezer de Fusagasugá Cundinamarca, permitió dar respuesta a las tareas de investigación propuestas. Los resultados obtenidos permiten destacar algunos elementos que resultan determinantes para el logro de los objetivos de éste trabajo, y ellos son:

- El desarrollo de esta estrategia, permitió identificar los concepciones iniciales de los estudiantes frente al concepto de área en figuras planas, sus dificultades e interpretaciones; además de conocer la manera cómo ellos se enfrentan a un problema, todo esto desarrollado en un espacio basado en el respeto y la participación activa que fomentó el auto aprendizaje y el aprendizaje colaborativo desde diversas situaciones.

- Al asumir en la investigación como marco teórico la resolución de problemas de Mason, Burton y Stacey (1989), el pensamiento métrico y lo problemas reto, para sustentar las actividades conformadas en la unidad didáctica, que se propone en esta tesis, se favoreció la construcción del concepto de área en los estudiantes del grado séptimo.

- El desarrollar guías basadas en problemas retos, permitió hacer una clase más dinámica, diferente a la tradicional, donde los estudiantes se sintieron motivados por el aprendizaje, se despertó la curiosidad y los deseos por hacer las cosas correctas, favoreciendo positivamente la disposición para con la clase.

- Al trabajar con problemas reto en lugar de los problemas tradicionales en la unidad didáctica de esta investigación, permitió avanzar en diferentes competencias básicas esenciales como la creatividad, la lógica, la explicación, entre otras.

- Si los estudiantes no poseen conocimientos, ni fundamentos básicos de otros temas necesarios para el desarrollo de la actividad, esta se atrasa y se dificulta, lo cual obliga al docente a implementar estrategias para que, primero, se pueda cumplir la finalidad de la actividad y segundo, para que no se pierda el interés y las ganas por desarrollar la guía.

- En la socialización de los problemas, se visualizó los diferentes procedimientos que utilizaron los estudiantes para la resolución de los problemas reto, y es el momento donde ellos se percatan de su error y lo rectifican.

- Es favorable el fortalecimiento del sentido de cooperación, compañerismo, dinamismo, competitividad y alto sentido de participación entre los estudiantes; también cabe anotar que muchos estudiantes mostraron el deseo por hacer la guía de manera correcta, de acuerdo a sus capacidades y a lo que habían entendido.

- La selección de las actividades que se aplicaron a los estudiantes, proyectan y generan en ellos saberes matemáticos que interiorizaron y compartieron con sus compañeros por medio de la socialización, lo cual reflejan la adecuada elección de los problemas retadores.

- El trabajar con actividades diferentes a las tradicionales, además de estar bien presentadas y estructuradas, permitieron una motivación en el desarrollo de la clase, que redundo en la concepción del concepto de área y en lo que esto significa.

- La enseñanza de temas referentes al sistema métrico permite al estudiante, observar una aplicación de las matemáticas en temas imaginables, construyendo un aprendizaje significativo y profundo, que les servirá para el desarrollo de habilidades aplicables en diferentes situaciones, pero para que esto ocurra en un mayor porcentaje es necesario modificar los métodos de enseñanza tradicional que no construyen significado en los estudiantes, a una enseñanza atractiva y dinámica, que motiven al estudiante al aprendizaje de las matemáticas.

- Los problemas reto se convirtieron en una herramienta motivante y entretenida a la hora de solucionar las guías, le dieron un nuevo aire a las clases debido a que su solución se podía obtener de diferentes formas lo que exigía creatividad y razonamiento, lo cual incidió a que el concepto de área se dedujera y se comprendiera de mejor manera, interiorizando mejor la definición porqué se construyo a partir de la resolución de estos problemas.

RECOMENDACIONES

- Elaborar una revisión minuciosa, detallada y profundad de cada una de las actividades propuestas en la unidad didáctica, pues algunas poseían problemas retadores que no estaban acorde al conocimiento matemático que ellos poseían, originando desmotivación y rechazo en los estudiantes, lo que conlleva a una limitación del objetivo principal de cada sesión.

- Continuar con el trabajo sobre la resolución de problemas a partir de problemas retadores, con la intención de lograr motivación e interés hacia el aprendizaje de la matemática, con el propósito de que los estudiantes mejoren su rendimiento académico en esta ciencia.

- Al implementar este tipo de estrategias, es conveniente realizar una retroalimentación y socialización de las actividades, que permita identificar los avances en los procesos cognitivos de los estudiantes, además de que estos puedan verificar su respuesta, observando y entendiendo donde estuvo el acierto o la falla, al mismo tiempo que ellos puedan contar con la posibilidad de comparar sus razonamiento con el de otros.

- Propiciar el trabajo autónomo, colectivo y cooperativo, con el uso de estrategias que saquen a los estudiantes de esa enseñanza tradicional de las matemáticas que no genera motivación y ni interés por aprenderlas, y que en la mayoría de los casos no desarrolla un pensamiento crítico y profundo.

- Es necesario destinar en algunas ocasiones mayor tiempo del planeado en las actividades para que se pueda sacar toda la ventaja a las mismas. Algunas son muy significativas, enriquecedoras, llenas de conceptos y con la particularidad de mostrar las posibles estrategias de solución, que al poderlas realizar en un tiempo más extenso haría que fuera más adecuada la participación y se arrojarían resultados aún mejores.

- Fortalecer la enseñanza del pensamiento métrico en las instituciones, ya que la medición esta en todos los aspectos sociales de la vida del hombre como lo menciona Olmos(1992), además en los Lineamientos Curriculares, de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas del MEN (2002), se especifican conceptos y procedimientos relacionados con este tipo de pensamiento, además el reconoce su importancia en el desarrollo de habilidades y destrezas, que favorecen la relación de la matemática con otras ciencias.

REFERENCIA BIBLIOGRAFÍCA

Arenas , M. (2012). *Propuesta didáctica para la enseñanza de áreas y perímetros en figuras planas.* Tesis de Maestría, Universidad Nacional, Medellin Colombia.

Arenas, M. F. (2012). *Propuesta didáctica para la enseñanza de áreas y perímetros en figuras planas.* Universidad Nacional, Medellín Colombia.

Bohórquez , L. (2004). *aprendizaje del concepto de área.*

Bressan , A., & Zolkower, B. (2015). *Educacion Matematica realista*. Obtenido de GRUPO PATAGÓNICO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA: http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2015/08/conferencia_salto_uruguay.pdf

Bressan, A. M., Gallego, M. F., Pérez, S., & Zolkower, B. (2016). *Educación Matemática Realista Bases teóricas*. Obtenido de GRUPO PATAGÓNICO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA: http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2016/03/Modulo_teoria_EMR-Final.pdf

Castro , E. (2008). *Resolución de Problemas Ideas, tendencias e influencias en.* Universidad de Valencia, España. Obtenido de Repositorio Di: http://www.uv.es/puigl/castroseiem2008.pdf

Corberan. (1996). *análisis del concepto de superficies.* tesis doctoral.

Coronel , M., & Curotto, M. (2008). La resolución de problemas como estrategia de enseñanza y aprendizaje. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*. Obtenido de http://reec.uvigo.es/volumenes/volumen7/ART11_Vol7_N2.pdf

Dante, L. R. (2011). *Mátematica: Contexto e Aplicadores.* Sao Paulo: Reino.

Dewey , J. (1933). *How we think.*

Diaz , J. (2009). *Las unidades didácticas*. Obtenido de Área Didáctica y Organización Educativa : http://educar.unileon.es/Didactic/UD.htm

Dubinsky. (2002). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. *Kluwer Academic Publishers*, 95-102.

Falk de Losada, M. (2001). Olimpiadas de Matem´aticas: retos, logros (y frustraciones. *Asociación de la Matematica Venezolana*, 5.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures, Kluwer, Dordrecht, Reidel.*

Godino, J. (2002). *Medida de magnitudes y su didáctica para maestros. .* Universidad de granada. Obtenido de www.ugr.es/local/jgodino/edumat!maestros/

Guzman, M. (1994). *Modelo de Resolución desde el punto de vista de Miguel Guzman*. Obtenido de Resolución de problemas Matematicos: http://resoluciondeproblemasenlaeducacionmatematicas.bligoo.cl/modelo-de-resolucion-desde-el-punto-de-vista-de-miguel-guzman#.WDRtYtXhDIV

Kilpatrick, J. (1978). *Variables and methodologies in research on problem solving.* Columbus.

Labarrere, A. F. (1988). *Bases Psicológicas de la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos en la escuela primaria.* La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Losada, M. F. (1980). bogota.

Mason , J., Burton, L., & Stacey, K. (1989). Madrid, España.: Pensar Matemáticamente, Editorial Labor S.A.

MEN. (2003). *Estándares básicos de matemáticas.* Bogotá.

MEN. (2014). *Foro educativo nacional: Ciudadanos Matematicamente Competenetes.* ASOCOLME.

MEN. (2015). *Derechos básicos de aprendizaje Matemáticas.*

Mhaer, & Beattys . (1986). *examining the construcction of área and its mecasurement by ten to fourten year old children.*

Ministerio de Educacion Naciona. (2014). Ciudadanos matemáticamente competentes. *documento orientador del foro educativo nacional*.

Olmo. (1993). *Superficie y volumen ¿algo mas que el trabajo con fórmulas? Matemáticas:.*

Pérez. (2004). *Construccion de problemas reto en docentes de educacion basica primaria.* Colombia Aprende.

Perrin, G. (1992). *Aires de surfaces planet et nombres decimax.* Universite paris Pochulu D.

Pochulu, M., & Rodríguez , M. (2012). *Educación matemática, aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos.*

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton University Press.

Polya, G. (1982). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Pozo, J., & Gómez, M. (2004). • *Pozo, J Y Gómez, M. (2004). Aprender y enseñar ciencia del conocimiento cotidiano al conocimiento científico. Morata, s. l. Madrid.* Madrid.

Puig, L. (1992). Aprender a resolver problemas, aprender resolviendo problemas. Aula de Innovación Educativa. *Revista Aula de Innovación Educativa 6.*

Rabino, A. (2012). Enseñar matemáticas a través de problemas ¿pero cómo? *Novedades Educativas*, 66 - 71.

Rodríguez , E. (2006). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de matemáticas. Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico.* Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid, España.

Santos Trigo, M. (2008). *La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica.* Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Cinvestav-IPN, España.

Tierney, Boyd , & Davis . (1990). *trabajo con futuros profesores de primaria.*

Tomas , O., Cristina, P., & Perla, S. (2011). *La importancia de los enunciados de problemas matemáticos*. Obtenido de http://revistas.um.es/educatio/article/viewFile/132991/122691

Triana, I. M. (2002). *La resolución de problemas en la Matemática I y II de la.* Universidad de Matanzas, Buenos Aires, Argentina.

Zapata Grajales, F. N., & Cano Velásquez, N. (2007). *La enseñanza de la magnitud área.* Encuentro Colombiano de Matematica Educativa.

Zolkower , B., & Bressan, A. (2002). La relevancia de los contextos en la Resolución de Problemas de Matemática: una experiencia para docentes y sus capacitadores. *Paradigma*, 59-94.

ANEXOS

A continuación se presentan las actividades que componen la Unidad didáctica:

SESIÓN UNO: IDEAS PREVIAS

OBJETIVO: Identificar las ideas que poseen los estudiante sobre el concepto de área y los obstáculos que se generen en el desarrollo de esta actividad.

MATERIAL: La actividad impresa en papel, lápiz o esferos.

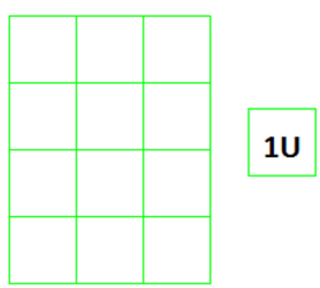
INTENCIONALIDAD: conocer que conocimientos tiene el estudiante acerca de la terminología y objetos matemáticos asociados al concepto de área.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD:

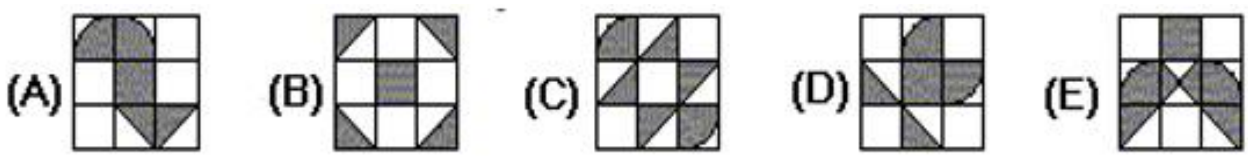
1.1 Cuando le nombran el concepto de área, usted en qué piensa

1.2 Cuál es el área de la figura

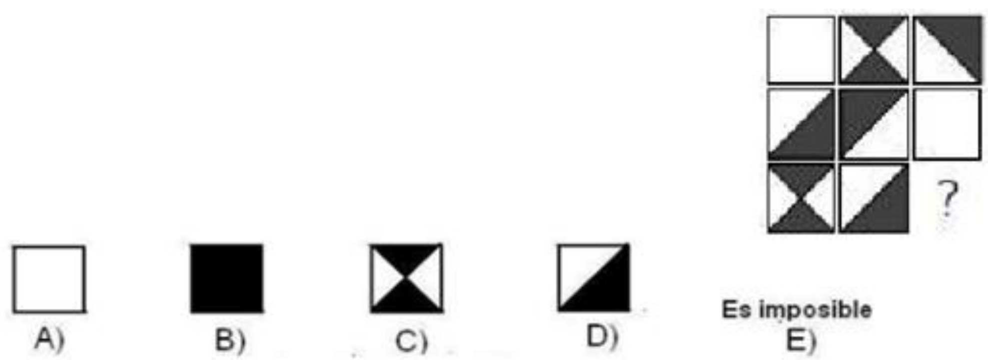
A. 12U
B. 6U
C. 1U
D. 9U



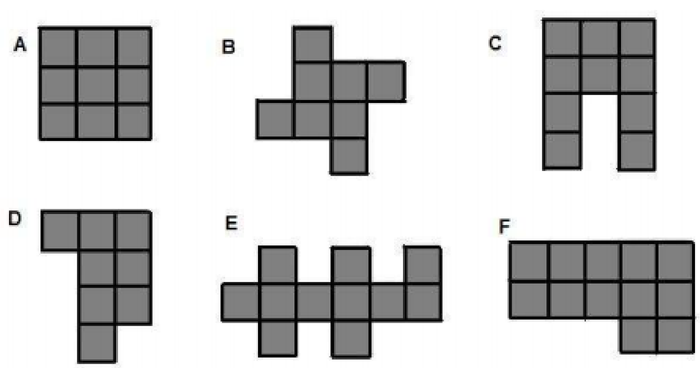
1.3 ¿Cuál de las áreas es mayor?



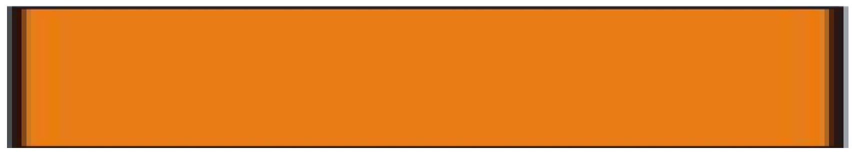
1.4 ¿Cuál de las piezas de abajo hay que añadir al cuadrado (incompleto) de la figura para que las áreas blanca y negra sean iguales?



1.5 Observe las siguientes figuras (de la A a la F). Considere la cantidad de superficie de cada una de ellas y ordénelas de menor a mayor.



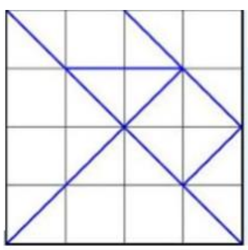
1.6 El área del

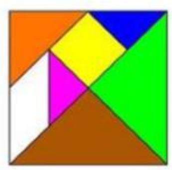


Se calcula con la fórmula:

A. $L + L$ B. $b \times h$ C. $\frac{(b + B)h}{2}$ D. $\frac{b \times h}{2}$

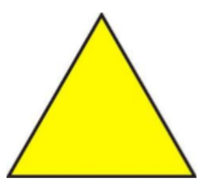
1.7 ¿A qué parte del Tangramcorresponde el triángulo naranja?





A. Un medio B. un cuarto C. un octavo D. un dieciseisavo

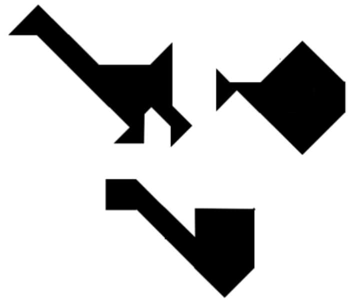
1.8 El área del



Se calcula con la fórmula:

A. $L + L$ B. $b \times h$ C. $\frac{(b + B)h}{2}$ D. $\frac{b \times h}{2}$

1.9 Cada una de las figuras que a continuación se te presentan se construyen con las siete piezas del tangram.



Responde de forma razonada a la siguiente pregunta: ¿tienen todas estas figuras la misma área, explica?

SESIÓN DOS: área como cantidad de plano ocupado por la superficie

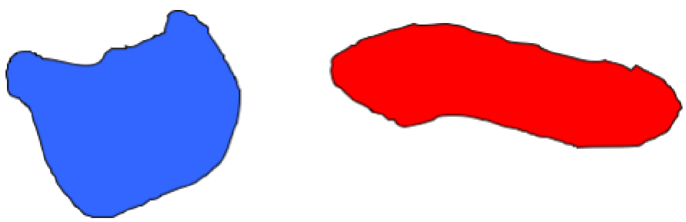
OBJETIVO: Trabajar el área como cantidad de plano ocupado por la superficie**.**

MATERIAL: La actividad impresa en papel, figuras en papel, hojas, tijeras, regla, lápiz.

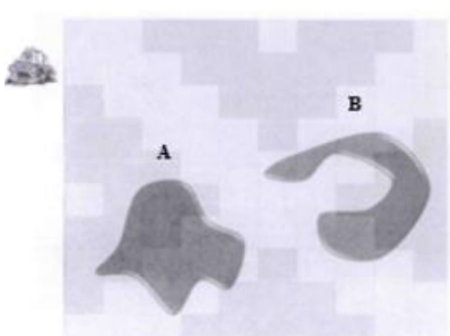
INTENCIONALIDAD: la idea de estas preguntas es que el estudiante realice una asimilación de que el espacio que ocupa un objeto, es el área de ese objeto.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

2.1 La casa de Paco y la de Hugo tienen un corral donde se crían las gallinas.¿En cuál de los dos corrales hay más espacio para que se muevan las gallinas? Fundamenta tu respuesta



2.2 Richard había estado jugando con su carrito, sin darse cuenta que este soltaba un líquido que manchaba el piso. Ahora está en serios problemas porque no sabe cómo limpiar semejante desorden antes que llegue su mamá. Ayúdale a Richard a solucionar el problema, para limpiar el piso debe utilizar un líquido que es muy costoso.

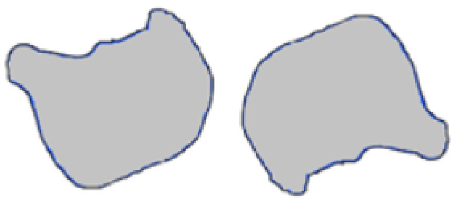


2.2.1 ¿En cuál de las manchas se gastara mayor cantidad de líquido para limpiarlas?

2.2.2 Explica los procesos que puedes llevar a cabo para averiguar cuál de las manchas es más grande, pues un amigo de Richard le ayudará con el líquido para la mancha más pequeña si éste hace muy bien la cuenta.

2.2.3 ¿existe otra forma de solucionar el problema? ¿Cuál?

2.3 La figura muestra dos manchas, A y B producidas por un derrame de aceite.



A B

2.3.1 ¿Qué podrías decir acerca de sus tamaños?

2.3.2 ¿Qué procedimientos podrías utilizar para comparar los tamaños de las manchas A y B?

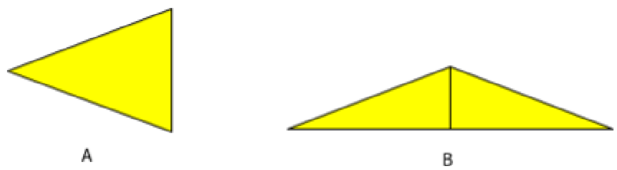
2.4 Imagínate que estas figuras representan dos campos cubiertos de hierba. ¿Tiene el campo A la misma cantidad de hierba que el campo B?

2.5 Imagínate que estas figuras representan dos campos cubiertos de hierba. ¿Tiene el campo A la misma cantidad de hierba que el campo B?

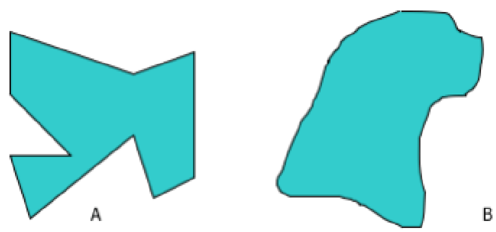
A B

PROBLEMAS RETADORES

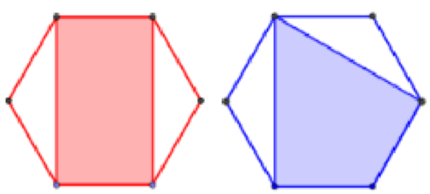
2.6 Si tuvieras que pintar la figura A, ¿necesitarías la misma o diferente cantidad de pintura que para pintar la figura B? ¿Por qué dices eso?



2.7 Compara estos dos establos. ¿En cuál de los dos establos hay más espacio para que los caballos paseen por él? Justifica tu elección



2.8 Observa las siguientes dos figuras. ¿La fracción que representa el área de la parte sombreada en cada una de ellas es la misma o diferente? Explica tu respuesta.



SESIÓN TRES: El área como número de unidades que recubren la superficie

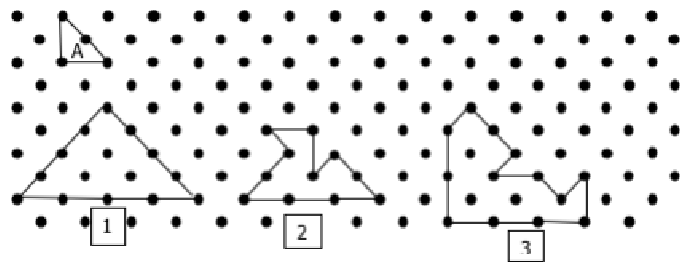
OBJETIVO: Trabajar el área como número de unidades que recubren la superficie

MATERIALES: La actividad impresa en papel, lápiz, borrador, regla, geoplano.

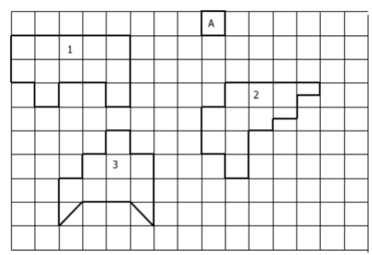
INTENCIONALIDAD: el estudiante debe relacionar y comprender que una unidad que cabe tanta veces en una superficie, es la medida del área con respecto a ese patrón.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

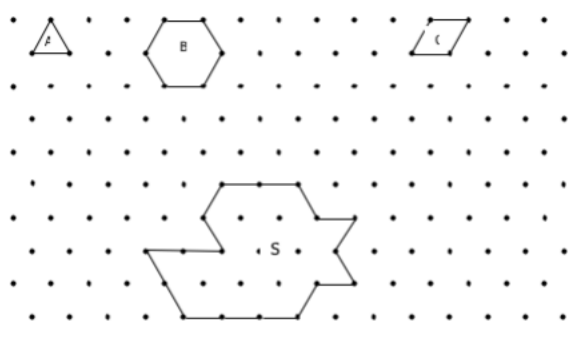
3. 1 ¿Cuántas veces cabe la figura A en cada una de las figuras 1, 2 y 3?



3.2 ¿Cuántos cuadrados como el A, se necesitan para formar la siguientes figuras?



3.3 Calcula cuántas figuras A caben en la figura (S), cuántas figuras B caben en la figura (S) y cuántas figuras C caben en la figura (S).



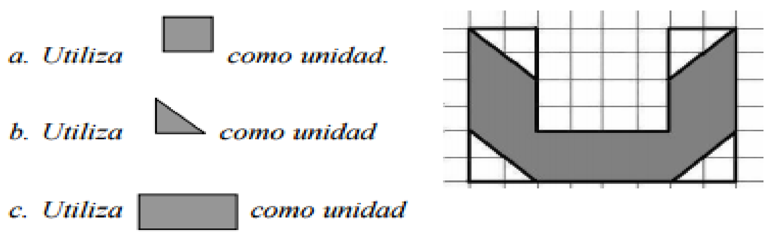
Completa la tabla siguiente:

	Figura(A) Unidad (A)	Figura(B) Unidad (B)	Figura(C) Unidad (C)
Superficie (S)			

3.3.1 ¿Qué sucede con los anteriores resultados cuando utilizas las diferentes figuras?

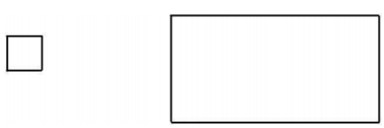
3.3.2 ¿Qué sucedería con el número de figuras que caben en la superficie S si se utiliza una figura de menor tamaño que A u otra de mayor tamaño que la figura B?

3.4 Determine el área de la figura sombreada.

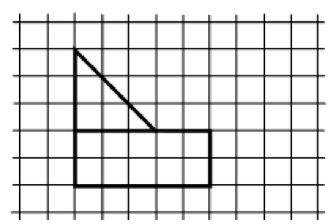


3.4.1 ¿Qué puede decir acerca de los resultados obtenidos?

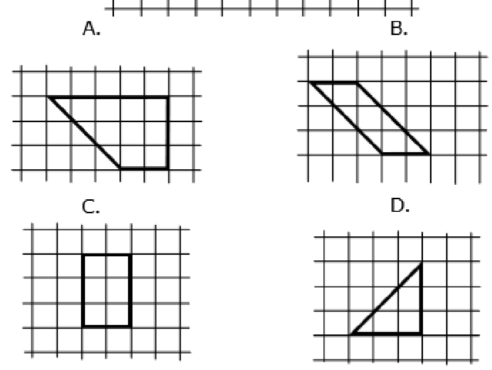
3.5 ¿Cuántos cuadrados como el de la izquierda caben en el rectángulo de la derecha? ¿Cómo lo calculó?



3.6 Daniela quiere armar un cuadrado con algunas piezas. Hasta ahora, ha armado la siguiente figura

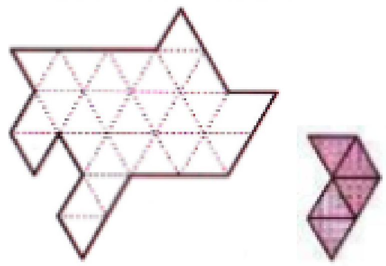


¿Cuál de las siguientes piezas debe utilizar Daniela para terminar de armar el cuadrado? Justifique su respuesta

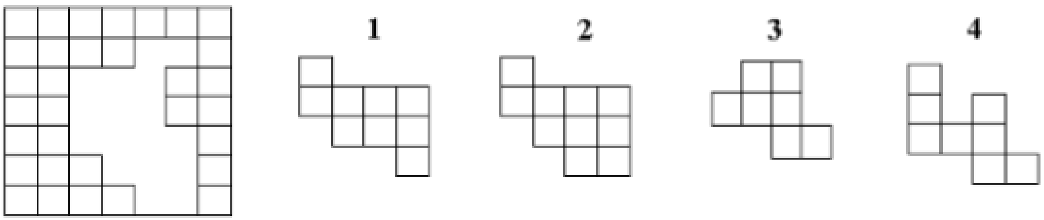


PROBLEMAS RETADORES

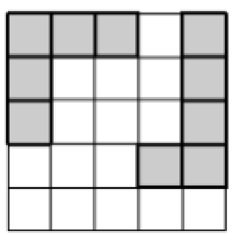
3.7 Reconstruir la figura de la izquierda con la pieza que se muestra (las pieza se pueden girar o voltear). ¿Cuántas figuras utilizaron?



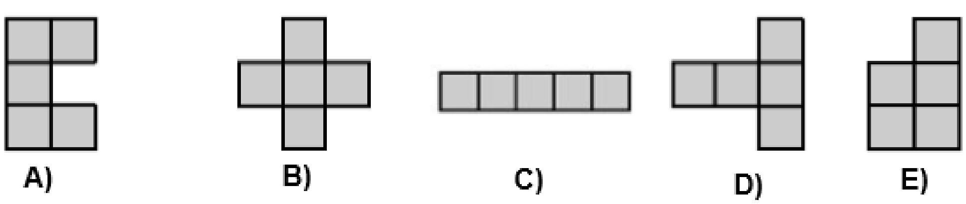
3.8 ¿Cuáles dos piezas de la derecha hay que usar para cubrir exactamente el área no cuadriculada de la figura de la izquierda? Justifiquesu repuesta



3.9 Lina ha colocado dos piezas grises en el tablero 5x5 como se muestra en la figura.



¿Cuál de las cinco piezas siguientes se ha de colocar en la parte vacía del tablero de modo que ninguna de las cuatro restantes pueda colocarse en el espacio vacío que quede? (las piezas se pueden girar o voltear, pero debe cubrir cuadrados por completos). Justifique su elección:



SESIÓN CUATRO: El área como número de unidades que recubren la superficie a través del tangram

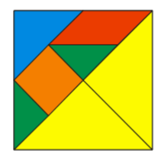
OBJETIVO: trabajar el área con el tangram como unidades que recubren la superficie**.**

MATERIAL: La actividad impresa en papel, el tangram de 7 piezas, figuras en papel, lápiz, hojas blancas, tijeras y regla.

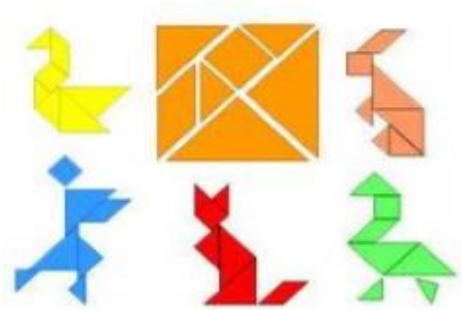
INTENCIONALIDAD: hacer ver al estudiante por medio del tangram que el área depende del patrón de medida que se utilice para recubrir una figura.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

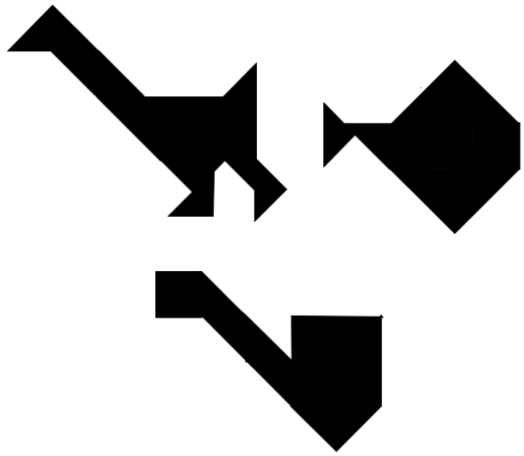
4.1 Crea diferentes figuras utilizando todas las piezas del tangram, dibújalas



4.2 realiza las siguientes figuras con el tangram



4.3 Construye con las siete piezas del tangram cada una de las figuras que a continuación se le presentan. Una vez construidas debe reproducirlas en su libreta, indicando la posición de las piezas. Responda de forma razonada a la siguiente pregunta: ¿tienen todas estas figuras la misma área?



4.4 Remarque las piezas del Tangram en una hoja, y responda, explicando cómo lo resuelve: superponiendo, contando triángulos, contando cuadrados.

4.4.1 Tomando como unidad el área de la pieza (triángulo pequeño) ¿cuál es el área de las demás piezas?

4.4.2 ¿Qué relación existe entre las áreas del cuadrado y el triángulo grande, teniendo como unidad el triángulo pequeño?

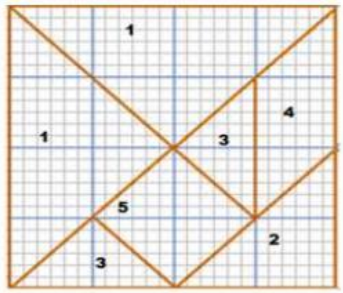
4.4.3 ¿Cuál es el área del cuadrado que se puede formar con las siete piezas tomando como unidad el triángulo grande?

4.4.4 ¿Cuál es el área del cuadrado que se puede formar con las siete piezas tomando como unidad el triángulo mediano?

4.4.5 Tomando como unidad el área del triángulo pequeño, construya con su Tangram una figura que tenga 4 unidades, otra que tenga 8 unidades y otra que tenga 10 unidades, dibújelas y mencione el área de cada una de ellas

4.5 Dado el siguiente tangram cuente cuántos cuadraditos tiene cada ficha, complete la tabla

Figura	Número de cuadrados	Area en cm^2
1 Triángulo grande		
2 Triángulo mediano		
3 Triángulo pequeño		
4 Paralelogramo		
5 Cuadrado		



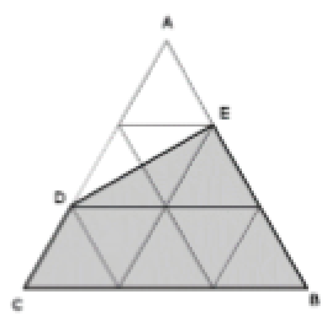
Nota: cada uno de los cuadrados de 1 cm de lado, se denomina centímetro cuadrado (cm^2), entonces cuando damos la cantidad de cuadritos de 1 cm de lado, estamos refiriéndonos al área.

4.6 Forme todos los cuadrados de distinto tamaño posibles con distintas piezas del tangram. Determinar las respectivas áreas.

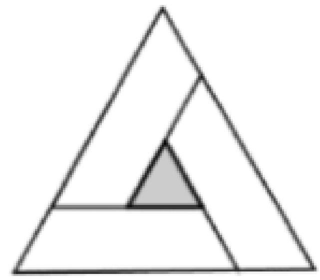
4.7 Forme rectángulos con las piezas del tangram. Utiliza diferente números de piezas hasta llegar a utilizar las siete. a) ¿Cuántos rectángulos puede formar en cada caso? b) ¿Cuál es el de mayor área?

PROBLEMAS RETADORES

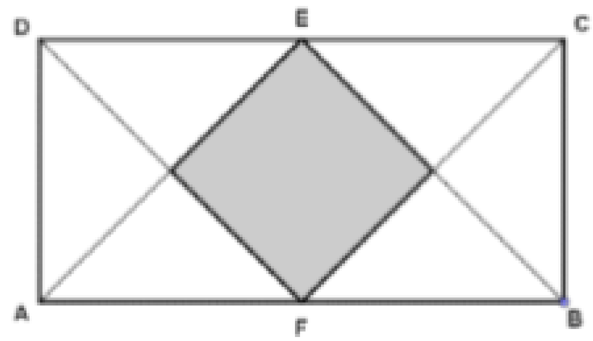
4.8 Un triángulo equilátero se cubre de la siguiente manera. ¿Con cuántas fichas triangulares pequeñas se cubre la zona sombreada de gris? Justifique su respuesta



4.9 El triángulo equilátero exterior tiene 16 unidades de área, el triángulo equilátero interior tiene 1 unidad de área, y los tres trapecios son congruentes. ¿Cuántas unidades tiene el área de uno de los trapecios?



4.10 En el rectángulo ABCD; E es el punto medio del lado DC y F es el punto medio del lado AB. Si el área del rectángulo es 500 cm2. ¿Cuál es el área de la figura rayada? justifique



SESIÓN CINCO: Deducción fórmulas de áreas (triángulo, rectángulo y cuadrado)

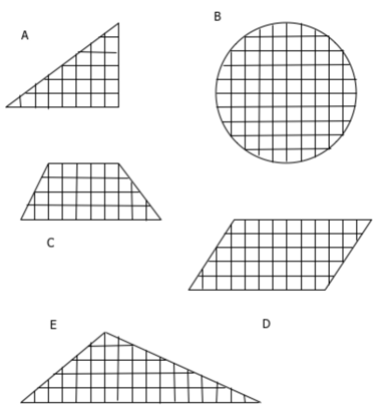
OBJETIVO: Deducir las fórmulas de área del triángulo, rectángulo y cuadrado

MATERIAL: La actividad impresa en papel blanco, lápiz.

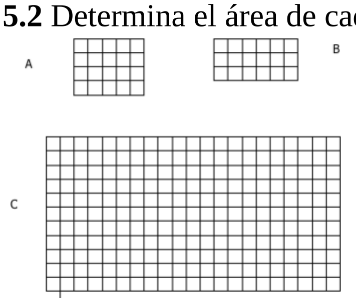
INTENCIONALIDAD: El estudiante debe concluir al realizar las actividades que para obtener el área de una figura además de recubrir la superficie con determinada figura y contar cuantas veces cupo, también se puede hacer por medio de fórmulas que se cumplen para todas las figuras de la misma forma, sin importar el tamaño.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

5.1 determinar el área de las siguientes figuras

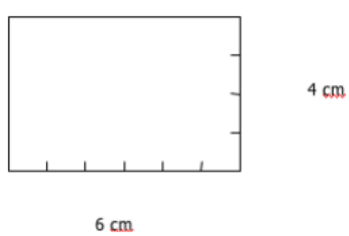


5.2 Determina el área de cada una de las figuras siguientes

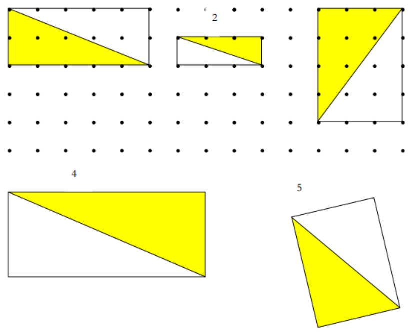


5.3 Calcula el número de unidades cuadradas que recubren el rectángulo de la figura y

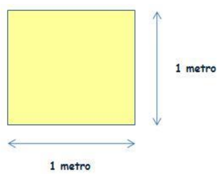
represéntalos



5.4 Determina en cada caso el área del triángulo



5.5 Un metro cuadrado es la superficie de un cuadrado cuyo lado mide un metro.



1 metro cuadrado = 1 metro X 1 metro = 1 m^2

En clase de geometría, Omar tomó y anotó algunas medidas pero olvido escribir a qué correspondía cada una. Las medidas que tomó Omar fueron:

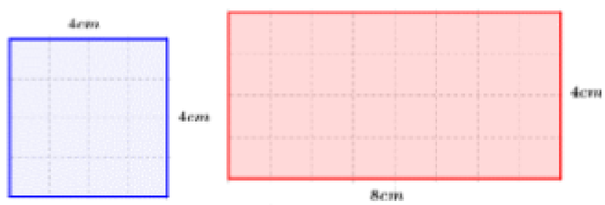
- I. 35 gramos.
- II. 10 centímetros (cm).
- III. 72 metros cuadrados (m^2).
- IV. 250 centímetros cúbicos (cm^3).

¿Cuáles de las medidas corresponden al área del salón?

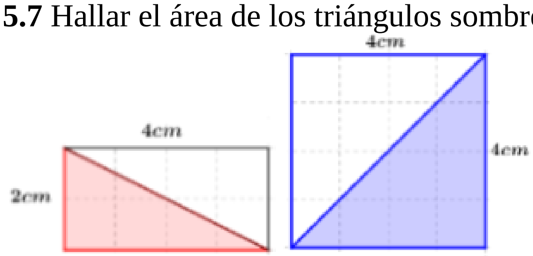
justifica

A. I B.II C.III D.IV

5.6 Hallar el área en cada caso:

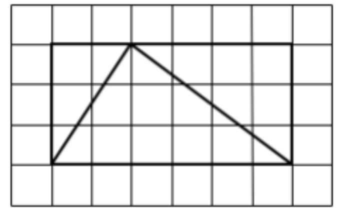


5.7 Hallar el área de los triángulos sombreados

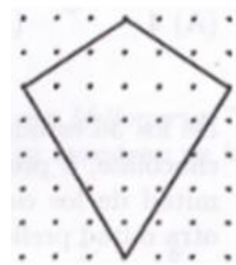


PROBLEMAS RETADORES

5.8 Calcula el área en centímetros cuadrados que recubren el triángulo de la figura, sabiendo que cada lado de los cuadrados pequeños miden 1.



5.9 Para participar en el festival de cometas en la I.E.M Eben Ezer, Esteban hace una cometa, cuya maqueta aparece como en la figura. Esta se dibuja sobre un geoplano donde la distancia entre los puntos vecinos es igual a 1 cm. ¿Cuál es el área?

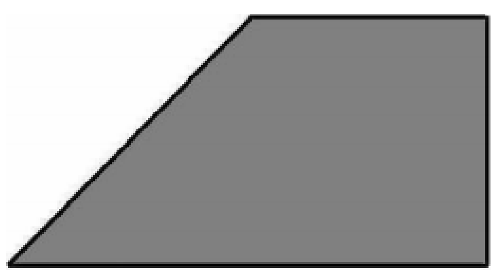


A) 21 cm^2B) 22cm^2C) 23cm^2D) 24 cm^2E) 25 cm^2

5.10 Este es el patio de la escuela de Tomás, el cual se desea embaldosar. Realiza un dibujo en escala de tal forma que un cuadradito de la plantilla, representa una baldosa.

5.10.1Indica dos métodos diferentes para calcular la cantidad de baldosas que necesitas.

5.10.2 Y si completamos el patio de modo que formes un rectángulo ¿Cuántas baldosas son necesarias?



SESIÓN SEIS: El área y la forma de la superficie

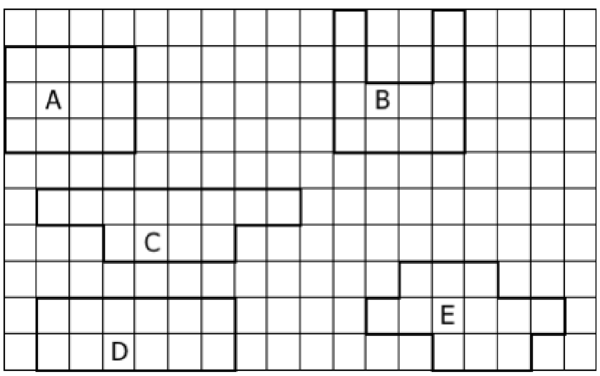
OBJETIVO: Reconocer el área independientemente de la forma de la superficie

MATERIAL: La actividad impresa en papel, figuras en papel, papel blanco, lápiz, tijeras y regla.

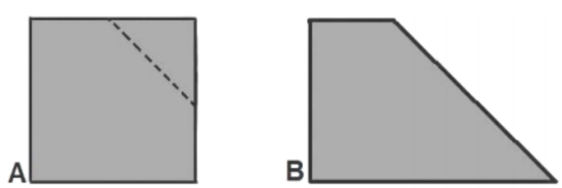
INTENCIONALIDAD: las actividades pretenden que los estudiantes observen que la superficie de una figura puede ser la misma aunque estas puedan tener distintas formas.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

6.1 Luís ha diseñado las siguientes figuras, utilizando para ello cuadrados. Calcula cuántos cuadrados serán necesarios para construir cada una de estas figuras. ¿Qué observa?

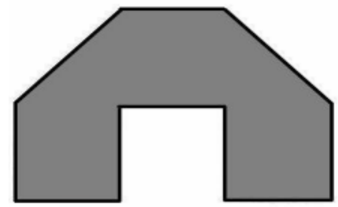


6.2 En la figura A se ha recortado por la línea de puntos una de las esquinas, y su ha ubicado como lo indica la figura B



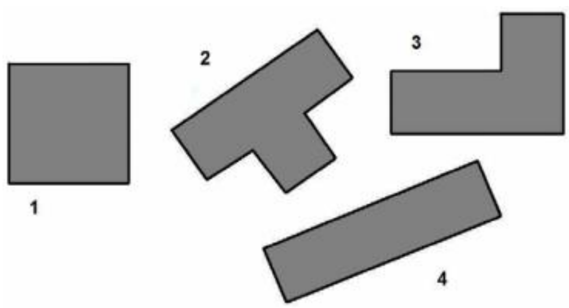
¿Qué puede decir de la cantidad de superficie que ocupa cada una de las figuras? Justifique su respuesta.

6.3 Encuentre tres figuras que sean equivalentes a la siguiente:

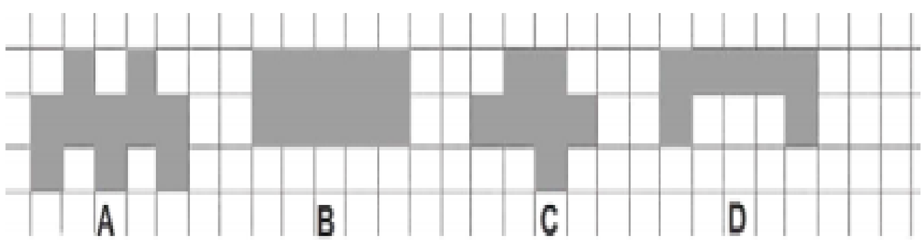


5.3.1 ¿Es posible encontrar un rectángulo equivalente a la figura dada? Justifique su respuesta

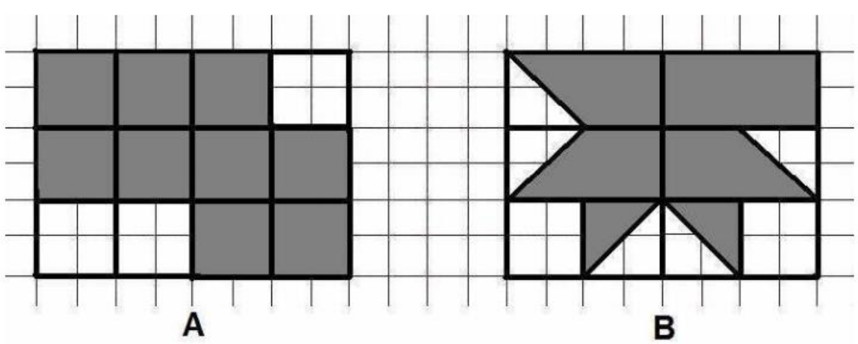
6.4¿Cuáles de las siguientes figuras ocupan más superficie? Justifique la respuesta



6.5 Considere las siguientes figuras A, B, C y D. Compare el área de esas figuras. ¿Qué puede decir acerca de esto?

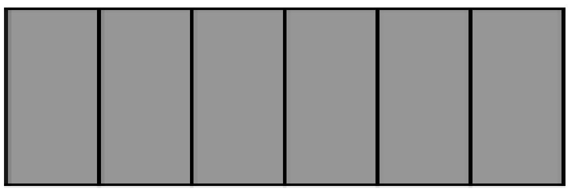


6.6 ¿A cuál de las siguientes superficies le corresponde mayor área? Justifique



PROBLEMAS RETADORES

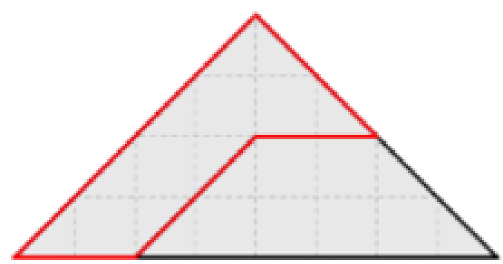
6.7 Juan juega con fichas rectangulares, todas iguales entre sí. Con 2 fichas arma un cuadrado con un área de 4 cm^2. Con 6 fichas arma un rectángulo. Lo desarma y arma otro, usando a la vez las 6 fichas y así sigue; siempre usa las 6 fichas para armar un rectángulo. Dibuja todos los rectángulos que Juan puede armar. Calcula el área cada uno de los rectángulos obtenidos. ¿Cuál es la conclusión a la que puedes llegar?



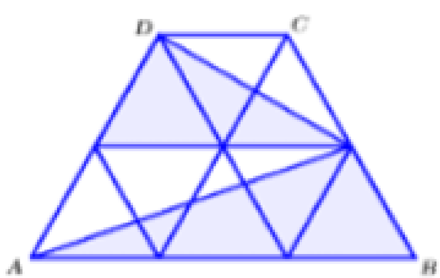
6.8 Un triángulo rectángulo isósceles se subdivide en dos regiones como se muestra.

6.8.1 ¿Las dos regiones representan la misma área?

6.8.2 ¿Qué criterio usó para tal comparación?



6.9 El trapecio ABCD está formado por 8 triángulos equiláteros de área 1 cm2. Determine el área de la región sombreada en el trapecio



SESIÓN SIETE: Descomposición de la superficie en partes iguales

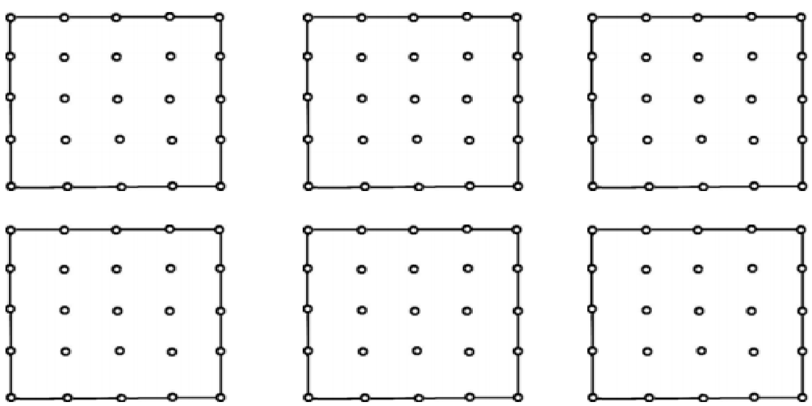
OBJETIVO: Descomponer convenientemente la superficie en partes iguales, utilizando la fracción como la relación de la parte respecto al todo.

MATERIAL: La actividad impresa en papel, colores, papel blanco, lápiz, tijeras y regla.

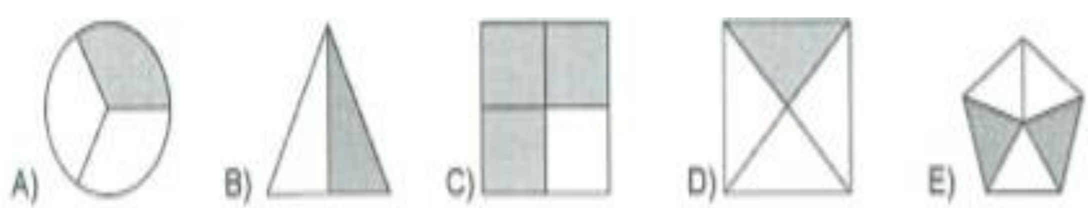
INTENCIONALIDAD: con las actividades los estudiantes deben observar y tener la capacidad de dividir la superficie adecuadamente para saber la fracción que representa una parte de la figura sobre la superficie total

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

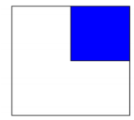
7.1 Pinte de rojo y verde, como más le guste, el siguiente cuadrado. Debe resultar, la misma cantidad de cada uno de los colores.



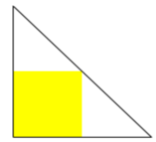
7.2 ¿Cuál de las siguientes figuras tiene pintada de gris la mitad de su superficie?



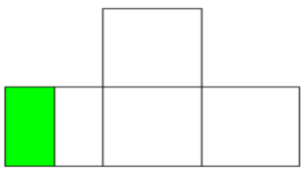
7.3 ¿Qué fracción del cuadrado representa la zona azul?



7.4¿Qué fracción del triángulo representa la zona sombreada?

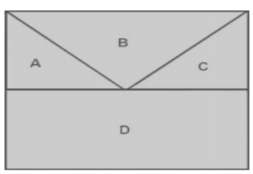


7.5¿Qué fracción de la figura representa la zona verde?

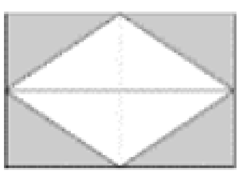


7.6A Lucía le han regalado un rompecabezas cuyas piezas tienen la forma que indica el dibujo.

¿Qué parte del rompecabezas representa cada pieza?



7.7 Determinar la fracción del rectángulo correspondiente a la región sombreada y a la región blanca.



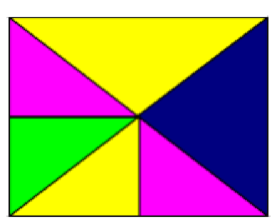
7.8 Qué fracción de la parte interior del cuadrado de la figura representa la:

a) ¿zona azul?

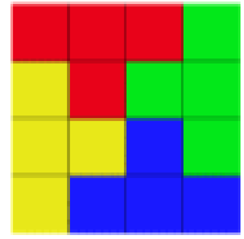
b) ¿zona rosa?

c) ¿zona amarilla?

d) ¿zona verde?

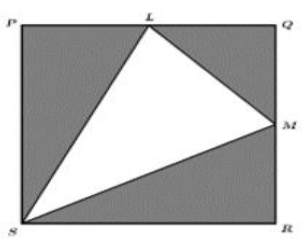


7.9 Se ha divido un cuadrado en cuatro regiones iguales en área. ¿Qué se puede decir con respecto a la parte del cuadrado correspondiente a cada región?



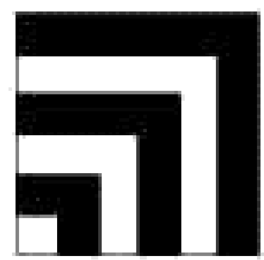
PROBLEMAS RETADORES

7.10 Sea PQRS un cuadrado. L y M son los puntos medios de PQ y QR respectivamente. ¿Qué parte del área del cuadrado corresponde a la región sombreada? explica tu respuesta



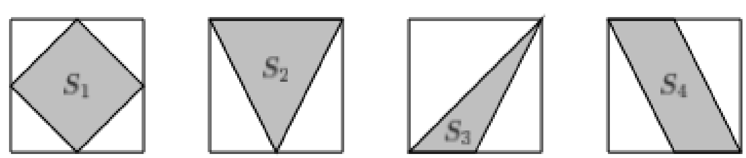
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{1}{4}$

7.11 ¿Qué parte de la región cuadrada está sombreada? Las tiras son del mismo ancho y la figura está dibujada a escala.



A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{7}{12}$ **D.** $\frac{2}{3}$ **E.** $\frac{5}{12}$

7.12 los cuadrados de la figura son todos iguales, en ellos se han marcado los puntos medios de sus lados. En cada cuadrado se ha sombreado un área y se le ha llamado S_1, S_2, S_3 y S_4 a la medida de estas áreas sombreadas. ¿Cuál de las siguientes relaciones es cierta? Justifique su elección



(a) $S_3 < S_4 < S_1 = S_2$ (b) $S_3 < S_1 = S_2 = S_4$ (c) $S_3 < S_1 = S_4 < S_2$
(d) $S_3 < S_4 < S_1 < S_2$ (e) $S_4 = S_3 = S_2 = S_1$

SESIÓN OCHO: evolución del momento 1

OBJETIVO: comparar el avance de los estudiantes con respecto a la prueba inicial.

MATERIAL: La actividad impresa en papel, lápiz.

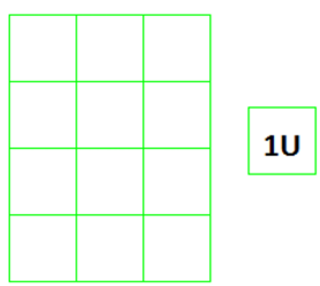
INTENCIONALIDAD: a través de las preguntas analizar el progreso de los estudiantes al utilizar los problemas reto en la conceptualización de área, comparándolas con las respuestas que los estudiantes dieron en la primera sesión.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD:

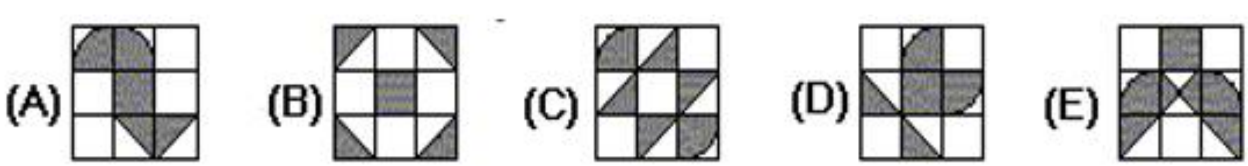
8.1 Cuando le nombran el concepto de área, usted en que piensa

8.2 Cuál es el área de la figura

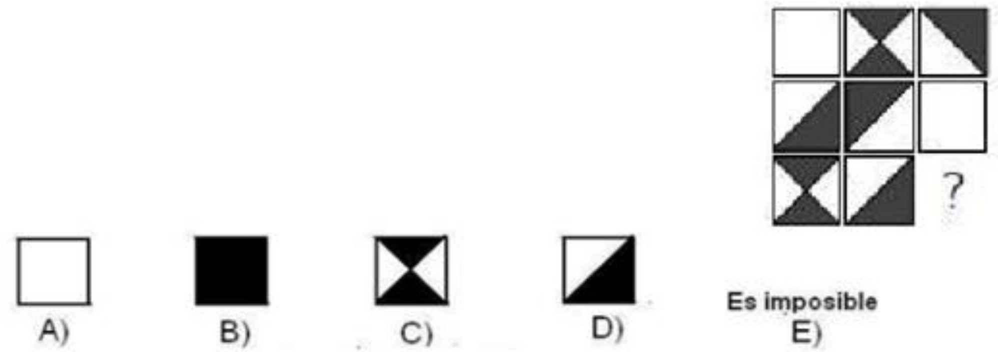
A. 12U
B. 6U
C. 1U
D. 9U



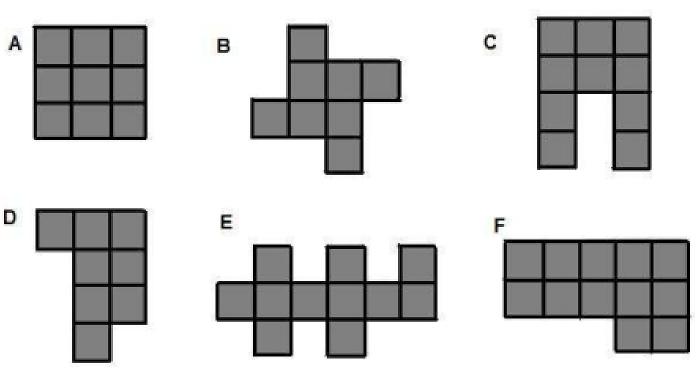
8.3 ¿Cuál de las áreas es mayor?



8.4 ¿Cuál de las piezas de abajo hay que añadir al cuadrado (incompleto) de la figura para que las áreas blanca y negra sean iguales?



8.5 Observa las siguientes figuras (de la A la F). Considera la cantidad de superficie de cada una de ellas y ordénalas de menor a mayor.

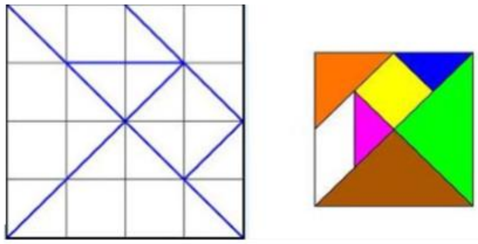


8.6 El área del

Se obtiene con

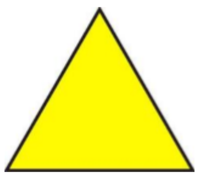
A. $L + L$ *B.* $b \times h$ *C.* $\frac{(b + B) \times h}{2}$ *D.* $\frac{b \times h}{2}$

8.7 El triángulo naranja corresponde a que parte del tangram



A. Un medio   B. un cuarto   C. un octavo   D. un dieciseisavo

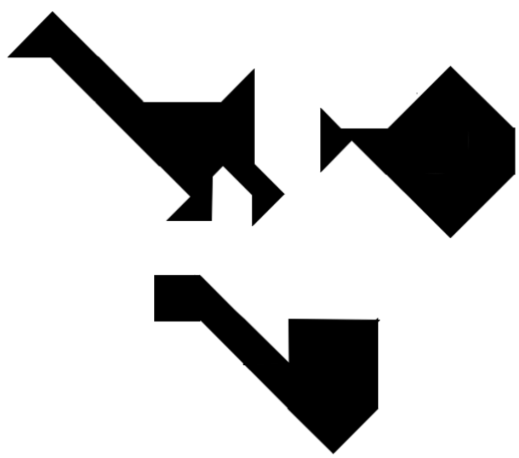
8.8 El área del



Se calcula con

A. L + L   *B. b x h*   *C.* $\frac{(b + B) \times h}{2}$ *D.* $\frac{b \times h}{2}$

8.9 Cada una de las figuras que a continuación se te presentan se construyen con las siete piezas del tangram.



Responde de forma razonada a la siguiente pregunta: ¿tienen todas estas figuras la misma área, explica?

SESIÓN NUEVE: Prueba final

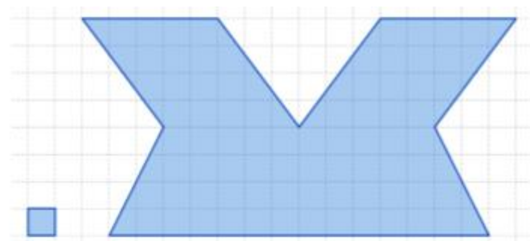
OBJETIVO: Identificar el avance en la solución de problemas reto

MATERIALES: La actividad impresa en papel, papel blanco, lápiz.

INTENCIONALIDAD: Ver la manera como los estudiantes abordan y solucionan problemas reto, además de verificar los avances en la conceptualización de área teniendo en cuenta las guías realizadas.

PROBLEMAS RETADORES

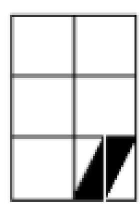
9.1 Sobre una malla cuadriculada, se ha dibujado la siguiente figura. ¿Cuál es el área de la figura, si se tiene en cuenta que el área del cuadrado sombreado es 1 cm^2?



A) 84 cm^2 B) 88 cm^2 C) 92 cm^2 D) 96 cm^2 E) 102 cm^2

Explica tu respuesta.

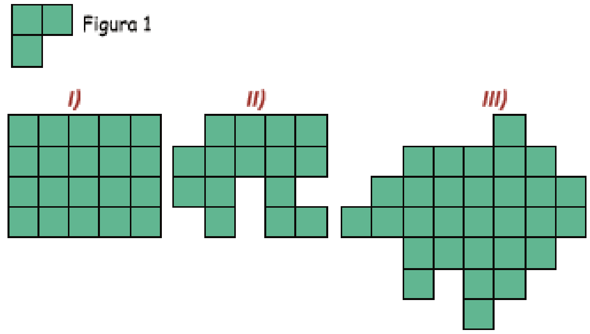
9.2 ¿Qué fracción de la figura es negra?



A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{10}$ D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{1}{15}$

Explica tu respuesta.

9.3 Señala cuál o cuáles de las figuras abajo podrías cubrir utilizando la Figura 1, sabiendo que cada cuadrito solo puede cubrirse una vez.

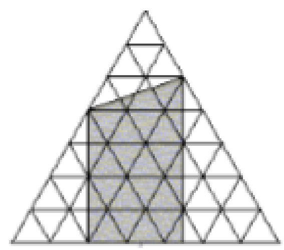


A) Solo I B) solo II C) solo III

D) solio y III E) I, II y III

Explica tu respuesta.

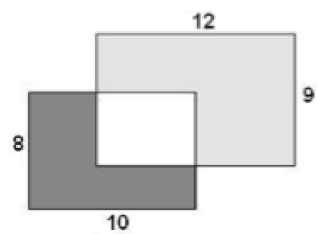
9.4 En la figura, los triángulos equiláteros pequeños tienen un área de una unidad. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



A) 20 B) 22,5 C) 23,5 D) 25 E) 32

Explica tu respuesta.

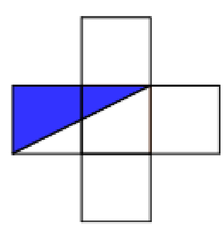
9.5 Dos rectángulos, de dimensiones 8 × 10 y 9 × 12 se superponen parcialmente, como se muestra en la figura. El área gris oscura es 37. ¿Cuánto vale el área gris clara?



A) 60 B) 62 C) 62, 5 D) 64 E) 65

Explica tu respuesta.

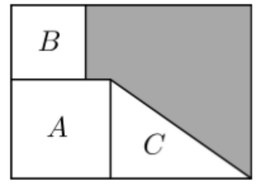
9.6 La cruz de la figura está formada por cinco cuadrados iguales y el área del triángulo que se muestra es 20 cm^2. ¿Cuál es el área de la cruz?



A) 20cm^2 B) 50cm^2 C) 100cm^2 D) 120cm^2 E) 150 cm^2

Explica tu respuesta.

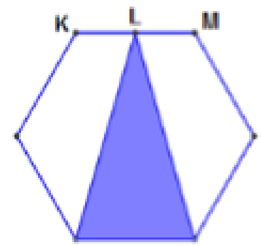
9.7 Las figuras A y B son cuadrados. Si el área del cuadrado A es 144 cm^2, el área del cuadrado B es 81 cm^2 y el área del triángulo C es 102 cm^2, ¿cuánto vale el área de la región sombreada?



A) 327cm^2 B) 204cm^2 C) 17cm^2 D) 609cm^2 E) 282 cm^2

Explica tu respuesta.

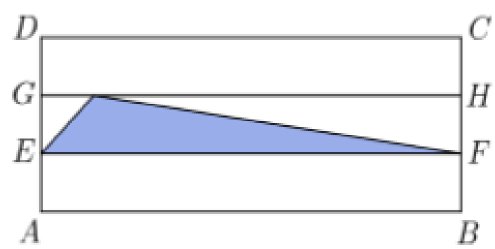
9.8 La fracción que representa el área de la parte sombreada en el siguiente hexágono regular, siendo L punto medio de KM, es:



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{6}$ E) $\frac{4}{5}$

Explica tu respuesta.

9.9 En la figura, ABCD es un rectángulo. Los lados AD y BC se han dividido en tres partes iguales para trazar los segmentos EF y GH. Si el área sombreada es 32cm^2, ¿Cuál es el área del rectángulo ABCD?



A) 32 cm^2 B) 64 cm^2 C) 192 cm^2 D) 96 cm^2 E) 160 cm^2

Explica tu respuesta.

9.10 Sobre una malla cuadriculada, se ha dibujado una máscara. ¿Cuál es el área en cm^2 de la máscara, si se tiene en cuenta que el área del cuadrado sombreado es 1cm^2?

Explica tu respuesta.