LA ARGUMENTACIÓN EN EL APRENDIZAJE DE LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS CUADRÁTICOS

DANIELA MARÍA OSORIO PINILLA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES

FACULTAD DE ESTUDIOS SOCIALES Y EMPRESARIALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

MANIZALES

2020

LA ARGUMENTACIÓN EN EL APRENDIZAJE DE LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS CUADRÁTICOS

Autora

DANIELA MARÍA OSORIO PINILLA

Proyecto de grado para optar al título de Magister en Enseñanza de las Ciencias

Tutor

JUAN PABLO MARÍN GRISALES

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES

FACULTAD DE ESTUDIOS SOCIALES Y EMPRESARIALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

MANIZALES

2020

RESUMEN

La presente investigación tuvo por objetivo describir la incidencia de la argumentación como estrategia en el aprendizaje de la factorización de polinomios cuadráticos en estudiantes de grado octavo del Gimnasio Villa Fontana. Para tal fin se diseñó una investigación con enfoque cualitativo de tipo descriptivo, donde se analizaron las representaciones plasmadas por cinco estudiantes para dar respuesta a una prueba inicial y a una prueba final, la cual fue respondida después de la aplicación de una unidad didáctica diseñada como parte de la investigación con el objetivo de contribuir al avance del nivel argumentativo y del nivel de aprendizaje de los estudiantes en torno a situaciones que involucran factorización.

Tras el análisis de las representaciones de los estudiantes, fue posible concluir que las estrategias utilizadas como parte de las actividades de intervención de la unidad didáctica, permitieron dotar de significado al proceso de factorización por parte de los estudiantes, de modo que empezaron a estructurar argumentos en torno a la reversibilidad de la factorización y a la relación de la misma con el área y las dimensiones de figuras planas, movilizándose así hacia niveles de argumentación más altos y a niveles de aprendizaje más altos de acuerdo con la taxonomía SOLO.

Palabras Claves: Educación Matemática, Taxonomía SOLO, Niveles de argumentación, Representaciones.

ABSTRACT

The present research aimed to describe the incidence of argumentation, as a strategy, in learning the factorization of quadratic polynomials in eighth grade students from a private school, in Tunja, Boyacá. To this end, an investigation was designed with a qualitative, descriptive approach, where the representations captured by five students were analyzed to respond to an initial test and a final test, which was answered after the application of a didactic unit designed as part of research with the aim of contributing to the advancement of the argumentative level and the level of student learning around situations that involve factoring.

After analyzing the students' representations, it was possible to conclude that the strategies used as part of the intervention activities of the didactic unit allowed the students to give meaning to the factoring process, so that they began to structure arguments around the reversibility of factorization and its relationship with the area and dimensions of plane figures, thus moving towards higher levels of argumentation and higher levels of learning according to the SOLO taxonomy**.**

Keywords: Math education, SOLO taxonomy, argumentation levels, representations.

CONTENIDO

1 PRESENTACIÓN 10

2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 11

2.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA 11

3 JUSTIFICACIÓN 16

4 OBJETIVOS 18

4.1 OBJETIVO GENERAL 18

4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS 18

5 MARCO CONCEPTUAL 19

5.1 ARGUMENTACIÓN EN MATEMÁTICAS 19

5.1.1 Modelo Argumentativo 20

5.1.2 Niveles Argumentativos 21

5.1.3 Representaciones 21

5.2 DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LA FACTORIZACIÓN 22

5.3 NIVELES DE APRENDIZAJE. TAXONOMÍA SOLO 24

6 METODOLOGÍA 26

6.1 ENFOQUE Y ALCANCE 26

6.2 CONTEXTO Y POBLACIÓN 26

6.3 UNIDAD DE TRABAJO 27

6.4 UNIDAD DE ANÁLISIS 27

6.5 TÉCNICAS Y FUENTES DE RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN 31

6.6 DISEÑO METODOLÓGICO 31

6.7 PLAN DE ANÁLISIS 33

7 ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS 37
7.1 RESULTADOS EN LA PRUEBA DIAGNÓSTICO 37
7.2 RESULTADOS EN LA PRUEBA FINAL 45
7.3 COMPARATIVO ENTRE LOS RESULTADOS EN LA PRUEBA INICIAL Y LOS RESULTADOS EN LA PRUEBA FINAL 58
8 CONCLUSIONES 62
9 RECOMENDACIONES 64
10 REFERENCIAS 65
11 ANEXOS 69

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Familia de códigos para niveles de argumentación..... 33
Figura 2.Familia de códigos para el modelo argumentativo. 34
Figura 3. Familia de códigos para representaciones..... 34
Figura 4. Familia de códigos para la taxonomía SOLO. 34
Figura 5. Análisis de la información en cada etapa..... 36
Figura 6. Tipos de representación y nivel de argumentación en la prueba diagnóstico..... 38
Figura 7. Representación múltiple relacionada con un argumento de nivel 3..... 39
Figura 8. Tipo de representación y nivel de argumentación en la prueba 40
Figura 9. Respuesta que evidencia la pseudocomprensión del concepto 41
Figura 10. Relación entre el nivel argumentativo y el nivel de aprendizaje en la prueba diagnóstico..... 42
Figura 11. Respuesta de nivel de argumentación 1 y nivel preestructural de aprendizaje ... 43
Figura 12. Respuesta con un nivel de argumentación 2 y un nivel preestructural de aprendizaje..... 44
Figura 13. Relación entre el tipo de representación y el nivel de argumentación en la prueba final..... 46
Figura 14. Tipo de representación y nivel argumentativo en la prueba final 47
Figura 15. Representación múltiple asociada con el nivel 2 de argumentación..... 48
Figura 16. Representación donde se evidencia un nivel 2 de argumentación 49
Figura 17. Representación donde se evidencia un nivel 3 de argumentación 49
Figura 18. Representación simbólica asociada al nivel 3 de argumentación 50
Figura 19. Relación entre el nivel argumentativo y el nivel de aprendizaje en la prueba final 52
Figura 20. Argumento categorizado en el nivel 3 de argumentación y en el nivel preestructural de aprendizaje..... 53
Figura 21. Nivel de argumentación 2, nivel de aprendizaje preestructural 54
Figura 22. Representación múltiple asociada con un nivel multiestructural..... 55
Figura 23. Nivel 3 de argumentación, nivel relacional de aprendizaje 56

Figura 24. Nivel 3 de argumentación, nivel relacional de aprendizaje 57
Figura 25. Argumento presentado por Blanco que involucra la reversibilidad de la operación 58
Figura 26. Cantidad de veces que se evidenció cada tipo de representación en las pruebas 58
Figura 27. Niveles de argumentación alcanzados, prueba inicial vs prueba final..... 60
Figura 28. Niveles de la taxonomía SOLO. Prueba inicial vs prueba final..... 61

LISTA DE TABLAS

Tabla 1.Operacionalización de las variables 29
Tabla 2. Niveles de argumentación alcanzados por los estudiantes en la prueba diagnóstico 37
Tabla 3.Nivel de aprendizaje alcanzado por los estudiantes en la prueba diagnóstico 42

LISTA DE ANEXOS

Anexo 1. Instrumento diagnóstico..... 69
Anexo 2. Usando la caja de polinomios 73
Anexo 3. Usando las tabletas algebraicas..... 78
Anexo 4. Dominó de fracciones algebraicas 82
Anexo 5. Instrumento final..... 85

1 PRESENTACIÓN

Desarrollar habilidades y competencias argumentativas en matemáticas ha sido una actividad cuyas implicaciones positivas han sido descritas con anterioridad por diversos autores, entre los cuales se encuentran Calderón & León (1996), Duval, R. (1999), Crespo (2005), y Gamboa Planas & Edo (2010), por mencionar algunos, entre los muchos que han aportado en este campo.

Sin embargo, al tratarse de la argumentación en el contexto de la factorización y en general de las temáticas que giran en torno al álgebra, el fortalecimiento de las habilidades argumentativas no se suele priorizar, debido a que la enseñanza de este tipo de contenidos suele estar ligada a la memorización de reglas que no tienen significado alguno para los estudiantes.

En ese sentido, el presente documento detalla una investigación cualitativa llevada a cabo con cinco estudiantes de grado octavo de un colegio privado ubicado en la ciudad de Tunja, Boyacá, cuyo objetivo era describir la influencia de la argumentación como estrategia en la enseñanza de la factorización de polinomios cuadráticos. De este modo, se buscó validar la argumentación como una estrategia capaz de contribuir a la superación de obstáculos propios del proceso de enseñanza y aprendizaje de la factorización.

Para tal fin, se diseñó una unidad didáctica que tenía por objetivo favorecer el desarrollo de habilidades argumentativas que conllevarán un mejor nivel de aprendizaje de la factorización. La efectividad de esta estrategia se describió mediante la comparación entre los niveles de argumentación y de aprendizaje alcanzados por los estudiantes en una prueba antes de la aplicación de la unidad didáctica y otra después de la aplicación de la misma.

2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

2.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

A lo largo de la historia se ha señalado la importancia de un adecuado proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sin embargo, pese a las iniciativas que se han tomado en Colombia en busca de un mejor desarrollo de las competencias en esta área, los resultados obtenidos siguen mostrando que aún hay mucho por mejorar. Prueba de ello son los resultados de las pruebas PISA, donde el promedio del desempeño de Colombia en la prueba de matemáticas estuvo 100 puntos por debajo del promedio obtenido en los países que hacen parte de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE, 2016).

Lo anterior visibiliza el hecho de que los estudiantes no logran aplicar los contenidos que se estudian en el aula para analizar y resolver situaciones relacionadas con elementos de la cotidianidad, lo cual se encuentra directamente relacionado con el hecho de que la enseñanza de las matemáticas ha tenido un enfoque transmisionista, que reduce la actividad en el aula al manejo de un lenguaje estrictamente simbólico donde los estudiantes usualmente toman un rol pasivo dentro de la clase y suelen estar de antemano de acuerdo con lo que el docente dice, aun cuando desconocen las razones o el porqué de las cosas (Jiménez & Pineda, 2013). Adicionalmente, Llanos & Otero (2013) sostienen que "en las aulas de matemática de hoy, no se trabaja deliberadamente en la argumentación; más bien se opta por la repetición de ejercicios, reduciendo el trabajo del alumno a copiar y reproducir el conocimiento propuesto por el profesor" (p.2).

Así, el trabajo matemático realizado en el aula suele responder a un proceso enmarcado en un modelo tradicional, que prioriza la mecanización y repetición de algoritmos y que no da espacio a actividades tales como la interpretación o la argumentación, de esa forma, un estudiante puede llegar a cumplir con las actividades que se proponen durante la clase, aun cuando desconoce la justificación de los procedimientos que realiza.

Ahora bien, la poca destreza de los estudiantes para argumentar sus respuestas ante las situaciones que se abordan en clase de matemáticas, se hace explícita, especialmente, al abordar situaciones relacionadas con álgebra, pues durante las actividades de clase se suele propiciar el uso de estructuras que, para los estudiantes, se encuentran desprovistas de significado. Es así como la factorización se convierte en la mecanización de procesos, donde difícilmente el estudiante es capaz de explicar sus procedimientos desde la apropiación del concepto y suele caer en la memorización de pasos carentes de una relación lógica.

Esta dificultad se hace visible, por ejemplo, cuando se proponen actividades relacionadas con áreas de cuadrados y/o rectángulos dadas en forma de expresiones algebraicas y se solicita a los estudiantes que a partir del área determinen las dimensiones de la figura. En un primer momento, al abordar una situación de este tipo, no es frecuente que los estudiantes propongan la factorización del polinomio que representa el área como un método para cumplir con el objetivo de la actividad. Posteriormente, tras la socialización actividades similares es posible que la mayoría de los estudiantes utilicen la factorización para solucionarlas. Sin embargo, difícilmente llegan a argumentar de forma precisa y coherente respecto al por qué el procedimiento es válido, pues su utilización en este punto suele ser consecuencia de un proceso memorístico más que del análisis real de la situación.

Otra razón que visibiliza la necesidad de fomentar espacios argumentativos durante la enseñanza y el aprendizaje de la factorización en los estudiantes de grado octavo responde al hecho de que los estudiantes no suelen argumentar un proceso de factorización con razones diferentes a la memorización de reglas y procedimientos, es muy poco frecuente que utilicen justificaciones que describan a la factorización como la reversión de un producto notable. Como consecuencia, esta memorización conlleva a realizar factorizaciones de forma momentánea, en espacios temporales cercanos a aquellos en los que se estudia la temática.

En ese orden de ideas, son notorias las falencias en el aprendizaje de la factorización asociadas a la ausencia de espacios adecuados que, dentro del proceso, propicien la

argumentación como una estrategia enfocada a la superación de las dificultades evidenciadas en el aprendizaje de la factorización de polinomios cuadráticos.

Al respecto, Aldana (2014) describe una investigación de tipo cualitativa con un estudiante universitario, a quien le plantean tareas relacionadas con el cálculo de integrales definidas para calcular áreas bajo la curva. A partir de las representaciones utilizadas por el estudiante para solucionar dichas tareas, el autor busca analizar los argumentos y la relación que el estudiante establece entre ellos como evidencia de su comprensión de los conceptos matemáticos.

En este sentido, y partiendo de la necesidad de desenmarcar la clase de matemáticas de procesos netamente tradicionales, dando preferencia a situaciones mediante las cuales se propicie el desarrollo de habilidades como la argumentación, Solar (2018), presenta una investigación desarrollada a partir de un estudio de casos, con el objetivo de identificar las implicaciones de promover la argumentación en clase de matemáticas. A partir de la investigación el autor concluye tres beneficios, el primero de ellos es el hecho de que el profesor logra reconocer patrones de pensamiento comunes en los estudiantes, adicionalmente se genera una interacción dialógica entre el profesor y los estudiantes, y, por último, el docente cuenta con una mayor variedad de recursos para abordar las situaciones de contingencia en el aula que permiten oportunidades de profundizar en el aprendizaje.

Por otro lado, y con respecto a la necesidad de dotar de significado a la factorización de expresiones algebraicas, diversos autores han desarrollado investigaciones donde buscan indagar y caracterizar diferentes materiales y elementos que contribuyan a un mejor aprendizaje de la factorización. Este es el caso de Salazar, Jiménez & Mora (2013) cuyo trabajo fue presentado en el I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe, y corresponde a una propuesta titulada “tabletas algebraicas, una alternativa de enseñanza del proceso de factorización”. Este trabajo surge ante la preocupación de las autoras por las consecuencias del aprendizaje memorístico de los casos de factorización, para lo cual, buscaron establecer una relación entre el concepto de área y algunos

polinomios, de modo que, al encontrar los factores del polinomio, los mismos se pudieran relacionar con las dimensiones de la figura plana. Para tal fin, diseñaron las tabletas algebraicas, que consisten en un material manipulativo que permite representar gráficamente polinomios cuadráticos, contribuyendo a que el proceso de factorización de polinomios cuadráticos se relacione con la geometría de figuras planas. El material diseñado por los autores, fue dado a conocer mediante talleres ofrecidos a docentes, con la intención de que estos pudieran aplicar la estrategia en sus aulas, contribuyendo a que el proceso de factorización de polinomios cuadráticos se relacione con la geometría de figuras planas.

Apuntando hacia un objetivo similar, Ospina (2015), en su tesis de maestría, describe una estrategia de enseñanza y aprendizaje de la factorización. La estrategia fue aplicada a un grupo de estudiantes de modalidad CLEI (Ciclos Lectivos Especiales integrados), de una institución educativa de la ciudad de Medellín, para quienes se diseñó y aplicó una guía didáctica enfocada en el uso de material manipulativo para la resolución de problemas en un marco de aprendizaje significativo. Mediante el estudio de casos, se analizaron tres elementos para cada uno de los casos estudiados: el desarrollo de guías de tipo diagnóstico, el recorte de material didáctico y la aplicación de la guía didáctica; llegando a demostrar que el uso de materiales manipulativos favorece un mejor aprendizaje de conceptos abstractos relacionados con el álgebra y particularmente con la factorización de polinomios.

Así mismo, Méndez (2012), parte del hecho de que el marco algebraico para enseñar a factorizar polinomios cuadráticos promueve las respuestas incorrectas, no contribuye a que los estudiantes comprendan la reversibilidad de la operación realizada y por lo tanto no les permite identificar si la respuesta que proponen es correcta o no, y además hace que los estudiantes copien estructuras previamente establecidas sin que en realidad lleguen a comprender las operaciones que están llevando a cabo. Ante este problema, el autor propone un juego mediante reglas según las cuales se pueden operar objetos definidos con anterioridad, de modo tal que se logre la operacionalización del proceso de factorización. De esta forma, el juego propicia el desarrollo de habilidades de tipo cognitivo y metacognitivo en los estudiantes, quienes logran establecer relaciones entre el polinomio

inicial y sus factores además de dar sentido a las relaciones entre los elementos de la factorización en torno a la actividad Matemática en el aula. La estrategia fue aplicada a un grupo de 16 estudiantes de primer semestre de pregrado y permitió concluir que el juego propicia el desarrollo de habilidades de tipo cognitivo y metacognitivo en los estudiantes, quienes logran establecer relaciones entre el polinomio inicial y sus factores, además de dar sentido a las relaciones entre los elementos de la factorización en torno a la actividad Matemática en el aula.

Estos tres trabajos parten del problema que supone el aprendizaje memorístico de la factorización, estableciendo la necesidad de que la factorización se aprenda a través de procesos que lleven al estudiante a contextos donde la mecanización de procedimientos no sea el elemento principal.

Consecuentemente, la realidad del aula de clase al abordar situaciones relacionadas con la factorización, no dista de lo que fue descrito anteriormente, sino que por el contrario, frecuentemente se hacen evidentes las debilidades en los estudiantes de grado octavo del Gimnasio Villa Fontana para argumentar los procedimientos que llevan a cabo para factorizar un polinomio, como también para explicar la relación existente entre los productos notables y los casos de factorización en situaciones de contexto.

Por tanto, surge la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo incide la argumentación en el aprendizaje de la factorización de polinomios cuadráticos en estudiantes de grado octavo del Gimnasio Villa Fontana?

3 JUSTIFICACIÓN

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998), afirma que la argumentación es uno de los procesos que permite concretar la actividad Matemática, pues contribuye al desarrollo de los procesos generales, como la resolución de problemas, el razonamiento, la comunicación y la modelación entre otros. Así, promover en el aula estrategias que favorezcan el adecuado desarrollo de las competencias matemáticas y en especial, de la argumentación, permitirá que los estudiantes de grado octavo aborden procesos como la factorización respondiendo al carácter lógico de la misma, evitando la memorización innecesaria fórmulas y procedimientos.

Con la intención de superar la dificultad que supone el aprendizaje memorístico, superficial y momentáneo de la factorización, se privilegia en este proyecto un espacio que potencie las habilidades argumentativas de los estudiantes, para favorecer el desarrollo de aprendizajes que incentiven la capacidad de análisis al abordar situaciones que involucran la descomposición en factores de expresiones algebraicas, logrando así que se atribuya un significado a las operaciones realizadas y se otorgue una connotación a los símbolos, permitiendo que estos se relacionen con estructuras conocidas para que el estudiante pueda verificar la veracidad de la respuesta obtenida dando uso a sus propios conocimientos.

Consecuentemente, validar la argumentación como una estrategia que favorezca el aprendizaje de la factorización de polinomios cuadráticos, podría representar un avance significativo en torno a la apropiación de contenidos y la formulación de relaciones matemáticas entre los mismos. De acuerdo con León & Calderón (2008), para expresar una relación matemática se requiere precisar el desarrollo de ciertas habilidades entre las cuales se encuentran la argumentación matemática y la demostración.

Adicionalmente, los espacios que propician la argumentación permitirán conocer y atender las necesidades y dificultades de aprendizaje cada estudiante de acuerdo a las particularidades del proceso para cada uno de ellos. Esto en la medida de que, en dichos espacios, la respuesta que un estudiante pueda ofrecer ante determinada situación toma un

carácter secundario y lo que se considera relevante es la forma en que cada cual pueda asociar y utilizar sus conocimientos con la intención de resolver la situación planteada.

Siendo así, la implementación de espacios argumentativos dentro del proceso de aprendizaje de la factorización, conllevaría también un cambio en la metodología usual de las clases, produciendo, posiblemente, un acercamiento más personalizando entre el docente y los estudiantes, de modo tal que se produzca una superación real de las dificultades de aprendizaje de cada uno de ellos, contribuyendo a una mejor disposición de los estudiantes dentro del aula y a una comprensión más precisa de la temática en cuestión.

Finalmente, si el uso de la argumentación como estrategia para el aprendizaje de la factorización produce en el proceso los beneficios mencionados, podría fundamentarse la argumentación como un elemento con implicaciones positivas y relevantes en el proceso de enseñanza de las temáticas relacionadas con álgebra, superando así las connotaciones negativas que tradicionalmente se le han otorgado al área.

4 OBJETIVOS

4.1 OBJETIVO GENERAL

Analizar la incidencia de la argumentación en el aprendizaje de la factorización de polinomios cuadráticos en estudiantes de grado octavo del Gimnasio Villa Fontana.

4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar los niveles de argumentación de los estudiantes, al resolver situaciones relacionadas con la factorización de polinomios cuadráticos.
- Definir los niveles de aprendizaje, desde la taxonomía SOLO, alcanzados por los estudiantes al resolver situaciones relacionadas con la factorización.
- Describir la incidencia de la argumentación en los niveles de aprendizaje, alrededor de la intervención didáctica.

5 MARCO CONCEPTUAL

En el presente apartado se describen las principales categorías que comprende la investigación, dentro de ellas se incluyen los aspectos teóricos que serán utilizados en el análisis de la información.

5.1 ARGUMENTACIÓN EN MATEMÁTICAS

La argumentación es la categoría fundamental para el planteamiento y desarrollo del presente estudio, por tal razón, el presente apartado busca describir los referentes teóricos que soportan aspectos que van desde el diseño de la UD hasta las categorías e indicadores que fueron usados para el análisis de la información recolectada.

Históricamente ha existido un debate latente entre dos posiciones con respecto a la argumentación en matemáticas: por un lado, están aquellos que afirman que la argumentación está dada, únicamente, en forma de demostración y por el otro están aquellos que defienden la postura de que existen y son igualmente válidas las argumentaciones que privilegian diferentes usos del lenguaje y que por tal razón distan de una demostración.

En este sentido, para el desarrollo de esta investigación se tomará como referente en cuanto a la argumentación, la definición ofrecida por Aldana (2014) al desarrollar un trabajo en torno a la argumentación vista como una estrategia:

> La argumentación es un proceso que hace referencia al porqué de lo que hace el estudiante mediante la exposición de razonamientos para justificar un procedimiento matemático, para ello parte de la identificación de una situación, para llegar a juicios de razonamiento y análisis desde el saber matemático. El proceso argumentativo lo realiza el estudiante desde dos habilidades propias del lenguaje: la oralidad y la escritura, en este sentido los argumentos que utiliza un aprendiz durante el proceso de aprendizaje de un concepto matemático se evidencian por la capacidad que tenga para mostrar un conjunto de proposiciones que establezcan una relación de coherencia

> entre lo que el sujeto piensa, dice y demuestra durante la resolución de una tarea en particular. Por ejemplo, el paso del lenguaje hablado al escrito, del lenguaje verbal al lenguaje algebraico, de una representación tabular a la interpretación de una gráfica. (p. 2)

5.1.1 Modelo Argumentativo

Con la intención de definir lo que se considerará o no un argumento para el desarrollo de la presente investigación, se precisa la descripción del modelo argumentativo de Toulmin en relación a los *argumentos sustantivos* ofrecida por Pinochet (2015).

Bajo este referente, el modelo de Toulmin se compone de 6 elementos denominados: datos, conclusión, garantía, calificador modal, condiciones de refutación y sustento; de los cuales los primeros 3 se consideran esenciales para la conformación de un argumento propiamente dicho. Siendo así, un argumento parte de una información inicial y llega a la conclusión mediante el paso por los demás elementos mencionados, cuyas definiciones se desglosan a continuación:

- *Datos:* Son los datos iniciales, los antecedentes o los hechos de los cuales se dispone para dar fundamento a la conclusión.
- *Garantías:* Son las que justifican el paso de los datos a la conclusión, demostrando su validez y legitimidad.
- *Sustento:* Son las circunstancias generales y el respaldo teórico bajo los cuales se apoya la garantía.
- *Calificador modal:* Estos calificadores hace explícito el grado de certeza o incertidumbre frente al argumento. Son calificadores modales, por ejemplo, los términos “siempre”, “dependiendo de”, “a veces”, etc.
- *Condiciones de refutación:* Describen las situaciones bajo las cuales la conclusión no es válida, es decir que establece restricciones.

Estos elementos, su uso o la ausencia de los mismos dentro de las argumentaciones, permiten ubicar establecer una clasificación de acuerdo al nivel argumentativo de cada estudiante.

5.1.2 Niveles Argumentativos

Debido que a lo largo de la investigación se busca evaluar si la UD propicia el avance en el nivel argumentativo de los estudiantes, se hace necesario considerar un referente para dicha clasificación. La clasificación del nivel argumentativo se hará de acuerdo con la descripción de 5 niveles realizada por Erduran (citado por Tamayo, 2012), las características de cada uno de estos niveles se describen brevemente a continuación, en relación al uso de los elementos del modelo de Toulmin descritos con anterioridad.

- *Nivel 1:* Los argumentos utilizados corresponden a una descripción simple de la vivencia.
- *Nivel 2:* En los argumentos utilizados se puede identificar de forma clara la existencia de datos y conclusiones.
- *Nivel 3:* En los argumentos utilizados, además de los datos y la conclusión, se puede evidenciar la existencia de una garantía.
- Nivel 4: En los argumentos utilizados se evidencia la existencia de datos, conclusiones y garantías mediante el uso de calificadores modales y sustento.
- Nivel 5: En los argumentos utilizados se incluyen los 6 elementos, datos, conclusiones, garantías, sustento y condiciones de refutación.

5.1.3 Representaciones

La importancia de las representaciones, radica en el papel que estas tienen para visibilizar el conocimiento matemático, esto se evidencia en el aporte de Duval (citado por Borjón, Torres & Sosa, 2015): “se ha adquirido un concepto determinado, cuando se es capaz transitar entre por lo menos dos diferentes representaciones semióticas del concepto mismo”. Así, la habilidad de un estudiante para expresar su conocimiento haciendo uso de diferentes representaciones es un indicador de la adquisición de conocimiento matemático y, en esta

medida, las representaciones son fundamentales a la hora de determinar y evaluar la validez de un argumento. Los tipos de representación mencionados por Duval son: verbal, numérica, algebraica y gráfica.

5.2 DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LA FACTORIZACIÓN

El eje temático en torno al cual se desarrolló el presente trabajo es la factorización, por tal razón, a continuación, se describen las principales dificultades en su aprendizaje desde diferentes autores.

De acuerdo con Kieran (1994) el álgebra fue introducida como materia escolar desde finales del siglo XIX y desde entonces, hasta la época actual, sus contenidos sus secuencias y su carácter no han sufrido alteraciones significativas. Siendo así, la factorización es precisamente uno de esos contenidos que desde entonces se abordan durante el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra.

De esta forma, las principales dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la factorización son precisamente una consecuencia del carácter arcaico y poco contextualizado con que suelen ser presentada la factorización a los estudiantes. En este sentido, en el presente apartado se presenta una recopilación de las principales dificultades en el aprendizaje de la factorización señaladas por diversos autores que han realizado investigaciones en este sentido.

Leyton & Rojas (2016) concluyen que es posible evidenciar en los estudiantes el uso de esquemas poco desarrollados a la hora de factorizar, asociados al hecho de que los mismos incluyen vínculos desde el punto de vista algebraico pero faltos de relaciones de tipo geométrico, esto visibiliza el hecho de que no existe, por parte de los estudiantes, una verdadera comprensión del concepto.

En el mismo sentido apunta Butto & Rojano, 2010 (citadas por Sanchez & Del Valle (2016)) quienes señalan que muchas de las dificultades en el aprendizaje del álgebra subyacen de la posición estática de la misma, donde se toma como base su dominio

numérico, entendiéndola como una extensión de la aritmética y dejando de lado, por ejemplo, su interconexión con la geometría. En el mismo sentido, esta dificultad se encuentra asociada al hecho de que las argumentaciones y justificaciones sobre los procesos operatorios asociados al pensamiento algebraico no tienen la relevancia es que debida dentro del proceso.

Por otra parte, Olave & Curicó (2008) mencionan como una de las principales dificultades en el aprendizaje de la factorización, al uso de técnicas propias, asociadas a la pseudocomprensión de la regla a aplicar. Este hecho se encuentra directamente asociado a un intento por memorizar a manera de *recetas* los casos de factorización, de modo tal que el olvidar la regla o parte de ella los lleva a obtener expresiones que no resultan ser equivalentes a la expresión inicial.

Otra de las dificultades señaladas por Olave & Curicó (2008) consiste en el hecho de que gran parte de los estudiantes asocian la *factorización* específicamente con la acción de determinar el *factor común* de los términos que componen la expresión algebraica, lo cual los puede llevar a obtener una factorización incompleta o al hecho de no avanzar en la factorización de la expresión debido a las características de la misma.

En suma, son diversas las dificultades presentes en el aprendizaje de la factorización asociadas a bajos niveles de comprensión frente al concepto, que a la vez son consecuencia del hecho de que durante el proceso no se hacen visibles para los estudiantes las relaciones lógicas existentes entre los productos notables y la factorización, ni entre esta última y las representaciones geométricas.

Ahora bien, para alcanzar el objetivo del presente trabajo de investigación, se hace necesario describir el aprendizaje alcanzado por los estudiantes en cuanto a la factorización, para tal fin, será utilizada la taxonomía SOLO, es por esto que a continuación se incluyen referentes teóricos respecto a la misma.

5.3 NIVELES DE APRENDIZAJE. TAXONOMÍA SOLO

Teniendo en cuenta que el objetivo del presente trabajo relaciona dos categorías, donde la segunda de ellas apunta al aprendizaje, se consideró oportuno utilizar la taxonomía SOLO como una herramienta para evaluar los niveles de aprendizaje alcanzados alrededor de la UD.

Respecto a la taxonomía SOLO, Biggs & Collis (Citados por Huerta, 1999) afirman que:

> en la progresión desde la incompetencia hasta la maestría, los estudiantes muestran una secuencia consistente, o ciclo de aprendizaje, que es generalizable a una gran variedad de tareas y en particular a las tareas escolares». Esta secuencia se refiere a un progreso jerárquico en la complejidad estructural de sus respuestas, cualquiera que sea el modo de funcionar o modo de representación en el que se exprese el aprendizaje. Esta jerarquía, se dice, puede darnos información de hasta dónde ha llegado el aprendizaje en relación con una cierta maestría y con referencia a un modo particular de funcionar y que además puede usarse para clasificar los resultados del aprendizaje dentro de un modo dado. (p.292)

De acuerdo con los autores, la Taxonomía SOLO puede aplicarse para evaluar la calidad del aprendizaje alcanzado por los estudiantes asociando las respuestas dadas por los estudiantes, de acuerdo con sus características, a alguno de los siguientes niveles:

- ***Nivel preestructural:*** Representa el uso, en la respuesta, de aspectos no relevantes del modo de funcionar; es decir, respuestas en las que no se usan aquellos elementos que son necesarios para poder identificar un modo de funcionar.
- ***Nivel uniestructural:*** Respuestas en las que se usa solo un aspecto relevante del modo de funcionar.
- ***Nivel multiestructural:*** Respuestas en las que se procesan diferentes aspectos disjuntos del modo de funcionar, normalmente en una secuencia.
- ***Nivel relacional:*** Respuestas en las que se manifiesta una comprensión integrada de las relaciones entre los diferentes aspectos usados en el modo de funcionar.

- ***Nivel de abstracción extendida:*** Respuestas que hacen uso de principios, hechos, procesos, etc. más abstractos que aquellos que describen el modo de funcionar actual.

6 METODOLOGÍA

6.1 ENFOQUE Y ALCANCE

La investigación se enmarca en un enfoque cualitativo de acuerdo con lo descrito por Taylor & Bogdan (1989), quienes afirman que en la metodología cualitativa el diseño de la investigación es flexible y las personas que participan de la investigación no se reducen a variables, sino que se consideran como un todo que hace parte de una situación en medio de un contexto, además, en esta metodología de investigación, el investigador no define sus acciones con el objetivo de encontrar una verdad absoluta, sino con la intención de obtener una comprensión detalladas de la perspectiva de otras personas.

Adicionalmente, la investigación es de tipo descriptivo puesto que de acuerdo con lo descrito por Hernández, Fernández y Baptista (2006), las investigaciones de este tipo buscan especificar las propiedades o las características de un proceso, de una comunidad o de cualquier fenómeno que se encuentre sometido a análisis, así mismo, en un estudio descriptivo se recoge información de una o varias variables.

En consecuencia, la intención y el diseño de la investigación responde a las características descritas para un enfoque cualitativo de tipo descriptivo en la medida en que se hace necesario abordar información de tipo cualitativa al analizar las representaciones que den cuenta de los argumentos de los estudiantes en torno a situaciones que requieren de la descomposición en factores de expresiones algebraicas.

6.2 CONTEXTO Y POBLACIÓN

El Gimnasio Villa Fontana es una institución educativa de carácter privado que se encuentra ubicada en el norte de la ciudad de Tunja, Boyacá, y que cuenta aproximadamente con 300 estudiantes, quienes, en su mayoría pertenecen a un estrato socio-económico alto. La institución lleva aproximadamente 20 años de funcionamiento, sin embargo, la sección de secundaria lleva mucho menos tiempo, pues la primera promoción de bachilleres es egresada del año 2015. Pese a la limitada cantidad de promociones, la institución se encuentra catalogada como una de las mejores de la ciudad

en relación al desempeño de sus estudiantes en las pruebas saber. Cada grupo no sobrepasa los 20 estudiantes por política de la institución, y los estudiantes asisten en doble jornada.

Para el año lectivo 2019, año en que se realizó la aplicación de la Unidad Didáctica, la institución contaba con un solo grupo de grado octavo, del cual hacen parte 18 estudiantes que tienen entre 12 y 14 años de edad, el cual constituirá la población para la investigación.

6.3 UNIDAD DE TRABAJO

La unidad didáctica y consecuentemente, todos los instrumentos que componen el presente trabajo de investigación, fueron aplicados en los dieciocho estudiantes que cursaban grado octavo en el Gimnasio Villa Fontana durante el año 2019. De estos dieciocho estudiantes, catorce asistieron a la totalidad de las sesiones. Entre estos catorce estudiantes, fueron seleccionados de forma aleatoria cinco, que conformarían la unidad de trabajo.

Para la selección, a cada uno de los nombres de los estudiantes se le asignó un número entre el 1 y el 14, posteriormente estos números se escribieron en papeles, de los cuales fueron escogidos cinco, esto dio como resultado a los cinco estudiantes cuyos procesos fueron tenidos en cuenta en la etapa de análisis de la información del presente trabajo de investigación. Finalmente, los nombres de los estudiantes seleccionados fueron reemplazados por un color entre los siguientes: Amarillo, Azul, Rojo, Blanco y Negro.

6.4 UNIDAD DE ANÁLISIS

La presente investigación tiene por unidad de análisis a la relación existente entre la argumentación como estrategia y el aprendizaje de la factorización en grado octavo.

Las categorías, subcategorías e indicadores fueron utilizadas para codificar y analizar la información (Ver tabla 1). Estas categorías y subcategorías se encuentran directamente relacionadas en el marco teórico. Por ejemplo, los elementos del modelo argumentativo se relacionan directamente con los elementos del modelo de Toulmin descritos por Pinochet (2015), así mismo los niveles de argumentación son acordes a la definición dada por Erduran (citado por Tamayo, 2012), los tipos de representación hacen referencia a los

descritos por Merino (2012) y los indicadores para el nivel de aprendizaje alcanzado se dan en los términos de la taxonomía SOLO propuesta por Biggs y Collis (Citados por Huerta, 1999).

Tabla 1.Operacionalización de las variables

	Subcategoría	Indicadores
Argumentación	Modelo argumentativo (de acuerdo con el modelo de Toulmin descrito por Pinochet (2015)).	Datos: Hechos de los que se dispone para dar fundamento a la conclusión.
		Garantía: Elementos que justifican el paso de los datos a la conclusión.
		Sustento: Respaldo teórico que apoya la garantía.
		Calificador modal: Elementos que explicitan el grado de certeza o incertidumbre.
		Condiciones de refutación: Descripciones de situaciones bajo las cuales la conclusión no es válida.
		Conclusión: Proposición final que da respuesta a la pregunta.
	Niveles de argumentación. (De	Nivel 1: Se identifica solo una descripción de los datos.

	acuerdo con Erduran (citado por Tamayo, 2012))	Nivel 2: Se identifican datos y conclusión.
		Nivel 3: Se identifican datos, conclusión y garantía.
		Nivel 4: Se identifican datos, conclusión y garantía que incluye calificadores modales y sustento.
		Nivel 5: El argumento incluye: Datos, conclusiones, garantía, sustento, calificadores modales y condiciones de refutación.
Taxonomía SOLO (de acuerdo con Biggs y Collis (Citados por Huerta, 1999).	Nivel Preestructural	No se usan los elementos necesarios para resolver la situación.
	Nivel Uniestructural	Se usa solo uno de los aspectos relevantes.
	Nivel Multiestructural	Se identifican aspectos disjuntos del modo de funcionar.
	Nivel Relacional	Se identifica una comprensión integrada de las relaciones entre los diferentes aspectos.

	Nivel de abstracción extendida	En la respuesta se hace uso de principios, hechos, procesos, más abstractos.

Fuente: Elaboración propia.

6.5 TÉCNICAS Y FUENTES DE RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

De acuerdo con Cook & Reichardt (1986) al abordar un problema que requiera una evaluación dentro del mismo, es apropiado utilizar instrumentos que resulten accesibles y que pueden corresponder a una combinación entre métodos cuantitativos y cualitativos.

En ese orden de ideas, de acuerdo con los objetivos de la presente investigación, lo más apropiado fue diseñar talleres que en la etapa inicial y en la etapa de la evaluación cumplieran con el objetivo de servir de guía para el desarrollo de las actividades planteadas y que a la vez hicieran las veces de instrumentos de recolección de información. En ese orden de ideas, estos instrumentos fueron todos de tipo estructurado y de lápiz y papel.

Inicialmente, los estudiantes respondieron un instrumento diagnóstico que hizo parte de la actividad de exploración de la UD y que tuvo dos objetivos, por una parte, permitió identificar el nivel argumentativo de cada estudiante y adicionalmente brindó información respecto al aprendizaje del mismo en torno a la factorización, este instrumento se encuentra como **Anexo 1** y se compone de diferentes preguntas, abiertas en su mayoría.

Finalmente, se aplicó un instrumento final, que aparece como **Anexo 6** y que permitió emitir un juicio valorativo respecto a la existencia, o no, de un avance en la comprensión de la temática y de la misma forma se evaluó la posible evolución del nivel argumentativo de los estudiantes.

6.6 DISEÑO METODOLÓGICO

Etapa inicial: La primera etapa de la investigación corresponde a la aplicación del instrumento diagnóstico y el análisis de la información recolectada mediante el mismo. A

partir de este cuestionario se determinarán, el nivel de argumentación y el nivel de aprendizaje de la factorización de forma previa a la intervención.

Diseño de la Unidad Didáctica (UD): De acuerdo con la información recolectada y analizada en la etapa inicial, se diseñó la UD, la cual recopiló diversas actividades mediante las cuales se propiciaron espacios argumentativos en torno a la factorización.

Aplicación de la Unidad Didáctica): Se aplicó la unidad didáctica para la totalidad de los estudiantes de grado octavo, buscando generar un avance, tanto en el nivel de aprendizaje de los estudiantes en cuanto a la factorización, como en su nivel argumentativo (Ver anexo 1).

De esta forma, la unidad didáctica contó a su vez con tres etapas, inicialmente la actividad de ubicación, la cual tenía por objetivo la recopilación de información suficiente para determinar el nivel de aprendizaje de la factorización y el nivel argumentativo inicial de cada uno de los estudiantes. Consistió en la aplicación de una prueba escrita que cumplió la labor de instrumento diagnóstico y que se encuentra como anexo 1.

La etapa de desubicación consistió en la aplicación de tres actividades que tenían por objetivo brindar a los estudiantes herramientas que les permitieran argumentar de mejor manera frente a situaciones que involucraran factorización. La primera de estas actividades se diseñó con base en el método de factorización "caja de polinomios" presentado por Soto, Mosquera & Gómez (2005) y la segunda involucró las tabletas algebraicas propuestas y descritas por Salazar, Jiménez & Mora (2013). En la última actividad aplicada en la etapa de intervención se utilizó el dominó de expresiones algebraicas, que se encuentra como anexo 4 y tenía como objetivo la comprensión de la reversibilidad de la factorización. Así, las 3 actividades giraron en torno al uso del material manipulativo para dotar de significado al proceso de factorización y el trabajo en grupos. Al final de cada actividad, los estudiantes resolvieron, de forma individual los talleres que aparecen como anexo 2, anexo 3 y anexo 5 respectivamente.

Finalmente, la etapa de reenfoque de la UD, los estudiantes resolvieron la evaluación final que se encuentra como anexo 6, cuyo objetivo era determinar el nivel de aprendizaje y argumentación de los estudiantes tras la aplicación de la unidad didáctica.

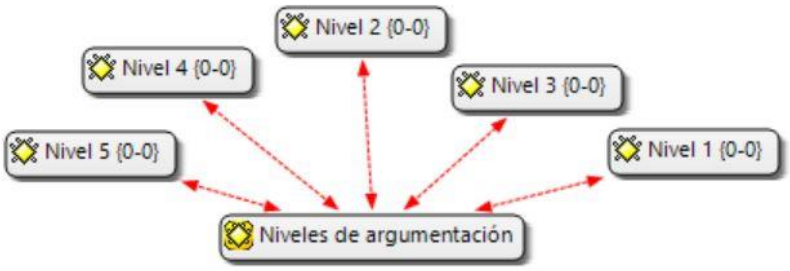
Análisis de la información: Se seleccionó la información proveniente de los estudiantes que hacen parte de la unidad de trabajo, se organizó y fue analizada haciendo uso del software Atlas.ti de acuerdo con el plan de análisis establecido.

6.7 PLAN DE ANÁLISIS

Una vez seleccionada la unidad de trabajo, de acuerdo con los criterios descritos en la unidad de análisis del presente documento, los cuestionarios respondidos por ellos fueron digitalizados y guardados como documentos primarios dentro de la unidad hermenéutica en Atlas.ti., donde se establecieron como códigos los correspondientes a los indicadores que se presentaron en la Tabla 1.

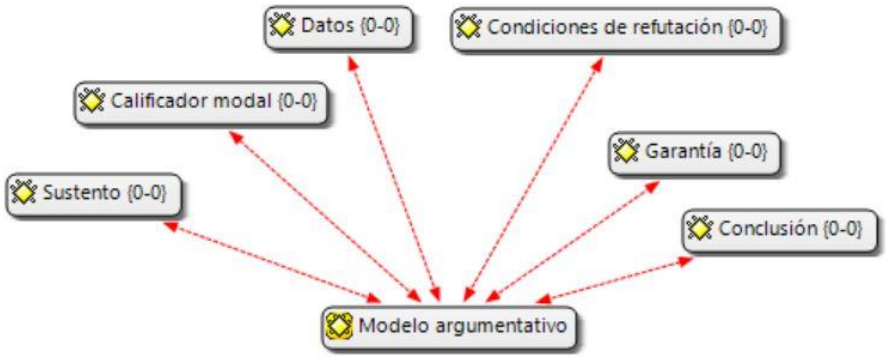
En Atlas.ti se establecieron las familias de códigos de acuerdo con las categorías y subcategorías, como se muestra en las siguientes figuras:

Figura 1. Familia de códigos para niveles de argumentación



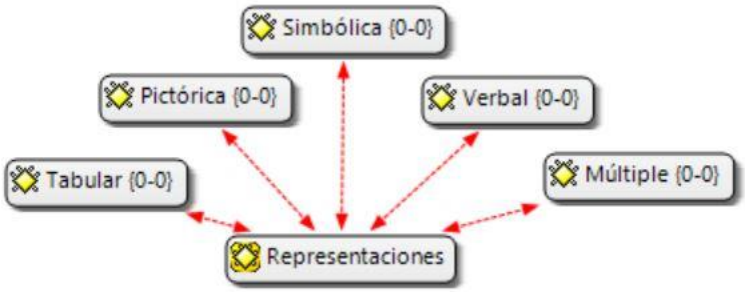
Fuente: Elaboración propia.

Figura 2.Familia de códigos para el modelo argumentativo



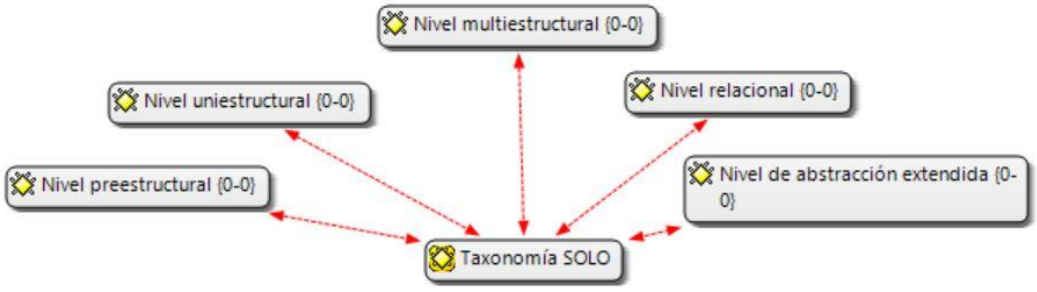
Fuente: Elaboración propia.

Figura 3. Familia de códigos para representaciones



Fuente: Elaboración propia.

Figura 4. Familia de códigos para la taxonomía SOLO



Fuente: Elaboración propia.

De acuerdo con esto se realizó la codificación sobre las representaciones usadas por los estudiantes para argumentar en el instrumento inicial y el instrumento final de la unidad didáctica. Es importante mencionar que a pesar de que la unidad didáctica incluyó momentos en los cuales se propiciaron espacios argumentativos mediante la oralidad, en el análisis de los resultados se tuvieron en cuenta únicamente los argumentos dados de forma escrita.

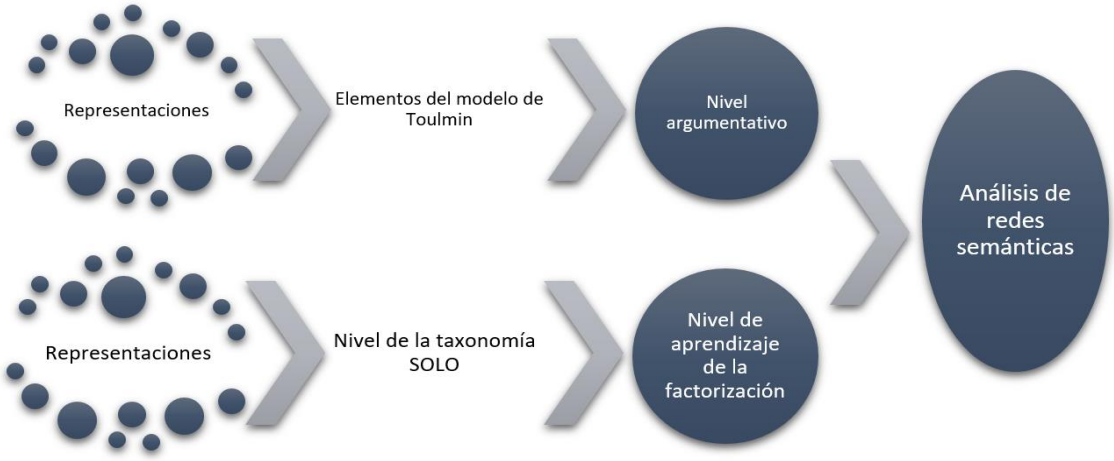
Con respecto a la información recolectada con el instrumento inicial, se codificaron en Atlas.ti las representaciones usadas por los estudiantes con los elementos del modelo argumentativo (datos, garantía, sustento, calificador modal, condiciones de refutación) que se hicieron presentes en las mismas, de modo tal que se pudiera asociar también un el nivel argumentativo mostrado en cada uno de los argumentos dados por los estudiantes.

Por otra parte, para identificar el nivel de aprendizaje de la factorización, se asoció cada una de las respuestas dadas por los estudiantes a un determinado nivel de la taxonomía SOLO, de acuerdo con los elementos que se hicieran presentes en cada una de ellas. De esta forma, el instrumento inicial permitió identificar el nivel argumentativo y el nivel de aprendizaje la factorización de cada uno de los estudiantes que constituyeron la unidad de trabajo.

De forma similar se realizó el análisis de la información recolectada con el instrumento final (anexo 6) de la unidad didáctica, de modo tal que se estableció el nivel argumentativo y el nivel de aprendizaje de cada uno de los estudiantes antes y después de la aplicación de la UD.

La figura 5, busca representar el proceso de análisis de la información que se llevó a cabo tanto con la información recolectada en la etapa inicial, como con la información recolectada en la etapa final. Posterior a esto, se llevó a cabo la comparación entre la información de las redes semánticas obtenidas en ambas etapas, para finalmente llegar a la descripción de la incidencia de la argumentación, como estrategia, en el aprendizaje de la factorización.

Figura 5. Análisis de la información en cada etapa



Fuente: Elaboración propia.

7 ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En esta sección se presenta una descripción de los resultados obtenidos cada una de las etapas del proyecto.**RESULTADOS EN LA PRUEBA DIAGNÓSTICO**

A continuación, se presenta un resumen de los niveles de argumentación evidenciados tras el análisis de la prueba diagnóstico, teniendo en cuenta que cada cuestionario constaba de las 50 preguntas planteadas (10 para cada uno de los estudiantes) 13 no fueron respondidas, consecuentemente se categorizaron como "sin respuesta" y no fueron asociadas a ningún otro código, pero son tenidas en cuenta para el cálculo de los porcentajes que se indican a continuación:

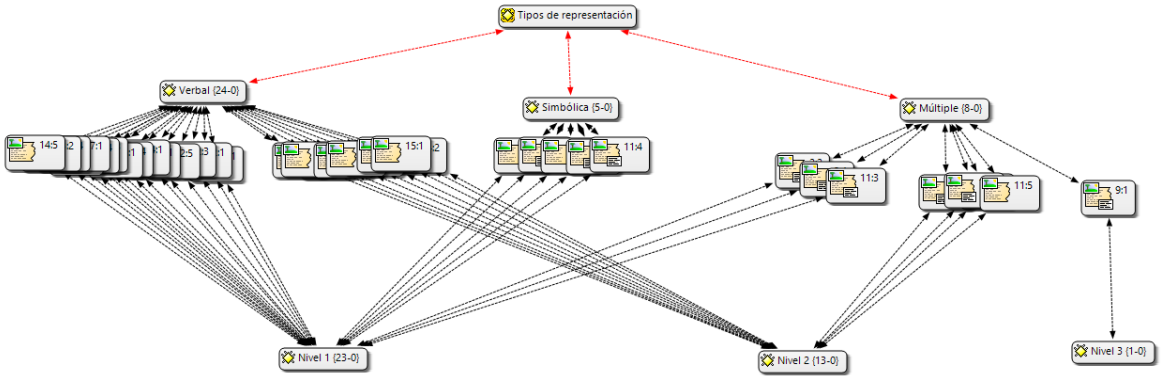
Tabla 2. Niveles de argumentación alcanzados por los estudiantes en la prueba diagnóstico

Nivel de argumentación	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Nivel 3**
Porcentaje de respuestas	46%	26%	2%

Fuente: Elaboración propia.

Respecto a la relación entre las representaciones usadas y el nivel de argumentación evidenciado en las respuestas dadas por los estudiantes en la prueba diagnóstico se construyó la red semántica que se muestra a continuación en la Figura 6.

Figura 6. Tipos de representación y nivel de argumentación en la prueba diagnóstico

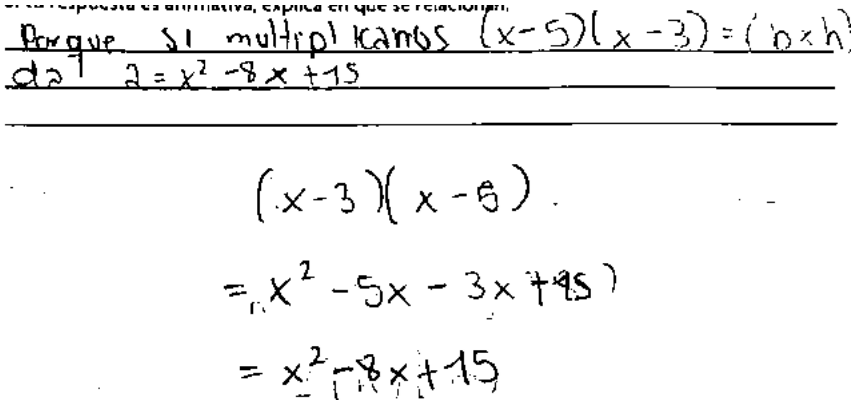


Fuente: Elaboración propia.

Tal y como se evidencia, en la prueba diagnóstico los estudiantes solo hicieron uso de 3 tipos de representación, la verbal que fue la más recurrente, la simbólica cuyo uso se evidenció en 5 ocasiones y la múltiple que se hizo visible, precisamente, mediante el uso de representaciones que combinaban el lenguaje verbal y las representaciones simbólicas propias del lenguaje algebraico.

Como se puede observar en la figura 6, de las 24 ocasiones en las que los estudiantes hicieron uso de representaciones verbales, en más de un 60% se encontraron asociadas a un nivel 1 de argumentación, este mismo nivel estuvo asociado a la totalidad de las representaciones simbólicas realizadas, mientras que el nivel 3 de argumentación, que solo se presentó en una de las respuestas, la cual fue presentada por Blanco en el literal b de la tercera pregunta del cuestionario, estuvo asociada a una representación múltiple. Un ejemplo de dicho argumento se muestra a continuación en la figura 7.

Figura 7. Representación múltiple relacionada con un argumento de nivel 3

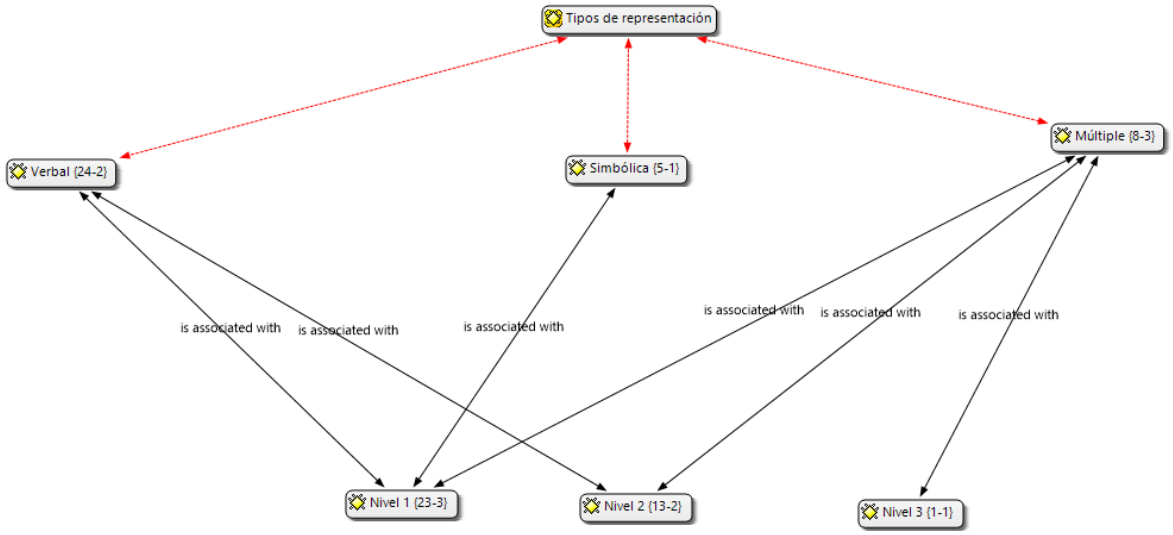


Fuente: Tomada de las respuestas de Blanco.

Este argumento surgió cuando Blanco buscaba explicar la relación existente entre las dos gráficas, y se categoriza en el nivel 3 en la medida en que incluye, como garantía para su afirmación, a la fórmula del área de un rectángulo y a la vez realiza el producto entre los binomios que representaban las dimensiones de una de las figuras para demostrar su equivalencia con la expresión inicial.

El esquema de la figura 6 puede simplificarse obteniendo la figura 8, en donde se puede evidenciar con mayor claridad que las representaciones verbales estuvieron asociadas al nivel 1 y al nivel 2 de argumentación y que las representaciones simbólicas estuvieron asociadas únicamente al nivel 1 de argumentación, mientras que las representaciones múltiples construidas por los estudiantes estuvieron asociadas a cualquiera de los 3 niveles evidenciados en la prueba.

Figura 8. Tipo de representación y nivel de argumentación en la prueba



Fuente: Elaboración propia.

De los 37 argumentos analizados, 23 fueron categorizados en el nivel más bajo de argumentación, el cual indica que en el argumento ni siquiera es posible reconocer con claridad la existencia de unos datos y una conclusión derivada de los mismos. Esto ratifica la dificultad de los estudiantes para argumentar frente a situaciones que involucran factorización.

A continuación, se presentan dos argumentos que fueron categorizados en el nivel 1 y que además ponen en evidencia la pseudocomprensión de la regla a aplicar mencionada por Olave & Curicó (2008). El primero de estos argumentos fue presentado por Rojo en el literal b de la primera pregunta del cuestionario, donde la tarea consistía en identificar cuales parejas de monomios podían corresponder a las dimensiones de un terreno rectangular, dada su área también en forma de monomio.

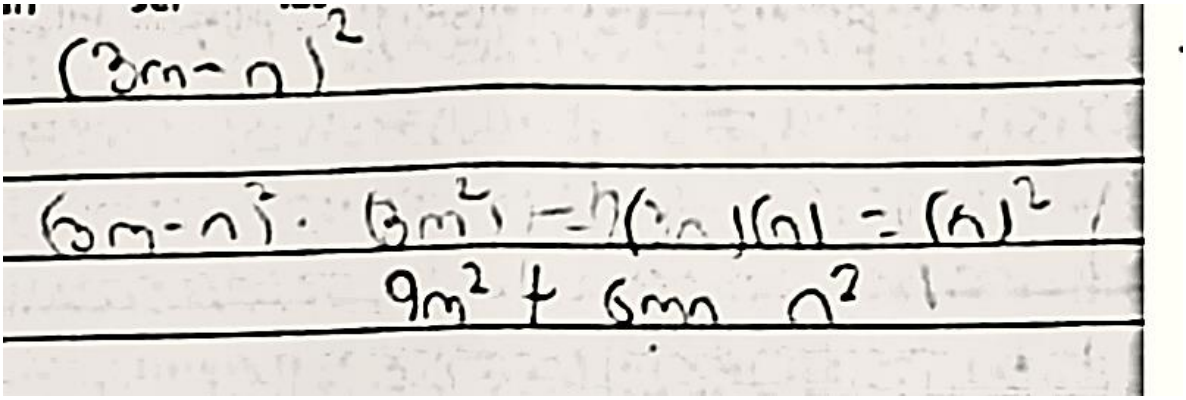
Ante la situación, Rojo afirma:

La razón la tiene Pedro, ya que al factorizar mediante factor común se obtienen esos resultados.

Este razonamiento se asocia con una la pseudocomprensión del concepto en la medida en que Rojo afirma que se puede factorizar mediante *factor común* un monomio, cayendo así en un error que le impide argumentar de forma correcta como consecuencia de una memorización incorrecta de los casos de factorización.

Otro de los argumentos que permite evidenciar esta situación es presentado por Amarillo ante la situación del literal b del segundo punto del cuestionario y se muestra a continuación en la figura 9.

Figura 9. Respuesta que evidencia la pseudocomprensión del concepto



Fuente: Tomada de las respuestas de Amarillo.

En esta respuesta se evidencia la pseudocomprensión del caso de factorización, asociada a la memorización del mismo como un conjunto de reglas, en la medida en que el estudiante comete errores al ubicar los signos, escribiendo, por ejemplo, el signo igual entre los términos del trinomio u omitiendo el signo que debería separar los últimos dos términos del trinomio que aparece en el último renglón cambiando así por completo el significado de la expresión.

Ahora bien, respecto al nivel de aprendizaje demostrado por cada uno de los estudiantes en la prueba diagnóstico, la siguiente tabla describe el porcentaje de respuestas que fueron asociadas a cada uno de los niveles. De la misma forma que sucedió en la tabla de los niveles de argumentación, el 26% fue tenido en cuenta dentro del porcentaje total, pero fueron categorizados como “sin respuesta”.

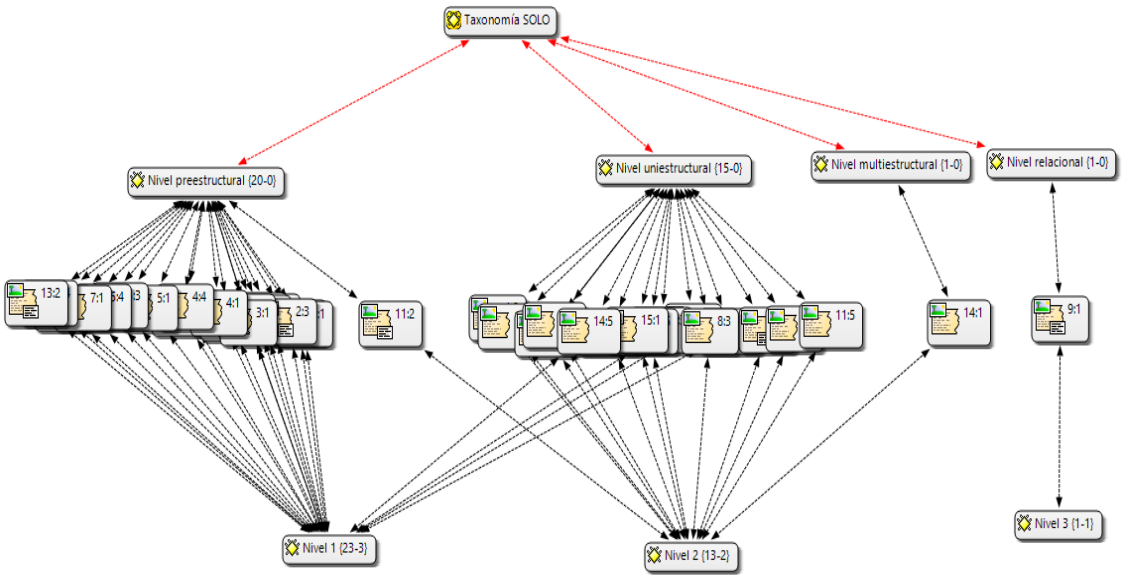
Tabla 3.Nivel de aprendizaje alcanzado por los estudiantes en la prueba diagnóstico

Nivel de aprendizaje	Preestructural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional
Porcentaje de respuestas	40%	30%	2%	2%

Fuente: Elaboración propia.

De acuerdo a la categorización de la taxonomía SOLO se construyó la red semántica de la figura 10, en la cual se vincula cada uno de los argumentos analizados con el nivel argumentativo y el nivel de comprensión que, de acuerdo con los indicadores de la tabla 1, le corresponde.

Figura 10. Relación entre el nivel argumentativo y el nivel de aprendizaje en la prueba diagnóstico



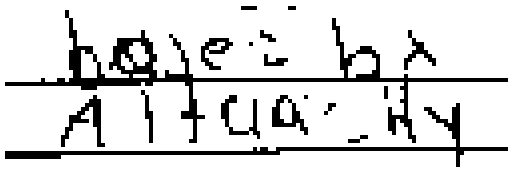
Fuente: Elaboración propia.

En esta red es fácilmente visible que la gran mayoría de las respuestas dieron cuenta de un nivel de comprensión preestructural o uniestructural, mientras que el nivel multiestructural y el nivel relacional se presentaron una sola vez cada uno. De la misma forma, es notorio que la mayoría de argumentos que se categorizaron en el nivel 1, estuvieron a su vez

asociados a un nivel de comprensión preestructural, mientras que el nivel relacional (siendo el nivel de comprensión más alto alcanzado en la prueba diagnóstico) fue demostrado en el argumento de nivel 3.

Una respuesta categorizada en el nivel más bajo de argumentación y a su vez en el nivel más bajo de aprendizaje, fue la presentada por Azul en el literal c de la primera pregunta de la prueba, esta se muestra a continuación en la figura 11.

Figura 11. Respuesta de nivel de argumentación 1 y nivel preestructural de aprendizaje



Fuente: Tomada de las respuestas de Azul.

En esta representación, de tipo simbólica, se evidencia una comprensión errónea del enunciado y un desacertado intento por responderlo, acá se hace presente un error categorizado por Saucedo, G. (2007) como *datos mal utilizados*, debido a que en el mismo se hace uso de datos extraños o se olvidan datos necesarios para la resolución del problema. En este caso, Rojo no tuvo en cuenta la expresión $15x^2$ que representaba el área de la figura, en torno a la cual giraba la expresión inicial. Consecuentemente, se asoció a un nivel preestructural debido a que Rojo no identificó elementos fundamentales respecto a la forma de funcionar de la situación, y corresponde a un primer nivel de argumentación pues no se evidencia la existencia de datos y conclusión dentro de la representación.

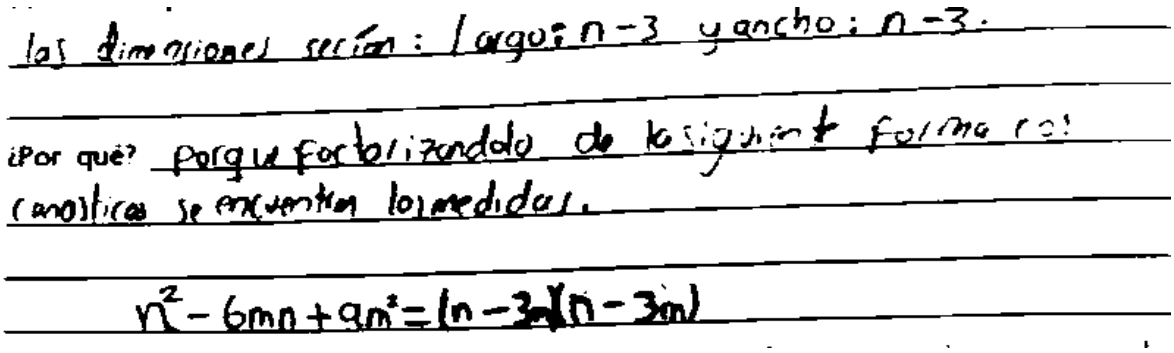
Otra de las representaciones en las que se hace visible la relación entre un bajo nivel de aprendizaje y un bajo nivel de comprensión, es la presentada por Amarillo frente al literal 1 de la primera pregunta del cuestionario, donde al preguntarle si cierto trinomio podía o no representar el área de un cuadrado, Amarillo responde:

Si, porque las dos dimensiones deben dar como resultado una 3° variable, ya que, al operarlos y sumarlos el resultado será así.

Esta respuesta da cuenta de un nivel preestructural de aprendizaje frente a l factorización, pues en su respuesta no establece una relación entre la expresión factorizada y las dimensiones, ni menciona la importancia de que al factorizar las dimensiones sean iguales para garantizar que se trate de un cuadrado.

De forma particular se evidencia también la existencia de un argumento que a pesar de estar categorizado en el nivel 2, demuestra un nivel de comprensión preestructural. Este corresponde a la respuesta dada por Negro al literal b del segundo punto del cuestionario y se muestra a continuación en la figura 12.

Figura 12. Respuesta con un nivel de argumentación 2 y un nivel preestructural de aprendizaje



Fuente: Tomada de las respuestas de Negro.

En la figura 12 se evidencia que el estudiante relaciona la factorización como método para obtener las dimensiones de una figura rectangular, dada su área en forma de expresión algebraica, sin embargo, comete un error en los signos de la expresión final y consecuentemente se asocia con un nivel de comprensión preestructural frente a la factorización. En ese orden de ideas, a pesar de que el argumento presentado es de nivel 2, dado que se evidencia con claridad la existencia de unos datos y una conclusión, se asoció con el nivel de comprensión más bajo de la taxonomía SOLO.

Ahora bien, respecto al argumento que se asoció al nivel 2 de argumentación y al nivel multiestructural de comprensión, corresponde a la respuesta dada por Rojo ante el literal a de la segunda pregunta del cuestionario:

La expresión si puede ser de un cuadrado porque al factorizar las expresiones resultantes son iguales, y esta es la principal característica de un cuadrado.

Pese a la brevedad de la respuesta, es posible evidenciar que Rojo expresa con claridad la relación entre los datos del enunciado y la conclusión dada, por tal razón se categoriza en el nivel 2 de argumentación. Por otra parte, Rojo reconoce dos elementos fundamentales para la situación planteada, por una parte, la necesidad de factorizar para determinar las dimensiones de la figura, y, adicionalmente, el requerimiento de que las dimensiones sean equivalentes para asociar el área dada a un cuadrado, es por esto que evidencia un nivel multiestructural de comprensión.

Finalmente, la respuesta que se asoció con el nivel 3 de argumentación y que se presentó con anterioridad en la figura 7, denota un nivel relacional en la medida en que Blanco relaciona el área dada, con la expresión factorizada y verifica la equivalencia entre las mismas utilizando el procedimiento para calcular el área de una figura rectangular dadas sus dimensiones.

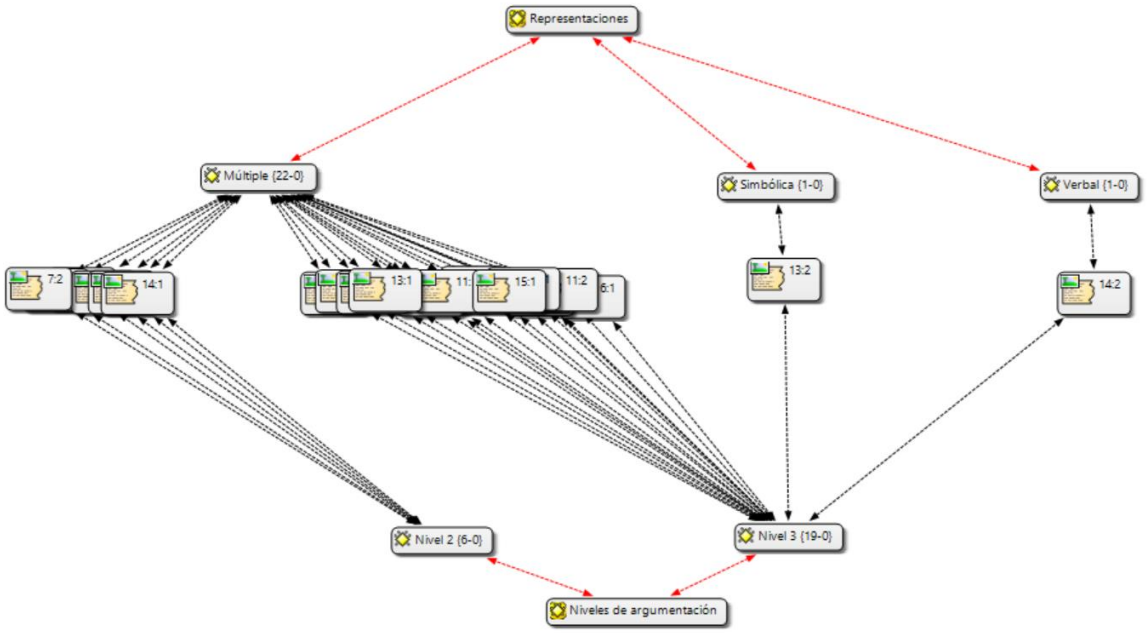
Consecuentemente, y tras el análisis de la información recolectada con el instrumento inicial, es visible que la mayoría de los estudiantes se ubican en los niveles más bajos de comprensión frente a la factorización, lo cual ratifica la conclusión del estudio de Leyton & Rojas (2016), quienes exponen las dificultades que existen para los estudiantes al establecer relaciones entre el punto de vista algebraico y el punto de vista geométrico de la factorización, lo cual indica que no existe una verdadera comprensión del concepto. Así mismo, el hecho de que estos bajos niveles de comprensión se encuentren asociados, en la gran mayoría de las situaciones, con bajos niveles de argumentación, permite dilucidar la relación existente entre la comprensión del concepto y la habilidad para argumentar en situaciones que lo involucran.

7.2 RESULTADOS EN LA PRUEBA FINAL

La siguiente tabla, muestra el nivel de argumentación demostrado por los estudiantes en las representaciones que surgieron como respuesta a los interrogantes planteados en la prueba

final. A diferencia de la prueba inicial, en esta ninguno de los participantes dejó preguntas sin responder, así que las 25 respuestas (5 de cada estudiante) pudieron asociarse con un nivel de argumentación. La figura 13, muestra la relación entre el tipo de representación utilizada en cada respuesta y el nivel de argumentación alcanzado en la misma.

Figura 13. Relación entre el tipo de representación y el nivel de argumentación en la prueba final



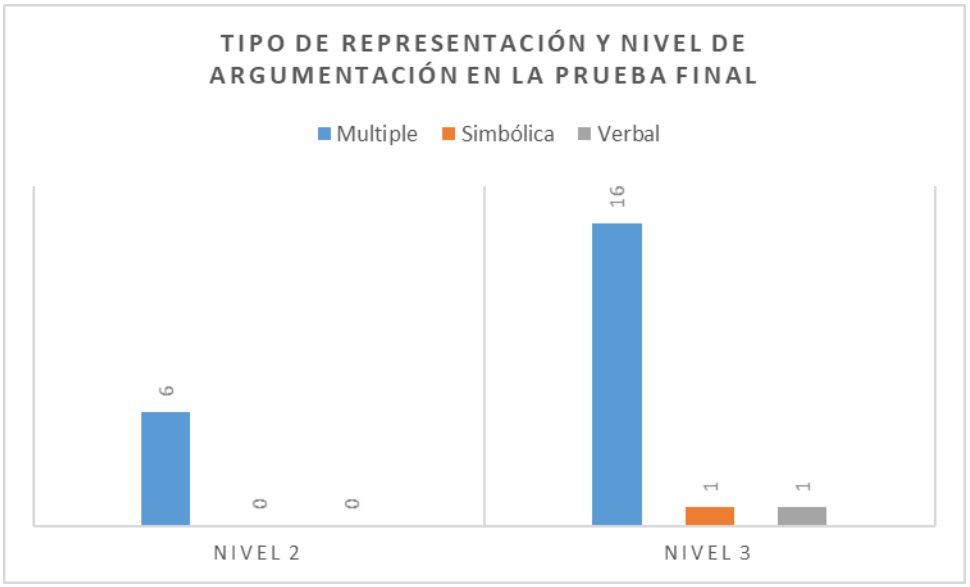
Fuente: Elaboración propia.

De esta forma, se evidencia que, en la prueba final, los estudiantes hicieron uso de 3 tipos de representaciones, la verbal la simbólica y la múltiple, pero fue la múltiple la más recurrente, estando presente en más del 90% de las respuestas. La representación múltiple estuvo compuesta por representaciones verbales, simbólicas y/o pictóricas. Por su parte, las representaciones netamente simbólicas o verbales se visualizaron solamente una vez cada una.

La figura 14, permite evidenciar la cantidad de veces que se hizo presente cada uno de los 3 tipos de representación y el nivel argumentativo con el cual estuvieron asociadas. En este sentido se evidencia que, de las respuestas presentadas, cerca del 66% fueron categorizadas

en el tercer nivel de argumentación y el porcentaje restante se asociaron con un nivel 2 de argumentación.

Figura 14. Tipo de representación y nivel argumentativo en la prueba final

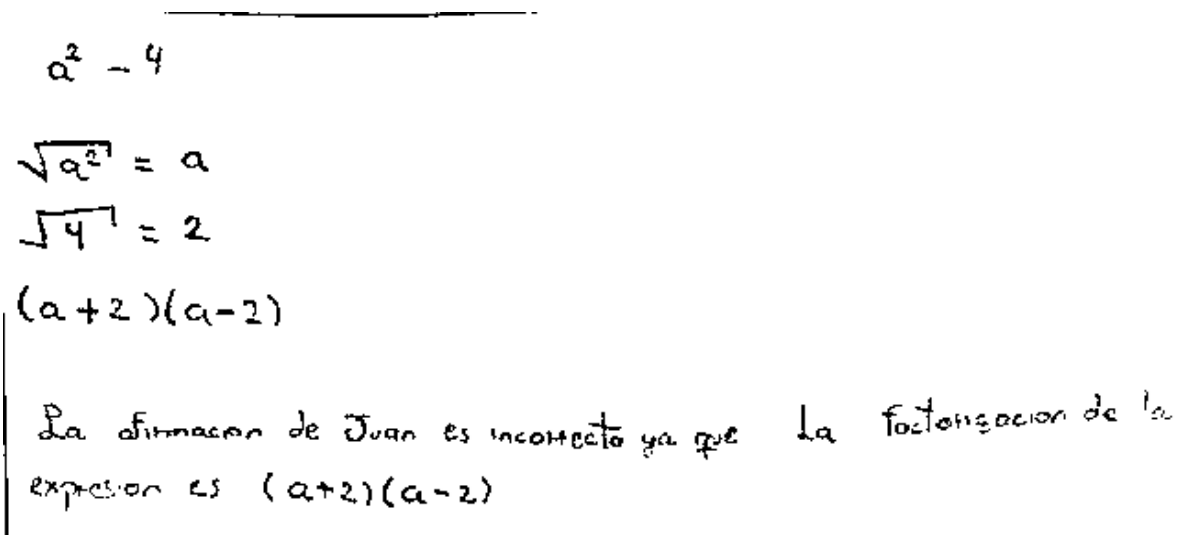


Fuente: Elaboración propia.

Entre las representaciones múltiples que se categorizaron en el nivel 2 de argumentación, se encuentra la respuesta ofrecida por Rojo a la segunda pregunta de la prueba, en la cual se

les cuestionaba respecto a si la expresión $(a-2)(a-2)$ corresponde a la factorización de a^2-4. La respuesta de Rojo aparece a continuación en la figura 15.

Figura 15. Representación múltiple asociada con el nivel 2 de argumentación



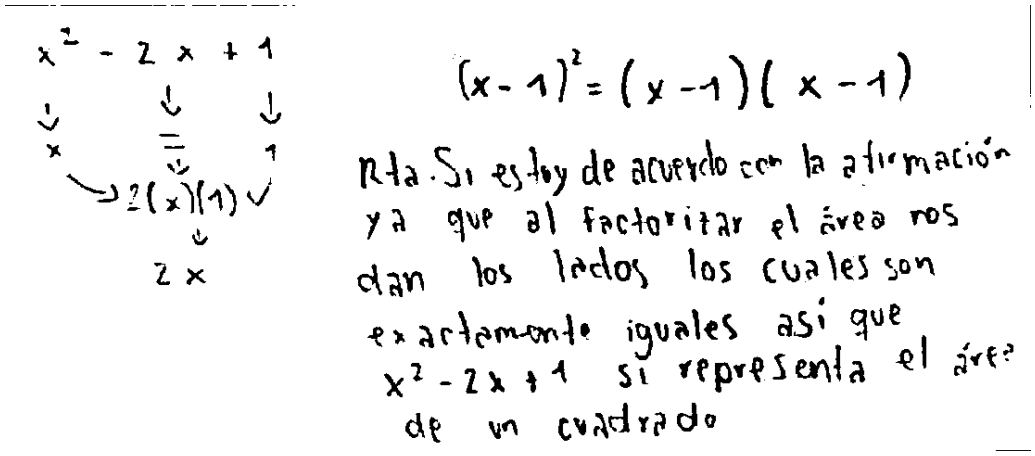
Fuente: Tomada de las respuestas de Rojo.

La representación se considera múltiple pues combina la representación simbólica propia del lenguaje algebraico con una representación verbal mediante la cual expresa su conclusión ante el enunciado. La representación simbólica utilizada por Rojo dentro de la representación múltiple, da cuenta de que el estudiante consideró más pertinente hacer uso del caso de factorización mediante la memorización de la regla, que, por ejemplo, verificar la pertinencia de la factorización mediante la reversibilidad de la misma. Por tal razón el argumento fue categorizado como de nivel 2, en la medida en que, a pesar de que en la representación se evidencia con claridad la existencia de unos datos y una conclusión respecto a los mismos, Rojo no presentó ninguna garantía que permitiera verificar la certeza de su argumento.

Otras representaciones múltiples fueron las que presentaron Blanco, Amarillo, Negro y Azul como respuesta a la primera pregunta del cuestionario final, Todas las respuestas son correctas, pero son sustancialmente distintas en la medida en que la primera de ellas fue categorizada como nivel 2, mientras que las otras se asociaron con un nivel 3. Debido a que

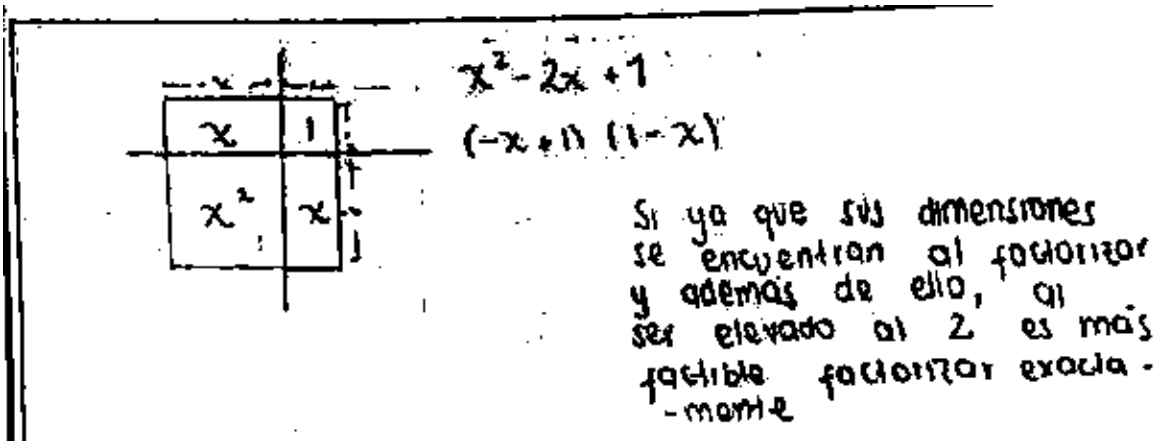
los niveles están categorizados de acuerdo con Erduran (citado por Tamayo, 2012), esto implica que en la representación de Blanco no se incluyó una garantía que respaldara el paso de los datos a la conclusión, a diferencia de las otras 3. A continuación, se muestran la representación de Blanco en la figura 16 y la representación de Amarillo en la figura 17.

Figura 16. Representación donde se evidencia un nivel 2 de argumentación



Fuente: Tomada de las respuestas de Blanco.

Figura 17. Representación donde se evidencia un nivel 3 de argumentación



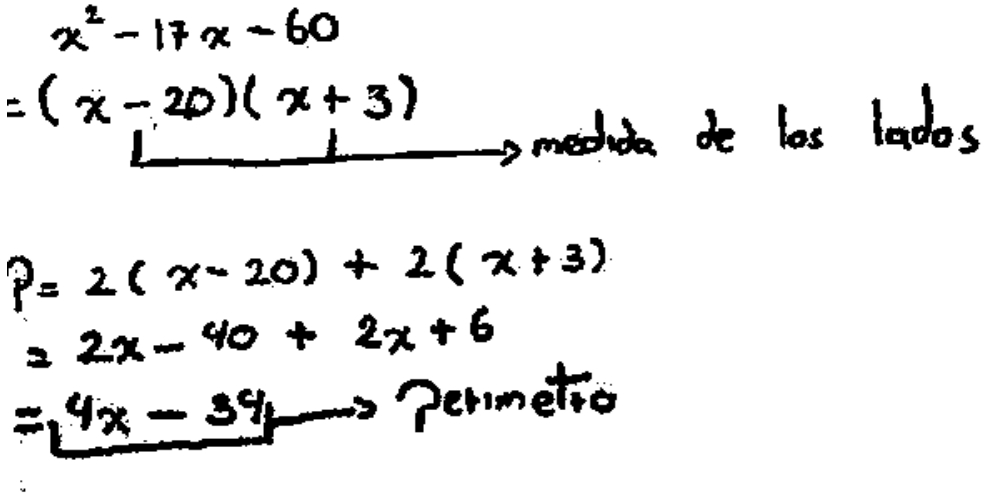
Fuente: Tomada de las respuestas de Amarillo.

Al comparar estas dos representaciones se evidencia que Blanco argumentó con base en las reglas de caso de factorización, mientras que Amarillo hizo uso de la caja de polinomios de Soto, Mosquera & Gómez (2005), que fue utilizada en una de las actividades de

intervención de la UD. La diferencia entre el nivel de argumentación asociado a cada representación, radica en el hecho de que, al hacer uso de la caja de polinomios, Amarillo logra construir una representación pictórica mediante la cual demuestra que el trinomio inicial se puede representar gráficamente como un cuadrado. Caso contrario a lo que sucede con Blanco, quien mediante la expresión simbólica del caso trinomio cuadrado perfecto, no logra presentar una garantía que justifique la equivalencia entre el trinomio inicial y su factorización. Las representaciones construidas por Azul y por Negro frente a esta pregunta, son similares a la representación de Amarillo, y por tal razón se asociaron al mismo Nivel de argumentación.

La representación simbólica que se asoció con un nivel 3 de argumentación, fue construida por Rojo para dar solución al segundo punto de la prueba, en el cual se cuestionaba a los estudiantes respecto a sí era posible determinar el perímetro de una figura rectangular, cuya área estaba dada en forma de un trinomio. Esta se muestra a continuación en la figura 18.

Figura 18. Representación simbólica asociada al nivel 3 de argumentación



Fuente: Tomada de las respuestas de Rojo.

En la figura 14 se evidencia como la representación de Rojo, a pesar de ser netamente simbólica, logra explicar con claridad el procedimiento mediante el cual parte de la expresión que representa el área, encuentra las dimensiones de la figura, y luego obtiene el

perímetro de la misma. En este caso el procedimiento algebraico consiste en una garantía para la conclusión a la que llega.

Ahora bien, la única representación verbal que se hizo presente en las respuestas, también fue dada por Rojo, quien frente a la cuarta pregunta de la prueba final respondió:

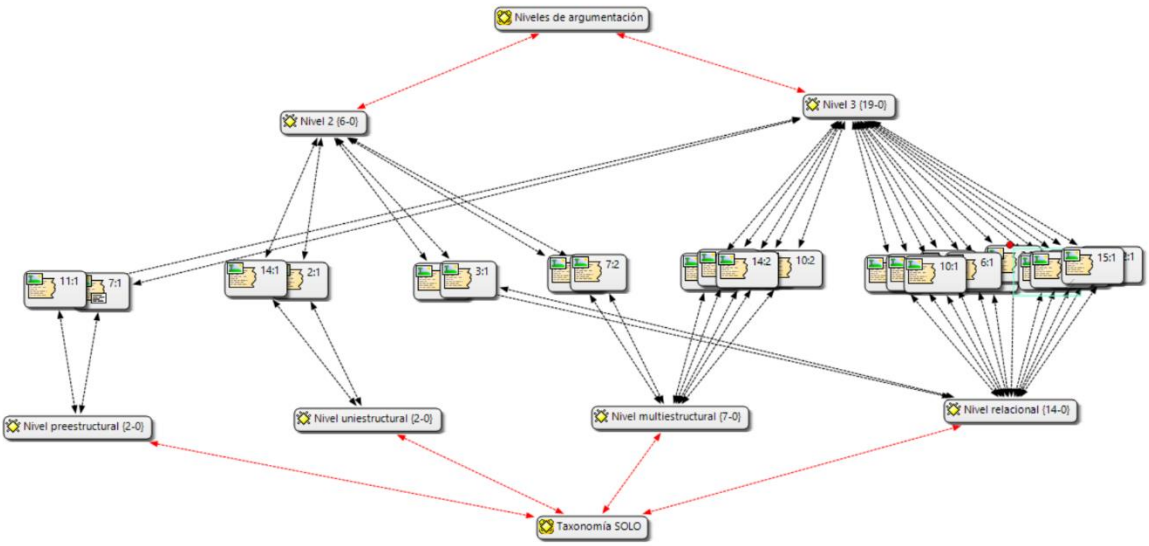
Las dimensiones de la figura rectangular pueden ser $7x^2$ *y 3x, ya que al multiplicar estas dos expresiones se obtiene el área la cual es* $21x^3$.

En su argumento, Rojo, de forma concreta explica cuáles pueden ser las dimensiones de la figura y a su vez expone que al realizar el producto entre las expresiones se puede verificar que se obtiene la expresión inicial, lo cual constituye una garantía para la conclusión que él ofrece.

Por otra parte, respecto a la relación entre los niveles de aprendizaje y los niveles de argumentación alcanzados por los estudiantes en la prueba final se construyó la red

semántica que se muestra en la figura 19 y en la que cada respuesta se encuentra asociada a los niveles correspondientes.

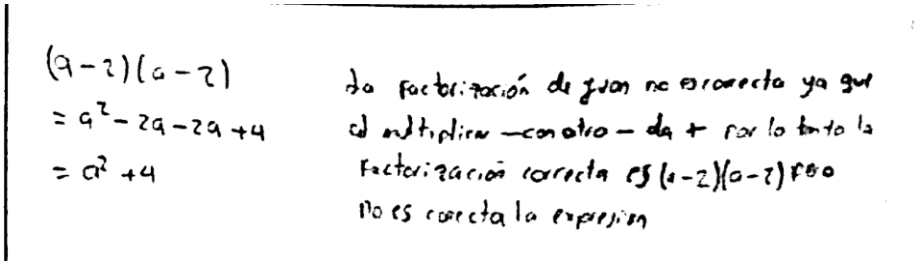
Figura 19. Relación entre el nivel argumentativo y el nivel de aprendizaje en la prueba final



Fuente: Elaboración propia.

A partir de esta red semántica es posible visualizar que la mayoría de argumentos presentados en la prueba final, por los estudiantes, estuvieron categorizados en el nivel 3 de argumentación y que a su vez se asociaron un con nivel relacional de aprendizaje. Sin embargo, también se hacen presentes 2 argumentos estuvieron asociados al nivel 3 de argumentación, y al nivel más bajo de aprendizaje. Una de estas representaciones fue presentada por Negro frente a la pregunta 3 de la prueba y se muestra a continuación en la Figura 20.

Figura 20. Argumento categorizado en el nivel 3 de argumentación y en el nivel preestructural de aprendizaje

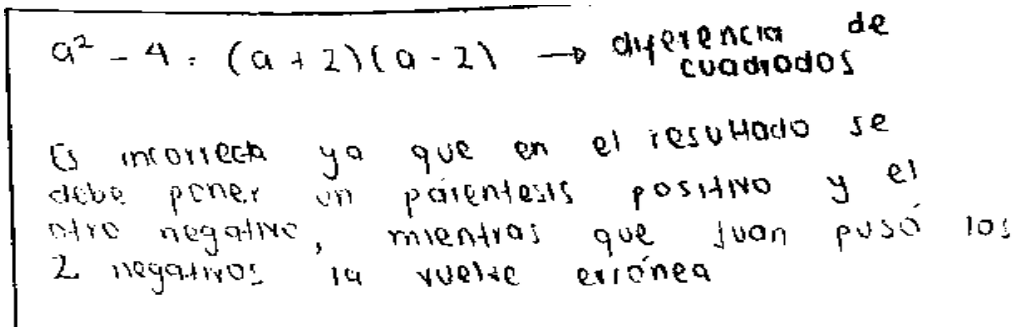


Fuente: Tomada de las respuestas de Negro.

En esta representación múltiple se evidencia la existencia de datos, conclusión y de una garantía expresada mediante el componente simbólico de la representación, por este motivo se categorizó en el nivel 3 de argumentación. Sin embargo, en la garantía se evidencia un error que de acuerdo con Saucedo (2007) tiene su origen en la ausencia de sentido y se encuentra relacionado con un problema que quedó sin resolver en la aritmética. Esto es visible en la medida en que Negro expresa que $-2a - 2a$ es equivalente a $cero$ en lugar de $-4a$. Adicional a esto, en la expresión verbal que compone la representación múltiple, Negro afirma que la factorización es correcta y que lo incorrecto es la expresión, en este sentido se evidencia que el estudiante desconoce elementos fundamentales del funcionamiento de la factorización y que, por lo tanto, de acuerdo con Biggs & Collis (Citados por Huerta, 1999) da cuenta de un nivel de aprendizaje preestructural frente al concepto.

Ahora bien, en las representaciones de los estudiantes, se identificaron 2 que daban cuenta de un aprendizaje uniestructural de la factorización, ambas asociadas con un nivel 2 de argumentación. Ambas representaciones surgieron frente a la pregunta 3 de la prueba, fueron presentadas por Rojo y por Amarillo. El argumento de Rojo se presentó anteriormente en la figura 14. El argumento de Amarillo se presenta a continuación en la figura 21.

Figura 21. Nivel de argumentación 2, nivel de aprendizaje preestructural

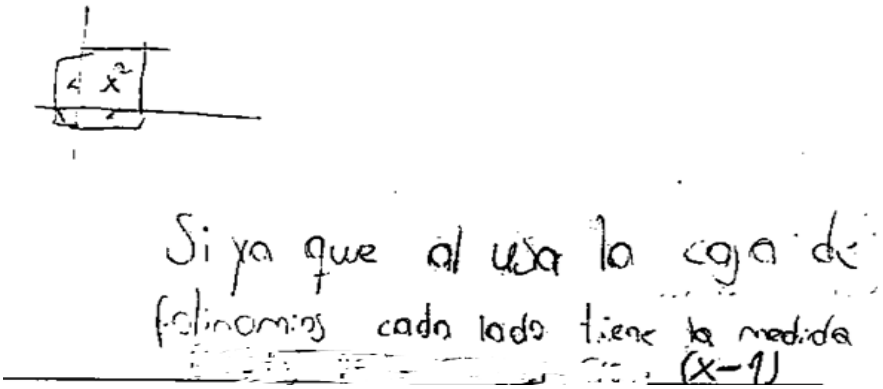


Fuente: Tomada de las respuestas de Amarillo.

Tanto Rojo como Amarillo presentaron un argumento basado en la memorización de la regla, lo cual conlleva a la existencia clara de datos y de una conclusión frente a los mismos, pero no presentan una garantía para validar el paso de los datos a la conclusión. En este sentido, pese a que la respuesta es correcta, se evidencia que los estudiantes conocen solo un aspecto relevante frente al modo de funcionar del ejercicio y por lo tanto se ubican en el nivel uniestructural de aprendizaje.

En cuanto a los 7 argumentos que se categorizaron en el nivel multiestructural, 2 de ellos se asociaron al nivel 2 de argumentación, mientras que los 5 restantes se asociaron al nivel 3. Uno de estos argumentos del nivel multiestructural fue presentado por Azul, el estudiante con disgrafía, quien en la representación múltiple que se presenta a continuación en la figura 22 incluyó el encuadre minimal del polinomio.

Figura 22. Representación múltiple asociada con un nivel multiestructural



Fuente: Tomada de las respuestas de Azul.

A través del encuadre minimal del polinomio el estudiante presenta una garantía, pues está mostrando la forma en que una figura con el área solicitada puede tener lados cuya medida sea $(x-1)$. En este sentido, esta representación permite ratificar el alcance de uno de los beneficios del uso de la caja de polinomios, que había sido descrito previamente por Rodriguez, García & Palacios (2014), quienes afirmaron que el uso de este material posibilitaba el establecimiento de relaciones entre elementos abstracto algebraicos y elementos concretos geométricos.

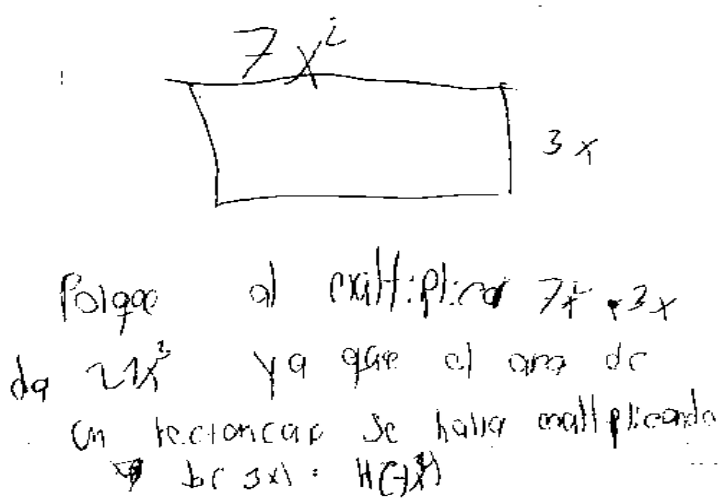
Otro argumento categorizado en el nivel multiestructural fue presentado por Rojo frente a la pregunta 4 del cuestionario y corresponde a la siguiente representación verbal:

Pueden ser $7x^2$ *y* $3x$ *ya que al operar estas dos expresiones se obtiene el área de* $21x^3$.

A pesar de que el argumento es corto, se relacionó con un nivel multiestructural en la medida en que en él se encuentra implícita la comprensión de que el área de una figura rectangular corresponde al producto entre sus dimensiones y que, por tanto, encontrar dos expresiones cuyo producto corresponda al área dada significa haber encontrado las posibles dimensiones de la figura en cuestión.

Frente a esta misma pregunta, surgió, por parte de Azul, una representación múltiple que se asoció al nivel relacional de aprendizaje y al nivel 3 de argumentación. Esta se muestra a continuación en la figura 23.

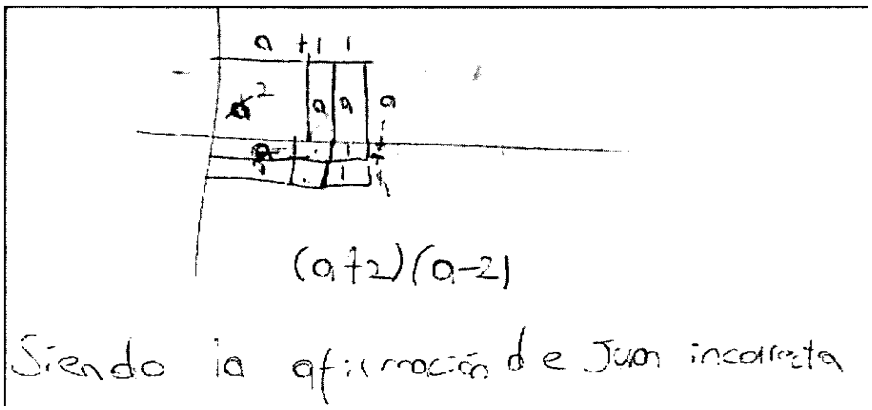
Figura 23. Nivel 3 de argumentación, nivel relacional de aprendizaje



Fuente: Tomada de las respuestas de Azul.

En este argumento, Azul hace explícita la relación entre el área de un rectángulo y el hecho de que mediante el producto de dos expresiones se pueda verificar que estas corresponden a las dimensiones de una figura rectangular. Otro argumento, también presentado por Azul y categorizado en los mismos niveles, se presenta a continuación en la figura 24 e incluye como garantía al encuadre minimal para dar respuesta a la pregunta 2 del cuestionario.

Figura 24. Nivel 3 de argumentación, nivel relacional de aprendizaje

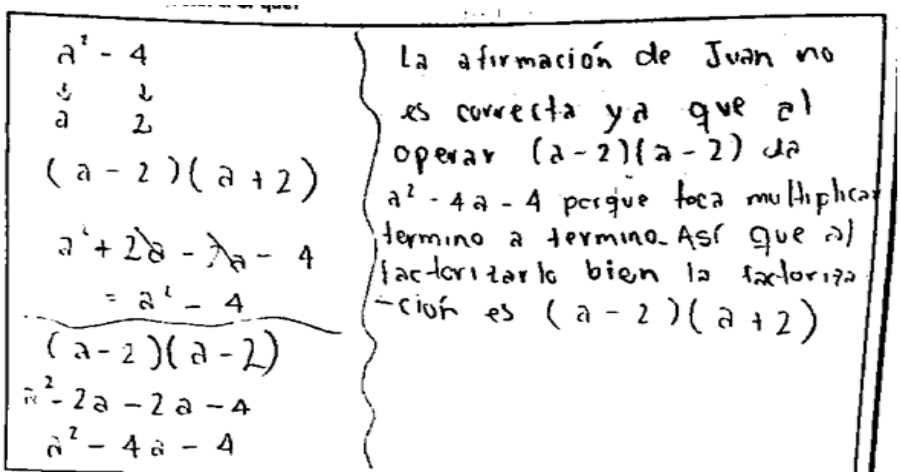


Fuente: Tomada de las respuestas de Azul.

La representación se asoció con un nivel relacional, pues en la misma se evidencia que Azul reconoce los elementos involucrados en la situación y que la conclusión es un producto del análisis sobre la relación de estos elementos.

Ante la misma pregunta, Blanco presentó la respuesta que se presenta a continuación en la figura 25, que a su vez fue asociada a los mismos niveles de la representación anterior. El argumento presentado por Blanco parte de la memorización del caso de factorización, sin embargo, la garantía que involucra el argumento se basa en la reversibilidad de la operación y consecuentemente da cuenta de que Blanco conoce y comprende el hecho de que al hallar el producto entre los factores de una expresión se debe verificar que este coincida con la expresión sin factorizar.

Figura 25. Argumento presentado por Blanco que involucra la reversibilidad de la operación

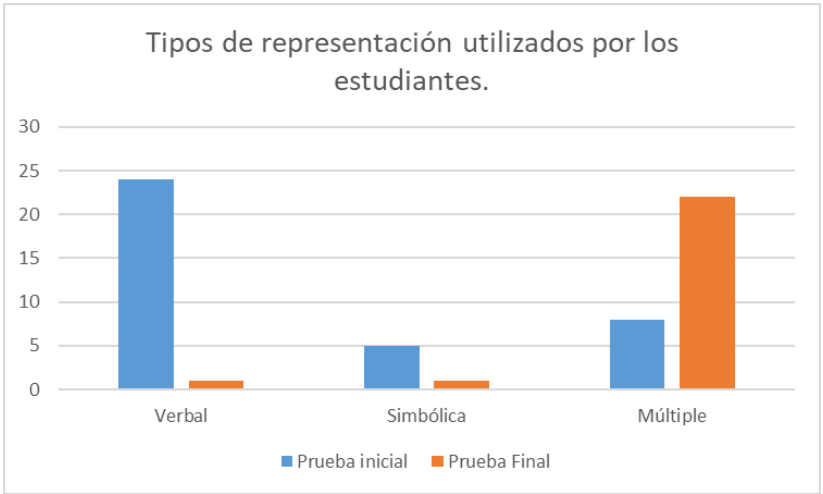


Fuente: Tomada de las respuestas de Blanco.

7.3 COMPARATIVO ENTRE LOS RESULTADOS EN LA PRUEBA INICIAL Y LOS RESULTADOS EN LA PRUEBA FINAL

Con respecto a las representaciones utilizadas, la cantidad de veces que se utilizó cada una de las 3 representaciones que se hizo visible en las respuestas de los estudiantes, se muestran a continuación en la figura 26.

Figura 26. Cantidad de veces que se evidenció cada tipo de representación en las pruebas



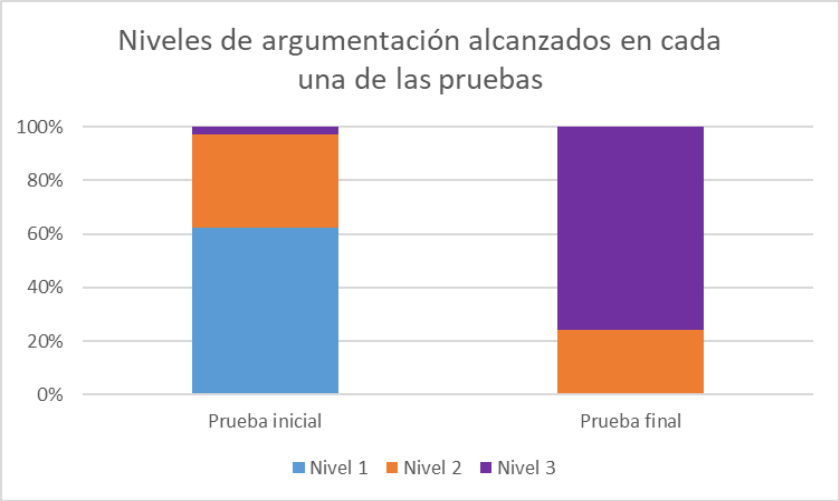
Fuente: Elaboración propia.

Es importante notar que en la gráfica se muestra la clasificación de las 37 representaciones que se analizaron como producto de la prueba inicial, mientras que en la prueba final se analizaron 24 representaciones en total. Sin embargo, es evidente la forma en que la mayoría de estudiantes se movilizaron de representaciones verbales a representaciones múltiples.

Otro elemento relevante, es el hecho de que, pese a que las representaciones simbólicas son propias del lenguaje algebraico, no fueron las más utilizadas en ninguno de los dos momentos, sin embargo, la gran mayoría de las representaciones múltiples estuvieron compuestas por representaciones simbólicas, verbales y pictóricas. Esta situación pudo estar provocada debido a que, en la medida en que los estudiantes tenían más elementos para mencionar al argumentar frente a una situación relacionada con la factorización, el lenguaje verbal dejó de ser suficiente para expresar la totalidad de sus ideas, y por tal razón decidieron recurrir a representaciones que involucraban el lenguaje gráfico y el simbólico además del verbal. Esta situación es mencionada por Confrey & Smith (Citados por Pinto et all, 2016), quienes afirman que el uso de representaciones múltiples suele indicar que existe una comprensión más profunda del concepto matemático que se ve involucrado en la tarea resuelta.

De la misma forma, en cuanto a los niveles de argumentación alcanzados por los estudiantes en cada uno de los momentos analizados, la figura 27 muestra la cantidad de argumentos que fueron categorizados en cada uno de ellos.

Figura 27. Niveles de argumentación alcanzados, prueba inicial vs prueba final



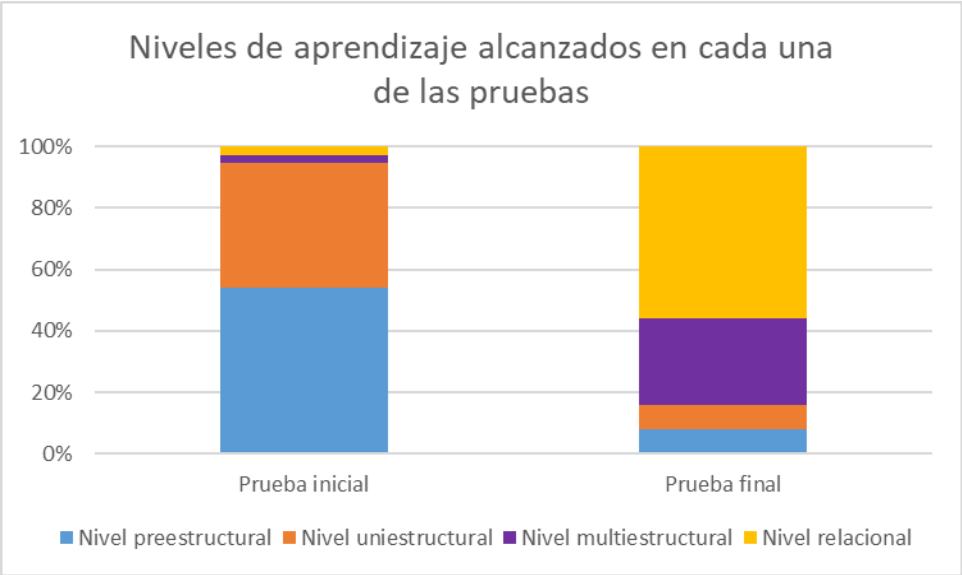
Fuente: Elaboración propia.

El resultado que se muestra en la figura 27 muestra como de forma previa a la aplicación de la unidad didáctica, un poco más del 60% de los argumentos presentados por los estudiantes tenías las características de un argumento de nivel 1, de modo que fueron representaciones en las cuales no se identificaba con claridad la existencia de unos datos y una conclusión, sin embargo, en la prueba final, ninguno de los argumentos tuvo esta característica. En el mismo sentido, en cuanto a los argumentos de nivel 3, en la prueba inicial correspondieron a menos del 5% de los argumentos presentados por los estudiantes, mientras que en la prueba final superaron el 70% de los argumentos analizados, esto significa que, en la mayoría de los argumentos en la prueba final, no solo era posible identificar con claridad la existencia de datos y conclusión, sino que además se evidenciaba la existencia de una garantía que validaba el paso de los datos a la conclusión.

Como se evidenció en el análisis de los resultados de la prueba final, la mayoría de estas garantías estaban dadas en torno al uso de la caja de polinomios y de la reversibilidad de la operación, de modo que es posible percibir que el hecho de que los estudiantes se movilizaran de un nivel argumentativo a otro superior, es una consecuencia directa de la aplicación de las actividades de la unidad didáctica.

Finalmente, en cuanto al nivel de aprendizaje alcanzado por los estudiantes en los momentos inicial y final de la unidad didáctica, la figura 28 muestra el porcentaje de respuestas que fueron categorizadas en cada uno de los niveles de la taxonomía SOLO.

Figura 28. Niveles de la taxonomía SOLO. Prueba inicial vs prueba final



Fuente: Elaboración propia.

En cuanto a la información de la figura 28, es posible verificar que, si bien el nivel preestructural siguió presentándose después de la aplicación de la unidad didáctica, pasó de estar presente en más del 50% de las respuestas en la prueba inicial, a menos del 10% en la prueba final. De la misma forma, el nivel relacional, que fue el nivel más alto de la taxonomía SOLO que se evidenció en las pruebas, pasó de presentarse en menos del 5% de las respuestas en la prueba inicial, a más del 50% en la prueba final. En este sentido, es posible afirmar que el nivel de aprendizaje demostrado por los estudiantes en cada una de las respuestas avanzó hacia un nivel más alto tras la aplicación de la unidad didáctica.

8 CONCLUSIONES

En la prueba inicial, la mayoría de los estudiantes, respondieron ante situaciones que involucran factorización, con argumentos en los cuales no se evidenciaba con claridad la existencia de datos y conclusión y, en los cuales, además, se mencionaban aspectos irrelevantes dentro de la situación y se omitían elementos fundamentales dentro de la misma. Esto dejó en evidencia las falencias en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la factorización en la medida en que los estudiantes ya habían estudiado los contenidos que, dentro del plan de estudios, correspondían a la temática de factorización.

Como consecuencia de la aplicación de las actividades de intervención de la unidad didáctica, los estudiantes se movilizaron hacia niveles de argumentación y niveles de aprendizaje más avanzados. Empezaron a incorporar, en sus argumentos, garantías que sustentaban el paso de los datos a la conclusión y, además, lograban identificar e interpretar con mayor precisión los datos relevantes del enunciado para usarlos en la solución del planteamiento.

Las garantías presentadas por los estudiantes dentro de sus argumentos, además de evidenciar que habían avanzado en su nivel argumentativo, usualmente involucraron elementos como la reversibilidad de la operación y la relación de la expresión algebraica con áreas de figuras planas mediante la representación gráfica de las mismas, haciendo uso de la caja de polinomios. Esto indica que las actividades de intervención sí permitieron una mejor conceptualización en torno a la factorización, dotando de significado a las expresiones algebraicas y posibilitando la comprensión de la factorización.

Ahora bien, es importante mencionar que algunos de los estudiantes decidieron seguir argumentando a partir de la memorización de las reglas de los casos de factorización, sin embargo, aún en estos casos, se evidenció la comprensión de la reversibilidad de la operación como un elemento para verificar que la factorización es correcta.

Se evidencia que los espacios dentro del aula que favorecen procesos argumentativos y que permiten que los estudiantes avancen en la construcción de argumentos mejor

estructurados, particularmente en torno a la factorización, suelen conllevar al alcance de mejores niveles de aprendizaje, pues requieren que el estudiante reconozca y comprenda los diferentes conceptos y elementos que intervienen en la situación, de modo que pueda usarlos como sustento dentro de sus argumentos.

Así mismo, la estructura de la unidad didáctica permitió visibilizar la necesidad de que el proceso de enseñanza de la factorización se encuentre estrechamente ligado con el uso de material manipulativo, que permita el establecimiento de una relación clara entre las áreas y dimensiones de figuras planas como una aplicación de la factorización.

Consecuentemente, es posible concluir que diseñar actividades en torno a la argumentación como estrategia, permite que los estudiantes construyan y se apropien de los elementos que se hacen presentes en el proceso de descomponer una expresión algebraica en factores, y que, por tanto, comprendan y logren explicar y argumentar en torno a situaciones que involucran el concepto.

9 RECOMENDACIONES

Para aportar a la solución del problema, se recomienda que, en trabajos de investigación con objetivos similares, se tengan en cuenta además de las representaciones escritas, las representaciones orales de los estudiantes frente a este tipo de situaciones, pues es natural que las habilidades argumentativas de un estudiante puedan variar al expresarse mediante la oralidad. Es necesario verificar si mediante registros orales, los estudiantes alcanzan niveles de argumentación y de aprendizaje que no se evidenciaron en las representaciones analizadas en la presente investigación.

Así mismo, se considera relevante que el tiempo de intervención sea más amplio y que, en lo posible, las diferentes sesiones no se encuentren espaciadas por largos periodos de tiempo que, posiblemente, estén relacionados con la disminución de los efectos positivos de la intervención. Esto debido a que conseguir un avance en el nivel argumentativo de los estudiantes requiere la práctica y el refuerzo constante de las habilidades argumentativas.

Por otra parte, y con la intención de promover que los estudiantes alcancen niveles argumentativos más altos que los alcanzados con la unidad didáctica que se diseñó como parte del presente trabajo de investigación, se sugiere involucrar actividades que, de manera directa, aborden la elaboración de argumentos, explicando, por ejemplo, los elementos que componen un argumento de nivel 5: datos, garantía, sustento, calificador modal, condiciones de refutación, conclusión.

Finalmente, en cuanto al diseño metodológico de la investigación, se sugiere que un futuro estudio con un enfoque similar, pueda ser abordado desde la estructura del estudio de caso, permitiendo una mayor comprensión del problema desde las particularidades de cada estudiante.

10 REFERENCIAS

Aldana Bermúdez, Eliécer. (2014) *La argumentación como estrategia de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas.* Revista científica, 3 (20) 37-45.

Benítez Pérez, A., & Benítez Pérez, H., & García Rodríguez, M. (2016). *La argumentación sustancial. Una experiencia con estudiantes de Nivel Medio Superior en clases de matemáticas.* Educación Matemática, 28 (3), 175-216.

Borjón, E.; Torres, M. & Sosa, L. (2015). *Representaciones Semióticas de Sistemas de Ecuaciones Lineales de 2X2 con Excel.* XVI CIAEM-IACME, Chiapas, México. 1-9

Calderón, D. I., & León, O. L. (1996). La argumentación en matemáticas en el aula: una oportunidad para la diversidad. *Books*, *1*.

Camargo, L; García, G; Leguizamón, C; Samper, C & Serrano, C. (2002) Alfa 8. Bogotá: Editorial Norma.

Crespo, Cecilia. (2005). *La importancia de la argumentación matemática en el aula.* Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/228791538_LA_IMPORTANCIA_DE_LA_ARGUMENTACION_MATEMATICA_EN_EL_AULA

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* (pp. 15-17). Grupo Editorial Iberoamérica.

Flores, Nicolaza; Pastrana, Lisseth & Flores Oswaldo. (2017) *Estrategias de evaluación en la eseñanza de los algoritmos de factorización en noveno grado de Educación Secuandaria.* Revista ciencia e interculturalidad, 20 (1) 7-17

Gamboa Rojas, G. D., Planas, N., & Edo, M. (2010). Argumentación matemática: prácticas escritas e interpretaciones. *Suma. Revista sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, *64*, 35-44.

Goizueta, M. & Planas, N. (2015) *Aspectos epistemológicos de la argumentación en el aula de matemáticas* (Tesis doctoral). Universidad autónoma de Barcelona, Barcelona, España.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, L. (2006). Metodología de la investigación. Iztapalapa, México: Mc Graw Hill.

Huerta, P. (1999). Los niveles de Van Hiele y la taxonomía SOLO: un análisis comparado, una integración necesaria. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 17(2), 291-309.

Jiménez Espinosa, A., & Pineda Bohórquez, L. (2013). *Comunicación y argumentación en clase de matemáticas.* EDUCACIÓN Y CIENCIA, (16). Recuperado a partir de https://revistas.uptc.edu.co/index.php/educacion_y_ciencia/article/view/3243

Kieran, C. (1994). *El aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar.* Traducción de Vilma Mesa. Una empresa Docente. http://www.uniandes.edu.co

Layton, A., & Rojas, C. (2016). Concepciones presentes sobre la factorización en estudiantes de 15 a 16 años. *RECHIEM. Revista Chilena de Educación Matemática*, *10*(1), 79-84.

León, O., & Calderón, D. (2008). Semiosis y lenguaje en la Didáctica de las matemáticas. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/935/1/3Cursos.pdf

Llanos, V., & Otero, M. (2009). Argumentación Matemática en los libros de la Enseñanza Secundaria: un análisis descriptivo de las características de los libros de texto y de la Argumentación. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 4 (1), 37-50.* Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=273320453005

Mejia, M. (2004). *Análisis didáctico de la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas.* (Tesis de pregrado). Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.

Méndez Olave, T. (2012*). Marco Figural como Medio para Factorizar Polinomios Cuadráticos.* Boletim de Educação Matemática, 26 (44), 1395-1416.

Merino, E. (2012). *Patrones y representaciones de alumnos de 5º de educación primaria en una tarea generalización* (tesis de maestría). Universidad de Granada, Granada, España.

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas.* Santa Fe de Bogotá, Colombia: Magisterio.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias.* Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

OCDE (2016). *Resultados prueba PISA 2015.* Recuperado de http://www.compareyourcountry.org/pisa/country/col?lg=es

Olave, T. M., & Curicó, L. L. C. M. (2008). Dificultades en la práctica de productos notables y factorización. *Revista del Instituto de Matemática y Física. Año*, *11*(15).

Ospina, M., (2015). *Guía didáctica para el aprendizaje de la factorización en estudiantes del CLEI IV del ITM.*(Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

Pinochet, J. (2015). *El modelo argumentativo de Toulmin y la educación en ciencias: una revisión argumentada.* Ciência & Educação (Bauru), 21(2), 307-327. https://dx.doi.org/10.1590/1516-731320150020004

Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A., & Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan.

Rodriguez, A. A., García, J. A., & Palacios, O. J. (2014). Caja de polinomios: una experiencia lúdica en el aprendizaje del álgebra. *Pedagogía en Acción*, *2*, 34-42.

Salazar, V., Jiménez, S. & Mora, L. (2013). *Tabletas algebraicas, una alternativa de enseñanza del proceso de factorización.* En Ramirez, Alexa; Morales, Yuri (Eds.), Memorias I Congreso de Educación Matemática de América Central y del Caribe (pp. 1437-1448). República Dominicana: Por el fortalecimiento de la Educación Matemática en América Central y El Caribe. Recuperado de http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/doc_memorias_completo.pdf

Sánchez, A. & Lupiáñez, J. (1999). *El Razonamiento Matemático: Argumentación y Demostración.* 10.13140/2.1.1466.1441.

Sanchez, E. A. S., García, J. I., & Medina, M. (2014). Niveles de razonamiento y abstracción de estudiantes de secundaria y bachillerato en una situación-problema de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (6).

Sanchez, N. & Del Valle, M. (2016). Álgebra escolar: una revisión preliminar en relación a errores y dificultades.

Saucedo, G. (2007). Categorización de errores algebraicos en alumnos ingresantes a la Universidad. *Itinerarios Educativos 2 (2)*, 22-43.

Solar, H. (2018). *Implicaciones de la argumentación en el aula de matemáticas.* Revista Colombiana de Educación, (74), 155-176.

Soto, F., & Mosquera, S., & Gómez, C. (2005). La caja de polinomios. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, XIII (1), 83-97.

Tamayo Alzate, O. (2012). *La argumentación como constituyente del pensamiento crítico en niños*. Hallazgos, 9(17). doi:https://doi.org/10.15332/s1794-3841.2012.0017.10

Taylor, S. & Bogdan, R. (1989). Introducción a los métodos cualitativos de investigación. Paidós, Barcelona.

11 ANEXOS

Anexo 1. Instrumento diagnóstico

Nombre: _____ Fecha: _____

Instrucciones: El siguiente cuestionario debe responderse de forma individual, por favor lee con atención cada una de las preguntas y luego responde en los espacios indicados.

1. Observa el siguiente rectángulo, cuya área está dada por la expresión $15x^2$, analiza la situación planteada.



Situación:

Cuatro personas se encuentran discutiendo respecto a las posibles dimensiones del terreno. La opinión de cada uno es la siguiente:

- **Pedro:** Puede que el largo del terreno sea de 15 y el ancho sea de x^2**.**

- **Federico:** Puede que el largo del terreno sea de $3x$ y el ancho sea de $5x$.

- **Lucía:** Puede que el largo del terreno sea de $15x$ y el ancho sea de x^2

- **Maritza:** Puede que el largo del terreno sea de 3 y el ancho sea de $5x^2$

a. ¿Es posible que alguien tenga la razón? Sí____ No____

Explica:_____

b. En caso de que tu respuesta haya sido “Sí”, cuéntanos quién tiene la razón, y explica por qué. _____

c. Expresa de otra manera el largo y el ancho del terreno_____

d. Cuéntanos por qué consideras que tu respuesta en el punto anterior es correcta.

_____

2. El área de un trozo de papel está dada por la expresión $9m^2 - 6mn + n^2$. Alguien sugiere que la figura podría tratarse de un cuadrado.

   a. ¿Por qué es posible realizar dicha afirmación?_____
   _____
   _____
   _____

   b. ¿Cuáles podrían ser las dimensiones del trozo de papel?
   _____
   _____

   ¿Por qué? _____
   _____
   _____
   _____

   c. ¿Cómo puedes verificar si las dimensiones propuestas en el punto anterior corresponden a las dimensiones del trozo de papel cuya área es de $9m^2 - 6mn + n^2$?
   _____
   _____
   _____
   _____
   _____

   d. Sugiere una expresión algebraica diferente a la mencionada anteriormente que pueda representar el área de un cuadrado y explica cuáles serían sus dimensiones, describe tu razonamiento.

   _____
   _____
   _____

_____

_____

3.

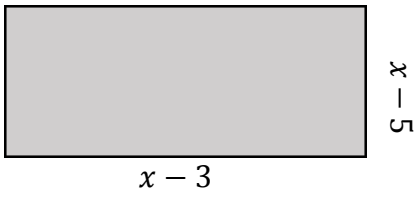
a. ¿Es posible determinar las dimensiones de una figura rectangular cuya área está dada por la expresión $x^2 - 8x + 15$? ¿Por qué?

_____

_____

_____

b. ¿Encuentras alguna relación entre la información que aparece en las dos columnas de la siguiente tabla? Sí ____ No ____

$A = x^2 - 8x + 15$	

Si tu respuesta es afirmativa, explica en que se relacionan.

_____

_____

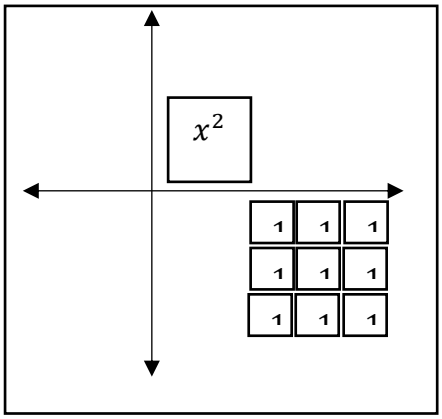
_____

Anexo 2. Usando la caja de polinomios

Nombre: _____ Fecha: _____

Instrucciones: El siguiente cuestionario debe responderse de forma individual, por favor lee con atención cada una de las situaciones y luego responde en los espacios indicados.

1. Con base en la siguiente representación responde las siguientes preguntas.



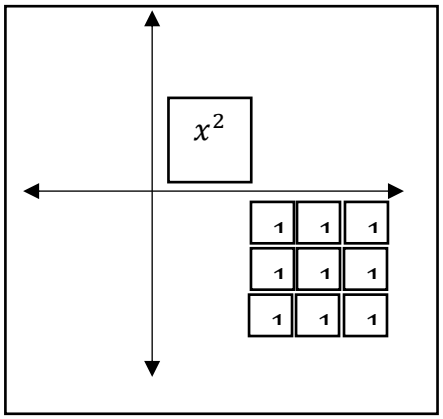
   a. Alguien afirma que el polinomio que se encuentra representado es $x^2 + 9$. ¿Eso es correcto? ¿Por qué?

   _____

   _____

   _____

   b. Completa la representación para que corresponda al encuadre minimal del polinomio.

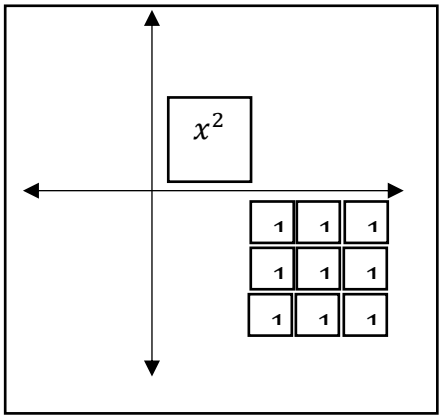


c. Describe cómo puedes utilizar la representación anterior para encontrar la factorización del polinomio.

_____

_____

d. ¿Qué debes cambiar en la siguiente representación si necesitas encontrar el encuadre minimal del polinomio $9 - x^2$? Explica por qué.



_____

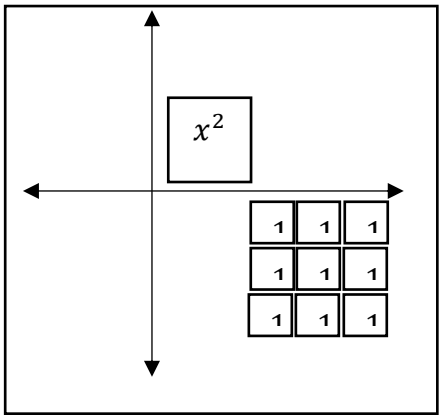
_____

_____

_____

_____

e. ¿Qué debes cambiar en la siguiente representación si necesitas encontrar el encuadre minimal del polinomio $x^2 - 4$? Explica por qué.



_____

_____

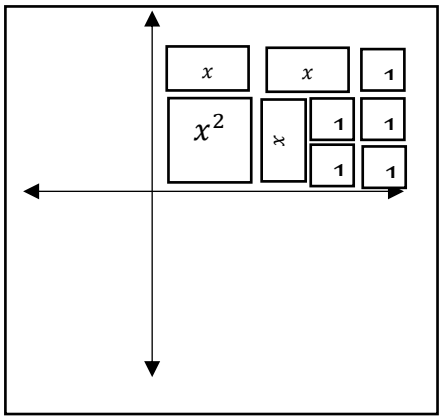
_____

_____

_____

_____

2. A continuación se muestra una representación incorrecta del polinomio $x^2 + 3x + 2$.



a. Explica por qué la representación es incorrecta.

_____

_____

_____

b. ¿Qué puedes hacer para corregirla?

_____

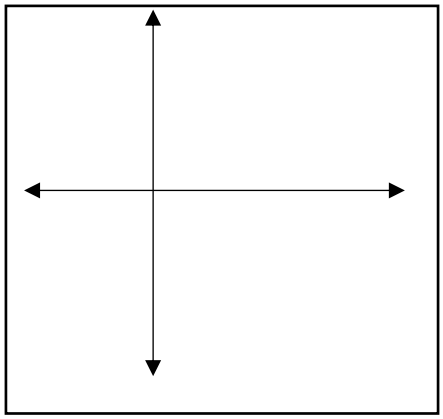
_____

c. ¿Cuál es la expresión algebraica que en realidad se encuentra representada en la figura inicial? Explica por qué lo sabes.

_____

_____

d. Grafica de forma correcta el encuadre minimal del polinomio $x^2 + 3x + 2$. Luego, explica como a partir de la gráfica puedes encontrar la factorización del polinomio.



_____

_____

3. Asigna un valor del 0 al 5 que indique que tan de acuerdo te encuentras con las siguientes afirmaciones. El cero indica "***completamente en desacuerdo***" y el cinco indica ***"completamente de acuerdo".*** Luego explica el porqué de tu elección.

- El encuadre minimal facilita la factorización de polinomios. ___

  _____

- De ahora en adelante utilizaré el método del encuadre minimal para factorizar polinomios. ___

  _____

- El encuadre minimal me ayudó a comprender mejor el significado de la factorización. ___

  _____

Anexo 3. Usando las tabletas algebraicas

Nombre: _____ Fecha: _____

Instrucciones: El siguiente cuestionario debe responderse de forma individual, por favor lee con atención cada una de las preguntas y luego responde en los espacios indicados.

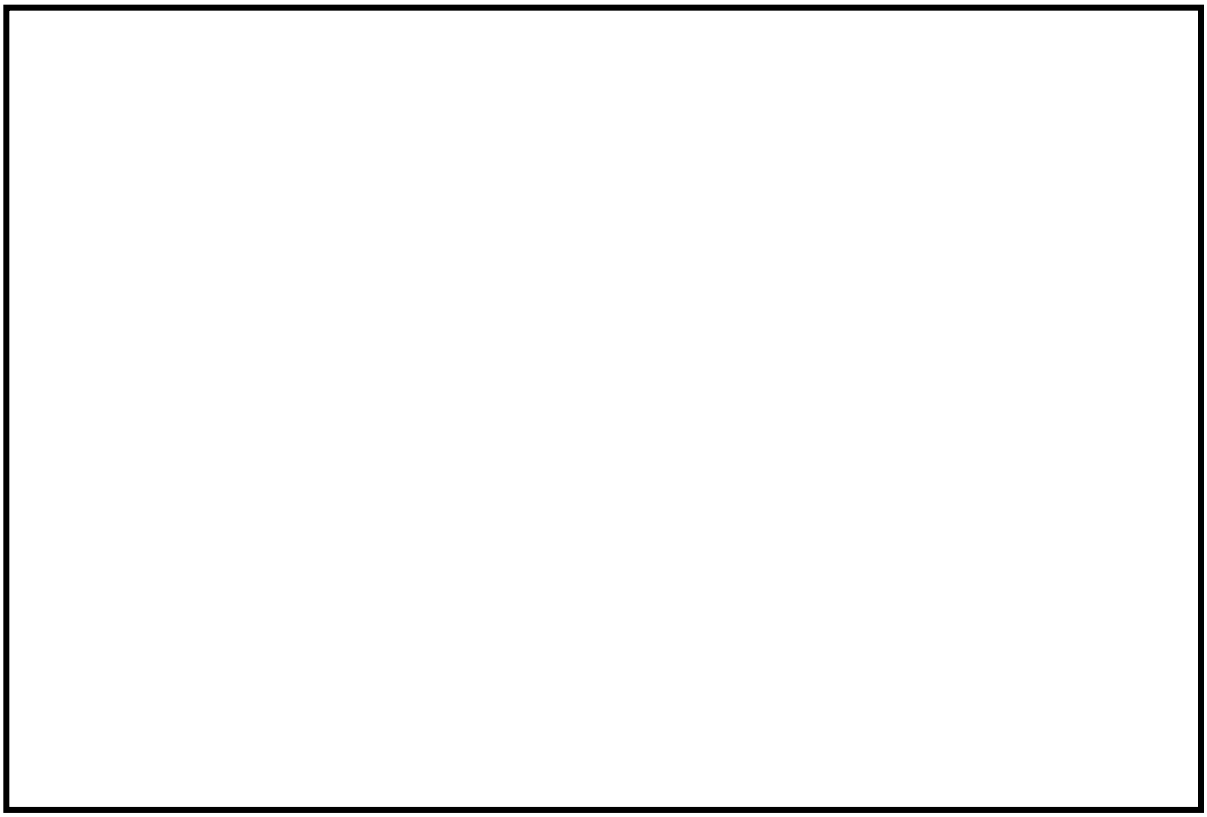
1. ¿Puedes utilizar las tabletas algebraicas para representar cualquier polinomio y encontrar su factorización? Si existe algún caso en el que no funcione, descríbelo.

_____
_____
_____
_____

2. ¿Puedes utilizar las tabletas algebraicas para representar el polinomio $a^2 - ab$? Si tu respuesta es afirmativa, describe como lo harías. En caso contrario explica por qué.

_____
_____
_____

3. Utiliza las tabletas algebraicas para representar el polinomio $4b^2 + 10b + 6$. Utiliza una gráfica para mostrar como ubicaste las fichas. Luego responde las preguntas que aparecen a continuación.



a. ¿Cuántas fichas de cada tipo utilizaste? ¿Por qué?

_____
_____
_____
_____

b. Utiliza la representación que realizaste para determinar la factorización del polinomio, describe cómo lo hiciste.

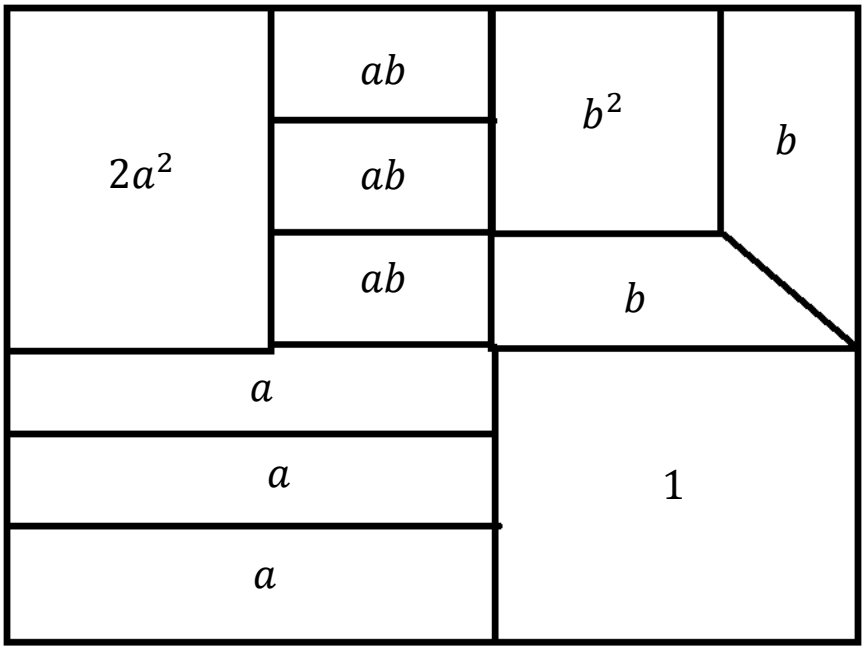
_____
_____
_____
_____

c. Intenta ubicar las fichas de una forma distinta, para representar el mismo polinomio. ¿Es posible hacerlo? Si tu respuesta es negativa, explica por qué. Si tu respuesta es positiva, explica si al hacerlo se obtiene una factorización distinta.

_____

_____

4. La huerta de un colegio se encuentra dividida como se muestra a continuación. El área de cada sector de la huerta corresponde a la expresión que se indica dentro de él.



a. ¿Puedes utilizar las tabletas algebraicas para representar el polinomio que corresponde al área de la huerta completa? Si tu respuesta es afirmativa, describe cómo, si tu respuesta es negativa, explica por qué.

_____

_____

_____

_____

b. ¿Cuáles son las dimensiones de la huerta? ¿Por qué?

_____

_____

_____

c. ¿Es posible que las dimensiones de la huerta sean diferentes a las que mencionaste en el punto anterior? ¿Cómo puedes saberlo?

_____

_____

_____

5. ¿Consideras que cualquier polinomio se puede representar haciendo uso de las tabletas algebraicas? ¿Por qué?

_____

_____

_____

6. Asigna un valor del 0 al 5 que indique que tan de acuerdo te encuentras con las siguientes afirmaciones. El cero indica "***completamente en desacuerdo***" y el cinco indica ***"completamente de acuerdo".*** Luego explica el porqué de tu elección.

- El uso de las tabletas algebraicas facilita la factorización de polinomios. ___

_____

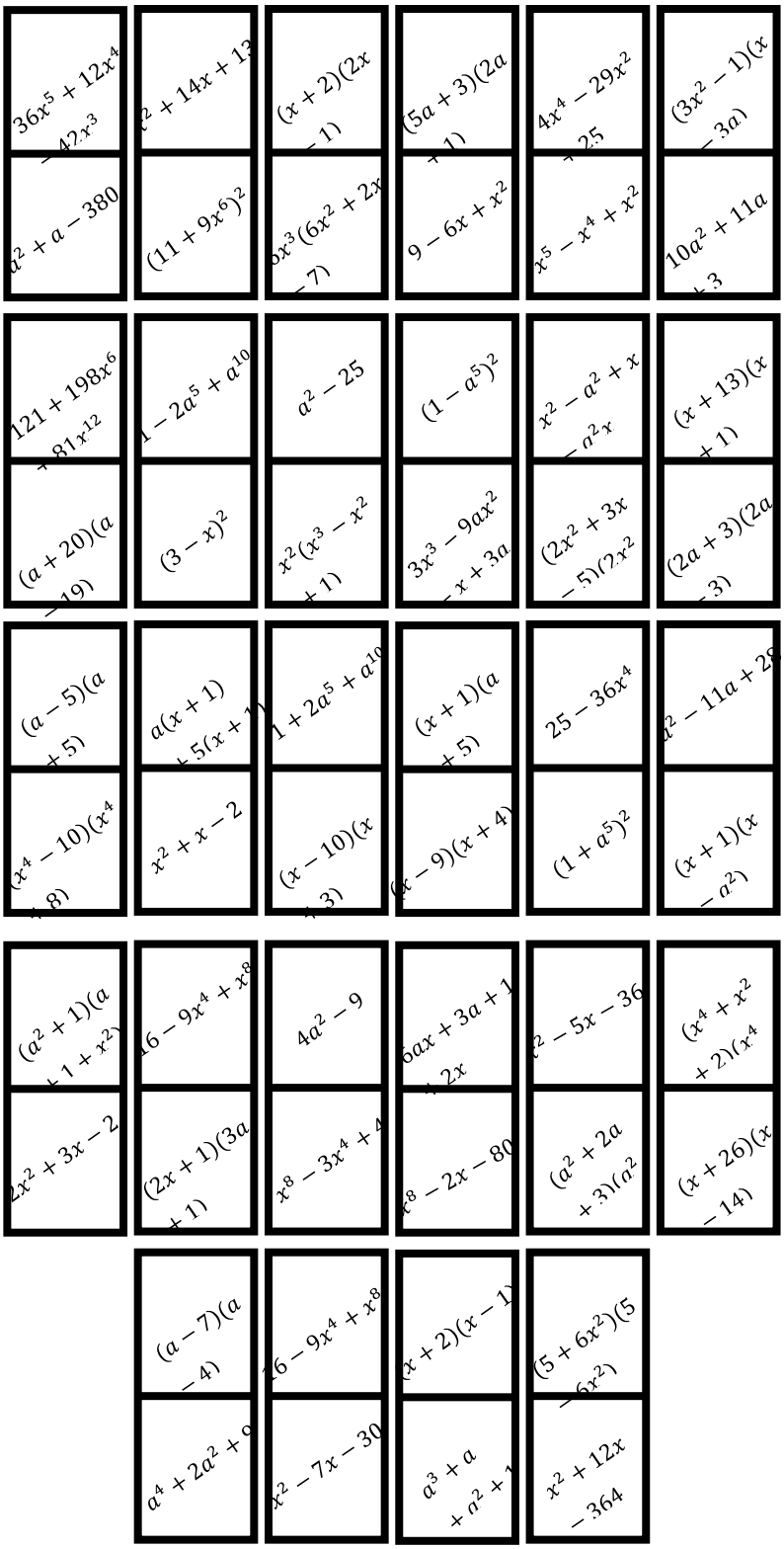
- De ahora en adelante utilizaré las tabletas algebraicas para factorizar polinomios. ___

_____

- El uso de las tabletas algebraicas me ayudó a comprender mejor el significado de la factorización. ___

_____

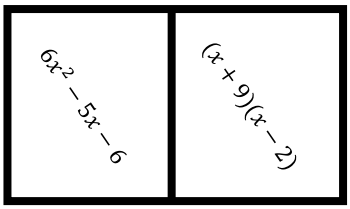
Anexo 4. Dominó de fracciones algebraicas



Nombre: _____ Fecha: _____

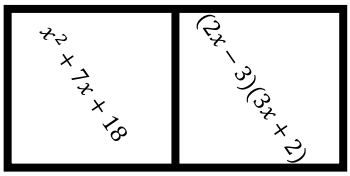
Instrucciones: El siguiente cuestionario debe responderse de forma individual, por favor lee con atención cada una de las preguntas y luego respóndela utilizando los espacios en blanco.

1. Supón que el juego inicia con la ficha que aparece a continuación.

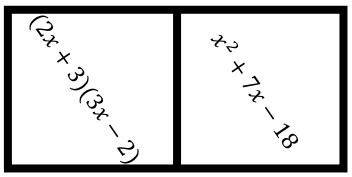


Y tú tienes las siguientes fichas:

Ficha #1.



Ficha #2.



a. Si tú tienes el siguiente turno, ¿cuál ficha utilizarías y por qué?

_____

_____

_____

_____

_____

_____

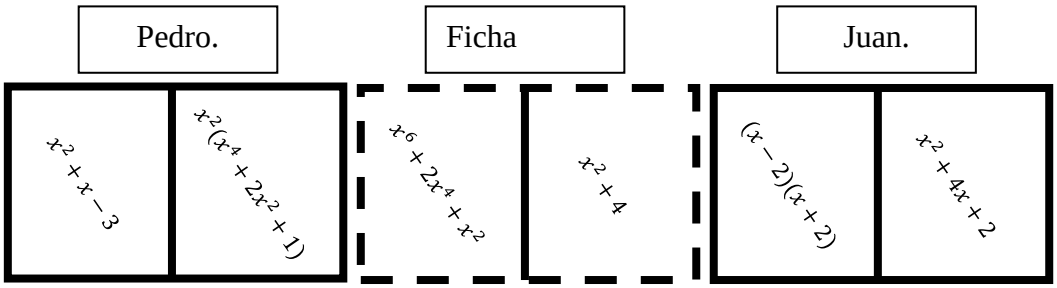
b. ¿Cómo puedes verificar que ubicaste la ficha de forma correcta? Si es necesario, muéstranos el procedimiento.

_____

_____

_____

2. Para un nuevo juego, se ubica la ficha inicial que se muestra a continuación. Luego Pedro y Juan ubican sus fichas como se indica.



a. ¿Pedro ubicó su ficha de forma correcta? ¿Por qué?

_____

_____

_____

_____

_____

b. ¿Juan ubicó su ficha de forma correcta? ¿Por qué?

_____

_____

_____

_____

_____

Anexo 5. Instrumento final

Nombre: _____ Fecha: _____

Instrucciones: El siguiente cuestionario debe responderse de forma individual, por favor lee con atención cada una de las preguntas y luego respóndela utilizando los espacios en blanco. Escribe tus procedimientos y respuestas de la forma más ordenada posible.

1. Pedro afirma que la expresión $x^2 - 2x + 1$ puede representar el área de una figura cuadrada.
   a. ¿Estás de acuerdo con esa afirmación? ¿Por qué?

2. El área de un terreno rectangular está dada por la expresión $x^2 - 17x - 60$. ¿Puedes determinar el perímetro de este terreno? Si tu respuesta es negativa, explica por qué. Si tu respuesta es afirmativa, explica cómo.

3. Juan afirma que la factorización de la expresión $a^2 - 4$ es $(a - 2)(a - 2)$. ¿La afirmación de Juan es correcta? ¿Por qué?

4. Si el área de una figura rectangular está dada por la expresión $21x^3$, ¿Cuáles pueden ser sus dimensiones? ¿Cómo puedes verificarlo?

5. Explica, de qué manera puedes verificar que la factorización de un polinomio es correcta.

_____

_____

_____

_____

Ejemplo