



ESTRUCTURA ARGUMENTATIVA EN EL CONCEPTO DEL TEOREMA DE
PITÁGORAS

JHONY ALEJANDRO RAMIREZ OVIEDO

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES
FACULTAD DE ESTUDIOS SOCIALES Y EMPRESARIALES
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
MANIZALES

2019

ESTRUCTURA ARGUMENTATIVA EN EL CONCEPTO DEL TEOREMA DE
PITÁGORAS

Autor

JHONY ALEJANDRO RAMIREZ OVIEDO

Proyecto de grado para optar al título de Magister en Enseñanza de las ciencias

Tutor

ANDRES FERNANDO SERRANO SANCHEZ

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES
FACULTAD DE ESTUDIOS SOCIALES Y EMPRESARIALES
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
MANIZALES

2019

DEDICATORIA

Primero que todo a Dios quien me dio la sabiduría necesaria para culminar con éxito ésta investigación y además me ayudó a salir avante en los momentos difíciles; a mi esposa Angélica y mi hijo Joel, pues ellos me motivan a continuar mejorando cada día, a mis padres y familia en general ya que siempre me apoyan en los proyectos que inicio.

RESUMEN

En la presente investigación cualitativa de corte descriptiva - comprensiva, se busca comprender la estructura de los argumentos en 6 estudiantes de grado octavo de la Escuela Normal Superior del Quindío al aplicar el teorema de Pitágoras, teniendo en cuenta los cinco niveles de argumentación propuestos por Erdurán. En esta investigación se tuvieron en cuenta 6 fases que son: En la fase 1 se elaboraron los instrumentos y se validaron con otro grupo de estudiantes, en la fase 2 se aplicó la secuencia didáctica sobre argumentación y el cuestionario inicial, en la fase 3 se aplicó la unidad didáctica en la que se incluyeron diversas formas de representación del concepto teorema de Pitágoras, en la fase 4 se aplicó el cuestionario final, en la fase 5 se organizó la información en una matriz y se realizó la interpretación de los resultados y en la fase 6 se realizó el informe escrito con las conclusiones y las recomendaciones.

En esta investigación se pudo determinar que las formas en que los estudiantes argumentan varía de acuerdo a la situación planteada y el tipo de representación que se esté realizando, por ejemplo se evidenció que los estudiantes argumentan mejor de forma escrita que oral, que en sus argumentos adicional a la comunicación oral o escrita incluyen gráficas, tablas u operaciones matemáticas para justificar su respuesta y en algunas pocas ocasiones usan teorías o referentes para darle fuerza a su argumento.

Palabras clave: Enseñanza de las matemáticas, habilidad, comunicación, material pedagógico, comprensión.

ABSTRACT

In the present qualitative descriptive research - comprehensive, we seek to understand the structure of the arguments in 6 eighth grade students of the Superior Normal School of Quindío when applying the Pythagorean theorem, taking into account the five levels of argumentation proposed by Erdurán . In this investigation, 6 phases were taken into account, which are: In phase 1 the instruments were developed and validated with another group of students, in phase 2 the didactic sequence on argumentation and the initial questionnaire were applied, in phase 3 the applied the didactic unit in which various forms of representation of the Pythagorean theorem concept were included, in phase 4 the final questionnaire was applied, in phase 5 the information was organized in a matrix and the interpretation of the results was performed and in phase 6 the written report with the conclusions and recommendations was made.

In this investigation it was determined that the ways in which the students argue varies according to the situation and the type of representation that is being made, for example it was shown that the students argue better in writing than oral, than in their arguments In addition to oral or written communication, they include graphs, tables, or mathematical operations to justify their response and, on a few occasions, use theories or references to strengthen their argument.

Keywords: Mathematics teaching, skill, communication, pedagogical material, comprehension.

CONTENIDO

1	PRESENTACIÓN.....	11
2	ANTECEDENTES.....	13
3	ÁREA PROBLEMÁTICA Y PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN.....	15
4	JUSTIFICACIÓN.....	19
5	REFERENTE TEÓRICO.....	21
5.1	Argumentación.....	21
5.1.1	Forma De Los Argumentos.....	22
5.1.2	Argumentación Y Demostración En Matemáticas.....	24
5.1.3	Niveles De Argumentación.....	25
6	OBJETIVOS.....	27
6.1	Objetivo General.....	27
6.2	Objetivos específicos.....	27
7	METODOLOGÍA.....	28
7.1	Enfoque metodológico.....	28
7.2	Contexto.....	28
7.3	Unidad de trabajo.....	29
7.4	Fases.....	29
7.4.1	Fase 1: Elaboración Y Validación De Los Instrumentos.....	29
7.4.2	Fase 2: Aplicación Secuencia Y Cuestionario Inicial.....	31
7.4.3	Fase 3: Intervención.....	31

7.4.4	Fase 4: Evaluación.....	32
7.4.5	Fase 5: Triangulación	32
7.4.6	Fase 6: Informe Final.....	33
8	RESULTADOS Y DISCUSIÓN.....	35
8.1	Análisis del cuestionario inicial.....	35
8.2	Análisis de instrumentos momento de intervención.....	42
8.2.1	Actividad 1: Teorema De Pitágoras Con Material Concreto.....	42
8.2.2	Actividad 2: De Lo Concreto A Lo Pictórico.....	48
8.2.3	Actividad 3: El Teorema Como Expresión Algebraica.....	53
8.2.4	Actividad 4: Comprobando El Teorema Con Geogebra.....	59
8.3	Análisis de cuestionario final.....	66
9	CONCLUSIONES	75
9.1	Respecto a diseño metodológico.....	75
9.2	Respecto a los instrumentos.....	76
9.3	Respecto al entorno escolar.....	78
10	RECOMENDACIONES.....	79
11	REFERENCIAS	81

LISTA DE TABLAS

Tabla 1 Porcentaje de estudiantes con respuestas incorrectas en la prueba saber 2017	16
Tabla 2 Matriz de sistematización de la información.....	33
Tabla 3 Niveles argumentativos en el cuestionario inicial	36
Tabla 4 Cantidad de estudiantes por nivel.....	38
Tabla 5 Actividad con material concreto.....	43
Tabla 6 actividad con representación pictórica	48
Tabla 7 Actividad con representación abstracta.....	54
Tabla 8 Actividad con el software Geogebra	60
Tabla 9 Cuestionario final	67

LISTA DE GRÁFICAS

Gráfica 1 Estructura argumentativa de Toulmin	23
Gráfica 2 Fases	34
Gráfica 3 Cambios en los niveles de argumentación inicial.....	53
Gráfica 4 Cambios en los niveles de argumentación intervención.....	66
Gráfica 5 Cambios en los niveles de argumentación final	72

LISTA DE ANEXOS

Anexo 1 Cuestionario inicial	84
Anexo 2 Cuestionario final.....	86
Anexo 3 Secuencia didáctica construcción de argumentos	90

1 PRESENTACIÓN

En el ámbito escolar y la enseñanza de las ciencias, se hace necesario promover las habilidades comunicativas de nivel superior como lo es la argumentación, cuestión en ocasiones olvidada por algunos maestros de educación básica y media, que además es de uso diario en diferentes entornos como el familiar, el laboral y el social, la argumentación está siempre presente a lo largo de nuestras vidas, tal como lo afirman Ruiz, Tamayo y Márquez (2013) “es la argumentación una competencia a desarrollar en el aula de clase no solo para promover una ciencia producto de la actividad humana, sino también para potenciar el desarrollo de pensamiento crítico y de competencias ciudadanas que aporten a la formación de las y los estudiantes” (p.34)

En la presente investigación se estudian los niveles argumentativos respecto al teorema de Pitágoras de los estudiantes de grado octavo de la Escuela Normal Superior del Quindío, teniendo en cuenta los niveles argumentativos propuestos por Erdurán (2007) y además se analiza las formas en las que se dan estos niveles, al aplicar como intervención una unidad didáctica en la que se incluyen algunas herramientas como las multifichas y el software Geogebra.

Por otra parte es necesario aclarar que se trata de una investigación cualitativa descriptiva en la que se aplicó un cuestionario inicial para determinar el nivel de argumentación en el que se encuentran los estudiantes, con ello como insumo se elaboró una Unidad Didáctica en la que se desarrolla el concepto del teorema de Pitágoras, iniciando el trabajo con material concreto, luego pasar a la representación pictórica, para después producir la solución a situaciones cotidianas por medio de operaciones abstractas.

Con lo anterior se pudo determinar de qué forma se están dando los niveles argumentativos en los estudiantes, puesto que se trabajó en clase además del uso del tablero y el cuaderno (herramientas tradicionales) con el software Geogebra y material concreto manipulativo las situaciones relacionadas con el Teorema de Pitágoras.

Finalmente se propuso un cuestionario en el que se determinó de qué forma se están dando los niveles argumentativos en los estudiantes y qué herramienta o herramientas favorecieron para que esto sucediera, teniendo en cuenta los niveles de argumentación iniciales.

2 ANTECEDENTES

García (2011) en su tesis de doctorado titulado: Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir geogebra en el aula. El cual se interesó en estudiar la forma como influye Geogebra en la transformación de las actitudes hacia las matemáticas y el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes de básica secundaria. En la mencionada tesis se destaca que se logró elaborar una secuencia didáctica que puede ser puesta en práctica por otros maestros, se mostró que Geogebra es un software muy eficiente para la enseñanza-aprendizaje de contenidos geométricos, ésta es importante al presente trabajo ya que permite determinar el software de geometría dinámica que se elegirá, pues se mostró que ofrece atributos que no ofrecen los métodos tradicionales de enseñanza cuando dicen que “Geogebra resultó ser un programa de muy fácil manejo, que requería poco tiempo para familiarizarse con las herramientas que ofrecía y cuyos atributos y ventajas respecto a métodos tradicionales de lápiz y papel se pusieron de relieve en todo momento” (p.507), además también se pudo determinar que Geogebra favorece la argumentación cuando expone que “La contribución de Geogebra al desarrollo de la competencia Argumentar-Demostrar puede resumirse diciendo que le permitió confirmar sus hipótesis y conjeturas visualmente. Una vez convencido de la certeza de una afirmación, lo animó a buscar formas de demostración más formales” (p.439).

Tamayo (2012) en su artículo de investigación titulado La argumentación como constituyente del pensamiento crítico en niños; el cual se constituye como uno de los productos obtenidos en el marco del proyecto: Formación de pensamiento crítico en niños el cual se enfocó en demostrar que para priorizar la formación del pensamiento crítico en los estudiantes mediante la didáctica de las ciencias implica transformar las prácticas de los maestros. En éste trabajo se concluye que es necesario trabajar en el aula con los estudiantes en el desarrollo de habilidades argumentativas, empezando por trabajar la estructura básica del argumento que debe contener los datos, la conclusión y la justificación, pero no debemos quedarnos allí, sino que debemos como maestros procurar que los estudiantes construyan argumentos más profundos.

El trabajo mencionado anteriormente del profesor Tamayo aportó en el presente trabajo ya que de allí se tomaron algunos de los aspectos que se deben tener en cuenta para lograr procesos argumentativos más profundos y consistentes en los estudiantes tales como: planear actividades en las que se enseñe a los estudiantes a diferenciar datos, conclusiones y justificaciones, desarrollar habilidades metacognitivas, aplicar la estructura argumentativa básica en el estudio de situaciones propias de las ciencias, adquirir progresivamente la terminología propia del campo, desarrollar habilidades de pensamiento lógico, concentrarnos en las relaciones causales abstractas que explican el fenómeno concreto, llegar a comprender algunas de las relaciones que hay entre el pensamiento científico y el pensamiento del sentido común y adquirir habilidades para explicar científicamente fenómenos cotidianos. Además se tuvo en cuenta la descripción detallada que hace Tamayo de cada uno de los cinco niveles argumentativos propuestos por Erdurán (2007) ”.

Jimenez y Pineda (2013) en su artículo de investigación titulado: “Comunicación y argumentación en la clase de matemáticas”, el cual tiene como intención, dar a conocer la importancia que tiene la argumentación en un contexto en el que primen las estrategias de comunicación, se destaca de éste, que los autores consideran importante que en las clases de matemáticas y en general de las ciencias se deba promover la comunicación como un acto social en el que los estudiantes puedan expresar libremente lo que piensan respecto al tema o problema que se esté abordando, además acentúan que al aplicar estrategias de trabajo en grupo en la que los estudiantes interactúen entre sí para construir ideas, refutar opiniones y compartir sus percepciones y pensamientos” permiten el desarrollo de la argumentación.

Del anterior artículo se tomará la estrategia de solucionador-escucha que proponen los autores ya que promueve el desarrollo de la argumentación. Dicha estrategia se incluirá en el diseño y la aplicación de la unidad didáctica como instrumento de intervención en el grupo determinado en la metodología.

3 ÁREA PROBLEMÁTICA Y PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

La argumentación es importante en la cotidianidad de las personas, pues en diversas circunstancias es necesario dar razones y justificaciones de opiniones, afirmaciones o actuaciones, lo cual también se presenta en el ámbito educativo, más aún en la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias, de lo cual las matemáticas no son la excepción, se encuentra que en “casi la mitad de los docentes con los que se trabajó en esta investigación, afirmó que no hace demostraciones en clase, utilizando como justificación la falta de interés de los alumnos, el trabajo con cursos numerosos, la falta de conocimientos previos de los alumnos, la excesiva extensión de los programas” (Crespo, 2005).

Además Crespo encontró que “la mayoría de los que dieron esta respuesta utilizan argumentaciones lógicas en el aula y hacen que sus alumnos justifiquen lo que realizan, pero afirman que no se realizan las argumentaciones con el rigor suficiente” (p.27), en otras palabras, los profesores promueven la argumentación en el aula pero no logran que los estudiantes elaboren argumentos de buen nivel.

La presente investigación se desarrolla debido a los bajos niveles de argumentación de los estudiantes en la clase de matemáticas, lo cual se refleja en las aulas de los maestros de matemáticas, tal como lo expresa Aldana (2014), los estudiantes “no presentan una competencia comunicativa para argumentar sus posturas académicas, son poco expresivos en la forma como justifican la resolución de las tareas matemáticas, se quedan en los procesos, en las respuestas, muestran unas concepciones poco firmes” (p.38), es decir que el proceso argumentativo en los estudiantes es escaso en las aulas en general y particularmente en la clase de matemáticas, pues en algunos casos se conforman (estudiantes y profesores) con obtener la respuesta “correcta” y no se pasa a profundizar en el por qué esa es la respuesta acertada, si puede haber otras opciones también acertadas, o si definitivamente es equivocado su juicio. Esto se puede estar dando en las clases ya que se viene de una enseñanza transmisionista que poco aporta a promover ésta habilidad.

Por otra parte el razonamiento es fundamental para argumentar ya que sin él, se expondrán afirmaciones sin sustento alguno, es decir, sin pruebas ni justificaciones para lo que se dice. Así como lo plantean Toulmin, Morrás y Pineda (2007) “se tratará solamente de saber si esta argumentación concreta responde a una norma, si merece que la aceptemos respetuosamente o que la rechazemos razonadamente.” (p. 275), se puede entonces interpretar que sin razonamiento es muy difícil que se pueda argumentar, es por esto que a continuación se muestran los datos que brinda el ICFES al respecto de ésta competencia en el área de matemáticas en los diferentes niveles.

Al revisar los resultados de las pruebas saber de grado 3, 5 y 9 aplicadas en el año 2016 y publicadas por el (ICFES, 2017) de la institución educativa Escuela Normal Superior del Quindío (ENSQ) se encuentra que:

El 41% de los estudiantes de grado tercero, quinto y noveno de la institución educativa no contestaron correctamente las preguntas relacionadas con la competencia razonamiento, tal como lo muestra la siguiente tabla.

Tabla 1 Porcentaje de estudiantes con respuestas incorrectas en la prueba saber 2017

	Establecimiento	ETC	Colombia
Grado 3°	41%	40%	41%
Grado 5°	41%	43%	44%
Grado 9°	41%	46%	48%

Fuente: elaboración propia a partir de ICFES (2017)

Se evidencia que de grado tercero a grado noveno en la competencia razonamiento se mantiene el porcentaje de estudiantes que no contestaron correctamente las preguntas relacionadas con dicha competencia, lo cual puede indicar que se trabaja muy poco en las aulas de la Escuela Normal Superior del Quindío, puesto que si fuera problema de un sólo

maestro esto se vería en un solo nivel y no en todos los niveles como se mostró anteriormente.

Aunque esta competencia aparece con un porcentaje menor que la Entidad Territorial Certificada (ETC) y que el país, este porcentaje sigue siendo muy alto pues representa casi la mitad de los estudiantes que no dominan ésta competencia, es decir, que la capacidad para argumentar de nuestros estudiantes se encuentra comprometida desde la básica primaria y sosteniéndose ésta debilidad en la secundaria, lo que influye en la comprensión de conceptos y desarrollo de habilidades en la solución de problemas.

De lo anterior surge el interés de la presente investigación por buscar alternativas que permitan comprender los niveles argumentativos que alcanzan los estudiantes para resolver problemas relacionados con el Teorema de Pitágoras.

En esa búsqueda se encontró que las actividades donde se requiere la manipulación de lo concreto, las representaciones simbólicas y pictóricas mejoran la comprensión de los conceptos, pues como lo exponen Gajardo, Reveco y Zapata (2018) “al utilizar una metodología tradicional regularmente los alumnos no presentan una actitud positiva, como se ha señalado anteriormente es difícil que los estudiantes desarrollen actitudes positivas hacia su propia capacidad matemática si solo se le presenta problemas y tareas algorítmicas”(p.124), además los autores manifiestan que esta situación se puede solucionar con el uso de material concreto, representaciones pictóricas y simbólicas (metodología COPISI), ya que éstas promueven en los estudiantes mejores ideas matemáticas y mejor uso en situaciones de la vida cotidiana.

Por otro lado, se encontró que al usar las TIC en el aula ayuda mejorar las competencias matemáticas en los estudiantes, tal como lo manifiestan Cruz y Puentes (2012) “las TIC les permite obtener las competencias necesarias para resolver situaciones matemáticas, reorganizar su forma de pensar y desarrollar tanto sus habilidades para resolver situaciones, usar el lenguaje y herramientas matemáticas” (p.134), competencias entre las cuales está el razonamiento según la matriz de referencia para el área de matemáticas competencia que está directamente relacionada con la habilidad de argumentar.

Finalmente cabe destacar que se trabajó la argumentación con situaciones que se resuelvan teniendo en cuenta el Teorema de Pitágoras puesto que, por una parte este concepto tiene una amplia gama de situaciones que se pueden resolver haciendo uso de él y por otra parte, porque comúnmente se ha enseñado este concepto de forma tradicional, haciendo memorizar al estudiante la ecuación para que luego la aplique en la solución de triángulos rectángulos, dejando a un lado la construcción, verificación y aplicación que puedan descubrir y entender los estudiantes.

Por lo susodicho surge la pregunta: ¿Cómo se dan los niveles argumentativos de los estudiantes del grado 8° de la Normal Superior del Quindío en la solución de situaciones relacionadas con el teorema de Pitágoras?

4 JUSTIFICACIÓN

La presente investigación busca comprender los niveles argumentativos de los estudiantes de grado octavo en la solución de situaciones relacionadas con el Teorema de Pitágoras, es importante destacar que este teorema se puede trabajar desde diversas situaciones y de distintas formas como las multifichas y los puzzles, y software como el Geogebra, mediante los cuales los estudiantes tendrán la posibilidad de manipular los triángulos, describir, reconocer relaciones geométricas y argumentar la solución a situaciones planteadas.

Por lo anterior es necesario trabajar en clase la argumentación con el fin de obtener argumentos de mejor calidad, que a la larga se refleja en mejores ciudadanos y profesionales para nuestro país, dicho de otra forma es prioridad cambiar nuestros métodos de enseñanza para formar personas íntegras que puedan dar solución a los problemas de nuestra sociedad y de nuestro entorno.

Desde el punto de vista teórico se pudo determinar los niveles argumentativos de los estudiantes, puesto que se trabajó en clase además del uso del tablero y el cuaderno (herramientas tradicionales) con el software Geogebra y material concreto las situaciones relacionadas con el Teorema de Pitágoras. Sumado a ello será una guía para docentes del área de matemáticas pues se podrá determinar si los niveles de los argumentos en nuestros estudiantes mejora al incluir actividades no tradicionales relacionadas con el Teorema de Pitágoras.

Con ello se vieron beneficiados tanto estudiantes como docentes de matemáticas, por un lado los estudiantes se formaron en la estructura de argumentos más sólidos para sus afirmaciones comprendiendo cada vez mejor los conceptos trabajados en clase y por otro los docentes de matemáticas, ya que tendrán un indicio de la importancia de incluir diversas actividades con software, material concreto, representaciones simbólicas y pictóricas, principalmente en clases relacionadas con el desarrollo del concepto del Teorema de Pitágoras. Una muestra de ello lo encontraron Gajardo et al. (2018) “al trabajar con material

concreto, durante la clase se presentaba mayor actividad, pero se mantenían más motivados en el trabajo que realizaban”

Por dichas razones se hace necesario utilizar estrategias no tradicionales que guíen tanto a docentes como estudiantes a mejorar sus argumentos, que genere aprendizajes profundidad y aptos para la solución de problemas en la vida cotidiana, tanto en lo social como en lo laboral.

Por consiguiente una estrategia no tradicional es el uso del software Geogebra, el cual permite trabajar geometría dinámica con los estudiantes, y que según Acosta (2010) “puede considerarse como un medio adecuado para que la interacción de los alumnos produzca efectivamente un aprendizaje, posibilitando al profesor el utilizar las experiencias personales de los alumnos para darle sentido al saber que desea enseñar” (p. 142), por lo dicho anteriormente, se eligió el software Geogebra como herramienta para la intervención en el aula, además porque se podrá comprobar el Teorema de Pitágoras de una forma más general.

Finalmente se podrá decir cuáles de las actividades promovieron argumentaciones más sólidas de los estudiantes, o si desde el punto de vista práctico cada una de las actividades aportó en la construcción de argumentos en niveles superiores.

5 REFERENTE TEÓRICO

5.1 Argumentación

La argumentación es un concepto estudiado por muchos autores entre los que se destaca Stephen Toulmin el cual es el autor más influyente en los últimos años, pues es referente de varios autores tales como Walton (2005), Aberdein (2007), Sardà y Sanmartí (2000), Sibel Erdurán (2007) y Oscar Tamayo (2012), entre otros, de los cuales se hará mención más adelante de Erdurán y Tamayo.

Por un lado Sardà & Sanmartí (2000) realizan una búsqueda de las formas como se ha conceptualizado la argumentación, dentro de la cual destacan a Toulmin como un filósofo y epistemólogo, que analiza el concepto de argumentación teniendo en cuenta la lógica. Según Toulmin (2007), en su libro “the uses of argument”, existen normas universales para construir las argumentaciones y evaluarlas, las cuales cumplen con la lógica formal.

Por otra parte Toulmin (2007) analiza lo que piensan los lógicos formales en cuanto a la validez de un argumento teniendo como base, el estudio de las relaciones entre los distintos tipos de proposiciones que conforman un argumento y afirma que para realizar una evaluación adecuada a los argumentos es necesario inicialmente olvidarnos por un momento de las ideas que tenemos sobre la teoría de la lógica, para podernos ocupar del análisis de la forma en la que realizamos afirmaciones y el significado que tienen para nosotros.

Toulmin asegura, como se dijo anteriormente, que las argumentaciones que se dan en la cotidianidad no están dadas por un modelo riguroso seguido y aplicado por los lógicos, sino que propone un modelo que se ajusta para realizar el análisis de cualquier tipo de argumentación que se encuentre dentro de los discursos sociales tales como una conversación, la prensa escrita, la interacción entre un abogado y su cliente o entre un profesor y su alumno. A continuación se muestra la forma que deben tener los argumentos según el autor en cuestión.

5.1.1 Forma De Los Argumentos.

Siguiendo con Toulmin (2007), él realiza una descripción sobre la forma que deben llevar los argumentos teniendo como referente la analogía jurídica y la lógica matemática y afirma que “Un argumento es similar a un organismo. Tiene al mismo tiempo una estructura anatómica grande y tosca y otra, por así decirlo, fisiológica y más delicada” (p.129), de los cuales se enfoca en la estructura fisiológica, es decir en la microestructura, sin dejar de lado la macroestructura.

Continuando en la misma línea, Toulmin (2007) plantea un esquema que se debe seguir para representar los argumentos. Inicialmente establece que para los argumentos en general se comienza realizando una afirmación o conclusión (C) la cual puede ser cuestionada por alguien, momento en el cual se debe hacer uso de elementos justificatorios o datos (D) con los que se cuentan, de tal forma que se exponen como sustento a la afirmación realizada inicialmente, pero la persona puede hacer otro tipo de cuestionamiento a nuestro argumento que no se puede responder haciendo uso de los datos.

Ante los cuestionamientos que puede tener un argumento el autor recomienda que se deba explicar los pasos que se llevan a cabo para con los datos (D) llegar a la conclusión y que éstos pasos son coherentes con la afirmación, para llegar a esto se deben pronunciar proposiciones tales como “Datos tales como D permiten extraer conclusiones o realizar afirmaciones tales como C” (p.134), las cuales serán llamadas justificación o garantías (J).

La anterior es la estructura básica de un argumento en la que se pueden observar los datos, la conclusión y la justificación, pero esta estructura no es suficiente si es cuestionado nuevamente el argumento, en éste momento se hace necesario el uso de un modulador (M) el cual permita matizar la conclusión con adverbios tales como necesariamente, probablemente, presumiblemente, posiblemente, factiblemente, eventualmente, entre otros, que además indican el grado de fuerza con los que son tenidos en cuenta los datos que utilizamos.

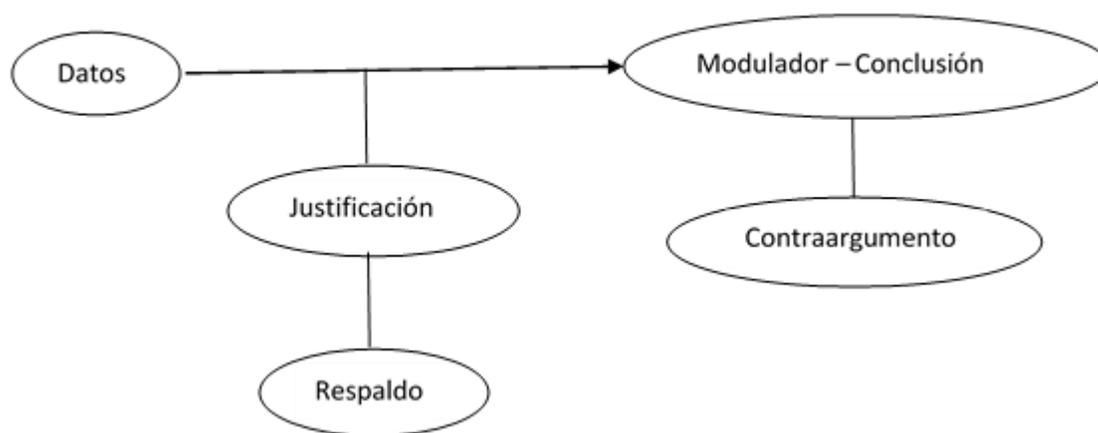
Finalmente el autor incorpora a la estructura de un argumento en general las excepciones, refutadores o contraargumentos (R) y los Fundamentos o respaldo (F), siendo los primeros

(R) ubicados justo debajo de los moduladores, pues indicaría la razón por la que la afirmación sea probable y no verídica en su totalidad y los segundos (F) ubicados debajo de las justificaciones (J) ya que ellos servirán como respaldo en favor de la justificación.

El autor elabora un modelo en el que muestra la estructura formal de la argumentación, en el que describe los elementos que la componen, representa sus relaciones y explica cada uno de los componentes del razonamiento empezando por los datos hasta terminar en las conclusiones.

Con los elementos de un argumento elabora un esquema de su estructura argumentativa que contiene dichos elementos y sus relaciones.

Gráfica 1 Estructura argumentativa de Toulmin



Fuente: elaboración propia a partir de Tamayo (2012)

Por otro lado, Perelman y Olbrechts-Tyteca (1989) afirman “una ciencia racional no puede contentarse con opiniones más o menos verosímiles, sino que elabora un sistema de proposiciones necesarias que se impone a todos los seres racionales y sobre las cuales es inevitable estar de acuerdo” (p. 31), es decir, que cada ciencia debe tener proposiciones totalmente convincentes para todas las personas que la estudian y en las cuales no haya espacio para alguna duda.

En el tratado de la argumentación de Perelman & Olbrechts-Tyteca se estudian autores latinos y desde luego también algunos griegos como Aristóteles y Platón que se interesaron en el arte de persuadir y convencer, la técnica de la deliberación y de la discusión; lo cual fue llamado por el autor como la nueva retórica, éstos autores se enfocaron en la retórica y destacan que se acerca a la argumentación ya que “toda argumentación se desarrolla en función de un auditorio” (p. 36).

5.1.2 Argumentación Y Demostración En Matemáticas.

Algunos autores como sugieren que argumentar es demostrar o están muy relacionados, es el caso de Balacheff y Duval quienes usan el término demostración de forma equivalente cuando dicen que “el objeto de una demostración es la verdad y, por lo tanto, obedece a criterios de validez” (Citado en Crespo, 2004, p.4).

Por otra parte algunos autores más formales aseveran que demostrar “en una teoría matemática es una secuencia de proposiciones, cada una de las cuales o bien es un axioma, o bien una proposición que ha sido derivada de los axiomas iniciales por las reglas de inferencia de la teoría” (Crespo, 2004, p.5)

En esta investigación se hace la distinción entre demostración y argumentación entendiendo que la demostración es un proceso más formal con la que los estudiantes aún no están familiarizados, les parece algo muy complicado y en ocasiones sin sentido pues aún no tienen la madurez necesaria para alcanzar este es necesario un desarrollo superior del pensamiento, “sin embargo, desde edades tempranas, es necesario que los niños aprendan a intuir, plantear hipótesis, hacer conjeturas, generalizar y cuando sea posible, ensayar pequeñas argumentaciones y demostraciones, aunque sin exigencia de formalización” (Crespo, 2004, p.2)

Por otro lado la argumentación se tomará tal como lo plantea Duval en la que “Una argumentación trata de mostrar el carácter de verdad de una proposición” (citado en Crespo, 2013, p.52), ya que está en concordancia con lo citado anteriormente de Toulmin y que por consiguiente esta enlazado con los niveles de argumentación propuestos por Erdurán (2007) y trabajados por Tamayo (2012), de los cuales se escribirá a continuación.

5.1.3 Niveles De Argumentación.

Según Erdurán (2007) un argumento se refiere a los componentes que fundamentan los datos, afirmaciones, fundamentos, apoyos y respaldos que contribuyen al contenido de un argumento y la argumentación es el proceso en el que se construye y organizan dichos componentes.

Erdurán desarrolló un enfoque metodológico en el que adaptó el patrón de argumento de Toulmin (TAP) para codificar los datos que se generaban en la clase, de allí obtuvo un resultado adicional, un esquema en el que la argumentación se evalúa en términos de niveles de calidad de las oposiciones en las discusiones de los estudiantes. El esquema de la argumentación se presenta en 5 niveles tal como se muestra a continuación:

En el nivel 1 de argumentación el estudiante comprende que los argumentos son una descripción simple de la vivencia (observé, toqué, froté, oí, sentí...) se limita a explicar lo que ocurrió en la realización de la tarea propuesta, se hacen descripciones literales de los fenómenos observados, hace uso de algunos verbos en primera persona, las afirmaciones son producidas con la mediación de los órganos de los sentidos, el argumento es construido con la apariencia externa del fenómeno estudiado.

En el nivel 2 el estudiante comprende argumentos donde se identifican con claridad los datos (data) y una conclusión (claim). Principalmente identificando la conclusión.

En el nivel 3 el estudiante comprende argumentos en los cuales se identifican con claridad los datos, conclusiones y justificación, se destacan las que poseen datos, varias conclusiones de los experimentos o tareas desarrolladas y una o varias justificaciones de sus argumentos, expresando de manera fluida y coherente sus ideas. Se destacan por ser argumentos mejor estructurados, donde se visualizan conectores, buen manejo de vocabulario, redacción clara y de fácil interpretación. Un argumento fuerte tiene varias justificaciones que soportan una conclusión, la cual incorpora conceptos científicos y hechos adecuados, relevantes y específicos.

En el nivel 4 Comprende argumentos constituidos por datos, conclusiones, y justificaciones (warrants), haciendo uso de cualificadores (qualifiers) o respaldo teórico (backing). Se destacan por ser argumentos completos, bien estructurados en su forma y finalidad, con ideas claras, buen uso del vocabulario, uso de cualificadores o modalizadores, o bien con la presencia de un respaldo teórico que fortalece su desempeño en la actividad argumentativa.

En el nivel 5 comprende argumentos en los que se identifican datos, conclusión(es), justificación(es), respaldo(s) y contraargumento(s). Erdurán (como se citó en Tamayo 2012)

6 OBJETIVOS

6.1 Objetivo General

Comprender los niveles argumentativos en estudiantes de grado octavo de la Escuela Normal Superior del Quindío en situaciones relacionadas con la aplicación del teorema de Pitágoras.

6.2 Objetivos específicos

- Identificar los niveles argumentativos iniciales de los estudiantes
- Analizar los cambios que presentan los estudiantes con relación a los niveles argumentativos alcanzados durante la aplicación de la unidad didáctica.

7 METODOLOGÍA

7.1 Enfoque metodológico.

El enfoque metodológico de la presente investigación es de tipo cualitativo del cual Strauss & Corbin (2002) hablan al respecto y afirman que la investigación cualitativa es “cualquier tipo de investigación que produce hallazgos a los que no se llega por medio de procedimientos estadísticos u otros medios de cuantificación”, además también dicen que algunos de los datos pueden cuantificarse, pero la mayoría de los datos son de orden cualitativo de corte descriptivo-comprensivo, es decir, un proceso mental que no necesariamente utiliza procesos matemáticos.

Este tipo de investigación se caracteriza por usar instrumentos como la entrevista y las observaciones, pero además “pueden incluir documentos, películas o cintas de video, y aun datos que se hayan cuantificado con otros propósitos tales como los del censo” (Strauss & Corbin, 2002), de aquí que se haya elegido este tipo de enfoque ya que para identificar los niveles de argumentación en los estudiantes se requiere de bastante observación, escucha y análisis de los datos que se vayan obteniendo a lo largo de la investigación.

7.2 Contexto.

La escuela normal superior del Quindío está ubicada en el barrio Las Américas de la ciudad de Armenia, en la cual se atiende una población cercana a los 3000 estudiantes, los cuales provienen de distintos lugares de la ciudad y pertenecientes a diversos estratos socio-económicos, la mayoría provenientes de familias con títulos profesionales niveles educativos.

Nuestro proyecto educativo institucional está enfocado hacia la formación pedagógica de maestros educados para la democracia, preparados y capacitados para investigar y dar respuesta a los múltiples problemas de la ciencia, del pensamiento y de la técnica mediante una pedagogía activa y vivencial, lo cual se apoya en el enfoque socio crítico de enseñanza.

En la institución hay 6 grupos de octavo en la sede principal cada uno con aproximadamente 36 estudiantes los cuales tienen edades que oscilan entre 12 y 14 años de edad. Es de destacar que se pueden encontrar estudiantes con barreras para el aprendizaje ya que nuestra institución por ser inclusivos se atienden niños con diferentes situaciones. Por lo general los niños de grado octavo de la institución son estudiantes poco participativos y aquellos que participan son porque tienen un buen concepto de las matemáticas.

7.3 Unidad de trabajo.

La muestra que se tomará serán 6 estudiantes de grado octavo, particularmente del grupo 8B de la institución educativa Escuela Normal Superior del Quindío para ser estudiados, los cuales serán elegidos teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

- Estudiantes que hayan completado el cuestionario inicial
- Se elegirán 2 estudiantes de cada nivel de argumentación, de acuerdo a los resultados obtenidos en el cuestionario inicial aplicado, de tal forma que los estudiantes elegidos estén en distintos niveles de argumentación según la clasificación de Erdurán.

7.4 Fases.

El desarrollo de la investigación se realizará teniendo en cuenta 6 fases las cuales serán descritas a continuación:

7.4.1 Fase 1: Elaboración Y Validación De Los Instrumentos.

En esta fase se elaboraron y validaron con otro grupo del mismo colegio y se aplicarán los distintos instrumentos, con los que se va a intervenir el grupo, se empezará con la aplicación de un cuestionario inicial (Ver anexo 1) con el cual se realiza una primera clasificación de los estudiantes de acuerdo a los niveles de argumentación.

7.4.1.1 Definición de los Instrumentos.

Los instrumentos que se usarán en esta investigación son el cuestionario, la observación y la unidad didáctica.

- Secuencia didáctica: Se elaborará una secuencia didáctica (clase) en la que se tendrá como objetivo que los estudiantes reconozcan los elementos que debe tener un argumento. (anexo 3)

- Cuestionario: Es un instrumento de recogida de datos que consiste en la obtención de respuesta de los sujetos estudiados a partir de la formulación de una serie de preguntas. (anexo 1)

Al iniciar la investigación se aplicó un cuestionario en el que se tuvo posibilidad de clasificar por niveles de argumentación según Erdurán (2007) que poseen los estudiantes.

- Observación: Consiste en observar a las personas cuando efectúan su trabajo. (Comercio internacional, 2010)

Fue primordial en el transcurso de la investigación estar atentos y con los sentidos despiertos para captar la información de las actuaciones de los estudiantes, pues de allí se pueden tener elementos importantes sobre sus desempeños; para esto es necesario grabar las clases, que posteriormente se analizarán y ayudarán para la clasificación en los niveles de argumentación de los estudiantes.

- Unidad didáctica: entendida “como un proceso flexible de planificación de la enseñanza de los contenidos relacionados con un campo del saber específico para construir procesos de aprendizaje en una comunidad determinada” (Tamayo, y otros, 2010).

En la UD se tendrá en cuenta en un primer momento, los conceptos previos, los cuales son necesarios para abordar el teorema de Pitágoras. En éste primer momento se propone un problema en el que estén incluidos los conceptos previos, dicha actividad se realizará de manera individual por cada estudiante y posteriormente en plenaria se socializarán las respuestas de algunos estudiantes.

En un segundo momento de la UD se promoverán actividades y tareas colaborativas que promuevan la regulación metacognitiva, ya que ella permite que los estudiantes expresen con mayor profundidad sus procesos y conclusiones en la solución de problemas.

7.4.2 Fase 2: Aplicación Secuencia Y Cuestionario Inicial.

Aquí se aplicará la secuencia didáctica de argumentación y luego se aplicará el cuestionario inicial para poder determinar en qué nivel de argumentación se encuentran los estudiantes de acuerdo a los niveles propuestos por Erdurán.

7.4.3 Fase 3: Intervención.

Luego se llevará a cabo la implementación de la Unidad Didáctica (UD), en la que se propondrán actividades de carácter individual, pero principalmente colectivo ya que Jiménez y Pineda (2013) afirman:

Estrategias como el trabajo en grupo y la heurística de solucionador-escucha, inmersas en actividades de clase orientadas a la interacción social, a la negociación de significados, a la reflexión y a la regulación del aprendizaje, juegan un papel importante para el desarrollo de la argumentación en clase como una práctica discursiva, basada en el razonamiento natural y en el lenguaje usual que permite justificar una afirmación, defender o refutar una idea y convencer a un auditorio particular.(p.114)

Cuando los estudiantes trabajan colaborativamente se benefician en el desarrollo de habilidades que permiten mejorar la argumentación. Sumado a lo anterior se incluirán actividades de manipulación de material concreto como las multifichas y el Geoplano y otras actividades con software de geometría dinámica. La UD estará constituida por 7 clases, las cuales serán desarrolladas durante 2 meses ininterrumpidos, durante éste desarrollo se obtendrán datos escritos de los cuestionarios, actividades y tareas propuestas, además se obtendrá material audiovisual que aportará datos orales sobre los argumentos que usan los estudiantes, ya que las clases serán grabadas.

Finalmente, después de aplicar la UD se aplicará un cuestionario final a todos los estudiantes pero se analizarán los resultados únicamente de los estudiantes seleccionados con anterioridad, con el fin de determinar si hay progreso en los niveles de argumentación iniciales con respecto a los finales y de qué forma se dieron en su estructura.

Finalmente, en un tercer momento se llevará a cabo la puesta en común, donde los estudiantes por grupos (de tres estudiantes cada uno) exponen sus puntos de vista, los cuales pueden ser refutados o apoyados por los otros grupos de estudiantes, todo esto en pro del diálogo argumentativo.

La UD es el instrumento que se pretende elaborar, ejecutar y evaluar su impacto en el grupo elegido para determinar los niveles de argumentación en los estudiantes.

7.4.4 Fase 4: Evaluación.

En este momento de la investigación se aplicó el cuestionario final y así poder determinar en qué nivel de argumentación se encuentran los estudiantes seleccionados, además de analizar la forma se estructura la argumentación en los estudiantes en la solución de situaciones referentes al Teorema de Pitágoras.

7.4.5 Fase 5: Triangulación

En esta segunda fase de la investigación se realizará el análisis de la información condensada en los datos, la cual debe seguir un orden que se puede observar en los siguientes pasos:

- Obtener la información
- Capturar, transcribir y ordenar la información
- Codificar la información
- Integrar la información
- Analizar y comprender la información

Como se mencionó anteriormente la información se recolectó con el cuestionario que se aplicó a los estudiantes tanto al inicio como al final de la unidad didáctica, además se tuvo en cuenta la observación permanente, para lo cual se grabaron las sesiones de la aplicación de la unidad didáctica; dichos datos se organizaron en una matriz de sistematización de la información. Además se tuvieron en cuenta los niveles de argumentación en los que se

encontraron los estudiantes al inicio y se comparó con los niveles obtenidos al final de la aplicación de la unidad didáctica para determinar de qué forma los estudiantes argumentaron. Para realizar lo anterior de una forma ordenada se transcribieron los datos en la siguiente matriz de sistematización de la información:

Tabla 2 Matriz de sistematización de la información

Código	Respuesta	Interpretación	Nivel argumentativo	Explicación del nivel argumentativo Erdurán (2007)

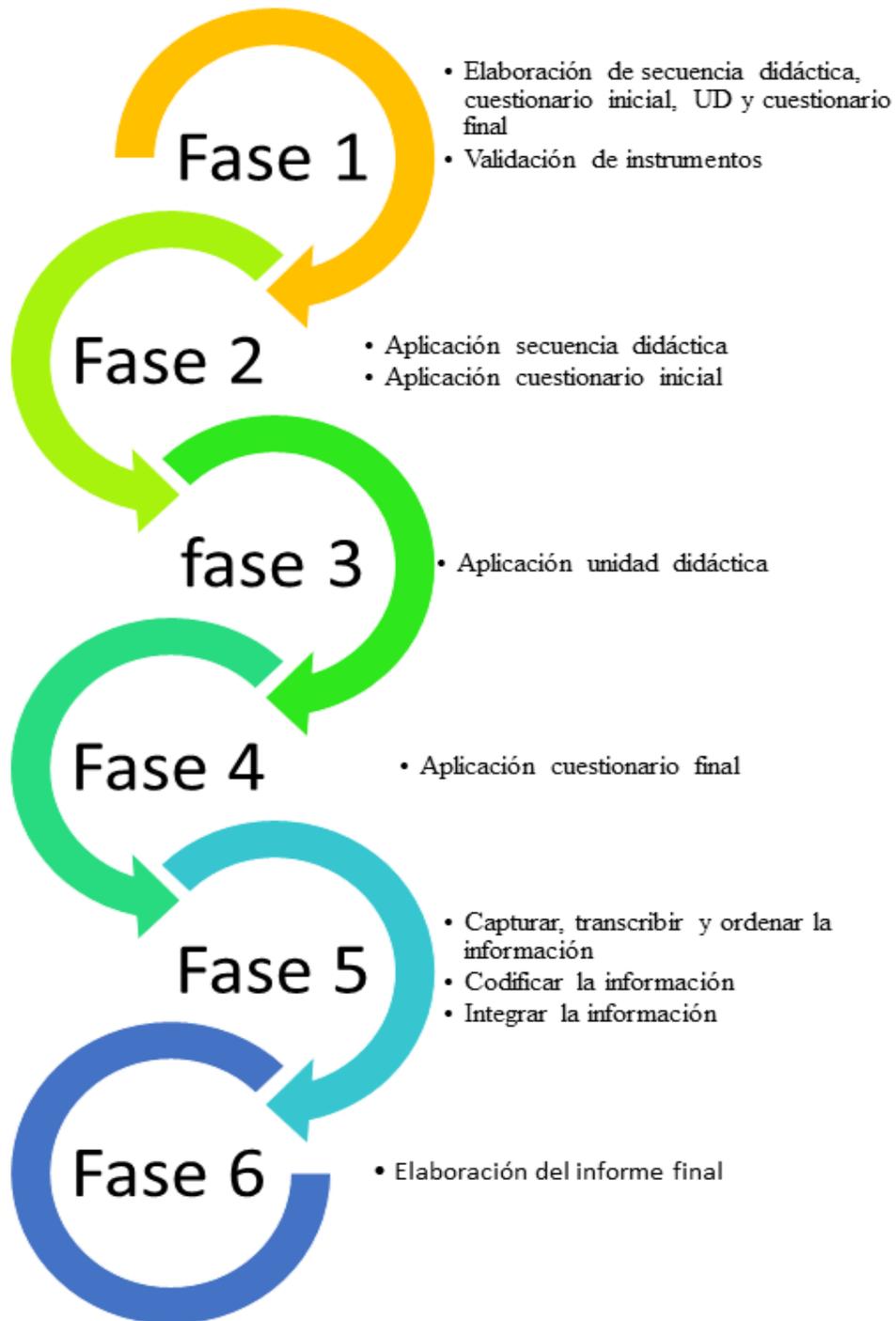
Luego de tener organizados los datos, se analizaron con la posición personal del investigador y se confrontaron a la luz de la teoría brindada por los autores expuestos en el marco teórico, buscando comprender de qué forma se dan los procesos argumentativos en los estudiantes.

7.4.6 Fase 6: Informe Final.

En esta última fase se redactará un informe en el que se expondrán los cambios que se dieron en los estudiantes y los logros obtenidos, a través de la triangulación de los datos obtenidos provenientes de los instrumentos diseñados.

Finalmente se redactarán las conclusiones y recomendaciones que se pueden tener en cuenta para próximas investigaciones.

Gráfica 2 Fases



8 RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para comprender mejor lo siguiente se debe tener en cuenta que se realizó dicho estudio en tres momentos fundamentales, la aplicación de un cuestionario inicial, la intervención con diferentes instrumentos en la Unidad Didáctica y el cuestionario final. Además cabe destacar que antes de aplicar el cuestionario inicial se elaboró y aplicó con el grupo una secuencia didáctica sobre argumentación en la que se pretendía que los estudiantes identificaran y diferenciaron con claridad los datos de las conclusiones, las justificaciones, los respaldos teóricos y los contraargumentos, ya que se consideró que los estudiantes debían tener una base de lo que es argumentar y de los elementos que debe tener para que su argumento sea de mejor calidad.

8.1 Análisis del cuestionario inicial.

Para poder clasificar a los estudiantes en los niveles argumentativos propuestos por Erdurán (2007) se propuso un cuestionario inicial con 7 preguntas abiertas (Ver Anexo #), el cual tenía como propósito identificar la estructura en los argumentos de los niños al resolver situaciones problémicas.

Al observar las respuestas consignadas por los estudiantes se pudo evidenciar que en las preguntas 3 a la 7 los estudiantes escribían respuestas con argumentos, mientras que en las Teniendo en cuenta el cuestionario inicial en la siguiente tabla se muestran los niveles de argumentación logrados por cada uno de los estudiantes del grupo 8B, en la primera columna se encuentra el código asignado a cada uno, en la segunda columna el nivel máximo obtenido en la solución de los problemas, en la tercer columna el nivel que más repitió el estudiante según los argumentos escritos y por último se indica si el estudiante entregó el cuestionario resuelto en su totalidad o parcialmente, ya que ésto es determinante para la elección de la muestra.

Tabla 3 Niveles argumentativos en el cuestionario inicial

CÓDIGO ESTUDIANTE	NIVEL MÁXIMO OBTENIDO	NIVEL MÁS COMÚN	CUESTIONARIO COMPLETO / PARCIAL
E8B1	4	4	PARCIAL
E8B2	3	3	COMPLETO
E8B3	3	3	COMPLETO
E8B4	4	3	PARCIAL
E8B5	3	3	PARCIAL
E8B6	3	3	COMPLETO
E8B7	3	3	PARCIAL
E8B8	3	3	COMPLETO
E8B9	3	3	PARCIAL
E8B10	No resolvió	el cuestionario	
E8B11	3	3	COMPLETO
E8B12	4	4	PARCIAL
E8B13	3	3	PARCIAL
E8B14	1	1	COMPLETO
E8B15	1	1	COMPLETO
E8B16	3	3	COMPLETO

E8B17	3	3	COMPLETO
E8B18	3	1	PARCIAL
E8B19	4	4	COMPLETO
E8B20	3	3	COMPLETO
E8B21	4	3	COMPLETO
E8B22	3	3	COMPLETO
E8B23	3	3	COMPLETO
E8B24	3	3	COMPLETO
E8B25	3	1	PARCIAL
E8B26	no argumenta	no argumenta	PARCIAL
E8B27	3	3	COMPLETO
E8B28	3	1	COMPLETO
E8B29	4	4	COMPLETO
E8B30	2	1	COMPLETO
E8B31	1	1	COMPLETO
E8B32	3	3	COMPLETO
E8B33	3	3	COMPLETO
E8B34	3	1	COMPLETO
E8B35	3	3	COMPLETO

E8B36	3	3	COMPLETO
E8B37	3	3	COMPLETO

Fuente: Elaboración propia.

De la anterior tabla surge el siguiente condensado en el que se muestra la cantidad de estudiantes en cada uno de los niveles argumentativos.

Tabla 4 Cantidad de estudiantes por nivel

Nivel	1	2	3	4	5
Cantidad	8	0	23	4	0

Fuente: Elaboración propia.

De 36 estudiantes que presentaron el cuestionario inicial 22,2% están en nivel 1, no hay estudiantes en nivel 2, 63,8% están en nivel 3, 11,1% están en nivel 4 y ningún estudiante está en nivel 5, además hubo un estudiante que no argumentó en el cuestionario y lo entregó incompleto.

Es importante destacar que al analizar este primer instrumento se encontró que no hay estudiantes en el nivel 2 de argumentación, y que pueden pasar de un nivel 1 a un nivel 3 entendiendo que al usar datos y concluir se debe además justificar, pero esto se pondrá a prueba durante la aplicación de la unidad didáctica.

A continuación se presenta un análisis más detallado de los 3 niveles encontrados en éste primer momento, teniendo en cuenta los indicadores propuestos por Erdurán: Datos (D), conclusión (C), justificación (J), fundamentos o respaldo (F), moduladores (M), refutadores o contraargumentos (R).

En el nivel 1 de argumentación según Erduran (Como se cita en Tamayo, 2012) el estudiante comprende que los argumentos son una descripción simple de la vivencia (observé, toqué, froté, oí, sentí...) se limita a explicar lo que ocurrió en la realización de la

tarea propuesta, se hacen descripciones literales de los fenómenos observados, hace uso de algunos verbos en primera persona, las afirmaciones son producidas con la mediación de los órganos de los sentidos, el argumento es construido con la apariencia externa del fenómeno estudiado, por ejemplo en la pregunta 3 del cuestionario (*¿Cómo puedes determinar qué tipo de triángulos son los que conforman la cometa? Justifica tu respuesta.*), el estudiante E8B15 responde:

“isocetes ya que en la imagen se puede ver que tienes lados iguales”

E8B1:

“Porque uno esta acostado otros de lado.”

E8B28:

“porque la cometa no esta derecha y se pueden ver mejor”

La cometa en la imagen presentada a los estudiantes en el cuestionario está formada por 4 triángulos rectángulos, de los cuales hay 2 que son triángulos rectángulos isósceles y el estudiante E8B15 no tiene en cuenta los otros dos triángulos que son escalenos. Además de lo anterior en su afirmación no dice cuántos lados son los que tiene iguales para que sean isósceles. La estudiante se limita a decir que según lo que *“se puede ver”* es isósceles, lo cual indica que está en un nivel 1 de argumentación pues se está basando únicamente en lo que observa.

En este nivel los argumentos de los estudiantes son una descripción simple de la respuesta al problema, se limita a explicar lo que ocurrió u observó en la solución del problema, en este caso el estudiante se limita a observar la imagen presentada sin realizar ningún tipo de verificación.

Como se dijo anteriormente, no se encontró evidencia de algún argumento en nivel 2 el cual se manifiesta cuando el estudiante comprende argumentos donde se identifican con claridad los datos y una conclusión, donde se destaca principalmente la conclusión. Además se pudo observar que cuando el estudiante exponía en su argumento los datos y una conclusión

siempre estaba acompañado de una justificación, lo que indica que se encuentra en el nivel 3 de argumentación, el cual se muestra a continuación.

En el nivel 3 de argumentación según Erdurán (Citado por Tamayo, 2012), en los argumentos el estudiante comprende argumentos en los cuales se identifican con claridad los datos, conclusiones y justificación, se destacan las que poseen datos, varias conclusiones de los experimentos o tareas desarrolladas y una o varias justificaciones de sus argumentos, expresando de manera fluida y coherente sus ideas. Se destacan por ser argumentos mejor estructurados, donde se visualizan conectores, buen manejo de vocabulario, redacción clara y de fácil interpretación.

Por ejemplo en la pregunta 5 (*El niño de la imagen decide salir a trotar alrededor de todo el parque de forma rectangular que tiene 50m de largo por 200m de ancho. ¿Cómo averiguas cuántos metros cubre en cada recorrido alrededor del parque?*) el estudiante E8B24 responde:

“el niño al trotar al rededor del parque cubre una medida de 500 metros (C) (el proceso fue sumar la medida de sus lados, para asi allar el resultado(J): 200m de hancho + 200m de hancho +50m largo +50m largo = 500)(D)”

En este caso el estudiante da respuesta en la que se evidencia la conclusión, una justificación y los datos usados, además muestra a un lado de su argumento el algoritmo de la suma con los datos y la justificación de que la distancia recorrida por el niño es de 500 metros, aunque en su argumento hace falta incluir la definición de perímetro que es el concepto que permite realizar dicha afirmación para que su argumento estuviere en nivel 4.

De manera similar el estudiante E8B27 en la pregunta 7 (*Andrés quiere enmarcar una réplica de la Mona Lisa la cual tiene forma rectangular tal como se muestra al lado. Si las dimensiones de la pintura son 25cm de largo por 17cm de ancho, ¿cuántos centímetros de marco de madera debe comprar? Explica.*), el estudiante responde:

“para saber cuanto debe comprar debe multiplicar las medidas que ya tiene(D) porque esto representa los 4 lados y esto lo suma y daría: $25 \times 2 = 50$, $17 \times 2 = 34$, $50 + 34 = 84$ (J), debe comprar 84 metros de madera (C).

En este caso el estudiante en su estructura argumentativa usa los datos que le da el problema justifica con las operaciones y concluye aunque le hace falta justificar el por qué razón se deben multiplicar por 2 cada una de las medidas y por qué se suman los dos productos.

En el nivel 4 de argumentación, el estudiante hace uso de los datos, justificaciones, conclusión y cualificadores o respaldo teórico, es decir que cumple con los requisitos del nivel 3 y agrega cualificadores o respaldo teórico. Por ejemplo en la misma pregunta 5 que el ejemplo del nivel anterior, el estudiante E8B19 responde:

“ $50 + 50 + 200 + 200$ (D) = 500, hice una suma porque el recorrió todo un rectángulo (J) y sería como el perímetro (J) y para hayar el perímetro hay que sumar (F) y me dio 500m que recorre el niño a cada vuelta (C)”.

En este argumento el estudiante usa los datos dados, realiza el algoritmo de la suma, da dos justificaciones, se apoya en la definición de perímetro y finalmente concluye que el niño recorrió 500 metros. Se observa que tiene claro el concepto de perímetro en cuadriláteros.

Otro ejemplo es la respuesta de la pregunta 5 (del estudiante E8B29

“asiendo la operacion para allar el perímetro(J) que es sumar todos sus lados(F)

$50 + 50 + 200 + 200$ (D) = 500, el niño recorrió 500m(C)”

En su argumento el estudiante usa los datos, una justificación, como fundamento el concepto de perímetro y una conclusión, esta estructura corresponde a un argumento de nivel 4 aunque le faltó justificar por qué el perímetro es el concepto que se debe aplicar para resolver el problema planteado.

8.2 Análisis de instrumentos momento de intervención.

Luego de haber aplicado el cuestionario inicial y determinar los niveles de argumentación en los que se encontraban los estudiantes se aplicó la unidad didáctica para determinar los cambios que se pueden dar en la estructura argumentativa de los estudiantes. Durante el desarrollo de la unidad didáctica se realizaron distintas actividades de intervención tales como actividad con multifichas, puzzles (rompecabezas), pictórico, geogebra y la parte simbólica con la aplicación de la fórmula, con el fin observar cómo se presenta la estructura en los argumentos de los 6 estudiantes seleccionados: Del nivel 1 de argumentación se eligieron al azar los estudiantes E8B15 y E8B28, del nivel 3 se eligieron los estudiantes E8B24 y E8B27, y del nivel 4 se seleccionaron los estudiantes E8B19 y E8B29. En adelante se les agrega a su código un guión y el número del nivel de argumentación en el que se ubican al resolver el cuestionario inicial; es así como los estudiantes de nivel 1 seleccionados como muestra tendrán el código E8B15-1 y E8B28-1, de la misma forma se hará con los estudiantes de nivel 3 y nivel 4.

8.2.1 Actividad 1: Teorema De Pitágoras Con Material Concreto.

En la primera clase se propuso una actividad con multifichas en la que se pedía por grupos de tres estudiantes resolver una serie de tareas que los iba orientando a construir el Teorema de Pitágoras y al finalizar argumentar las preguntas propuestas y lo observado en la actividad.

Finalmente se propone una plenaria en la que cada uno de los subgrupos exponía sus respuestas a las preguntas planteadas, de las cuales, las que se analizan a continuación son las que arrojaron elementos argumentativos:

Tabla 5 Actividad con material concreto

Pregunta: Teniendo los cuadrados de los catetos fijos, ¿puede variar el resultado obtenido del cuadrado de la hipotenusa? Explica tu respuesta.				
Código	Respuesta	Interpretación	Nivel argumentativo	Argumentación Teórica
E8B15-1	<p>Si porque al haber varios ángulos las fichas pueden disminuirse o sumarse</p> <p>Si porque pueden variar el número de fichas</p>	<p>El estudiante en la estructura del argumento muestra conclusión “<i>si</i>”, datos “<i>porque al haber varios ángulos</i>” dos justificaciones “<i>las fichas pueden disminuirse o sumarse, porque pueden variar el número de fichas</i>” pero no tiene en cuenta la medida de los catetos es 3 y 4 y por lo tanto los ángulos no pueden variar para que se mantenga el ángulo recto entre ellos. Es un argumento incorrecto con elementos de la estructura argumentativa de nivel 3</p>	3	<p>En el nivel 3 de argumentación según Erdurán (Citado por Tamayo, 2012), en los argumentos el estudiante comprende argumentos en los cuales se identifican con claridad los datos, conclusiones y justificación, se destacan las que poseen datos, varias conclusiones de los experimentos o tareas desarrolladas y una o varias justificaciones de sus argumentos, expresando de manera fluida y coherente sus ideas.</p>

E8B28 -1	No, ya que aparte de que no podemos mover las fichas con las que empezamos igual si le colocamos al tercer cuadro no quedaria igual a los 90°	En este argumento del estudiante se observa que tiene conclusión “no”, datos “ <i>no podemos mover las fichas con las que empezamos</i> ” y justificación “ <i>si le colocamos al tercer cuadro no quedaría igual a los 90°</i> ” explicando que si le agregan mas fichas por cada lado al cuadrado de la hipotenusa tendrían que mover los catetos formando entre ellos un ángulo distinto de 90°	3	En el nivel 3 de argumentación según Erdurán (Citado por Tamayo, 2012), en los argumentos el estudiante comprende argumentos en los cuales se identifican con claridad los datos, conclusiones y justificación, se destacan las que poseen datos, varias conclusiones de los experimentos o tareas desarrolladas y una o varias justificaciones de sus argumentos, expresando de manera fluida y coherente sus ideas.
E8B24 -3	No, porque las fichas al cambiarlas de posición, tienen la misma cantidad de fichas, pues a los lados de los	Este argumento tiene conclusión “no”, datos “ <i>la misma cantidad de fichas... a los lados de los dos cuadrados se encuentran angulo de 90°</i> ” y justificación “ <i>porque las fichas al</i>		En el nivel 3 de argumentación según Erdurán (Citado por Tamayo, 2012), en los argumentos el estudiante comprende argumentos en los cuales se identifican

	dos cuadrados se encuentran angulo de 90°	<i>cambiarlas de posición, tienen la misma cantidad de fichas</i> ". Aquí el estudiante desea comunicar que la cantidad de fichas de los catetos son fijas y si se cambian de posición continúan teniendo la misma cantidad y formando un ángulo de 90°	3	con claridad los datos, conclusiones y justificación, se destacan las que poseen datos, varias conclusiones de los experimentos o tareas desarrolladas y una o varias justificaciones de sus argumentos, expresando de manera fluida y coherente sus ideas.
E8B27 -3	No porque para armar el cuadrado se necesitan exactamente cinco fichas	El estudiante muestra un argumento con una conclusión " <i>no</i> " y una justificación " <i>porque para armar el cuadrado se necesitan exactamente cinco fichas</i> " pero se observa que el estudiante no usa los datos que tiene como por ejemplo que los otros dos cuadrados (de los catetos) miden 3 y 4 fichas por cada lado. Se evidencia que se está basando en lo que observa con las fichas	1	Según Erdurán (2007, citado por Tamayo) el estudiante, hace uso de algunos verbos en primera persona, las afirmaciones son producidas con la mediación de los órganos de los sentidos, el argumento es construido con la apariencia externa del fenómeno estudiado.

		pero no explica por qué exactamente 5.		
E8B19 -4	no ya que necesitamos, los cuadros tienen que tocar cada vértice y si colocamos una ficha más no alcanzaría	El estudiante presenta un argumento con conclusión “no”, datos <i>“los cuadros tienen que tocar cada vértice”</i> y justificación <i>“si colocamos una ficha más no alcanzaría”</i> . En este caso el estudiante hace referencia a que dos de los vértices del cuadrado de la hipotenusa debe estar tocando un vértice de cada cateto y para que se cumpla esto deben ser 5 fichas pues si se pone una ficha más se pasaría y no se tocarían los vértices tal como lo pide la tarea.	3	En el nivel 3 de argumentación según Erdurán (Citado por Tamayo, 2012), en los argumentos el estudiante comprende argumentos en los cuales se identifican con claridad los datos, conclusiones y justificación, se destacan las que poseen datos, varias conclusiones de los experimentos o tareas desarrolladas y una o varias justificaciones de sus argumentos, expresando de manera fluida y coherente sus ideas.
E8B29 -4	No, ya que cuando se cambia la posición del triángulo los	En su argumento el estudiante da una conclusión “no”, y justifica <i>“ya que cuando cambia la posición del</i>		Según Erdurán (2007, citado por Tamayo) el estudiante, hace uso de algunos verbos en

	ángulos cambian.	<i>triángulo los ángulos cambian</i> ". Se observa en el argumento que no hace uso de los datos que se le ofrecen como son las medidas de los otros dos cuadrados y que entre ellos se debe formar un ángulo de 90°.	1	primera persona, las afirmaciones son producidas con la mediación de los órganos de los sentidos, el argumento es construido con la apariencia externa del fenómeno estudiado.
--	------------------	--	---	--

Fuente: elaboración propia

En éste primer momento de trabajo con material concreto y trabajo en equipos de tres estudiantes, se puede observar en la anterior tabla que los dos estudiantes que estaban en nivel 1 de argumentación subieron a nivel 3, un estudiante de nivel 3 se mantuvo en su nivel, el otro estudiante de nivel 3 bajó a nivel 1 y los dos estudiantes de nivel 4 bajaron de nivel, uno a nivel 3 y el otro a nivel 1, de acuerdo a los niveles expuestos por Erdurán (2007).

Se evidencia que en varias ocasiones cuando un grupo no entendía alguna pregunta el docente explicaba de una forma y esperaba a que los estudiantes entendieran o argumentaran, pero era necesario explicar de otras formas es importante que la argumentación es un proceso reflexivo en el que los estudiantes reconocen sus errores pero debido al trabajo realizado con otros compañeros y docente es posible la construcción del conocimiento a la luz de las experiencias.

Se comete un error a la hora de hacer la plenaria, ya que se inició en la misma forma en la que se terminó la actividad con las multifichas (en grupos distribuidos en el piso del salón), se debió haber hecho una mesa redonda para mejorar la comunicación y disminuir el ruido que se produce trabajando en pequeños grupos, además que algunos estudiantes siguieron

entretenidos con las multifichas y no prestaban atención a las intervenciones de sus compañeros.

Al momento de trabajar con las multifichas pueden ocurrir dos inconvenientes: el primero, dependiendo de la cantidad de fichas se limita la cantidad de triángulos rectángulos que se pueden representar, el segundo, que se puede trabajar únicamente con números enteros, espacialmente las ternas pitagóricas.

8.2.2 Actividad 2: De Lo Concreto A Lo Pictórico

Continuando con el análisis de las respuestas de los estudiantes a las situaciones planteadas durante la unidad didáctica se analiza la siguiente pregunta:

En los siguientes triángulos rectángulos, ¿cómo se pueden identificar los catetos y la hipotenusa, si no se cuenta con las medidas de ellos?

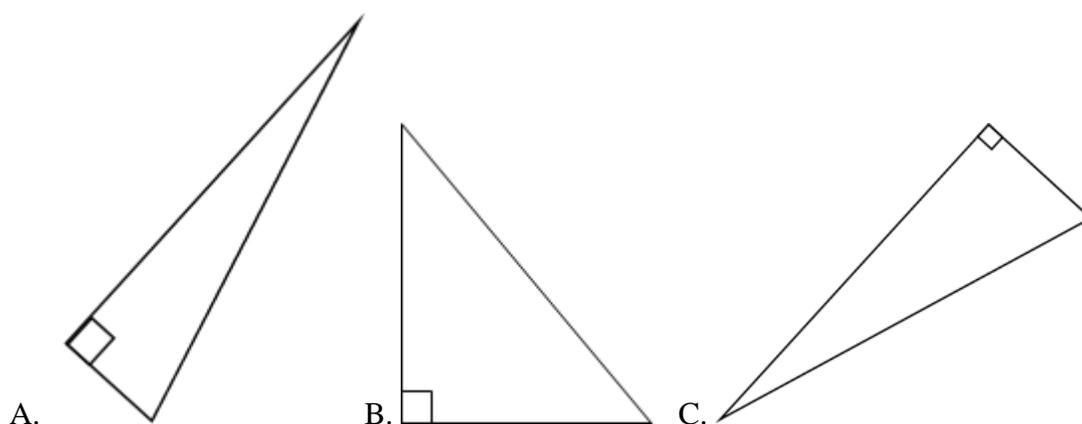


Tabla 6 actividad con representación pictórica

Código	Respuesta	Interpretación	Nivel argumentativo	Argumentación Teórica
E8B15-1	Medimos cada lado con la regla y el más	En la respuesta el estudiante acude a un objeto de medición y		En el nivel 2 según Erdurán (2007), citado por Tamayo

	<p>largo es la hipotenusa y los otros dos son los catetos</p>	<p>comprueba mediante la medida de los lados cuáles son los dos más cortos y concluye que éstos son los catetos y el restante es la hipotenusa, pero no tiene en cuenta que se puede presentar un triángulo que las diferencias de las medidas de los lados sean mínimas y sea más complicado de determinar cuál es el lado más largo. En su argumento usa datos cuando dice “<i>medimos cada lado con la regla</i>”, pues al medir está obteniendo datos, y concluye cuando dice “<i>el más largo es la hipotenusa y los otros dos son los catetos</i>”</p>	2	<p>(2012) el estudiante comprende argumentos donde se identifican con claridad los datos (data) y una conclusión (claim). Principalmente identificando la conclusión.</p>
E8B28-1	<p>Midiendo los ángulos, la esquina del triángulo con el cuadrado es el</p>	<p>En este argumento el estudiante usa datos cuando dice “<i>la esquina del triángulo con el cuadrado es el ángulo de</i></p>		<p>En el nivel 2 según Erdurán (2007), citado por Tamayo (2012) el estudiante comprende</p>

	ángulo de 90 grados y entonces los lados del triangulo que están al lado del angulo de 90 grados son los catetos y el otro la hipotenusa	90 grados” y concluye cuando dice “ <i>entonces los lados del triángulo que están al lado del ángulo de 90 grados son los catetos y el otro la hipotenusa</i> ”	2	argumentos donde se identifican con claridad los datos (data) y una conclusión (claim). Principalmente identificando la conclusión.
E8B24 -3	comparar las medidas de cada lado	En esta respuesta el estudiante cuando dice comparar las medidas se está basando en su observación y por medio de ella determinar cuál de los lados es más largo aunque no explica cuál sería la hipotenusa y cuáles los catetos.	1	Según Erdurán (2007, citado por Tamayo) el estudiante, hace uso de algunos verbos en primera persona, las afirmaciones son producidas con la mediación de los órganos de los sentidos, el argumento es construido con la apariencia externa del fenómeno estudiado.
E8B27 -3	uno mirando puede deducir cual es mas	En su respuesta cuando el estudiante dice “ <i>mirando</i> ” está haciendo		Según Erdurán (2007, citado por Tamayo) el

	largo y cual es mas corto	uso de los sentidos para determinar cuál lado es mas largo y cuáles mas cortos. Es una respuesta muy simple y no usa datos, conclusiones o justificaciones.	1	estudiante, hace uso de algunos verbos en primera persona, las afirmaciones son producidas con la mediación de los órganos de los sentidos, el argumento es construido con la apariencia externa del fenómeno estudiado.
E8B19-4	Calcular cual medida es mas larga que los demás	El estudiante en su respuesta dice calcular pero no indica cómo se va a realizar el cálculo para poder determinar cuál medida es la más larga, además no aclara si la más larga es la hipotenusa o uno de los catetos.	1	Según Erdurán (2007, citado por Tamayo) el estudiante, hace uso de algunos verbos en primera persona, las afirmaciones son producidas con la mediación de los órganos de los sentidos, el argumento es

				construido con la apariencia externa del fenómeno estudiado.
E8B29 -4	Los lados que forman el ángulo recto, el de 90 grados son los catetos y el lado que no está formando el ángulo de 90 grados es la hipotenusa que es el lado más largo	En su argumento el estudiante usa datos cuando manifiesta que “ <i>el ángulo recto, el de 90 grados</i> ”, conclusión cuando dice “ <i>Los lados que forman el ángulo recto, el de 90 grados son los catetos y el lado que no está formando el ángulo de 90 grados es la hipotenusa</i> ”, además justifica su elección agregando que “ <i>la hipotenusa que es el lado más largo</i> ”.	3	En el nivel 3 de argumentación según Erdurán (Citado por Tamayo, 2012), en los argumentos el estudiante comprende argumentos en los cuales se identifican con claridad los datos, conclusiones y justificación, se destacan las que poseen datos, varias conclusiones de los experimentos o tareas desarrolladas y una o varias justificaciones de sus argumentos, expresando de manera fluida y coherente sus ideas.

Fuente: elaboración propia

En esta segunda actividad los estudiantes que en el cuestionario inicial estaban en nivel 1 y en la actividad 1 habían subido a nivel 3 ahora sus argumentos tienen una estructura de nivel 2, por otro lado el estudiante de nivel 3 que en la actividad 1 se mantenía en nivel 3

ahora baja a nivel 1, el estudiante de nivel 3 que había bajado a nivel 1 en la actividad 1 en esta actividad se mantiene en nivel 1 y los estudiantes de nivel 4 el que había bajado a nivel 3 ahora está en nivel 1 y el que había bajado a nivel 1 ahora subió a nivel 3.

En el siguiente gráfico de barras se muestran las variaciones en los niveles de argumentación según las actividades propuestas hasta el momento.

Gráfica 3 Cambios en los niveles de argumentación inicial



Fuente: elaboración propia

A nivel general se observa una disminución en el nivel de argumentación de los estudiantes que iniciaron en nivel 3 y 4 y un aumento en los estudiantes que iniciaron en nivel 1.

8.2.3 Actividad 3: El Teorema Como Expresión Algebraica.

En este momento de la unidad didáctica se proponen algunos problemas en los que el estudiante debe resolver teniendo en cuenta la representación simbólica del teorema de Pitágoras. De los problemas propuestos se analizó el siguiente:

Un niño está a 12 metros de una portería de fútbol y lanza su balón en línea recta ascendente y alcanza una altura de 3 metros. ¿Cuánto mide la trayectoria del balón desde que lanza hasta que pasa por encima de la portería?

¿Cómo determinar la medida de la longitud de la hipotenusa teniendo la medida de los dos catetos? Se dibuja un triángulo de medidas 12 y 3 cada uno de sus catetos.

Tabla 7 Actividad con representación abstracta

Código	Respuesta	Interpretación	Nivel argumentativo	Argumentación Teórica
E8B15 -1	se suman los catetos	En su respuesta el estudiante solo da la conclusión “ <i>se suman los catetos</i> ” y no usa datos ni justifica.	1	Según Erdurán (2007, citado por Tamayo) el estudiante, hace uso de algunos verbos en primera persona, las afirmaciones son producidas con la mediación de los órganos de los sentidos, el argumento es construido con la apariencia externa del fenómeno estudiado.
E8B28 -1	se puede hallar dividiendo	En su respuesta el estudiante solo da la conclusión “ <i>se puede</i>		Según Erdurán (2007, citado por Tamayo) el

		<i>hallar dividiendo</i> ” y no usa datos ni justifica.	1	estudiante, hace uso de algunos verbos en primera persona, las afirmaciones son producidas con la mediación de los órganos de los sentidos, el argumento es construido con la apariencia externa del fenómeno estudiado.
E8B24-3	como 12^2 más 3^2 es 153 entonces empiezo a buscar un número que elevado al cuadrado de 153, entonces con el 12 da 144, con el 13 da 169 se pasa, entonces es 12,4	En su argumento el estudiante usa datos cuando dice “ <i>como 12^2 más 32 es 153</i> ”, luego manifiesta su conclusión “ <i>buscar un número que elevado al cuadrado de 153</i> ” y por último justifica diciendo “ <i>entonces con el 12 da 144, con el 13 da 169 se pasa, entonces es 12,4</i> ”, el estudiante realiza una aproximación del resultado utilizando ensayo y error, pero no se percata que para	3	En el nivel 3 de argumentación según Erdurán (Citado por Tamayo, 2012), en los argumentos el estudiante comprende argumentos en los cuales se identifican con claridad los datos, conclusiones y justificación, se destacan las que poseen datos, varias conclusiones de los experimentos o tareas desarrolladas y una o varias justificaciones

		encontrar el número con mayor exactitud y en menor tiempo se debe aplicar raíz cuadrada a la suma de los cuadrados de los catetos.		de sus argumentos, expresando de manera fluida y coherente sus ideas.
E8B27 -3	es eso $4+3=5$ pero al cuadrado, 4 al cuadrado más 3 al cuadrado igual a cinco al cuadrado. Cuatro al cuadrado mas 3 al cuadrado me va a dar el resultado cinco al cuadrado. Entonces de esa forma se haria con 12 y 3, se busca un número que elevado al cuadrado sea igual a 12 al cuadrado mas 3 al cuadrado	El estudiante usa como justificación un ejemplo resuelto en la clase “ <i>es eso $4+3=5$ pero al cuadrado, 4 al cuadrado más 3 al cuadrado igual a cinco al cuadrado</i> ” luego hace uso de los datos proporcionados cuando dice “ <i>Entonces de esa forma se haria con 12 y 3</i> ” y por último concluye “ <i>se busca un número que elevado al cuadrado sea igual a 12 al cuadrado mas 3 al cuadrado</i> ”. El estudiante da respuesta a lo que se pide en el problema pero implícitamente acude al método ensayo error pues no especifica la forma de encontrar el	3	En el nivel 3 de argumentación según Erdurán (Citado por Tamayo, 2012), en los argumentos el estudiante comprende argumentos en los cuales se identifican con claridad los datos, conclusiones y justificación, se destacan las que poseen datos, varias conclusiones de los experimentos o tareas desarrolladas y una o varias justificaciones de sus argumentos, expresando de manera fluida y coherente sus ideas.

		valor.		
E8B19 -4	hay que buscar un número que multiplicado por si mismo diera 153, yo ensayé con 15 al cuadrado y daba como cuatrocientos veinte algo entonces empecé a bajarle hasta que en 12 daba como 112...(se queda pensando) 144 entonces le fui subiendo hasta que con 12.4 me dió 153, 66	El estudiante usa datos, conclusión y justificación en su argumento. Datos cuando implícitamente realiza la suma de los cuadrados de los catetos y dice “153”, conclusión cuando expresa <i>“hay que buscar un número que multiplicado por si mismo diera 153”</i> y justificación cuando explica el proceso que llevó a cabo para encontrar el número <i>“yo ensayé con 15 al cuadrado y daba como cuatrocientos veinte algo entonces empecé a bajarle hasta que en 12 daba como 112... 144 entonces le fui subiendo hasta que con 12.4 me dió 153, 66”</i> .	3	En el nivel 3 de argumentación según Erdurán (Citado por Tamayo, 2012), en los argumentos el estudiante comprende argumentos en los cuales se identifican con claridad los datos, conclusiones y justificación, se destacan las que poseen datos, varias conclusiones de los experimentos o tareas desarrolladas y una o varias justificaciones de sus argumentos, expresando de manera fluida y coherente sus ideas.
E8B29 -4	Se deben encontrar el cuadrado de los	En su argumento el estudiante usa datos cuando dice <i>“122 = 144</i>		En el nivel 4 de argumentación según Erduran (citado por

	<p>dos catetos, luego sumar sus resultados y a ese resultado le debemos sacar la raíz cuadrada pues esa suma es la cantidad de cuadritos que tiene la hipotenusa y nos están pidiendo es la medida de la hipotenusa y no su cuadrado.</p> <p>$12^2 = 144$</p> <p>$3^2 = 9$</p> <p>$144+9=153$</p> <p>$\sqrt{153} = 12,36$</p>	<p>$32 = 9$", ya que emplea las medidas que se le están dando, agregado a ello concluye que "<i>Se deben encontrar el cuadrado de los dos catetos, luego sumar sus resultados y a ese resultado le debemos sacar la raíz cuadrada</i>", lo cual también se puede interpretar como un sustento teórico que aunque no lo menciona explícitamente está haciendo referencia a una de las ecuaciones asociadas al Teorema de Pitágoras cuando se tienen la medida de los catetos y piden hallar la hipotenusa, por último usa dos justificaciones cuando dice "<i>pues esa suma es la cantidad de cuadritos que tiene la hipotenusa y nos están pidiendo es la medida de la hipotenusa y no su</i></p>	4	<p>Tamayo, 2012) el estudiante hace uso de los datos, justificaciones, conclusión y cualificadores o respaldo teórico, es decir que cumple con los requisitos del nivel 3 y agrega cualificadores o respaldo teórico.</p>
--	---	--	---	---

		<i>cuadrado” y luego realiza la operación “$12^2 = 144, 3^2 = 9, 144+9=153, \sqrt{153} = 12,36$”</i>		
--	--	---	--	--

Fuente: elaboración propia

En esta tercera actividad donde se buscaba que construyeran la ecuación asociada al Teorema de Pitágoras para hallar la longitud de la hipotenusa cuando se tienen las medidas de los catetos se observa que 4 de los 6 estudiantes, que corresponde al 66,7% suben su nivel de argumentación respecto a la actividad anterior, mientras que el 33,3% restante (dos estudiantes) rebajan, y coincide que los que rebajan son los estudiantes que en el cuestionario inicial empezaron en nivel 1 y en esta tercera actividad se vuelven a ubicar en nivel 1.

Se debió plantear un ejemplo en el que el resultado fuera un número entero pues se notó bastante dificultad para que los estudiantes comprendieran lo que se estaba pidiendo en ésta actividad.

8.2.4 Actividad 4: Comprobando El Teorema Con Geogebra.

En este momento se propuso una actividad con el software Geogebra en el cual los estudiantes podían comprobar de una forma más general, para lo cual se les indicó lo siguiente:

Abre la Applet de Geogebra: Teorema de Pitágoras-Demostración por áreas de cuadrados y arrastra los puntos A, B y C (vértices del triángulo central) y observa los datos de la derecha.

1. ¿Encontraste alguna relación entre el área de los cuadrados de los catetos del triángulo y el cuadrado que tiene como lado la hipotenusa del triángulo?, lo observado en la actividad 1, ¿Se sigue manteniendo?, ¿A qué crees que esto se debe?

Tabla 8 Actividad con el software Geogebra

Código	Respuesta	Interpretación	Nivel argumentativo	Argumentación Teórica
E8B15 -1	La relación era que se juntaban y tenían el mismo tamaño.	El estudiante se limita a describir lo que observa en la aplicación de Geogebra “ <i>se juntaban y tenían el mismo tamaño</i> ” no se observa en su respuesta datos, conclusión o justificación.	1	Según Erdurán (2007, citado por Tamayo) el estudiante, hace uso de algunos verbos en primera persona, las afirmaciones son producidas con la mediación de los órganos de los sentidos, el argumento es construido con la apariencia externa del fenómeno estudiado.
E8B28 -1	si se sigue manteniendo ya que si los hago mas grandes o más pequeños el área cambia pero si se suman el área de los catetos el	El estudiante en su argumento usa datos, conclusión y justificación. Usa los datos cuando escribe “ <i>el área de los catetos</i> ”, haciendo referencia a las áreas de los catetos que muestra la aplicación en		En el nivel 3 de argumentación según Erdurán (Citado por Tamayo, 2012), en los argumentos el estudiante comprende argumentos en los cuales se identifican con claridad los

	<p>resultado es el de la hipotenusa.</p>	<p>la parte superior derecha; concluye cuando expresa <i>“si se sigue manteniendo”</i> y finalmente justifica su argumento cuando manifiesta <i>“ya que si los hago mas grandes o más pequeños el área cambia pero si se suman el área de los catetos el resultado es el de la hipotenusa”</i></p>	<p>3</p>	<p>datos, conclusiones y justificación, se destacan las que poseen datos, varias conclusiones de los experimentos o tareas desarrolladas y una o varias justificaciones de sus argumentos, expresando de manera fluida y coherente sus ideas.</p>
<p>E8B24 -3</p>	<p>el resultado de la suma de los catetos no se mantiene y el resultado de la hipotenusa es muy diferente esto tal vez se deba a las medidas del triángulo rectángulo.</p>	<p>En la aplicación se observa que hace una aproximación de las áreas a las centésimas y el estudiante no tiene en cuenta que ésta aproximación genera un error por ello afirma <i>“el resultado de la suma de los catetos no se mantiene y el resultado de la hipotenusa es muy diferente”</i>, a pesar de ello en la estructura de su argumento mantiene</p>		<p>En el nivel 3 de argumentación según Erdurán (Citado por Tamayo, 2012), en los argumentos el estudiante comprende argumentos en los cuales se identifican con claridad los datos, conclusiones y justificación, se destacan las que poseen datos, varias conclusiones de los experimentos o tareas desarrolladas y una o</p>

		<p>datos “<i>los catetos...y el resultado de la hipotenusa</i>”, conclusión “<i>la suma de los catetos no se mantiene y el resultado de la hipotenusa es muy diferente</i>” y justificación “<i>tal vez se deba a las medidas del triángulo rectángulo</i>” en ésta razón que da el estudiante al detallar lo que escribe, esta suponiendo que dependiendo de las medidas en algunos triángulos rectángulos no se cumple el Teorema de Pitágoras.</p>	3	<p>varias justificaciones de sus argumentos, expresando de manera fluida y coherente sus ideas.</p>
E8B27-3	<p>que como es un triángulo rectángulo se mantiene debido a que todas las piezas se mueven</p>	<p>El argumento contiene datos “<i>como es un triángulo rectángulo</i>”, reconoce que el teorema se cumple para los triángulos rectángulos, como conclusión escribe “<i>se mantiene</i>”, haciendo</p>		<p>En el nivel 3 de argumentación según Erdurán (Citado por Tamayo, 2012), en los argumentos el estudiante comprende argumentos en los cuales se identifican</p>

		<p>referencia a que la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa y justifica <i>“debido a que todas las piezas se mueven”</i>, aunque no es un argumento fuerte, contiene la estructura para estar en nivel 3</p>	3	<p>con claridad los datos, conclusiones y justificación, se destacan las que poseen datos, varias conclusiones de los experimentos o tareas desarrolladas y una o varias justificaciones de sus argumentos, expresando de manera fluida y coherente sus ideas.</p>
E8B19-4	<p>para que pueda hacer el teorema de pitagoras , el área de la hipotenusa debe ser de 1004,92 y dice que la hipotenusa el área es de 1003,51</p>	<p>En la aplicación se observa que hace una aproximación de las áreas a las centésimas y el estudiante no tiene en cuenta que ésta aproximación genera un error. a pesar de ello en su argumento tiene fundamento teórico cuando manifiesta <i>“para que pueda hacer el teorema de pitagoras”</i>, hace uso de los datos cuando escribe <i>“dice que la hipotenusa el área es</i></p>	4	<p>En el nivel 4 de argumentación según Erduran (citado por Tamayo, 2012) el estudiante hace uso de los datos, justificaciones, conclusión y cualificadores o respaldo teórico, es decir que cumple con los requisitos del nivel 3 y agrega cualificadores o respaldo teórico.</p>

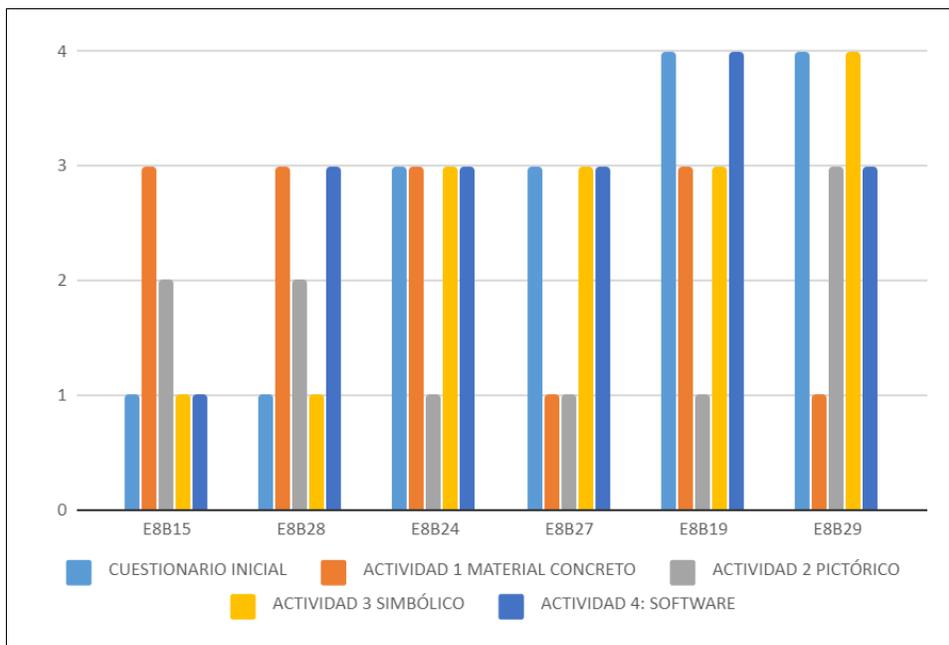
		<p><i>de 1003,51” y justifica cuando afirma que “el área de la hipotenusa debe ser de 1004,92”, pero en ningún lado se lee explícitamente la conclusión, se puede interpretar con lo que está escrito que el estudiante concluye que no se cumple el teorema.</i></p>		
E8B29 -4	<p>no se sigue manteniendo ya que si sumamos adecuadamente el área de los catetos su resultado no es igual al área de la hipotenusa entonces probablemente la persona que hizo el programa o hizo esa página lo hizo mal y se equiboco en</p>	<p>En la aplicación se observa que se hace una aproximación de las áreas a las centésimas y el estudiante aduce que puede que no se esté cumpliendo el Teorema. El estudiante usa los datos cuando escribe que <i>“el área de los catetos...área de la hipotenusa”</i>, sumado a ello concluye que <i>“no se sigue manteniendo”</i>, además justifica, <i>“si sumamos adecuadamente el área de los catetos su resultado no es igual al</i></p>		<p>En el nivel 3 de argumentación según Erdurán (Citado por Tamayo, 2012), en los argumentos el estudiante comprende argumentos en los cuales se identifican con claridad los datos, conclusiones y justificación, se destacan las que poseen datos, varias conclusiones de los experimentos o tareas desarrolladas y una o varias justificaciones de sus argumentos,</p>

	<p>algo puede ser la fórmula o de pronto eso no es un triángulo rectángulo</p>	<p><i>área de la hipotenusa”</i> justifica también que esto puede estar sucediendo ya que <i>“probablemente la persona que hizo el programa o hizo esa página lo hizo mal y se equivocó en algo puede ser la fórmula o de pronto eso no es un triángulo rectángulo”</i> reconociendo que para que se cumpla el teorema debe ser un triángulo rectángulo y que en todos ellos se debe cumplir, por ello manifiesta un posible error de cálculo en la aplicación.</p>	<p>3</p>	<p>expresando de manera fluida y coherente sus ideas.</p>
--	--	---	----------	---

Fuente: elaboración propia

De la anterior tabla se destaca que 4 de 6 estudiantes que equivale al 66,7% están en nivel 3 de argumentación, que los dos estudiantes de nivel inicial 3 siguen manteniendo su nivel de argumentación, que un estudiante de los dos estudiantes de nivel inicial 1 continúa en nivel 1 y el otro mejoró hasta el nivel 3, que uno de los dos estudiantes de nivel inicial 4 volvió a alcanzar su nivel, mientras que el otro bajó a nivel 3.

Gráfica 4 Cambios en los niveles de argumentación intervención



Fuente: elaboración propia

En general se observa hasta ahora desde el cuestionario inicial, hasta la actividad de intervención 4 que los niveles de argumentación en cada uno de los 6 estudiantes seleccionados han sido muy variables, ya que 3 ellos se han tratado de mantener en su nivel inicial con algunos altibajos, se trata de los estudiantes E8B15, E8B24 y E8B27, el estudiante E8B28 tiende a subir su nivel de argumentación y los estudiantes E8B19 y E8B29 tienden a disminuir su nivel de argumentación.

8.3 Análisis de cuestionario final.

En este momento se realizará el análisis del cuestionario final el cual fue elaborado con el fin de determinar el nivel de argumentación de los estudiantes al finalizar la intervención en el aula. Además al final se propone una pregunta en la que se pide a los estudiantes que indiquen si comprendieron el Teorema de Pitágoras, con qué actividad le resultó más fácil su comprensión y por qué.

A la pregunta: Si la hipotenusa de un triángulo mide 6m, y los catetos miden 4m y 3m. ¿Será un triángulo rectángulo?, los estudiantes respondieron de la siguiente forma:

Tabla 9 Cuestionario final

Código	Respuesta	Interpretación	Nivel argumentativo	Argumentación Teórica
E8B15 -1	no por que al sumar los 2 catetos no dan la medida de la hipotenusa	El estudiante en su argumento escribe su conclusión “no”, luego justifica “ <i>por que al sumar los 2 catetos no dan la medida de la hipotenusa</i> ” y usa datos “ <i>los 2 catetos...medida de la hipotenusa</i> ” aunque se debe resaltar que el estudiante no muestra la suma que lo llevó a llegar a dicha conclusión.	3	En el nivel 3 de argumentación según Erdurán (Citado por Tamayo, 2012), en los argumentos el estudiante comprende argumentos en los cuales se identifican con claridad los datos, conclusiones y justificación, se destacan las que poseen datos, varias conclusiones de los experimentos o tareas desarrolladas y una o varias justificaciones de sus argumentos, expresando de manera fluida y coherente sus ideas.
E8B28 -1	Si, ya que siempre que la hipotenusa	Este argumento no es válido pues con las medidas dadas no se		En el nivel 3 de argumentación según Erdurán (Citado por

	tenga un lado mas grande que los catetos si sera un triangulo rectangulo.	puede construir un triángulo rectángulo, pero a pesar de ello el argumento tiene conclusión “ <i>si</i> ”, justificación “ <i>ya que siempre que la hipotenusa tenga un lado mas grande que los catetos si sera un triangulo rectangulo</i> ” y usa datos pues compara las medidas de los catetos con la hipotenusa.	3	Tamayo, 2012), en los argumentos el estudiante comprende argumentos en los cuales se identifican con claridad los datos, conclusiones y justificación, se destacan las que poseen datos, varias conclusiones de los experimentos o tareas desarrolladas y una o varias justificaciones de sus argumentos, expresando de manera fluida y coherente sus ideas.
E8B24 -3	no es un triángulo porque la suma de sus catetos como lo explica (la formula) da 5	Es un argumento válido pero sin mucha profundidad en él. El estudiante concluye que “ <i>no es un triángulo</i> ”, luego justifica “ <i>porque la suma de sus catetos... da 5</i> ”, usa datos “ <i>sus catetos</i> ” y hace referencia a un fundamento teórico		En el nivel 4 de argumentación según Erduran (citado por Tamayo, 2012) el estudiante hace uso de los datos, justificaciones, conclusión y cualificadores o respaldo teórico, es decir que cumple con

		cuando dice “ <i>como lo explica (la formula)</i> ”. le falta explicar a qué fórmula se refiere, mostrar la suma y compararlo con la hipotenusa.	4	los requisitos del nivel 3 y agrega cualificadores o respaldo teórico.
E8B27 -3	no es un triangulo rectangulo debido a que si hacemos la ecuacion para encontrar la hipotenusa daria 5 $h = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ R/ no coincide los catetos con la hipotenusa	Es un argumento bien elaborado que contiene conclusión “ <i>no es un triangulo rectangulo</i> ”, justificación “ <i>debido a que si hacemos la ecuacion para encontrar la hipotenusa daria 5</i> ”, usa datos al usar la medida de los catetos en la fórmula, además tiene fundamento teórico “ <i>si hacemos la ecuacion para encontrar la hipotenusa...$h = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$</i> ”, al final vuelve a justificar “ <i>no coincide los catetos con la hipotenusa</i> ”	4	En el nivel 4 de argumentación según Erduran (citado por Tamayo, 2012) el estudiante hace uso de los datos, justificaciones, conclusión y cualificadores o respaldo teórico, es decir que cumple con los requisitos del nivel 3 y agrega cualificadores o respaldo teórico.
E8B19 -4	no yaque 4^2 es 16 y 3^2 es 9,	En su argumento el estudiante concluye		En el nivel 3 de argumentación según

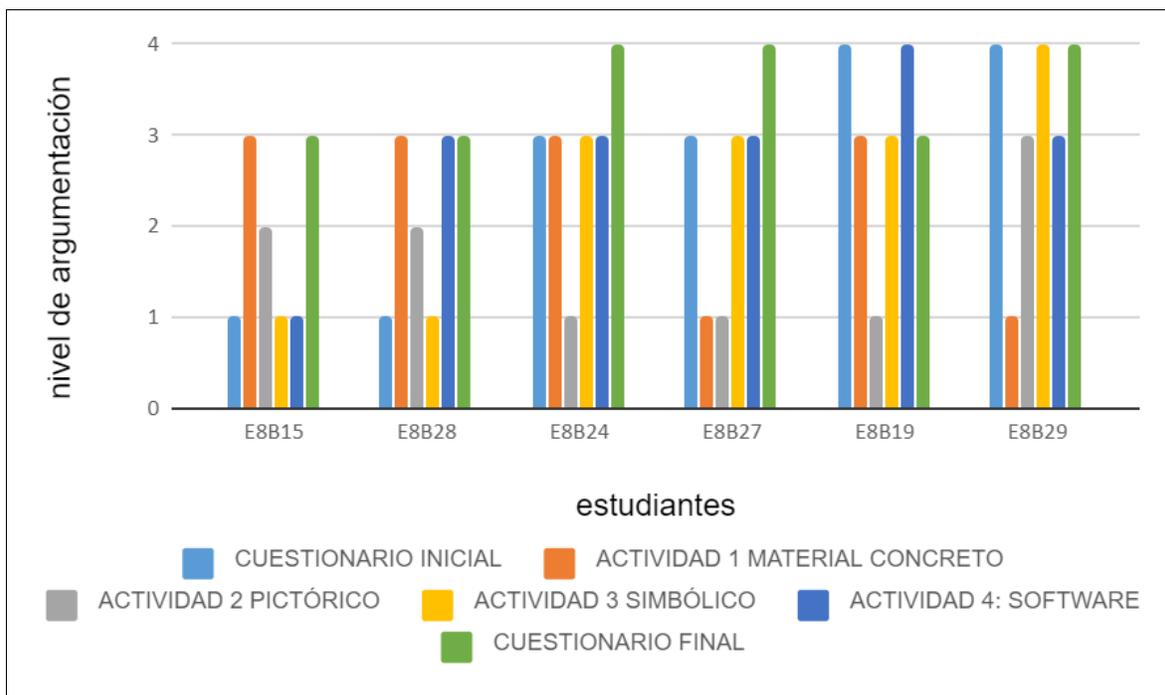
	<p>estos 2 números se suman y da 25, esos 25 se le agrega la raíz cuadrada y da 5 y para que sea 6 tenia que dar 36.</p>	<p>“no”, justifica diciendo “yaque 4^2 es 16 y 3^2 es 9, estos 2 números se suman y da 25, esos 25 se le agrega la raíz cuadrada y da 5 y para que sea 6 tenia que dar 36”, allí también se observa que usa datos con la medida de los catetos y la hipotenusa. Aunque implícitamente usó el teorema de Pitágoras para llegar a su conclusión en ningún lado lo muestra.</p>	3	<p>Erdurán (Citado por Tamayo, 2012), en los argumentos el estudiante comprende argumentos en los cuales se identifican con claridad los datos, conclusiones y justificación, se destacan las que poseen datos, varias conclusiones de los experimentos o tareas desarrolladas y una o varias justificaciones de sus argumentos, expresando de manera fluida y coherente sus ideas.</p>
E8B29 -4	<p>no es un triangulo rectangulo ya que al sumar los catetos da 25 y deberia dar 36 ya que esa es la medida de la hipotenusa.</p>	<p>Es un argumento sólido ya que en su estructura tiene conclusión, justificación, datos y fundamento teórico. conclusión “no es un triangulo rectangulo”, justificación “a que al sumar los catetos da 25 y deberia dar 36 ya que</p>	4	<p>En el nivel 4 de argumentación según Erduran (citado por Tamayo, 2012) el estudiante hace uso de los datos, justificaciones, conclusión y cualificadores o respaldo teórico, es</p>

$C_1 4 \times 4 = 16$	<i>esa es la medida de la hipotenusa”, datos “los catetos da 25...la medida de la hipotenusa” y fundamento teórico cuando aplica el teorema de Pitágoras “$C_1 4 \times 4 = 16$, $C_2 3 \times 3 = 9$, $16+9 = 25$, $h 6 \times 6 = 36$”.</i>	decir que cumple con los requisitos del nivel 3 y agrega cualificadores o respaldo teórico.
$C_2 3 \times 3 = 9$		
$16+9 = 25$		
$h 6 \times 6 = 36$		

Fuente: elaboración propia

En este último instrumento se observa una mejoría notable ya que 4 estudiantes, es decir, el 66,7% mejoraron su nivel de argumentación, dos de ellos pasando de nivel 1 a nivel 3 y los otros dos pasando de nivel 3 a nivel 4. Respecto a los dos estudiantes restantes, uno conservó el nivel 4 con el que empezó y el otro bajó de nivel 4 a nivel 3. En general se observó que hubo una variación en los niveles de argumentación durante la aplicación de la UD y que se presentaron altibajos en este aspecto durante toda la investigación tal como se muestra en el siguiente diagrama de barras.

Gráfica 5 Cambios en los niveles de argumentación final



Fuente: elaboración propia

En los estudiantes que iniciaron en nivel 1, se puede observar que el estudiante E8B15 alcanzó su nivel más alto de argumentación en la actividad con material concreto y el cuestionario final, algo parecido le sucedió al estudiante E8B28 quien además de mejorar con los dos instrumentos mencionados en el estudiante anterior, también mejoró con la aplicación del software.

Por otro lado los estudiantes que iniciaron en nivel 3, se puede ver que el estudiante E8B24 mantuvo su nivel en los instrumentos material concreto, simbólico y software, mejorando su nivel únicamente en el cuestionario final, mientras que el estudiante E8B27 mantuvo su nivel en simbólico y software, mejorando también su nivel en el instrumento del cuestionario final.

Por último los estudiantes que iniciaron en nivel 4, se observa que el estudiante E8B19 mantuvo su nivel únicamente con el software, no mejoró con ninguno de los instrumentos y desmejoró con lo concreto, lo pictórico, lo simbólico y el software, mientras que el

estudiante E8B29 mantuvo su nivel con el instrumento simbólico y el cuestionario final, no mejoró con ninguno de los instrumentos y desmejoró con lo concreto, lo pictórico y el software.

Como se dijo anteriormente, al finalizar el cuestionario se planteó la pregunta:

¿Comprendiste el Teorema de Pitágoras?, si la respuesta es negativa indica lo que no entendiste, si la respuesta es afirmativa escribe con cuál de las siguientes actividades lo comprendiste mejor y por qué. (Multifichas, recortar y pegar, dibujar, la ecuación o Geogebra)

E8B15: *“si con la de la cometa se entiende que para se un triangulo rectángulo los catetos deben sumar lo que da la hipotenusa”*

E8B28: no contestó la pregunta.

E8B24: *“si, al plantear estas actividades la que mejor me ayudo a comprender fue la de recortar y pegar pues allí note que las formulas son correctas”*

E8B27: *“si, yo aprendí con las ecuaciones desde un principio porque el profesor lo explico bien y es de logica”*

E8B19: *“Siendo honesto cada actividad me mejoro el teorema de Pitágoras porque en algunas tenia preguntas pero con las otras solucione y ay fue que mejore el teorema de pitagoras”*

E8B29: *“Si lo entendi me costo entenderle pero lo logre gracias a las explicaciones del profesor y a geogebra ya que geogebra nos da mejor los resultados y mas exactos”*

Los estudiantes que iniciaron en nivel 1 y terminaron en nivel 3 contestó la pregunta solo un estudiante y manifestó que lo entendió mejor con la pregunta del cuestionario final en la que se refería a las medidas de una cometa (situación en contexto), ya que a la fecha de aplicación del cuestionario se aproximaba el mes de agosto, mes de las cometas en nuestro país.

Los estudiantes que iniciaron en nivel 3 y terminaron en nivel 4, uno manifiesta que le ayudó a comprender cuando realizó el trabajo con material concreto (recortar en trozos más pequeños los cuadrados de los catetos y pegarlos sobre el cuadrado de la hipotenusa), mientras que el otro manifiesta que comprendió mejor con las ecuaciones, es decir, con lo simbólico. En este caso cada uno entendió con representaciones distintas del concepto.

El estudiante que inició en nivel 4 y terminó en nivel 3 manifestó que cada actividad realizada le aportó algo en la comprensión del Teorema, mientras que el estudiante que empezó en nivel 4 y continuó en el mismo nivel manifestó que Geogebra le ayudó a comprender mejor “ *ya que geogebra nos da mejor los resultados y mas exactos*”, se notó durante la clase con el software que los estudiantes en general estuvieron más atentos y preocupados por cumplir con las tareas propuestas, García (2011) manifiesta que el software favorece la argumentación cuando expone que “La contribución de Geogebra al desarrollo de la competencia Argumentar-Demostrar puede resumirse diciendo que le permitió confirmar sus hipótesis y conjeturas visualmente. Una vez convencido de la certeza de una afirmación, lo animó a buscar formas de demostración más formales” (p.439).

9 CONCLUSIONES

En el cuestionario inicial la mayoría de los estudiantes tenían la estructura básica de un argumento pues el 63,8% estaban en nivel 3.

En la elaboración de los instrumentos, principalmente los pertenecientes a la Unidad Didáctica se evidenció que cuando se propusieron tareas o situaciones del contexto los resultados mejoraron.

Cada representación aplicada durante la unidad didáctica se aportaron elementos distintos al estudiante para comprender el concepto y por ende mejorar sus argumentos.

Las formas en que los estudiantes argumentan varía de acuerdo a la situación planteada y el tipo de representación que se esté realizando, por ejemplo se evidenció que los estudiantes argumentan mejor de forma escrita que oral, que en sus argumentos adicional a la comunicación oral o escrita incluyen gráficas, tablas u operaciones matemáticas para justificar su respuesta y en algunas pocas ocasiones usan teorías o referentes para darle fuerza a su argumento.

A continuación se mostrarán las conclusiones teniendo en cuenta el diseño metodológico, los instrumentos aplicados y por último respecto al entorno escolar.

9.1 Respecto a diseño metodológico.

Inicialmente en la aplicación de la secuencia didáctica sobre argumentación, los estudiantes estuvieron muy atentos y manifestaban que algunos de los elementos de la estructura de un argumento trabajados durante la clase, ya habían sido trabajados en clase de Castellano en el año anterior, también manifestaban que ésta clase había sido muy importante ya que se reforzaba lo que les habían enseñado al respecto y complementaron con elementos como el contraargumento y la fundamentación teórica.

Durante la aplicación de la unidad didáctica algunos estudiantes se acercaban al docente para que éste validara si la respuesta escrita tenía los elementos enseñados en la primer

clase, también se acercaban para mostrar la respuesta y manifestar por ejemplo que no encontraban un contraejemplo para mejorar su argumento.

Lo anterior quiere decir que ésta primer clase fue importante para el resto de la investigación ya que como se observó en el cuestionario inicial, la mayoría de los estudiantes tenían la estructura básica de un argumento pues el 63,8% estaban en nivel 3, pero no conocían elementos de la estructura tales como los contraargumentos y el fundamento o respaldo teórico, importantes para elaborar argumentos más fuertes pues como lo manifiesta Tamayo (2012) es necesario trabajar en el aula con los estudiantes en el desarrollo de habilidades argumentativas, empezando por trabajar la estructura básica del argumento que debe contener los datos, la conclusión y la justificación.

Por otro lado se encontró que falta profundizar en el componente comunicación, ya que los estudiantes realizan algunos procedimientos que pueden servir en su argumentación pero que a la hora de comunicarlo de forma oral o escrita no lo tienen en cuenta por falta de práctica frecuente, un ejemplo de ello es cuando el estudiante escribe el argumento *“no yaque 42 es 16 y 32 es 9, estos 2 números se suman y da 25, esos 25 se le agrega la raíz cuadrada y da 5 y para que sea 6 tenia que dar 36”*. Se observa que usa datos con la medida de los catetos y la hipotenusa. Aunque implícitamente usó el teorema de Pitágoras para llegar a su conclusión en ningún lado lo muestra o lo menciona.

9.2 Respecto a los instrumentos

En la elaboración de los instrumentos, principalmente los pertenecientes a la Unidad Didáctica se evidenció que cuando se propusieron tareas o problemas relevantes para el estudiante los resultados mejoraron, un ejemplo de ello se pone de manifiesto cuando el estudiante expresa *“si con la de la cometa se entiende que para se un triangulo rectángulo los catetos deben sumar lo que da la hipotenusa”*. Aquí el estudiante manifiesta mejor comprensión cuando se le planteó una situación cercana a él (la elaboración de una cometa), al respecto Gajardo, Reveco y Zapata (2018) plantean que al aplicar una metodología tradicional, en la que se presenten problemas y tareas en las que solo se busque practicar el algoritmo se afectará el rendimiento escolar de los estudiantes, e impide

que los estudiantes desarrollen actitudes positivas hacia su actividad matemática, cosa que se puede solucionar con el uso de material concreto, representaciones pictóricas y simbólicas (metodología COPISI), ya que éstas promueven en los estudiantes mejores ideas matemáticas y mejor uso en situaciones de la vida cotidiana.

Continuando con la idea anterior con cada representación aplicada durante la unidad didáctica se aportaron elementos distintos al estudiante para comprender el concepto y por ende mejorar sus argumentos, como quedó demostrado en el cuestionario final, pues en este último instrumento se observa una mejoría notable ya que el 66,7% de los estudiantes mejoraron su nivel de argumentación. Aunque también ocurrió que durante la aplicación de los instrumentos hubo muchas variaciones en los niveles argumentativos de cada uno de los estudiantes pues todos en algún momento de la intervención disminuyeron, mantuvieron y aumentaron su nivel de argumentación anterior, tal como se mostró en el diagrama de barras de cambios en los niveles de argumentación.

Los estudiantes que iniciaron en un mismo nivel tuvieron un comportamiento similar algunos de los instrumentos destacando los que permitieron que su nivel de argumentación mejorara, por ejemplo a los estudiantes que se ubicaron en nivel 1 les favoreció trabajar con el material concreto ya que al manipularlo estimuló la observación, la experimentación y la comprobación, por otra parte a los estudiantes que se ubicaron en nivel 3 les favoreció el cuestionario final en el que habían situaciones del entorno del estudiante, además a los estudiantes en este nivel los instrumentos simbólico y software, le ofrecieron elementos para mantenerse en el nivel. Por otra parte los estudiantes que iniciaron en nivel 4 ningún instrumento les ayudó a superar este nivel y solamente el software y el instrumento simbólico les dio elementos para continuar en el mismo nivel.

Por otra parte cuando se les pidió que comunicaran oralmente en la actividad 3, la respuesta a una situación, los estudiantes que en el cuestionario inicial estaban en nivel 1 de argumentación y que en la actividad 1 y 2 habían mejorado éste nivel en dicha actividad de argumentación oral volvieron a expresar su argumento con la estructura de un argumento

de nivel 1, esto se debe a que no es común en las aulas de matemáticas argumentar oralmente. Se evidencia limitaciones a la hora de comunicar lo que se piensa y se escribe.

Los argumentos escritos estuvieron mejor estructurados, principalmente en el cuestionario final en el que ya se habían trabajado los distintos instrumentos propuestos en la unidad didáctica.

La actividad con el software Geogebra permitió que los estudiantes comprobaran el teorema de Pitágoras y se destacó por que los estudiantes no presentaron mayor problema para manejarlo y se confirma lo dicho por García (2011), “Geogebra resultó ser un programa de muy fácil manejo, que requería poco tiempo para familiarizarse con las herramientas que ofrecía y cuyos atributos y ventajas respecto a métodos tradicionales de lápiz y papel se pusieron de relieve en todo momento” (p.507), un ejemplo claro se da cuando el estudiante E8B29 manifiesta *“ya que geogebra nos da mejor los resultados y mas exactos”*.

9.3 Respecto al entorno escolar.

El manejo del software en un ambiente distinto al aula y con el manejo de los computadores motivó el aprendizaje en los estudiantes.

Durante el trabajo en equipos con las multifichas se generó mucho ruido, esto dió ya que como es un material nuevo para ellos se distraían jugando al realizar figuras no relacionadas con la actividad propuesta, o tal vez pudo ser por el poco espacio con el que se contaba en el aula ya que se debían ubicar en el suelo para representar el Teorema de Pitágoras pues en las sillas universitarias no era posible realizar dicha actividad.

Sumado a lo anterior durante la plenaria realizada en la actividad 1 con las multifichas se observó poca atención a los estudiantes que intervenían por cada equipo de trabajo, esto se debió a que no se les pidió a los estudiantes que regresaran a su puesto y continuaron en el piso reunidos con sus compañeros, además no se les pidió el material y mientras alguien participaba otros estaban jugando con las multifichas.

10 RECOMENDACIONES

Incluir situaciones y problemas relevantes para el estudiante en los instrumentos y tareas que se les propongan, es decir, problemas en los que el estudiante se sienta identificado ya sea porque alguna vez se ha visto enfrentado a él o crea que posiblemente se pueda ver en dicha situación. Deben ser situaciones de actualidad que interesen a los estudiantes de acuerdo a su edad, se pueden incluir también situaciones relacionadas con fechas próximas tales como un mundial de fútbol, Halloween, un reinado de belleza, festival de las cometas, navidad, fiestas patrias, entre otras, pues cuando fue así los resultados en los estudiantes mejoraron.

Es necesario, en algunas ocasiones, realizar la práctica pedagógica en espacios distintos al aula, ya que oxigenan al estudiante, se siente motivado, además se observó que en la sala de sistemas los estudiantes estaban más concentrados y seguían mejor las instrucciones y el docente no tenía que repetir tantas veces las explicaciones como si sucedió con las multifichas; cabe aclarar que antes de llevarlos al aula de tecnología, se dieron las instrucciones pertinentes tales como el comportamiento, ingresar únicamente a las páginas autorizadas por el docente entre otras.

Se deben trabajar las distintas representaciones del concepto que se esté tratando, ya que éstas aportan en su comprensión, pues con el material concreto, el estudiante le encuentra significado al concepto matemático, experimenta, prueba diferentes formas de resolver la situación, puede modelizar y finalmente puede llegar a una conclusión; en el mismo orden de ideas, la representación simbólica aporta en la comprensión del concepto ya que ayuda a recuperar información de lo trabajado en la etapa concreta, visualizar el problema planteado y servir de puente para pasar al nivel abstracto con la representación simbólica.

Fortalecer continuamente en las instituciones educativas las habilidades comunicativas, en especial la argumentación oral, primero porque se evidencian limitaciones en este aspecto, pues cuando la tarea o actividad pedía argumentación oral, estas argumentaciones fueron de

menor calidad y rigurosidad estructural y segundo porque las habilidades comunicativas son de uso cotidiano en todos los aspectos del ser humano y en particular de los estudiantes y docentes.

11 REFERENCIAS

Aberdein, A. (2007). Virtue argumentation. In Proceedings of the Sixth Conference of the International Society for the Study of Argumentation (Vol. 1, pp. 15-19). Amsterdam: Sic Sat.

Acosta, Martín Eduardo (octubre de 2010). Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica. 11° Encuentro Colombiano Matemática Educativa, encuentro llevado a cabo en Bogotá, Colombia.

Aldana-Bermúdez, E. (2014). La argumentación como estrategia de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas-The argumentation like strategy of education and of learning of the mathematics. *Revista científica*, 3(20), 37-45.

Comercio internacional. (13 de Marzo de 2010). *Recolección de datos*. tomado de <http://recolecciondedatossena.blogspot.com.co/>

Crespo, C. (2004). Argumentar matemáticamente: su importancia en el aula. In II Congreso Virtual de Enseñanza de la Matemática.

Crespo, C. (2005). La importancia de la argumentación matemática en el aula. *Premisa* (Revista de la sociedad argentina de educación matemática), 24, 23-29.

Crespo, C. (2013). Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología (Doctoral dissertation).

Cruz, I., & Puentes, Á. (10 de Octubre de 2012). Innovación Educativa: Uso de las TIC en la enseñanza de la Matemática Básica. (V. Marín Díaz, Ed.) *Edmetic*, 1(2), 127-147.

Recuperado el 7 de Abril de 2018, de <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4043178.pdf>

Erduran, S. (2007). Argumentation in Science Education: An Overview. In E., & M. P. S Jiménez-Aleixandre (Eds.), *Methodological Foundations in the Study of Argumentation in Science Classrooms* (pp. 47 - 69). Springer.

Gajardo Arévalo, F. R., Reveco, O., Mariela, A., Zapata, R., & Andrea, C. (2018). *Metodología de enseñanza COPISI para el aprendizaje del algoritmo de la división en 4° básico* (Doctoral dissertation, Universidad de Concepción).

García, María del Mar (2011). *Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir Geogebra en el aula*. Doctorado tesis, Universidad de Almería.

ICFES. (2017). *Icfesinteractivo*. Recuperado el 16 de mayo de 2017, de <http://www.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.aspx>

Jiménez, A., & Pineda, L. M. (2013). Comunicación y argumentación en clase de matemáticas. *Educación y Ciencia*, 16, 101-116.

Perelman, C., & Olbrechts-Tyteca, L. (1989). *Tratado de la argumentación*. (J. Sevilla, Trad.) Madrid, España: Gredos.

Planas, N., & Morera, L. (2012). La argumentación en la matemática escolar: dos ejemplos para la formación del profesorado. El desarrollo de competencias en las clases deficiencias y matemáticas, Barcelona. Peirce, CS (1901).

Ruiz O., Francisco Javier, y Tamayo A., Óscar Eugenio, y Márquez B., Conxita, y "La enseñanza de la argumentación en ciencias: un proceso que requiere cambios en las concepciones epistemológicas, conceptuales, didácticas y en la estructura argumentativa de los docentes." *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos* (Colombia), vol. 9, no. 1, 2013, pp.29-52. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=134129372003>

Sardà, A., & Sanmartí, N. (2000). Enseñar a argumentar científicamente: un reto en la clase de ciencias. *Enseñanza de las ciencias*, 18(3), 405-422.

Strauss, A., & Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. (E. Zimmerman, Trad.) Medellín, Colombia: Editorial Universidad de Antioquia.

Tamayo, O. (2012). La argumentación como constituyente del pensamiento crítico en niños. *Hallazgos*, 9(17), 211-233.

Tamayo, O., Vasco, C., Suárez, M., Quiceno, C., García, L., & Giraldo, A. (Septiembre de 2010). *La clase multimodal Formación y evolución de conceptos científicos a través del uso de tecnologías de la información y la comunicación*. Manizales: Universidad Autónoma de Manizales.

Toulmin, S. (2007). Los usos de la argumentación (Trad. de María Morrás y Victoria Pineda). Barcelona: Península.

Walton, D. (2005). Justification of argumentation schemes. *The Australasian Journal of Logic*, 3.

ANEXOS

Anexo 1 Cuestionario inicial

Escuela Normal Superior del Quindío



Universidad Autónoma de Manizales



Cuestionario Inicial

Nombre:--- _____ grado: _____

A continuación encontrarás una serie de preguntas frente a las cuales debes justificar claramente tu respuesta. Es muy importante que en las respuestas expliques los procedimientos que haces.



Imagen tomada de: <https://www.smartick.es/blog/maticas/geometria/figuras-geometricas-entorno/>

De acuerdo con la imagen anterior resuelve las preguntas 1 a 6:

1. ¿Qué figuras geométricas observas en la imagen? Realiza una lista con todas las que puedas descubrir y en qué lugar se encuentran.

2. ¿Qué tipos de triángulos se pueden observar en la imagen y en qué sitio o qué objeto están formando?
3. ¿Cómo puedes determinar qué tipo de triángulos son los que conforman la cometa? Justifica tu respuesta.
4. ¿Qué tipo de triángulo hay alrededor del reloj, cómo lo puedes saber? Justifica tu respuesta.
5. El niño de la imagen decide salir a trotar alrededor de todo el parque de forma rectangular que tiene 50 metros de largo por 200 metros de ancho. ¿Cómo averiguas cuántos metros cubre en cada recorrido alrededor del parque? Explica con detalle el proceso que realizaste para llegar a la respuesta.
6. Si desde la casa del árbol hasta la casa que tiene piscina hay 4m y desde la casa de la piscina hasta la casa de la estrella hay 3m. ¿Qué distancia hay entre la casa del árbol y la casa de la estrella sin pasar por la casa que tiene piscina usando el camino sobre el cual está parado el niño con la cometa? Explica con detalle el proceso que realizaste para llegar a la respuesta.
7. Andrés quiere enmarcar una réplica de la Mona Lisa la cual tiene forma rectangular tal como se muestra al lado.

Si las dimensiones de la pintura son 25cm de largo por 17cm de ancho, ¿cuántos centímetros de marco de madera debe comprar?

Explica con detalle el proceso que realizaste para llegar a la respuesta.



b. ¿Qué distancia hay desde la casa del árbol hasta la casa de la estrella tomando el camino más corto?

c. Un estudiante afirma que hay dos caminos que se pueden tomar para ir de la casa del árbol hasta la casa de la estrella y que ambos caminos tienen la misma distancia de 63m. para ello sumó 27m y 36m. ¿es cierta ésta afirmación?

2. Andrés desea elaborar una cometa como la que se muestra en la imagen, para la cual es necesario elaborar 4 triángulos rectángulos, dos grandes y dos pequeños del mismo tamaño respectivamente.

Andrés ya tiene recortados los dos triángulos grandes, pero no ha podido recortar los triángulos pequeños pues tiene la medida de la hipotenusa 10cm y de uno de los catetos 8cm, le hace falta la medida del otro cateto. Explícale a Andrés la forma en la que puede hallar la medida del otro cateto.

¿Cuánto mide el cateto faltante para poder recortar los dos triángulos faltantes?

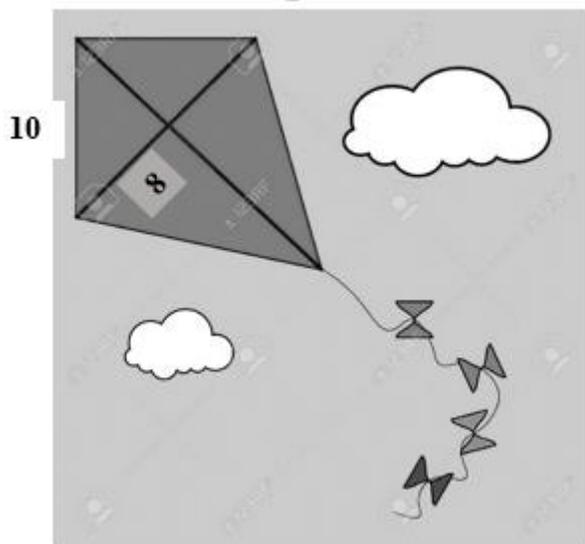


Imagen tomada de: https://es.123rf.com/photo_46793271_ilustraci%C3%B3n-de-rombo-vuelo-de-la-cometa-entre-las-nubes.html

3. Si la hipotenusa de un triángulo mide 6 m, y los catetos miden 4 m y 3 m. ¿será un triángulo rectángulo?

4. Roberto desea colgar un adorno en la fachada de su casa, a una altura de 6m, para lo cual cuenta con una escalera que mide 7m. Según las normas de seguridad la base de ésta escalera debe estar a mínimo 2m de distancia de la pared en la que se va a usar. Según lo anterior, ¿la escalera que tiene Roberto alcanza para colgar el adorno a 6m de altura?

5. ¿Comprendiste el Teorema de Pitágoras?, si la respuesta es negativa indica lo que no entendiste, si la respuesta es afirmativa escribe con cuál de las siguientes actividades lo comprendiste mejor y por qué. (multifichas, recortar y pegar, dibujar o Geogebra)

Anexo 3 Secuencia didáctica construcción de argumentos

SECUENCIA DIDÁCTICA CONSTRUCCIÓN DE ARGUMENTOS

Objetivo: Que el estudiante identifique y diferencie con claridad los datos de las conclusiones, las justificaciones, los respaldos teóricos y los contraargumentos.

INICIO:

Se presenta un corto de los Simpson donde se observan algunos argumentos que los amigos de Nelson le dicen a Bart Simpson para que se lleve un letrero del nombre de una avenida que lleva su nombre “avenida Bart”.

Se indaga a los estudiantes sobre lo visto en el video.

1. Describe brevemente el video.
2. ¿De qué se trata el video?
3. ¿Crees que Kearney, Jimbo y Dolph lograron convencer a Bart de bajar el letrero?
Si es así ¿cómo lo convencieron?
4. ¿En qué momentos es necesario argumentar?
5. ¿Es importante argumentar? ¿por qué?

Se pregunta a los estudiantes ¿cuánto es $1+1$? Y se pregunta que argumenten su respuesta. El docente escucha varias opiniones al respecto. Cuando no haya lugar a duda se muestra un fragmento del video $1+1=3$ ¿Paradoja matemática? | Problemas y contradicciones, desde el minuto 2:55 hasta el minuto 7:05. Allí una persona muestra una serie de pasos en la que llega a la conclusión que $1+1=3$. Con este video se quiere mostrar un contraejemplo donde alguien argumenta que se puede llegar a la conclusión que $1+1=3$

Se realiza un corto análisis del video, se escuchan las opiniones de los estudiantes al respecto para determinar si es cierto que $1+1=3$ o si por el contrario se puede encontrar un error en la conclusión.

DESARROLLO:

Se indaga y construye junto con los estudiantes las definiciones de:

¿Qué es un dato?

¿Qué es una conclusión?

Por lo tanto, por lo cual, por ello, así que,

¿Qué es una justificación?

Ya que, puesto que, porque,

¿Qué es un respaldo teórico?

Porque...

¿Qué es un contraargumento?

A menos que

Luego se muestra un ejemplo en el que los estudiantes deben encontrar los elementos de un argumento.

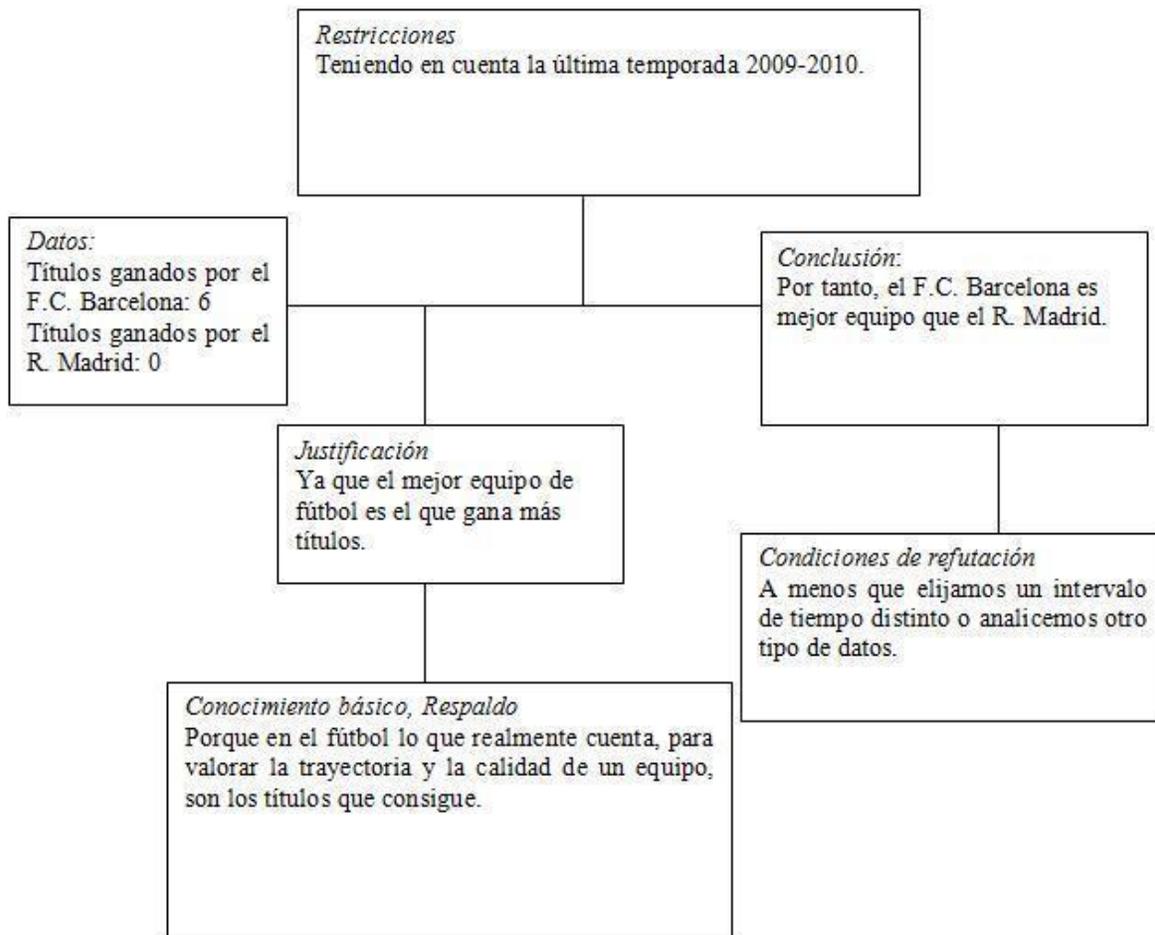
Ejemplo 1:

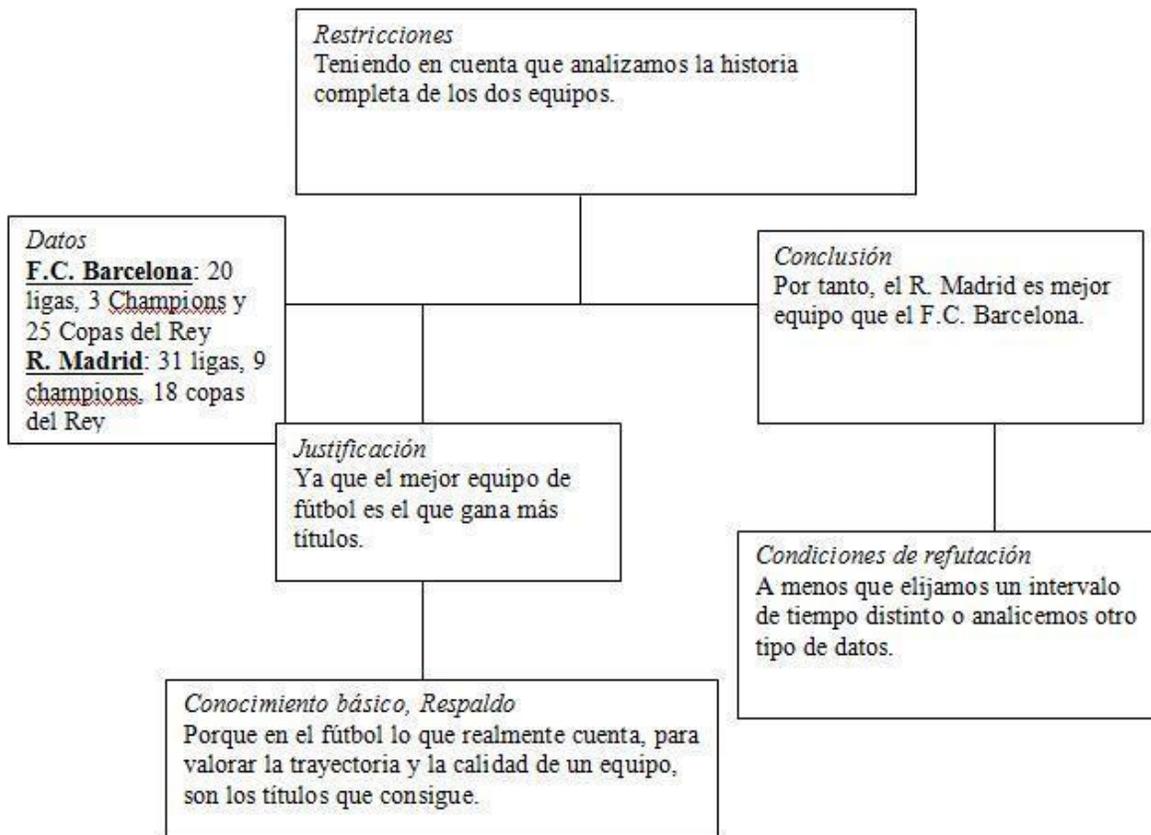
Una argumentación correcta a la pregunta de *cuál es el mejor equipo de la liga española*, usando el argumento de Toulmin, debe seguir los siguientes pasos:

- 3 Restricciones: Como *restricción* podemos seleccionar el intervalo de tiempo que estamos considerando: última temporada, última semana, siglo XXI, siglo XX...

 - Datos o pruebas: Podemos considerar distintos *datos*: títulos ganados o cantidad de goles serían los datos más objetivos y fáciles de analizar.

- Respaldo: Como *respaldo* o *conocimiento básico* podemos aceptar como una «ley» del fútbol que el mejor equipo es aquél que más títulos gana (siempre discutible, claro).
- Conclusión: Con todo esto llegamos a una *conclusión*: F.C.Barcelona o R.Madrid.
- Refutaciones: Y por último planteamos las refutaciones: *Todo esto es cierto a menos que...*





Ejemplo 2:

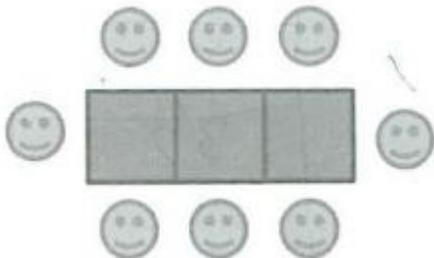
Ana va al parque zoológico Santafé ubicado en la ciudad de Medellín, en su recorrido por la zona de aves observa que en cada una de las jaulas hay águilas de cola blanca así: en la jaula número uno hay dos águilas, en la jaula número dos hay cinco águilas, en la jaula número tres hay 8 águilas y así sucesivamente. De tal manera que con el número de águilas en cada jaula se forma la secuencia: 2, 5, 8, 11, 14,...

Partiendo de que cada número de la secuencia representa las águilas que contiene cada jaula, ¿cuántas águilas hay en la jaula N° 15?

Actividad 1: En los siguientes argumentos subraya de azul los datos, rojo justificación, verde la conclusión, amarillo el respaldo y de violeta el contraargumento.

1. Ujum, me imagino que en la primera 2, en la segunda 5, en la tercera 8, en la cuarta 11...en las diferentes jaulas, esto quiere decir que hay varias jaulas y en cada jaula están las águilas que dice en la secuencia.
2. Si seguimos con la secuencia que en la Jaula uno hay dos águilas, en la dos cinco, en la tres ocho y seguimos contando de tres en tres en la jaula número 15 debe de haber 44. Entonces en la jaula número 15 hay 44 águilas

Sara celebra su cumpleaños en casa y quiere invitar a sus amigos a cenar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.



Las mesas se unen formando una fila como la que observamos en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otros debe haber un niño sentado.

¿cuántos amigos se pueden sentar en 120 mesas?

1. 242 amigos se pueden sentar en 120 mesas, porque multiplique $120 \times 2 = 240$ ¿por qué multipliqué? Porque si vemos en la información en una mesa se sientan 2 personas arriba y abajo, después sumé 2 más porque una persona va sentada a la izquierda y otra a la derecha.
2. Pueden sentarse 242 niños, lo averigüé multiplicando 118 por 2 y 2 por 3 y después los dos resultados los sumaba.

FINALIZACIÓN:

Escribe un argumento con los 5 elementos que debe tener acerca de la siguiente cuestión:

A la casa que comparten cinco jóvenes ha llegado la factura de cobro del servicio de energía correspondiente al consumo del mes de septiembre. Entre la información que aparece en la factura se encuentra la siguiente:

consumo promedio últimos seis meses en kWh 104

consumo en (kWh)	110
valor (/kWh)	175,0952
costo de consumo	19 260
menos subsidio	-7 704
valor neto por consumo	11 556
ajuste decena	4
total a pagar	11 560

Los jóvenes están preocupados porque el consumo promedio relacionado en la factura, aumentó en 6 kWh respecto al relacionado en el mes de septiembre. Discuten porque según ellos deben pagar 36 kWh más que en el mes de agosto. ¿Esta afirmación es verdadera o falsa? Justifica tu respuesta.