



TRATAMIENTO Y CONVERSIÓN DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS
PRESENTES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SOBRE LAS PROGRESIONES
ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS PROPUESTOS POR LOS LIBROS ESCOLARES.

CESAR COTACIO HORTA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES
FACULTAD DE ESTUDIOS SOCIALES Y EMPRESARIALES
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
MANIZALES

2018

TRATAMIENTO Y CONVERSIÓN DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS
PRESENTES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SOBRE LAS PROGRESIONES
ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS PROPUESTOS POR LOS LIBROS ESCOLARES.

CESAR COTACIO HORTA

INVESTIGACIÓN PRESENTADA COMO REQUISITO PARA OPTAR AL TÍTULO
DE MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

Asesora: DELMA OSPINA GARCÍA
Doctora en Educación.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES
FACULTAD DE ESTUDIOS SOCIALES Y EMPRESARIALES
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
MANIZALES
2018

DEDICATORIA

A mis padres Ángela y Reinel, quienes me inculcaron la idea de persistir hasta culminar los sueños.

A mi hija Audrith Gisell y mi esposa Angie Alexandra, quiénes siempre creyeron en mí y soportaron tantos momentos de soledad, por mi ausencia durante el desarrollo de este proceso.

A mis estudiantes, quienes me motivaron a iniciar esta etapa educativa y serán los primeros que percibirán los cambios en mi proceso de formación.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco en primer lugar a Dios, porque sin sus bendiciones este logro no habría sido posible alcanzarse.

De manera especial, a la Doctora Delma Ospina García, asesora de esta investigación por su invaluable aporte desde la experiencia y el conocimiento de la temática de esta tesis, por la comprensión y paciencia para orientarme y acompañarme durante este proceso de aprendizaje.

A la Maestra Ligia Inés García Castro, por sus oportunas y valiosas recomendaciones que permitieron redireccionar y darle coherencia a este trabajo.

A la Especialista Fanny Rubiela Portilla Valencia, por la confianza y su cuantioso apoyo al momento de iniciar este proyecto.

A las y los docentes de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias, por compartir de manera eficaz todos sus conocimientos, los cuales me han generado cambios significativos en el ámbito profesional y social.

A mi familia, por la acogida durante la época de crisis; en especial a mi esposa por el calor humano, comprensión y motivación incondicional durante el tiempo de estudio y preparación de esta investigación.

A todas aquellas personas, que de manera indirecta o directa contribuyeron de forma efectiva en la realización de este trabajo.

RESUMEN

En esta investigación, se caracterizan en profundidad las transformaciones semióticas de tratamiento y conversión, presentes en la resolución de problemas referidos a los objetos matemáticos progresiones aritméticas y geométricas en cinco libros de texto escolares; dicho interés investigativo obedece a que en la práctica docente, durante los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es común que los estudiantes durante la resolución de problemas, posean dificultades para efectuar transformaciones en los múltiples registros semióticos en que el objeto está representado matemáticamente.

Este trabajo investigativo se enmarcó en el campo de la investigación en Didáctica de la Matemática, desde su línea de análisis de libros de texto; obedece a un enfoque del paradigma cualitativo desde un carácter descriptivo e interpretativo, donde se emplea la técnica del análisis de contenido. Como principal referente teórico para el análisis e interpretación de esta investigación se tuvo en cuenta la teoría de las representaciones semióticas de Duval (1999). Se profundizó en tres categorías: *las representaciones semióticas* asociadas al objeto matemático progresiones aritméticas y geométricas; las actividades cognitivas de *tratamiento* y *conversión* presentes en la resolución de problemas de los libros de textos.

De acuerdo con los resultados de los tres instrumentos aplicados y en relación con el objetivo de la investigación, se evidenció una tendencia marcada en no utilizar las distintas formas de representación y sus respectivas transformaciones en la conceptualización del objeto matemático progresión, en especial desde la resolución de problemas, siendo índice del insuficiente atributo otorgado a la comprensión profunda y funcional de las nociones matemáticas.

Palabras Claves: Progresiones aritméticas y geométricas, representaciones semióticas, resolución de problemas, libro de texto escolar.

ABSTRACT

In this research, the semiotic transformations of treatment and conversion are characterized in depth, present in solving problems related to mathematical objects arithmetic and geometric progressions in five school textbooks; said investigative interest obeys to that in the teaching practice, during the teaching and learning process of mathematics, it is common for students during problem solving, they have difficulties to make transformations in the multiple semiotic registers in which the object is represented mathematically.

This research work was framed in the field of research in Mathematics Didactics, from his line of textbook analysis; obeys a qualitative paradigm approach from a descriptive and interpretative character, where the technique of content analysis is used. As the main theoretical reference for the analysis and interpretation of this research, the theory of semiotic representations of Duval (1999) was taken into account. It was deepened into three categories: the semiotic representations associated with the mathematical object arithmetic and geometric progressions; the cognitive activities of treatment and conversion present in the problem solving of textbooks.

According to the results of the three instruments applied and in relation to the objective of the investigation, a marked tendency was evidenced in not using the different forms of representation and their respective transformations in the conceptualization of the mathematical object progression, being an index of the insufficient attribute given to the deep and functional understanding of mathematical notions.

Keywords: Arithmetic and geometric progressions, semiotic representations, problem solving, school textbook.

Tabla de contenido

INTRODUCCIÓN	13
CAPÍTULO 1: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	17
1.1 JUSTIFICACIÓN	17
1.2 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA	19
OBJETIVOS	22
1.3 OBJETIVO GENERAL	22
1.3.1 Objetivos Específicos.	22
CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO.....	23
2.1 ANTECEDENTES.....	23
2.2 LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS	32
2.2.1 Las actividades cognitivas.....	35
2.2.2 Los registros de representación semióticos	38
2.3 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LAS MATEMÁTICAS	44
2.4 LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA EN LOS LIBROS DE TEXTO.	47
2.5 PROGRESIONES Y SERIES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS.....	49
2.5.1 Fenomenología de las progresiones y series	49

2.5.2 Historia del Concepto de progresiones aritméticas.	50
2.5.3 Progresión y serie aritmética.	55
2.5.4 Historia de las Progresiones geométricas.	57
CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA	62
3.1 ENFOQUE INVESTIGATIVO	62
3.2. CATEGORÍAS	63
3.3 DISEÑO METODOLÓGICO	66
3.3.1 Unidad de trabajo	68
3.3.2 Unidad de análisis.....	68
3.4 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS.....	68
3.5 PLAN DE ANÁLISIS.....	74
CAPÍTULO 4 ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN.....	76
4.1 ANÁLISIS DEL INSTRUMENTO 1	76
4.2 ANÁLISIS DEL INSTRUMENTO 2	87
4.3 ANÁLISIS DEL INSTRUMENTO 3	96
4.4 ANÁLISIS COMPARATIVO DE LOS TRES INSTRUMENTOS.....	99
5 CONCLUSIONES	113

6 RECOMENDACIONES.....	117
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	119
7 APÉNDICE.....	129

Lista de Figuras

FIGURA 1. TABLILLA DE ARCILLA	52
FIGURA 2. EJEMPLO DE PROGRESIÓN HALLADO EN LAS TABLILLAS.	52
FIGURA 3. PAPIRO EGIPCIO DE RHIND.....	53
FIGURA 4. PROPIEDAD DEL TÉRMINO CENTRAL	60
FIGURA 5. PROPIEDAD CUANDO NO HAY TÉRMINO CENTRAL.....	60
FIGURA 6. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN.	67
FIGURA 7. CONCEPTUALIZACIÓN DE LAS PROGRESIONES	77
FIGURA 8. AMBIGÜEDAD AL MOMENTO DE UTILIZAR “LA DIFERENCIA COMÚN CON LA RAZÓN” EN LA DEFINICIÓN DE PROGRESIÓN.	82
FIGURA 9. DEFINICIÓN TÉRMINO GENERAL DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA.	82
FIGURA 10. PM SOBRE DISPOSITIVO DE FILTRACIÓN DE AGUA.	84
FIGURA 11. TRANSFORMACIONES SEMIÓTICAS EN LOS PpR DEL $\llbracket \text{LTE} \rrbracket$ _I.....	88
FIGURA 12. TRANSFORMACIONES SEMIÓTICAS EN LOS PpR DEL $\llbracket \text{LTE} \rrbracket$ _II.....	91
FIGURA 13. TRANSFORMACIONES SEMIÓTICAS EN LOS PpR DEL $\llbracket \text{LTE} \rrbracket$ _III.....	93
FIGURA 14. TRANSFORMACIONES SEMIÓTICAS EN LOS PpR DEL $\llbracket \text{LTE} \rrbracket$ _IV	95
FIGURA 15. ÍMITACIÓN DE TRATAMIENTOS DE TIPO ALGORÍTMICO	98

Lista de Tablas

TABLA 1 PRINCIPALES REGISTROS DE REPRESENTACIÓN DEL OBJETO MATEMÁTICO “PROGRESIÓN” .	40
TABLA 2. CATEGORÍAS PARA EL ANÁLISIS DE INFORMACIÓN RELACIONADAS CON EL OBJETO MATEMÁTICO PROGRESIONES.	63
TABLA 3. LIBROS DE TEXTO ESCOLARES UTILIZADOS EN LA INVESTIGACIÓN.	68
TABLA 4. INSTRUMENTO 1	70
TABLA 5. CANTIDAD DE PROBLEMAS MODELOS Y PROBLEMAS PARA RESOLVER EN <i>LTEn</i> .	71
TABLA 6. MATRIZ DE ANÁLISIS SOBRE EL TRATAMIENTO Y LA CONVERSIÓN DE CADA PROBLEMA.	72
TABLA 7. CUADRO COMPARATIVO PARA LA TRIANGULACIÓN DE LOS RESULTADOS.	99
TABLA 8. APLICACIÓN DEL INSTRUMENTO 1.	129
TABLA 9. CANTIDAD DE PROBLEMAS MODELOS Y PROBLEMAS PARA RESOLVER EN [[LTE] _I].	144
TABLA 10. CANTIDAD DE PROBLEMAS MODELOS Y PROBLEMAS PARA RESOLVER EN [[LTE] _II].	145
TABLA 11. CANTIDAD DE PROBLEMAS MODELOS Y PROBLEMAS PARA RESOLVER EN [[LTE] _III].	146
TABLA 12. CANTIDAD DE PROBLEMAS MODELOS Y PROBLEMAS PARA RESOLVER EN [[LTE] _IV].	147
TABLA 13. CANTIDAD DE PROBLEMAS MODELOS Y PROBLEMAS PARA RESOLVER EN [[LTE] _V].	149

Lista de Apéndice

APÉNDICE A PRIMER INSTRUMENTO PARA LA RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN.	129
APÉNDICE B SEGUNDO INSTRUMENTO PARA LA RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN.	144
APÉNDICE C TERCER INSTRUMENTO PARA LA RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN.....	151

INTRODUCCIÓN

Indagar la evolución histórica y epistemológica de las diversas representaciones en la formalización de conceptos matemáticos es relevante en la actualidad, debido a su importancia en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares. Evidentemente, el aprendizaje de las matemáticas constituye un amplio campo de estudio predilecto para analizar las funciones cognitivas fundamentales entre las que se destacan el razonamiento, la resolución de problemas, la comprensión de situaciones, la conceptualización, entre otras.

En tal sentido, en esta investigación se realizará un análisis en profundidad al tratamiento didáctico y epistemológico propuesto en libros de textos con respecto a los objetos matemáticos progresiones aritméticas y geométricas, amparando como sustento procedimental y metodológico, el análisis didáctico. Este permitirá, por un lado, identificar las representaciones y sus transformaciones en los contenidos sobre el objeto matemático en cada texto, así como la pertinencia para los procesos de enseñanza y aprendizaje. Por otro lado, aportará elementos teóricos didácticos para la construcción de futuras unidades didácticas, congruentes a los criterios de enseñanza de las progresiones, que exige la educación matemática actual. Otros aspectos importantes del análisis didáctico, es que admitirá la identificación e interpretación de las múltiples representaciones y significados abordados en los libros de textos escolares sobre el objeto matemático en cuestión; y además prever las posibles actuaciones de los estudiantes al abordar cada uno de los problemas y tareas didácticas.

Se ha privilegiado en esa investigación el análisis de libros de textos, no con el interés de defender el uso excepcional de ese recurso didáctico, sino porque el libro de texto en la actualidad es un recurso considerablemente utilizado durante los procesos educativos, tanto en el aula, como uso diario por parte de alumnos en actividades extraescolares de retroalimentación y por los docentes en las actividades de planificación y actualización pedagógica.

Las reflexiones didácticas y pedagógicas que genere esta investigación, sugerirán la necesidad de formular nuevas actividades didácticas que promuevan conocimientos matemáticos relacionados con los objetos de estudio tratados en la investigación; que promuevan en el aula una visión más integral de las representaciones semióticas, de los tipos de problemas, procedimientos, argumentos, proposiciones y conceptos que han favorecido el surgimiento de las progresiones durante las antiguas civilizaciones hasta la actualidad; precisando a partir de estos elementos esenciales, aspectos relevantes de su origen y valor en el contexto escolar y matemático.

Para el caso particular, se busca analizar las actividades cognitivas de tratamiento y conversión que demanda la resolución de problemas en algunos libros de textos, que han sido formulados para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las progresiones aritméticas y geométricas, las cuales son estudiadas generalmente en noveno grado de la educación básica.

De este modo, se permitirá concebir las matemáticas como actividad dinámica, para que el aprendizaje del estudiante se genere no simplemente como receptor de la información, sino “haciendo matemáticas¹”, de tal forma que se privilegie la actividad de plantear y resolver situaciones problema, con la intención de suscitar el desarrollo de competencias matemáticas. Esta forma de entender la matemática como actividad permite considerar la matematización según Freudenthal (1983) como uno de los procesos más importantes en el marco de la resolución de problemas.

¹ Esta perspectiva relaciona la resolución de problemas para una perspectiva experimental y constructiva de soluciones y comprensiones particulares por parte de los estudiantes, lo cual exige al docente tomar la responsabilidad de hacer que cada sujeto progrese desde sus soluciones intuitivas y comprensiones iniciales hacia los procedimientos y conceptos más elaborados de las progresiones aritméticas y geométricas.

Esta investigación se desarrolló en tres etapas, en la primera etapa se hizo una revisión teórica y bibliográfica sobre los conceptos de progresiones y series, la historia y epistemología; enmarcada desde la teoría de las Representaciones Semióticas de Duval; y la resolución de problemas. En la segunda, se hizo el respectivo análisis a cada libro de texto, que es usado como referente teórico a los educadores de matemáticas, previamente al momento de enseñarlos y, por último, el autor propone sugerencias que permitan diseñar ambientes de aprendizajes a partir de actividades didácticas en las que se refleje las conclusiones alcanzadas.

Por último, se exalta que el diseño y/o selección de actividades propuestas en libros de textos, para trabajar en el aula con los objetos matemáticos progresiones aritméticas y geométricas, las cuales permiten realizar considerables aplicaciones a la vida cotidiana de los estudiantes, lo que beneficia tanto al análisis del contenido, como el diseño, la transformaciones semióticas en la resolución de problemas, que permite además de desarrollar conocimientos profundos, implícitamente potencia aspectos como la autonomía e iniciativa personal, cooperación y competencias ciudadanas.

El informe de esta investigación se presenta estructurado mediante cinco capítulos: El primer capítulo corresponde al planteamiento del problema de investigación, compuesto por las secciones: justificación, descripción del problema y los objetivos de investigación.

El segundo capítulo concierne al marco teórico, donde se plantea inicialmente los antecedentes y sus respectivos aportes a la investigación. Posteriormente, se proponen cada uno de los elementos propios de la teoría de las representaciones semióticas (las actividades cognitivas, los registros de representación semióticos), los cuales se establecen en el principal soporte teórico de esta investigación. Luego, se establecen las características generales de la resolución de problemas en las matemáticas y la transposición didáctica en los libros de texto. Por último, se conceptualiza el objeto matemático progresiones aritméticas y geométricas, desde aspectos como la fenomenología y su evolución histórica.

El tercer capítulo corresponde a la metodología, está compuesto por enfoque investigativo (cualitativo), las tres categorías de análisis, el diseño metodológico, la unidad de trabajo, la unidad de análisis, las técnicas e instrumentos y por último el plan de análisis.

En el cuarto capítulo se muestran la descripción y el respectivo análisis e interpretación de los datos obtenidos en esta investigación, que permite caracterizar el tratamiento y la conversión de las representaciones semióticas del objeto matemático progresión en la resolución de problemas propuestos en libros de textos escolares.

Finalmente, en el quinto capítulo se exponen algunas conclusiones de la investigación, provenientes del análisis de los resultados de los tres instrumentos, así como las generadas a partir del desarrollo de la investigación. En última instancia, se plantean algunas recomendaciones que, por un lado contribuyen a cualificar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y por otro brindan nuevas orientaciones para futuras investigaciones didácticas y pedagógicas.

CAPÍTULO 1: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 JUSTIFICACIÓN

Considerando que la plena comprensión de los objetos matemáticos no se da por la simple práctica y uso repetitivo de las operaciones algorítmicas, es un hecho su trascendencia hacia la modelación de situaciones y representación de la realidad, etc. Y en concordancia con la hipótesis implícita en esta investigación, donde se concibe que la comprensión de las progresiones se completa a partir de la asimilación y el reconocimiento de sus distintas representaciones, de su noción abstracta, formal y generalizada desde situaciones auténticas, que permita la comprensión desde su evolución conceptual, histórica y epistémica, como se tratan escasamente en los textos de matemática escolares.

En el estado del arte en enseñanza de las ciencias, y en particular desde la educación matemática, muchas de sus investigaciones convergen en que el análisis representacional, histórico-epistemológico y de sus obstáculos relacionados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos desde las diferentes perspectivas de los libros de texto, es una herramienta que fortalece el quehacer pedagógico, porque brinda al docente fuentes de reflexión al momento de planear, diseñar y evaluar actividades de aprendizaje de las matemáticas.

Sin embargo, es escasa la información en didáctica de las matemáticas, relacionada con los procesos cognitivos que demandan las actividades didácticas propuestas en libros de textos, puntualmente para los objetos matemáticos progresiones aritméticas y geométricas; por tanto, los aportes didácticos alcanzados en esta investigación servirán de base para nuevas investigaciones relacionadas; y para los docentes de matemáticas con el fin de complementar su quehacer en el aula, ya que como lo plantea Duval (1999) y otros estudios, las representaciones semióticas favorecen la conceptualización de los objetos matemáticos; en este caso, se analizan transversalmente desde la resolución de problemas y

los obstáculos en convergencia con las representaciones, hallados en las unidades didácticas de los libros de textos seleccionados.

En este sentido, desde el marco legal educativo, se avalan iniciativas que favorezcan el estudio sobre las actividades de formación, tratamiento y conversión de las representaciones que estén comprometidas en la acción matemática:

Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista, es decir, dominar con fluidez distintos recursos y registros del lenguaje cotidiano y de los distintos lenguajes matemáticos. (MEN, 1998 p. 51).

Con relación a las representaciones Duval plantea que, no se puede acceder al concepto de progresiones únicamente a través de una definición como un producto acabado, se requiere promover el desarrollo de las actividades cognitivas con las diversas representaciones, como las expresiones algebraicas, tablas, números, gráficas y lenguaje natural, entre otras; esta actividad involucra formación, tratamiento y conversión entre representaciones. En sintonía “se puede afirmar junto a Duval que, si no se dispone al menos de dos formas o “*Registros de representación*” o “*registros semióticos*” distintas de expresar y representar un contenido matemático, no parece posible aprender y comprender dicho contenido” (MEN, 1998) pág. 54.

En esta investigación, se caracterizan las actividades cognitivas de tratamiento y conversión, para la resolución de problemas referidos a los objetos matemáticos progresiones aritméticas y geométricas en los libros de texto seleccionados; dicho interés obedece por un lado, a que en la práctica docente, durante la enseñanza de matemáticas, es común que cuando el estudiante aprende matemáticas, posee dificultades para efectuar transformaciones en los múltiples registros semióticos en que el objeto está representado matemáticamente. Por otro, la importancia que posee el libro de texto, como principal

recurso didáctico durante la planificación, ejecución y demanda del uso de diferentes registros semióticos.

1.2 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Es común, que en la actualidad los estudiantes conciban a las matemáticas como una asignatura estática, delimitada, centrada exclusivamente en el dominio de habilidades a través de procesos algorítmicos, que se restringen a la ejecución mecánica de procedimientos, a seguir al pie de la letra las orientaciones dadas por los libros de textos, las cuales se muestran obsoletas a las exigencias actuales a la educación matemática, e incluso con poca intervención del docente.

Además, no son tan accesibles las herramientas teóricas que contribuyan a la superación de estas visiones tradicionales del conocimiento matemático, desde aspectos que incorporen activamente las diferentes representaciones semióticas y sus respectivas transformaciones semióticas, es decir, el *tratamiento* de la representación, que alude a la transformación de la representación que se realiza en un mismo registro en el que ha sido formulada, y la *conversión* de la representación, hace referencia a la transformación de la representación de un sistema semiótico a otro sistema, conservando total o parcialmente el contenido de la representación inicial; respecto a la resolución de problemas que permitan el desarrollo de competencias para cualquier objeto matemático y en particular el de las progresiones aritméticas y geométricas.

Además, la experiencia en la enseñanza de la matemática muestra que generalmente los estudiantes de grado once presentan dificultad para realizar actividades matemáticas en las que implícitamente están involucradas las progresiones, por ejemplo, dar solución a situaciones problemáticas, reconocer elementos asociados a situaciones de variación, particularmente establecer regularidades y patrones de comportamiento, así como usar distintas formas de representación y llevar a cabo procesos de generalización; quizás estas

problemáticas obedezcan al mal uso de los libros de textos o a la selección de descontextualizadas actividades propuestas por estos.

Esta dificultad no sólo se evidencia en este grado de escolaridad, sino que según (Posada y Jaramillo, 2003) también se extiende hasta la educación superior puesto que “A los estudiantes de cálculo integral se les dificulta la solución de algunos problemas que tienen que ver con sucesión y series; una posible razón es que no exploran otras alternativas de solución de estos u otros problemas similares”. Estas dificultades quizás atiendan a la incompetencia por parte del docente y en menor proporción del estudiante, y a los libros de textos, por la poca demanda en el uso de diversas representaciones semióticas, para analizar a profundidad cada uno de los problemas y actividades didácticas. Por tanto, se percibe poco desarrollo de las transformaciones de los registros semióticos para los objetos a enseñar en el aula, que permita perfectamente evaluar la comprensión del estudiante, señalar sus posibles obstáculos, desarrollar la capacidad para resolver problemas y favorece la transferencia de sus conocimientos a una gran variedad de situaciones.

Adicionalmente, con la transformación semiótica de conversión, en el caso de las progresiones el estudiante no cuenta con criterios específicos que lo oriente cómo cambiar de registros en representaciones diferentes. Al respecto Duval (2004) reflexiona sobre dos posibles consecuencias de dicha dificultad: por un lado la falta de atención a este aspecto en la enseñanza, porque de manera explícita no se instruye en las acciones de la conversión requeridas para la comprensión del objeto matemático, al considerarlas como una actividad espontánea por parte de los estudiantes; por otro lado, como consecuencia de las complicaciones en el proceso de aprendizaje “... se ha probado que cambiar la forma de representación es, para muchos alumnos de los diferentes niveles de enseñanza, una operación difícil e incluso en ocasiones imposible.” (p. 50).

No obstante, con esta investigación el autor pretende dar solución a la pregunta ***¿Cómo se presentan las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de representaciones semióticas en la resolución de problemas sobre las progresiones aritméticas y***

geométricas propuestos por los libros escolares utilizados por los maestros de matemáticas? La cual, permitirá a su vez, referenciar el tratamiento didáctico y epistemológico abordado en los cinco libros de texto, utilizados frecuentemente en las aulas de matemáticas para la básica secundaria y media.

Los referentes teóricos en los que se enmarca la investigación son la teoría semiótica de las representaciones desarrollada por Duval (1999), desde la que se analizan las dificultades cognitivas que pueden presentar en el aprendizaje los desarrollos teóricos propuestos por cinco libros de texto; desde la postura de la transposición didáctica de Chevallard; y desde algunos desarrollos en torno a la resolución de problemas. Se espera que este análisis contribuya a una caracterización de la enseñanza y del aprendizaje de las progresiones aritméticas y geométricas.

OBJETIVOS

1.3 OBJETIVO GENERAL.

Caracterizar las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de representaciones semióticas en la resolución de problemas sobre las progresiones aritméticas y geométricas propuestos por los libros escolares.

1.3.1 Objetivos Específicos.

- Identificar las representaciones semióticas en las actividades que proponen algunos libros de textos escolares para la comprensión de los objetos matemáticos: progresiones aritméticas y geométricas.
- Reconocer las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas en la resolución de problemas, que proponen algunos textos escolares para el proceso de enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos de progresiones aritméticas y geométricas.
- Identificar los aportes didácticos que brindan este análisis teórico en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las progresiones.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

2.1 ANTECEDENTES

En el ámbito internacional son diversas las investigaciones que han indagado problemáticas asociadas con las transformaciones semióticas (tratamiento y conversión), entre las que se destacan las realizadas principalmente por Duval (1995/1999, 1999/2004, 2006); otros investigadores también reconocidos internacionalmente en el campo de la didáctica de las matemáticas, que han desarrollado investigaciones inscritas a dichas transformaciones semióticas son D'Amore (2006); Godino, Batanero & Font (2007); como la de Font, Godino & D'Amore (2007); y más recientemente la de D'Amore & Fandiño (2008).

Entre tanto, Morales (2013) en su tesis de Maestría en la Pontificia Universidad Católica del Perú, titulada *“Análisis de las transformaciones de las representaciones semióticas en el estudio de la función logarítmica en la educación escolar”* en la cual, emplea como marco teórico a la Teoría de los Registros de las Representaciones Semióticas desarrollada por Duval (1995). Se propone analizar las dificultades presentadas cuando el estudiante realiza actividades de aprendizaje asociadas a la función logarítmica, dichas falencias son analizadas a partir de los registros de representación semiótica y las transformaciones que se efectúan sobre estas representaciones.

El autor pretende expresar el soporte cognitivo de las dificultades que se exteriorizan en el aprendizaje de dicho objeto matemático, se adjudican a las dificultades que poseen los alumnos al realizar tratamientos y conversiones entre registros semióticos al momento de representar la función logarítmica.

Dicho trabajo se realiza con estudiantes del quinto año de educación secundaria, que equivale al grado décimo de nuestro sistema educativo, se logra comprobar que la mayor parte de las dificultades se evidencian al efectuar conversiones no congruentes, que implican algún registro multifuncional, por ejemplo, el registro verbal o registro gráfico;

esas dificultades están relacionadas con la aprehensión perceptiva de los registros gráficos, como también con una comprensión lingüística de los registros verbales.

De igual manera, se acredita una de las hipótesis de Duval, referida a que la actividad matemática está fundamentada en las transformaciones sobre los registros semióticos; por último, el investigador también concluye, que mayor parte de las dificultades se muestran cuando la actividad matemática se hace sobre registros semióticos multifuncionales (registros verbal y gráfico). Advierte que el tratamiento es más recurrente en la actividad matemática; mientras que la conversión se configura como la transformación semiótica que admite transitar de un registro semiótico de mayor dificultad cognitiva a otro registro de menor dificultad cognitiva, con la intención de efectuar tratamientos más cómodamente.

El análisis de este documento, aporta claridad respecto a la coordinación entre distintos registros semióticos que demandan la conversión de registros; así como la congruencia entre varios registros semióticos por la utilización de varios sistemas de representación, en la resolución de los problemas propuestos por los libros de textos.

También, Morales (2013) en la memoria del taller que se publica en las Actas del VII CIBEM realizado en Montevideo Uruguay, titulado “*Resolución de problemas: una mirada a través de los registros de representación semiótica*”. En cuyo taller se plantean situaciones problemáticas formuladas para las olimpiadas matemáticas de Perú y en los exámenes de ingreso a educación superior. La metodología consistió en que el expositor orienta a los participantes para que realicen cada una de las actividades empleando el enfoque para la resolución de problemas de Duval. Con las actividades se pretende evaluar las competencias matemáticas alcanzadas por los estudiantes que cursan el último año de educación secundaria del Perú.

Se encontró que los estudiantes poseen dificultades en la resolución de problemas como consecuencia de la coordinación de los distintos registros implicados. De acuerdo con la teoría de Duval (1999) esos problemas se orientan a partir de un análisis cognitivo sobre las

transformaciones semióticas que efectúa el estudiante cuando aprende un objeto matemático.

El autor plantea que la resolución de problemas demanda de la aplicación de procedimientos (acciones heurísticas) y coherentes operaciones matemáticas; explora en el marco teórico los aportes de los diversos investigadores que intentan alcanzar un método eficaz para lograr la resolución de problemas, en ellos a Polya (1945), de igual manera Schoenfeld (1985), y De Guzmán (1993), entre otros; sin embargo, ampara el que procede del enfoque cognitivo de la teoría de Duval (1995), esta enfoque propone:

-*Fase I*: se parte de problemas del contexto expresados principalmente desde el registro verbal con datos.

-*Fase II*: se procede a la conversión de expresiones simbólicas que favorezcan transformaciones semióticas adecuadas.

-*Fase III*: La solución del problema se obtiene al realizar tratamientos dentro del registro simbólico (algebraico o aritmético).

Este trabajo, brinda a la presente investigación una perspectiva más clara de la resolución de problemas, lo que facilitará el análisis en cada uno de los problemas propuesto a los libros de textos.

Por su parte, desde el ámbito nacional, se destaca el trabajo investigativo elaborado por Gutiérrez y Parada (2007), desarrollan una tesis de Maestría en la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, que titula “*Caracterización de tratamientos y conversiones: El caso de la función afín en el marco de las aplicaciones*”. Donde efectúan una caracterización de las transformaciones que propone un grupo de educandos de la Escuela Colombiana de Ingeniería, al plantearse situaciones de variación que son factibles a modelarse por medio de la función afín, para posteriormente ser analizadas esas producciones escritas por los investigadores.

Esa investigación está fundamentada por la teoría de registros de representaciones semióticas desarrollada ampliamente por Duval, la cual aporta aspectos puntuales al marco conceptual, y da pie tanto a la selección de categorías de análisis como a las situaciones de variación.

Los investigadores optan por una metodología cualitativa interpretativa, empleando como instrumento de recolección de datos un cuestionario que, seccionado por tres situaciones didácticas de la variación planteadas desde el registro verbal, (temperatura, vaciado de tanques y posición) sin evidenciar el presunto registro de representación esperado en la respuesta y que vislumbran indicios de no congruencia.

Los investigadores hallaron que los estudiantes ostentan diversas transformaciones en los registros semióticos, tanto tratamientos como conversiones al momento de dar solución a las actividades propuestas en el instrumento; sin embargo, esas producciones escritas reflejan falencias en la articulación entre registros semióticos, como consecuencia de los fenómenos de no congruencia entre registros semióticos; del mismo modo, las representaciones elaboran para registros semióticos distinto al verbal varían de acuerdo a la situación didáctica.

La pertinencia del trabajo investigativo realizado por Gutiérrez y Parada (2007), para la presente investigación radica en que permite analizar de manera análoga las conversiones a la luz de la congruencia como la no-congruencia entre registros semióticos que favorecen la resolución de problemas propuesto por los textos escolares, lo que implica que el análisis de la resolución de problemas se deberá realizar en términos de las unidades significantes.

Igualmente, González (2011) en su tesis de maestría denominada *Tratamiento de las representaciones semióticas de la función cuadrática*, detalla y examina el tratamiento de las representaciones semióticas realizado por los estudiantes del grado noveno del Instituto Agropecuario Veracruz al objeto matemático función cuadrática, así como identificar las

unidades significantes de dichas representaciones semióticas en los registros algebraico, gráfico y verbal.

Este investigador concluye que las estrategias de enseñanza y aprendizaje utilizadas por los educadores benefician los tratamientos cuasi-instantáneos que parten con su propio conocimiento matemático, además infiere que los estudiantes generalmente acuden a las representaciones algebraicas o auxiliares. Este trabajo aporta a esta investigación, claridad para identificar y caracterizar cada una de las posibles transformaciones dentro de en un mismo registro de representación semiótica; con la intención de reconocer el sentido y las posibilidades de transformación, que pueda evocar cada uno de los problemas propuestos en los libros de textos seleccionados.

Otra trabajo de investigación relevante es la de Osorio (2011), titulada *Representaciones semióticas en el aprendizaje del teorema de Pitágoras*, realizado con estudiantes de 7° de educación básica de la Institución Educativa Santo Domingo Sabio del municipio de Balboa en el departamento de Risaralda Colombia; esta tesis se interesa por reconocer las actividades cognitivas de tratamiento y conversión, que efectúan los estudiantes respecto al concepto de teorema de Pitágoras; el enfoque de este trabajo investigativo fue cualitativo, con análisis en teoría establecida.

Como resultado de dicho proceso, la autora confirma lo planeado por Duval (2004), donde se esboza que mientras más representaciones semióticas se impliquen en torno a un objeto matemático y dentro de las mismas se provean condiciones de congruencia, se alcanza mayor aprendizaje entre lo que representa y lo representado, al igual que la representación semiótica y objeto matemático; además permite reconocerlo entre múltiples contextos de representación y admite instaurar procesos de modelización, ya que es el reconocimiento de la invariabilidad en las distintas representaciones lo que posibilita el aprendizaje. Esta investigación permite evidenciar que las representaciones semióticas y más precisamente sus transformaciones, inciden directamente en las actividades y recursos

didácticos que se utilizan durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de un objeto matemático.

Del mismo modo, Ospina (2012) en su tesis de maestría denominada *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal*, cuyo trabajo investigativo lo realiza con los estudiantes de grado octavo del Colegio Eugenio Pacelli de Manizales, donde les asigna situaciones didácticas asociadas al concepto matemático función lineal, cuyo desarrollo requiere de las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de representaciones semióticas; la investigación obedece a un enfoque cualitativo-interpretativo, recurrió a el audio y el video como técnicas de observación. Como instrumentos para la recolección de información implementa dos cuestionarios escritos.

Esta autora concluye a modo general que entre más representaciones semióticas se impliquen en el proceso de aprendizaje del concepto matemático función lineal, y al interior de sus representaciones se proporcionen condiciones de congruencia, se consigue aprendizajes profundos; además logra que el estudiante diferencie entre la representación semiótica del concepto matemático y el objeto matemático propiamente representado; le permite diferenciar cada una de las unidades significantes y corresponderlas con otros registros, dado que es el reconocimiento de la invarianza entre las unidades significantes lo que posibilita la aprehensión del concepto matemático (Duval, 2004). Esta investigación, aporta elementos esenciales para la construcción del instrumento que permite caracterizar los registros semióticos, además contribuye a la conceptualización de la teoría de las representaciones semióticas en el marco teórico.

Por otra parte, los conceptos de *progresiones* y sus respectivas series están formulados implícitamente en los Estándares Básicos de Competencias propuesto por (MEN, 2006), en los que:

En el *Pensamiento Variacional y los sistemas algebraicos y analíticos*

-Describir cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.

-Reconocer y generar equivalencias entre expresiones numéricas.

Pensamiento Numérico y sistemas numéricos

-Reconoce progresiones aritméticas y sus propiedades.

-Deduce fórmulas para un término cualquiera, así como la suma de los términos de una progresión aritmética.

-Deduce fórmulas para un término cualquiera, así como la suma de los términos de una progresión geométrica.

-Identifica fenómenos en la física, la ingeniería, la economía u otras ciencias que pueden modelarse mediante progresiones aritméticas y geométricas.

-Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros).

Pensamiento Aleatorio y sistemas de datos

-Clasificar y organizar la presentación de datos (relativos a objetos reales o eventos escolares) de acuerdo con cualidades o atributos.

-Identificar regularidades y tendencias en un conjunto de datos.

De este modo, se observa una coherencia horizontal en los estándares, la cual significa que la enseñanza de las progresiones se puede abordar desde diferentes tipos de pensamientos matemáticos, desatendiendo a la idea de asumirlas únicamente desde los contextos numéricos.

También es pertinente para la investigación, lo propuesto por Rangel (2012) quien expresa que usualmente se aborda las progresiones aritméticas y geométricas, desde un punto de vista esquemático, formal, algorítmico, sin prestar atención a las ideas previas sobre los patrones y regularidades que subyacen al concepto de sucesión y de progresiones aritméticas y geométricas. Y menos aún su evolución histórica y epistemológica.

Con respecto al proceso de enseñanza y aprendizaje de estos objetos matemáticos, Ortega (2012) propone que se pueden enunciar diversos errores y dificultades relevantes que poseen los estudiantes en cuanto al tema de progresiones. Estas dificultades que propone el autor, pueden estar relacionadas a las sugerencias estructuras conceptuales que proponen los libros de textos, e incluso suelen ser exactamente las mismas que se encueran en las unidades didácticas de los textos de matemáticas. Dentro de las dificultades que presentan los alumnos al manejar los dos tipos de progresiones (aritmética y geométrica) se pueden mencionar:

- Presentan gran dificultad para relacionar a las progresiones en un contexto de la vida cotidiana, por ejemplo, crecimiento de poblaciones, interés simple, interés compuesto, etc. Y a los autores de libros de textos también les cuesta mucho.

- Se les dificulta relacionar a la progresión con el concepto de función.

- No son capaces de relacionar los conceptos de variación, ecuación, tasa de cambio, razones y proporciones con el concepto de progresión.

- *Presentan problema al identificar los diferentes tipos de representaciones semióticas (tabular, algebraica, verbal, gráfica, etc.) que pueden tener las progresiones.*

- *En el caso particular de las progresiones aritméticas, la exagerada habilidad algorítmica de cálculos y aplicación de fórmulas cohibe la verdadera comprensión de la representación matemática estudiada.*

Para minimizar estos obstáculos de naturaleza epistemológica, cognitivo-lingüística, emotiva, afectiva y ontológica, es pertinente considerar que, en la comprensión profunda de estos conceptos matemáticos, es relevante el reconocimiento de sus distintas representaciones, las cuales indican la calidad y el alcance del aprendizaje adquiridos por los estudiantes. En este sentido, algunos investigadores como (Duval 1999, Rivière 1986, Tamayo et al. 2011), sustentan que para alcanzar aprendizajes en profundidad es necesario recurrir a múltiples sistemas de representación, de tal modo que los estudiantes estén capacitados para representar un mismo fenómeno de diversas maneras, de esta forma alcanzarán aprendizajes más cualificados que aquellos que utilizan un solo registro semiótico para representar la tarea.

Por último, en esta investigación se considera la importancia del papel que juegan los libros de texto en el aula, en este sentido, Serrano (2012) propone que en los últimos años estos, han sido objeto en una importante fuente de investigación. De este modo, existen investigaciones como las realizadas por Schubring (1987), Ruesga, Valls y Rodríguez (2006), Monterrubio y Ortega (2012) por ejemplo, en las que aseveran que muchos de los casos, el uso cerrado de los libros de texto por partes de los docentes, condicionan y determinar el currículo más que las leyes educativas. Por su parte González y Sierra (2004), comentan que los libros de textos han presentado diversos roles: por un lado, como objeto de estudio en investigaciones, así como material de consulta; también como herramienta que permite registrar el desarrollo de las actividades del alumno; y, como repertorio de problemas a resolver y ejercicios propuestos. Para otros investigadores como Parcerisa (1996); Santos (1991); Herdeiro, (2010); Pino y Blanco, (2008) priorizan en que el libro de texto debería ser un recurso didáctico abierto en el que no es obligatorio los contenidos sean específicos.

Los referentes teóricos educativos se nutren de las investigaciones previas en educación matemática, además los libros de texto tienden a ajustarse a los referentes, normativas y disposiciones didácticas que comparen las comunidades investigadoras, evidenciándose en

las discrepancias presentes tanto en la estructura, como en la organización de los contenidos en cada una de las ediciones.

Unos de los intereses por realizar una revisión crítica de los libros de textos en esta investigación, es alcanzar un uso eficaz enfocado a la optimización de la enseñanza y el aprendizaje de las progresiones. Como asegura Azcárate y Serradó (2006), su importancia para el docente como recurso didáctico básico se refleja en el cúmulo de investigaciones desarrolladas en los últimos años referentes a esos; y que demuestran la imperiosa influencia de los libros de texto la planeación, ejecución y evaluación de las actividades didácticas del aula.

2.2 LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

En la actualidad, el estudio de aspectos asociados con la semiótica se está desarrollando en y a partir de diversos campos y disciplinas científicas; concretamente, se ha avanzado en el estudio de los sistemas semióticos específicos de cada disciplina, reconociendo como sistema semiótico por excelencia al lenguaje natural. En particular, desde la didáctica de la matemática, Duval (1995/1999) con su enfoque estructural-funcional, acentúa que todo comienzo en las matemáticas transita desde una adaptación paulatina e individual de sistemas semióticos de representación concretos, para lo cual reconoce la importancia de emprender semióticamente la comunicación de las matemáticas.

En los procesos de enseñanza y aprendizaje, en especial para las matemáticas se hace indispensable diferenciar dos tipos de representaciones: las mentales y las externas (semióticas). Para Duval (2004) estos dos tipos de representación se relacionan recíprocamente, sugiere que no deben ser consideradas como dominios diferentes, ya que el desarrollo de las representaciones mentales se da mediante la interiorización de las representaciones semióticas y la multiplicidad de los registros semióticos de un objeto y sus respectivas transformaciones, incrementando de este modo en el sujeto la capacidad cognitiva, y en consecuencia, sus representaciones mentales.

Igualmente, las representaciones externas o semióticas, empleadas y expresadas mediante registros (como el lenguaje natural, gráficos, símbolos, números, fórmulas algebraicas, etc.), son el medio más pertinente por el cual se generan nuevos conocimientos, se exteriorizan las representaciones mentales y se vuelven accesibles.

Esto implica, necesariamente tener en cuenta que, en las matemáticas en contraste a la mayoría de disciplinas, es imposible acceder a sus objetos de modo tangible, sino únicamente a partir de sus representaciones, empleando diversos sistemas semióticos de representación, los cuales demandan ser apropiados por el sujeto que aspire alcanzar conocimientos y comprender profundamente los objetos matemáticos.

Desde este enfoque, se propone el concepto de representación semiótica (Duval, 1999, 2006) para hacer referencia a un sistema particular de signos que consiguen convertirse a representaciones análogas en otro sistema semiótico. Conjuntamente, son consideradas representaciones conscientes y externas. Estas cumplen la función de objetivación y comunicación, así como la función de tratamiento, esto es, como uso práctico en un sistema semiótico. Además, Duval (1999/2004, p. 16), propone que cada una de las representaciones semióticas las constituye tres polos bien diferenciados, el primero es el *objeto* representado; el segundo alude al *contenido* de la representación, en otras palabras, lo que la representación presenta del objeto; y la *forma* de la representación, esto es, su registro o modalidad.

Por su parte, el concepto de representaciones semióticas, también es complementado por Puig (como se citó en García & Campuzano, 2015) al considerar a los objetos matemáticos, como producciones constituidas de signos, no obstante, las representaciones semióticas serán el medio del cual se dispone para reconocer las representaciones mentales que posee el sujeto y, por lo tanto, permite la comunicación, pero del mismo modo están sujetadas a la actividad matemática.

Estas definiciones permiten suponer que el aprendizaje de las progresiones se desarrolla por medio de sus representaciones semióticas, y únicamente a través de ellas; la integración a las actividades didácticas en los libros de textos conlleva a su comprensión. Por ende, la demanda, disposición y recurrente utilización de numerosos sistemas de representación semiótica, así como las actividades cognitivas son indispensables para reconocer y acceder al aprendizaje del objeto matemático.

De ese modo, los contextos de representación, o precisamente, los sistemas en los que participan las representaciones, son inevitablemente semióticos, ya que los signos notaciones y expresiones matemáticas representadas de diversos registros, cumplen el papel de expresar el objeto matemático abstracto e ideal. De acuerdo con Duval (1999), a todo sistema representacional semiótico le corresponde obedecer tres condiciones cognitivas: inicialmente, ser representación de algo; el tratamiento de las representaciones que vincula debe estar acorde con las reglas del sistema semiótico, y por último, debe permitir el tránsito de un registro semiótico a otro.

De este modo, lo importante no es propiamente la representación como si lo es el sistema semiótico que facilita su producción; esto permite considerar que “una representación no puede ser comprendida independientemente del sistema que permitió producirla”. (Duval, 1999/2004, p.43). Asimismo, designa como *registros semióticos* a los sistemas con reglas que posibiliten combinar signos, además de “efectuar a su interior transformaciones de expresión o de representación” (p.44). Por consiguiente, hacen parte todos los registros que permitan transformar cualquier representación semiótica en otra. Se debe precisar que, todo registro semiótico es o puede ser un sistema de representación, pero no todo sistema de representación es un registro semiótico. Para entender lo anterior, considere como un sistema semiótico de representación al conjunto de las señales de arbitraje, sin embargo, no se pueden catalogar como registros semióticos por la imposibilidad de transformar representaciones; como si lo hacen los registros semióticos empleados en matemáticas.

Asimismo, manifiesta que se recurre a la expresión registro como una forma de “designar la perspectiva que consiste en analizar los conocimientos desde la óptica de la adquisición no de los objetos sino de los sistemas productores de representaciones que permiten al sujeto alcanzar tales objetos” (p. 64).

2.2.1 Las actividades cognitivas

Este primer referente teórico, facilita la comprensión sobre cómo se da el proceso de la conceptualización de los diversos objetos matemáticos, de qué forma interactúan las tres actividades cognitivas: formación, tratamiento y conversión, con respecto a las representaciones semióticas del objeto.

En este sentido, Duval (1995/1999) destaca que se evidencian (y se debe posibilitar) al interior de cada registro representacional de un objeto matemático tres actividades cognitivas: La primera es la *formación* de una representación en un registro proporcionado. Esta permite la elección de un registro semiótico, desde el cual se promuevan sistemas de signos ostensibles, que logren ser reconocidos como representación de un objeto, desde un registro semiótico particular. La segunda es el *tratamiento* de una representación, hace referencia a la transformación interna de una representación semiótica, desde un mismo registro semiótico de representación, para lograr otras representaciones, en la que se hace uso exclusivo de las reglas propias del sistema. Y, la *conversión* de una representación, es la transformación de una representación semiótica de cierto registro, en otra representación semiótica de un registro diferente, en la que se conserva total o parcialmente el significado de la representación inicial.

Para examinar el proceso de tratamiento de las representaciones semióticas, utilizadas en los libros de textos en la resolución a los problemas, propuestos como ejemplo en la enseñanza de las progresiones aritméticas y geométricas, es oportuno tener en cuenta lo propuesto por Duval al referirse a esta transformación: “...para hacer posible la utilización de los medios de tratamiento que ofrece ese sistema semiótico empleado. Una

representación semiótica no debe salirse del dominio definido por las reglas que constituyen un sistema semiótico” (p 43) a estas reglas Duval las denomina “*reglas de conformidad*”. La primera de estas reglas hace referencia a “*la determinación de unidades elementales*”, la segunda a “*las combinaciones admisibles de estas unidades elementales para formar unidades de orden superior*” y por último, a “*las condiciones para que una representación de orden superior sea una producción pertinente y completa...*” (p.43)

Para analizar el proceso de conversión de las representaciones semióticas, utilizadas en los libros de textos para cada una de las resoluciones a los problemas, propuestos como ejemplo en la enseñanza de las progresiones aritméticas y geométricas, es pertinente tener en cuenta las dos características propias de la conversión, expresadas por Duval (2004), la primera manifiesta que este proceso es *orientado*, es decir, posee registro semiótico de partida y registro semiótico de llegada; y la segunda declara que puede *ser o no congruente*. En correspondencia a la última, Duval (1999) cataloga que el proceso de conversión es *congruente*, si al fragmentar cada una de las representaciones en sus respectivas unidades significantes, estas entendidas como los valores que pueden tomar las diversas variables, en otras palabras, todo lo que emana del léxico de un registro, para colocarlas en correspondencia; propone que se requiere considerar inevitablemente los tres siguientes criterios, si falla al menos uno, se dice que no hay congruencia:

Un primer criterio es denominado *correspondencia semántica* (CS) entre las unidades significantes propias a cada registro, este criterio de congruencia hace referencia en que, a cada unidad significativa elemental del registro semiótico de partida, se debe asociar con una unidad significativa elemental en el registro semiótico de llegada. El segundo criterio de congruencia denominado *univocidad semántica terminal* (UST) se refiere a que cada unidad significativa elemental de la representación en el registro semiótico de partida le debe corresponder una única unidad significativa elemental en el registro semiótico de llegada. Y, el tercer criterio es la *conservación del orden de organización* (COO) de las unidades significantes elementales en las representaciones, pretende reconocer si se conserva o no igual orden posible de aprehensión de las unidades significantes elementales,

en la representación semiótica de salida en la representación semiótica de llegada para cada registro.

Cada una de estas actividades cognitivas debe ser analizada y descrita por separado; en el caso particular de esa investigación, interesa conocer lo que demanda el tratamiento y la conversión en la resolución de problemas en los libros de textos para la comprensión del objeto progresiones. De este modo, la comprensión conceptual implicará la utilización y coordinación de los varios sistemas semióticos, al igual que el conocimiento de la manera específica de representar cada sistema semiótico.

Asimismo, desde los alcances de la teoría de Duval, se considera que las dificultades para transitar entre representaciones semióticas se pueden interpretar como la derivación de una incompleta conceptualización del objeto matemático.

Las representaciones ajustadas a cada registro semiótico, son comunes y asequibles al estudiante, debido a que son el único medio de acceso que tiene para reconocer los objetos matemáticos, y como lo asegura Duval (1999): “La conversión de registros de representación constituye una variable que se revela fundamental en didáctica porque facilita considerablemente el aprendizaje ya que ofrece procedimientos de interpretación” (p. 59). De esta manera, se pretende analizar las actividades propuestas para el aprendizaje de los conceptos progresiones por algunos libros de texto y poder distinguir estos objetos matemáticos de sus representaciones semióticas.

Los registros de representación semióticos son ineludibles para alcanzar una comprensión de un objeto matemático, a partir de la utilización y coordinación de los mismos. Es importante tener en cuenta que ninguna representación semiótica por sí sola, agota completamente al objeto matemático, no obstante, posibilita que el estudiante cualifique el conocimiento, especialmente al ser capaz de transitar de un registro a otro (Duval, 1999). Sin embargo, el tránsito de un registro representacional a otro no es tan común para la mayoría de los estudiantes; además, la experiencia muestra que tampoco es

tan evidente en gran parte de los problemas que se proponen en los libros de textos; en tal sentido, Duval (2006) discurre hacia la conversión como una actividad cognitiva de vital importancia, puesto que por un lado, viabiliza la coordinación entre los registros de representación, por otro, admite que los estudiantes sean competentes para relacionar diversos modos de representar los objetos matemáticos; también cataloga a la conversión, como el primer umbral de la comprensión para el aprendizaje de las matemáticas. Para comprender el proceso de conversión, es pertinente reconocer las categorías que abarca, entre las que se destaca la congruencia y la designación de objetos y sus respectivas subcategorías.

2.2.2 Los registros de representación semióticos

Debido a la gran multiplicidad de representaciones semióticas empleadas generalmente en las matemáticas, que además de comúnmente recurrir a los sistemas de numeración, se utilizan distintas como las escrituras algebraicas y formales, las figuras geométricas e icónicas, las representaciones gráficas y una lengua natural (en lenguaje corriente y técnico), entre otras. Es precisamente para la facilitar la designación de los diferentes tipos de representaciones semióticas utilizados en las matemáticas, que se recurre al término *registro* de representación semiótico.

Teniendo en cuenta que el objetivo de la investigación busca identificar cómo se presentan las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de representaciones semióticas del objeto matemático progresiones aritméticas y geométricas, en los problemas propuestos en algunos libros escolares utilizados por los maestros de matemáticas, se hace relevante distinguir los registros de representación comúnmente utilizados en las matemáticas. Para Duval 2004 citado por Ospina (2012) “En matemáticas se utilizan cuatro clases de registros de representación: discursivos, no discursivos, plurifuncionales y monofuncionales” (p. 43).

En este sentido, Duval (2004) explicita cada uno de registros anteriormente expresados, por los *registros plurifuncionales* se asumen aquellos registros a los que generalmente se recurren, en la mayoría de los dominios de la vida cultural y social; además poseen la primacía de facilitar significativamente los tratamientos. Pero dichos tratamientos no son algoritmizables. A su vez, este tipo de registros se subdividen en *discursivos*, como aquellos que utilizan una lengua. Estos registros permiten explicar, argumentar, describir, inferir, razonar, calcular, etc. En las representaciones semióticas procedentes de los registros discursivos, sólo se puede desarrollar una *aprehensión sucesiva o secuencial*. También pueden ser *no-discursivos* en contraste a los discursivos, revelan formas o configuraciones de formas, al igual que organizaciones; permiten visualizar lo que no es proporcionado de manera visible, por tanto, en las representaciones semióticas procedentes de los registros no discursivos, únicamente se puede obtener una *aprehensión sinóptica*. En este tipo de registro se inscriben las figuras geométricas.

Los registros *monofuncionales* admiten tratamientos, principalmente de tipo algorítmico; este prototipo de registro es el más utilizado para los procesos de enseñanza; también pueden ser discursivos o no discursivos, hace parte de los registros monofuncionales discursivos las representaciones algebraicas, numéricas y simbólicas; mientras que en los registros monofuncionales no discursivos se inscriben las gráficas cartesianas, donde su tratamiento hace referencia a cambios de escala o unidades en los sistemas de coordenadas, la extrapolación y la interpolación.

La importancia de reconocer totalmente el conjunto de registros anteriormente especificados, para utilizarse durante los procesos de enseñanza y aprendizaje, radica en que admite la adquisición de conocimientos, como lo asegura Duval (2009) al afirmar que “la comprensión de un contenido conceptual reposa sobre la coordinación de al menos dos registros de representación, y esa coordinación se manifiesta por la rapidez y espontaneidad de las actividades de conversión” (p.63).

Tabla 1. Principales registros de representación del objeto matemático “Progresión”.

Clasificación	Registro Representacional ²	Unidad significante ³	Actividad Cognitiva	
			Tratamiento	Conversión
MONOFUNCIONALES. Los tratamientos son principalmente algoritmos.	DISCURSIVO	SIMBÓLICO (RS)	-Deducir la	-Explicar el
		$\{a_n\} = \{a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, a_1 + 3r, \dots, a_1 + (n-1)r\}$ En este registro, se emplean sistemas de notación simbólica ajustada al lenguaje matemático.	conjuntista. -Primer término (a_1) . -Razón común (r) . -Término general (a_n) .	significado de una expresión. la expresión simbólica.
MONOFUNCIONALES. Los tratamientos son principalmente algoritmos.	DISCURSIVO	NUMÉRICO (RN)	-	- Obtención
		$5, 2, -1, -4, -7, \dots$ Este tipo de registro representacional admiten considerar algunas de las tipologías y parámetros identificados de las progresiones, de igual manera acepta relacionarlos y	-Primer término (5). -Diferencia común (-3). -Término anterior.	Identificación de una sucesión y cálculo de su término. -Encuentre el término que falta.

² Los registros referenciados en esta tabla, tiene la intención de ejemplificar, por tanto, no corresponde a la totalidad de registros semióticos asociados a las progresiones. Algunos corresponden a las aritméticas y otros a las geométricas.

³ Conjunto de parámetros, signos, caracteres o rasgos propios de un sistema semiótico de acuerdo con las posibilidades de representación del registro, con el fin de representar las características principales de las progresiones.

vincularlos con representaciones gráficas y geométricas.

Otro rasgo de este registro, es que permite efectuar operaciones de cálculo y emplear propiedades como la distributiva, conmutativa, etc. necesarias para la resolución de diversos problemas.

ALGEBRAICO (RA)	-Diferencia común (<i>d</i>).	-Cálculo del valor de un parámetro desconocido de la progresión	-Cálculo de elementos de una progresión a partir de otros parámetros.
$a_n = a_1 + (n - 1)d$	-Primer término (<i>a</i>₁).	o de la progresión conociendo los demás, por reemplazo de variables y procesos Aritméticos.	
El registro algebraico aprueba la realización de modelizaciones, generalizaciones y señalar características particulares de las progresiones.	-Término anterior (<i>n</i> - 1).		
	-Término general (<i>a</i>_n).		
		Identificación de los parámetros de las Fórmulas.	

GRÁFICO (RG)



El RG viabiliza la realización de inferencias, a primera vista sobre aspectos cualitativos de la progresión; en tareas modeladas por las TIC, permite efectuar tratamientos en cada una de las unidades significantes, lo que conlleva a reconocer y patentar elementos invariantes, que conlleva a evaluar el papel de los parámetros.

- Eje x (número de términos)
- Eje y (valor del parámetro)
- Relacionar la variación de punto a punto.
- Correlacionar la variación entre la abscisa y la ordenada.
- Modelar algebraicamente situaciones de crecimiento y decrecimiento.

TABULAR (RT)

Sucesión aritmética	d	a_1	a_{100}	a_n
a) 2, 5, 8, 11,...				
b) 1, 5, 9, 13,...				
c) -12, -8, -4, 0,...				
d) 2, 2+5, 2+25, 2+35,...				

En este registro los datos asociados a las progresiones se exteriorizan a través de un vínculo entre filas de columnas; de modo que

- Diferencia común (d).
- Primer término (a_1).
- Término anterior ($n - 1$).
- Término general (a_n).
- Completa los elementos de la tabla.
- Realizar una tabla para modelar variaciones.
- Representar el contenido de la tabla en una gráfica cartesiana.

DISCURSIVO

permite visualizar dichos
datos de manera global, así
como establecer relaciones y
comparaciones, para descubrir
características y propiedades
de las progresiones

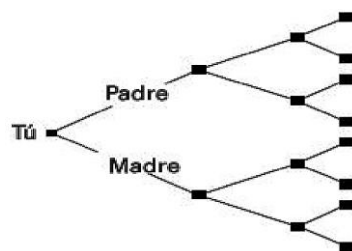
Una **progresión aritmética** es un tipo de sucesión en la cual cada término, excepto el primero, se obtiene de sumar al término anterior un número fijo d llamado diferencia común.

VERBAL - REGISTRO DE LA LENGUA NATURAL (RV)

Permite introducir definiciones, del mismo modo caracterizar, describir o designar aspectos asociados a otros registros

-Primer término.	- Descripción del proceso a seguir.	-Resolver situaciones problemas utilizando otros registros diferentes al verbal.
-Diferencia común.		
-Término anterior.	-Explicar lo expresado en un texto.	

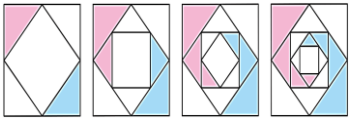
FIGURAL - ICÓNICO (RF)



Esta clase de registro comprende los esquemas, dibujos, líneas, croquis, marcas, bosquejos, entre otras, que intentan representar la noción de progresión, sin

-Primer término (1).	- Identificación de formas secuenciales en otros contextos.	- Relacionar los parámetros de la progresión con otros elementos del problema.
-Diferencia común (1/2).		

especificar las características y cualidades de los aspectos implicados.

NO DISCURSIVO	GEOMÉTRICO (RGM)	-Primer término	-Analizar figuras,	-Representar en tablas las dimensiones
	 Este tipo de registro tolera operaciones de manipulación y reconfiguración, que proporcionan la comprensión y la instauración de vínculos entre las progresiones.	(<i>pentagono</i>). -Diferencia común (1 pentágono).	probar, construir, etc. -Observar una figura, o de describir su construcción.	de una figura. -Describir la variación con que crece o decrece el cuerpo geométrico. -Hallar fórmulas que describa lo representado por la sucesión de figuras.

Fuente: Adaptado de Ospina (2012) para el objeto matemático progresión.

2.3 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LAS MATEMÁTICAS

La resolución de problemas es amplio campo de estudio, que ha influido considerablemente en el desarrollo de la investigación en educación matemática, así como en las propuestas curriculares de las matemáticas y sus respectivas prácticas de aula. Este amplio proceso ha sido contemplado como un contenido, una competencia matemática, una metodología, un proceso curricular, una práctica habitual durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, entre otras. Esos aspectos implican que, se debe incluir en el diseño curricular, durante su ejecución y evaluación del proceso educativo. De manera que la resolución de

problemas se integra a cualquier aprendizaje de las matemáticas, por tal motivo, debería ser el aspecto central en la organización de los contenidos.

Así mismo, desde los referentes teóricos en educación matemática, se plantea incorporar activamente la resolución de problemas en los procesos de enseñanza y aprendizaje como eje fundamental, que permita, además de la comprensión y conceptualización de los objetos matemáticos, el respectivo análisis de dichos procesos. Esta quizás es, una de las razones por las que, en la actualidad los libros de textos tienden a incluir masivamente la resolución de problemas en cada una de las etapas de sus unidades didácticas.

Sin embargo, la inclusión en el aula sin un coherente tratamiento didáctico, puede generar en los estudiantes dificultades e incluso obstáculos de diferente naturaleza, las cuales no se relacionan directamente con la asimilación del contenido, sino con la imposibilidad de transferirlo o aplicarlo en otros contextos y situaciones.

Por otro lado, es pertinente la resolución de problema en las prácticas de aula, porque permite al estudiante evidenciar el desarrollo histórico de las matemáticas, por ejemplo, comprender que estos emergen inicialmente para la construcción de los objetos matemáticos y posteriormente para su aplicación en diversos contextos. En concordancia con Martínez (2010), quien expresa que la resolución de problemas es una de las actividades esenciales en Matemáticas. Se ha convertido en un verdadero impulsor para el desarrollo de las matemáticas, ya que, a través de la historia han surgido diversos tipos de problemas que provocaron evolución en las matemáticas, como consecuencia, a la necesidad comprender oportunamente las diferentes situaciones y fenómenos.

De acuerdo con Godino (2002) la resolución de problemas no es únicamente uno de los fines de la enseñanza de las matemáticas, también es, el medio fundamental para conseguir el aprendizaje; dado que le permite al aprendiz oportunidades de plantear, examinar y resolver situaciones que requieran un esfuerzo significativo. Es precisamente, en la resolución de problemas donde los estudiantes consiguen modos de pensamiento

adecuados, despiertan la curiosidad, desarrollan hábitos de persistencia, perspicacia y confianza al sortear situaciones nuevas y retadoras. Lo que muestra que ser competente para resolver problemas puede ser útil en actividades extra clase, en la vida profesional y diaria.

Por consiguiente, la resolución de problemas debe articular intrínsecamente el proceso de estudio de cada uno de los pensamientos matemáticos. Los contextos que deben favorecer deben ser las mismas matemáticas, así como aplicaciones a otras ciencias; aspectos de la cotidianidad de los estudiantes; al medio ambiente y la tecnología.

Una educación en la que se privilegie la resolución de problemas, permite una visión más dinámica de las matemáticas, de igual manera cambia la apariencia lineal de los componentes curriculares. Lo que implica, la posibilidad de instaurar relaciones entre cada uno de los cinco tipos de pensamiento matemático (el variacional, el numérico, el espacial, el aleatorio o probabilístico y el métrico o de medida), con otras áreas del saber y con situaciones planteadas desde las mismas matemáticas, las demás ciencias o desde contextos cotidianos.

Favorecer un papel de eje organizador a la resolución de problemas, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, posee importantes implicaciones didácticas, entre las que se destaca, la consecuencia con la importancia que prestan los matemáticos a dicha actividad, y en términos generales con el modo en que se desarrolla el pensamiento matemático en sí; por tanto, cobra sentido en el aula el quehacer matemático.

En particular, la importancia otorgada en la presente investigación a la resolución de problemas, radica en que son precisamente los “problemas”, propuesto como modelos o ejemplos y sus respectivas resoluciones, los que se analizara de manera detallada en cada uno de los textos de muestra. En concreto, los libros de texto presentan la resolución de problema como un contenido escolar, que favorece la formación intelectual y científica de los estudiantes.

En este orden de ideas, Duval (1999) sustenta que una importante acción para la resolución de problemas es comprender los enunciados, lo que demanda esencialmente una tarea de conversión, en vista a que requiere discriminar en el enunciado la designación de los objetos acertados, es decir, redescubrir el enunciado por medio del tratamiento intermedio que permita segregar las unidades significantes elementales y representarlas coherentemente por parámetros, signos, variables, caracteres o rasgos. En este sentido, García (2005), sostiene que dicha actividad cognitiva es sustancial en la resolución de problemas matemáticos, ya que la conversión está relacionada, por un lado, con la generación de modelos matemáticos proveniente de la información del problema, y por otro con la posible transformación a diferentes representaciones semióticas que admita el modelo.

Dado que, lo que se pretende es analizar las actividades cognitivas de tratamiento y conversión en la resolución de problemas, que explican el objeto progresión en los cinco libros; involucra de manera implícita prestar atención al tipo de estrategia heurística que favorece cada texto, en este sentido, se analiza a la luz del modelo para la resolución de problema propuesto por Duval (s.f.) sobre las etapas de la resolución de problemas, que propone tres fases: en la fase I: se parte de problemas contextuales expresados en el registro verbal con datos. En la fase II: se procede a la conversión en expresiones simbólicas que permitan las transformaciones semióticas pertinentes. Por último, en la fase III: se da solución al problema por medio de la realización de tratamientos en el registro simbólico (algebraico o aritmético).

2.4 LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA EN LOS LIBROS DE TEXTO.

La "Transposición Didáctica" es un fenómeno por el cual el conocimiento científico se transforma para ser enseñado. De acuerdo con Chevallard (1991), al conjunto de fases por las que un objeto de saber se transforma en objeto de enseñanza se le denomina "transposición didáctica en sentido amplio", pero a la transformación de un objeto a enseñar a un objeto de enseñanza corresponde con la "transposición en sentido estricto".

Como consecuencia de estas fases, el conocimiento adopta distintas modalidades y funciones que las utilizadas normalmente desde el saber propiamente científico, dadas las incomparables pretensiones de donde emergen.

Referente a ello, desde la sociología Verret (1975), quien plantea el argumento de la imposibilidad de enseñar a los estudiantes los saberes: “sólo se pueden enseñar sus sustitutos didácticos”; también ostenta a la desincronización, despersonalización y programabilidad como etapas de la transposición, desde sus planteamientos, se sustenta que estas conllevan a que un conocimiento se exilie de su origen social o histórico. Para el caso puntual de esta investigación, esta se familiariza principalmente con la etapa de programabilidad, ya que es donde obtiene gran importancia el proceso de textualización, en la que el saber le corresponde admitir cierta programación de los aprendizajes y sus controles de acuerdo a decretada progresión y secuenciación, concretando a su vez la legitimidad y justificación del proyecto social al que obedece el sistema educativo; este interactúa desde la noosfera, conformada generalmente por un conjunto de sujetos que “piensan sobre la educación”. Lograr un equilibrio entre los fundamentos de sistema educativo y la noosfera, implica por un lado, que el saber enseñado sea visto por los científicos como suficientemente cercano al saber sabio, justificando el proceso educativo como proyecto social; y por otro lado, fomenta que el saber enseñado a los estudiantes diste de lo que saben sus progenitores.

A partir del planteamiento de Verret y Chevallard en relación al fenómeno de la transposición didáctica, se han desarrollado investigaciones sobre transposición han tomado a los libros de texto como objeto de estudio privilegiado. Como en el caso Chevallard (1985), y Kang y Kilpatric (1992), notifican sobre los procesos que deben realizar sus autores: deben transformar el «saber sabio» en «saber escolar», asequible a los estudiantes, a partir de contextos que motiven y permitan la comprensión.

Otros autores como Pimm (1987), González (1993) y Morgan (1996) reflexionan que este fenómeno de transposición didáctica se refleja en el lenguaje matemático que se utiliza

en los libros de texto de educación matemática. Otras investigaciones como las de Sanz Lerma (1995); Harris (1997); Pepin y Haggarty (2000) se interesan por el rol de los libros de texto en el proceso de enseñanza y aprendizaje; Por su parte Sierra, González y López, (2003), en su investigación razonan sobre la evolución histórica del tratamiento de ciertos objetos matemáticos; Por otro lado, Reys, Reys y Chávez (2004) enfatizan en que los libros de texto además de facilitar el aprendizaje, permiten la eficazmente exteriorizar y contextualizar las ideas matemáticas, permitiendo por parte de los estudiantes explorar distintas ideas; También Cordero y Flores (2007) revelan que el discurso matemático escolar frecuentemente esta mediado por el libro de texto, sumado a las concepciones del profesorado, permiten incluso regular los procesos de enseñanza y aprendizaje.

2.5 PROGRESIONES Y SERIES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS.

2.5.1 Fenomenología de las progresiones y series

La importancia de los objetos matemáticos, que motivó esta investigación, las progresiones aritméticas y geométricas, radica en su utilidad para la comprensión de fenómenos cotidianos, por ejemplo, las progresiones aritméticas conciernen a la rentabilidad obtenida de una cantidad invertida a plazo fijo. Es por ejemplo de invertir un depósito de 100.000 pesos a plazo fijo, con un interés anual del 10% (en interés simple), se obtendrá una ganancia de 10.000 por año, por lo que el dinero irá creciendo en progresión aritmética de diferencia 10.000.

En general, hay cúmulo de fenómenos que justifican y dan sentido al concepto de progresión aritmética, de hecho, todos aquellos fenómenos y situaciones en las que se trascienda de una etapa inicial a otra, con la única diferencia de la adición de una constante pueden ser tratadas por medio de este tipo de progresiones.

Asimismo, una progresión geométrica es una sucesión de números en la que cada número a su antecesor multiplicado por una constante. En el ámbito de las inversiones y las rentas, es importante conocer en este tipo de progresión su velocidad de crecimiento,

evidenciada en el denominado “interés compuesto”. Analice las siguientes situaciones en las que el crecimiento exponencial se puede modelar matemáticamente con progresiones geométricas:

Aunque quizás muchos no percaten, la frecuencia de un rumor como una noticia vaga u oficiosa es muy común en la mayoría de comunidades, incluso según la historia y la literatura, estos existen desde que el hombre desarrollo el lenguaje; el rumor, llamado frecuentemente y de manera despectiva chisme, es parte intrínseca de la cultura humana. Alguien comenta o cuenta algo, y rápidamente, y los receptores a la velocidad de la luz, lo transmiten a todos los que encuentran próximos. De ahí que los chismes se propaguen tan rápidamente, precisamente en progresión geométrica.

En biología se nota que el mecanismo de reproducción habitual de bacterias es la bipartición. Mediante este proceso natural cada célula obtiene dos células hijas, y estas a su vez se volverán a reproducirse y cada una de ellas obtendrá sus correspondientes dos células hijas, y así sucesivamente. Este suceso también puede modelar mediante una progresión geométrica.

2.5.2 Historia del Concepto de progresiones aritméticas.

Para comprender a profundidad los objetos matemáticos, es importante una ubicación histórica en el mundo de las matemáticas, especialmente en el tema de las progresiones aritméticas. La historia data de miles de años atrás, cuando el hombre ajustaba el concepto de número y lograba representarlo por medio de símbolos, para así lograr ordenarlos en forma creciente y progresiva, lo que contribuyó inicialmente a la formación de la sucesión natural de los números. Esta sucesión surgió de la necesidad humana de contar sus animales, sus tierras o el conjunto de sus pertenencias. Una vez establecida la sucesión natural de los números, contar se fundamentaba en asignarle a cada objeto del grupo dado un elemento de la sucesión natural, principiando desde uno hasta llegar al último objeto;

por lo tanto, la cantidad total de objetos correspondía al término de la sucesión natural en que se ubicaba el último objeto.

Esta noción de agrupamiento y de enumeración en un conjunto de cosas llevó a la instauración de los sistemas de numéricos, que por lo general son propios para cada cultura. Este hecho de generar una propia aritmétización, dinamizó la cualificación del pensamiento matemático en todas las culturas, y es de este modo como paulatinamente emerge la necesidad de formalizar, de desarrollar algoritmos y formulas simples que faciliten la ejecución de operaciones y promuevan competencias en la resolución de problemas. Al destacar algunos antecedentes históricos de las progresiones aritméticas generados por diversas civilizaciones a través del tiempo:

Civilización Mesopotámica:

Aun en el museo de Louvre se encuentra una tablilla de arcilla que se considera que data del imperio de Nabucodonosor⁴, en donde se puede razonar que los primeros mesopotámicos dominaban algunas sucesiones y también series como la suma de los cuadrados y la formula general de la progresión aritmética. Las manejaban para la resolución de problemas durante construcciones y en perforaciones de tierras.

En este sentido, (Collete, 1966, p. 28) indica algunos de los ejemplos que se encuentran en estas tablillas:

⁴ De acuerdo con (Collete, 1986, p.21), Nabucodonosor (c. -604/ -562) fue el rey más importante de Babilonia y sucesor de Nabopolasar.

Figura 1. Tablilla de arcilla

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9 + 2^9 - 1$$

$$1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 10^2 = \left[1 \left(\frac{1}{3} \right) + 10 \left(\frac{2}{3} \right) \right] 55 = 385$$

También el siguiente ejemplo aparece sobre las tablillas:

Figura 2. Ejemplo de progresión hallado en las tablillas.

$$a, \quad a + d, \quad a + 2d, \quad a + 3d, \quad \dots, a + (n - 1)d.$$

Egipcios

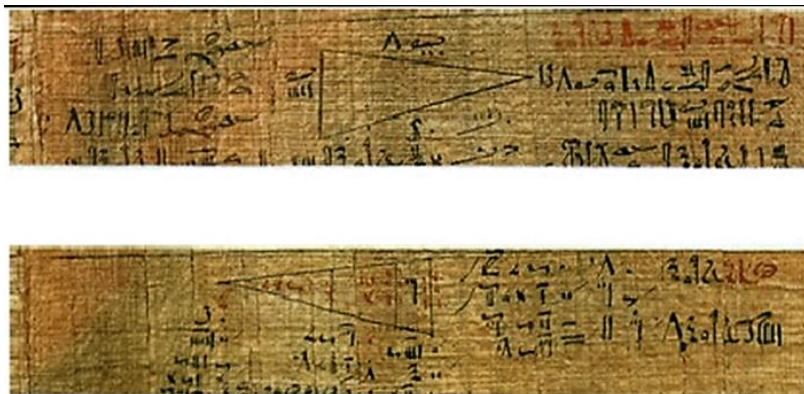
Por su parte, (Bell 1949, p. 175), propone que los egipcios conocían las progresiones aritméticas y calculaban sus series. Menciona que se halló pruebas contundentes, para señalar que esta cultura conocía las tablas de multiplicar. Sin embargo, solían escribir sus respuestas secuencialmente o bajo un orden numérico. Otra de sus eminentes hazañas, es la descomposición de los números como sumas de potencias de dos, y además desarrollaron sucesiones con números fraccionarios o racionales como, por ejemplo:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$$

Otro importante aporte de los egipcios hace referencia al problema de progresiones aritméticas más antiguo, el coloquialmente denominado “La repartición del pan”, registrado en el acreditado papiro egipcio de Rhind⁵.

⁵ El papiro egipcio de Rhind es un antiguo documento egipcio que data cerca del año -1650. Obtenido de las ruinas de Tebas en 1858 por el anticuario escocés Henry Rhind y descifrado en 1866 por el egiptólogo Eisenhol (Collete, 1986, p. 41).

Figura 3. Papiro egipcio de Rhind.



Fuente: Collete, 1986. Historia de la Matemática.

Este valioso papiro, hallado por Rhind a finales del siglo pasado, fue escrito aproximadamente unos diecisiete siglos antes de nuestra era y constituye una buena fuente para descubrir el conocimiento matemático desarrollado en los albores de la matemática. Uno de estos problemas descubiertos es el siguiente:



La progresión más antigua: Entre cinco personas se repartieron cien medidas de trigo, de tal suerte que la segunda recibió más que la primera tanto como le correspondió a la tercera más que a la segunda, a la cuarta más que a la tercera y a la quinta más que a la cuarta. Además, las dos primeras obtuvieron siete veces menos que los tres restantes. ¿Cuánto correspondió a cada una?

La solución es indudable que las cantidades de trigo distribuidas entre los cinco participantes en el reparto constituyen una progresión aritmética creciente.

Este mismo problema de progresión aritmética del papiro Rhind⁶, es ligeramente modificado para hacerlo más claro: Se van a repartir cien piezas de pan entre 5 personas, de tal manera que las cantidades que reciban formen una sucesión aritmética. Los 2 primeros reciben en total un séptimo de lo que reciben los 3 últimos. ¿Cuántas piezas de pan reciben cada 1?

[Respuesta parcial: La primera persona recibe panes.]

Posteriormente, luego de los respetables aportes que hicieron estas dos culturas mencionadas, fueron los griegos quienes estrictamente formalizaron la aritmética e innovaron una notación que permitía representar las generalizaciones más concretamente. En particular, fue Pitágoras y su escuela, quienes se encargaron de organizar las ideas de sucesiones y series a partir de los antecedentes heredados por las dos civilizaciones

⁶ Estos problemas permiten inferir que al parecer la representación semiótica privilegiada en esta época para este objeto para el objeto matemático progresiones aritméticas es el lenguaje natural.

mencionadas. Entre sus aportes más representativos a la aritmética se destaca las definiciones de los números pares e impares por medio de una sucesión para cada una de ellas, como también la clasificación y representación de los números en triangulares, cuadrados, pentagonales, etc., los cuales forman sucesiones y series aritméticas.

2.5.3 Progresión y serie aritmética.

2.5.3.1 Definición formal.

Una progresión aritmética es una sucesión de números en la que cada término después del primero se obtiene sumando una constante d al término anterior. La constante d se llama diferencia común. Por ejemplo, la sucesión

$$2, 5, 8, 11, \dots$$

Es una progresión aritmética con diferencia común igual a 3.

Observe que una progresión aritmética está completamente determinada si se conocen el primer término y la diferencia. De hecho, si

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Es una progresión aritmética con el primer término dado por a_1 y una diferencia común dada por d , entonces, por definición, tenemos

$$a_1 = a$$

$$a_2 = a_1 + d = a + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d$$

⋮

$$a_n = a_{n-1} + d = a + (n - 2)d + d = a + (n - 1)d$$

Por tanto, tenemos la siguiente fórmula para encontrar el n – ésimo término de una progresión aritmética con primer término a y una diferencia común:

El n -ésimo término de una progresión aritmética con un primer término a y una diferencia común d está dado por

$$a_n = a + (n - 1)d$$

2.5.3.2 Propiedades de las progresiones aritméticas

I. Si en una progresión aritmética hay una cantidad impar de términos, se cumple que:

$$\text{Termino central} = \frac{\text{suma de extremos}}{2}$$

II. Y si no hay termino central se cumple que:

La suma de los extremos es constante.

2.5.3.3 Definición formal de serie aritmética

Sea S_n la *suma* o *serie* de los primeros n términos de una progresión aritmética con el primer término $a_1 = a$ y la diferencia común d . Entonces

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + [a + (n - 1)d] \quad (1)$$

Al reescribir la expresión de S_n con los términos en orden inverso se tiene

$$S_n = [a + (n - 1)d] + [a + (n - 2)d] + \dots + (a + d) + a \quad (2)$$

Al sumar las ecuaciones (1) y (2), obtenemos

$$2S_n = [2a + (n - 1) d] + [2a + (n - 1) d] + \dots + [2a + (n - 1) d]$$

$$= n[2a + (n - 1) d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1) d].$$

Por tanto, la **Serie o Suma** de los primeros n términos de una progresión aritmética con un primer término a y la diferencia común d viene dada por

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1) d]$$

2.5.4 Historia de las Progresiones geométricas.

Particularmente las progresiones geométricas fueron abordadas en numerosas culturas y la mayoría tiene tablas que muestra el conocimiento implícito de la progresión geométrica, sin embargo, es para la mayoría de historiadores, se inicia más formalmente desde la matemática griega.

En las dos paradojas de Zenón de Elea (490 – 430 a.C.) conocidas, una como la de “dicotomía” y otra como la de “Aquiles y la tortuga”, en la primer paradoja Zenón argumenta que un corredor nunca llega a la meta, ya que primero deberá recorrer la mitad y posteriormente la mitad de la mitad, y así sucesivamente.

En términos modernos Zenón argumenta que dado que la suma de $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ es infinita el corredor nunca podrá llegar al final. En esta se ven claramente inmersas la progresión y la serie geométrica de razón un medio.

La segunda paradoja dice que Aquiles decide competir contra una tortuga siendo él diez veces más veloz que ella, dice que si Aquiles recorre cierta distancia la tortuga recorrerá $\frac{1}{10}$ de esta distancia. Cuando Aquiles recorra este decimo, la tortuga recorrerá $\frac{1}{10}$ de la distancia recorrida anteriormente, así sucesivamente y por tanto Aquiles jamás alcanzaría a la tortuga, pues siempre estará un poco más adelante que Aquiles. En términos modernos dicha situación indica que Aquiles recorre $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$ llegando a la conclusión de que la tortuga estará siempre $\frac{1}{10^n}$ delante de Aquiles, es decir se hace uso de una progresión geométrica de razón un décimo.

Esto indica que la noción de la progresión geométrica era conocida por los antiguos griegos, aunque aún no aparezca una relación con la progresión geométrica.

Uno de los primeros en encontrar la relación entre las progresiones aritméticas y geométricas fue Arquímedes (287 – 212 a.C.) quien desarrollo propuestas sobre las progresiones geométricas, basado en el método de exhaustión con las cuales demostró resultados tales como que el área cercada por una línea y una parábola es igual a $\frac{4}{3}$ del área de un triángulo con igual base y altura y para esto demuestra en su trabajo sobre la cuadratura de la parábola que la suma $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{4}{3}$

Por otro lado, en el Arenario Arquímedes crea un sistema de numeración basado en la miríada (10 000) y la base 10 para contar el número de granos de arena que puede estar contenido en el universo en el cual hace uso de la progresión geométrica de razón 10, como en el sistema de numeración actual (Hawking, 2006).

2.5.4.1 Definición Formal de progresión geométrica.

Una progresión geométrica es una sucesión de números en la que cada término después del primero se obtiene al multiplicar el término anterior por una constante r . La constante r se llama razón común.

Una progresión geométrica está completamente determinada si se conocen el primer término y la razón común. Por tanto, si

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Es una progresión geométrica con el primer término dado por a y una razón común dada por r , entonces por definición tenemos

$$a_1 = a$$

$$a_2 = a_1 r = ar$$

$$a_3 = a_2 r = ar^2$$

$$a_4 = a_3 r = ar^3$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} r = ar^{n-1}$$

Por tanto, *el n – ésimo término de una progresión geométrica con un primer término a y una razón común r está dada por*

$$a_n = ar^{n-1}$$

2.5.4.2 Propiedades de las progresiones geométricas.

Si una progresión geométrica tiene una cantidad impar de términos, entonces se cumple que

$$(\text{término central})^2 = (\text{productos de términos extremos})$$

Por ejemplo, cuando hay un término central, observamos que

Figura 4. Propiedad del Término Central



$$(\text{término central})^2 = (\text{productos de términos extremos})$$

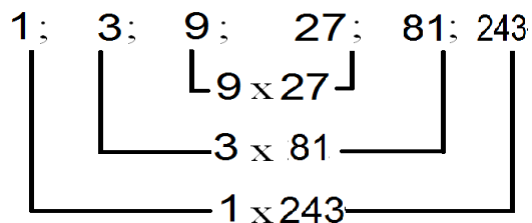
$$(8)^2 = 1 \times 64 = 2 \times 32 = 4 \times 16$$

Cuando no hay termino central, se cumple que

El producto de los extremos es constante.

Veamos

Figura 5. Propiedad cuando no hay término central.



Por lo tanto, el producto de extremos (constante) es $1 \times 243 = 3 \times 81 = 9 \times 27$

2.5.4.3 Serie geométrica.

Para encontrar la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica con el término por primera vez a_1 y la razón común r , denota la suma requerida por S_n

Entonces,

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1} \quad (1)$$

Al multiplicar (1) por r , obtenemos

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \dots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n \quad (2)$$

Al restar (2) de (1) se tiene

$$rS_n - S_n = a_1 r^n - a_1$$

$$(r - 1)S_n = a_1(r^n - 1)$$

Si $r \neq 1$, podemos dividir ambos lados de la última ecuación $r - 1$ obteniendo

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{(r - 1)}$$

Si $r = 1$, entonces (1) se tiene

$$S_n = a_1 + a_1 + a_1 + \dots + a_1 \quad n \text{ términos}$$

$$= n a_1$$

Por tanto,

La serie o suma de los primeros n términos de una progresión geométrica con primer término a_1 y una relación común r está dada por

$$S_n = \begin{cases} \frac{a_1(r^n - 1)}{(r - 1)} & \text{si } r \neq 1 \\ n a_1 & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

3.1 ENFOQUE INVESTIGATIVO

En términos generales, esta investigación se enmarca en el campo de la investigación en Didáctica de la Matemáticas, desde su línea de análisis de libros de texto; obedece a un enfoque del paradigma cualitativo descrito por Hernández, Fernández y Baptista, (2006) desde un carácter descriptivo e interpretativo. Se puede afirmar que se emplea la técnica del análisis (cualitativo) de contenido, la cual en términos de Andréu (2000) se fundamenta en la lectura de tipo textual o visual, como instrumento de recogida de información; en concordancia con Piñuel (2002), quien también relaciona al análisis de contenido con el proceso de interpretar un producto de comunicación, como puede ser los mensajes, los textos o los discursos; a través de técnicas cualitativas y/o cuantitativas con el objetivo de considerar las ideas que aparecen en dicha análisis del discurso y procesar los datos importantes para la investigación.

En el caso particular, el contexto en el que se desarrolla esta investigación es el educativo, desde dos componentes: uno de ellos es el objeto matemático *Progresiones Aritméticas y Geométricas*; y el otro, en uno de los recursos didácticos de apoyo a los procesos de enseñanza y aprendizaje de dichos objetos, principalmente utilizado en la actualidad: *el libro de texto*. A estos últimos, se implementará un análisis organizado y planeado a partir de los instrumentos de análisis elaborados, posteriormente se tratará adecuadamente hacia los objetivos de estudio y, finalmente, se interpretará para asignarle un significado. Por ende, se puede considerar que el análisis de contenido es también de carácter descriptivo y bibliográfico, porque permite detallar el tratamiento representacional que ofrecen algunos libros de texto escolares sobre las progresiones, a partir del análisis de las unidades didácticas de cinco libros de textos utilizados para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

De este modo, este estudio de las progresiones aritmética y geométricas, favorece sin lugar a dudas, a la visualización crítica de cómo se generan y se desarrollan; de cómo emergen y se construyen sus representaciones, problemas y sus procedimientos relacionados, dando la posibilidad de prever qué limitaciones conceptuales pueden aparecer en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

3.2. CATEGORÍAS

A *partir* de la problemática que se aborda en esta investigación surgen tres categorías, a saber: *las representaciones semióticas* en la unidad didáctica que emergen del objeto matemático progresiones aritméticas y geométricas; y las actividades cognitivas de *tratamiento y conversión* que implica el desarrollo de cada problema modelo.

Tabla 2. Categorías para el análisis de información relacionadas con el objeto matemático progresiones.

<i>CATEGORÍAS</i>	<i>DIMENSIONES</i>	<i>INDICADORES</i>	<i>INSTRUMENTO</i>
REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN LOS LIBROS DE TEXTO.	<i>Formas de representación semiótica utilizada por distintos textos para la conceptualización.</i>	Las representaciones semióticas previas y posteriores sobre el objeto matemático.	
	<i>Orden de aparición de las</i>	Los aportes didácticos de las representaciones semióticas al objeto progresiones.	
		Es recurrente o se da de manera diferente en cada caso.	

	<i>representaciones semióticas.</i>		-Aspectos epistemológicos de la resolución de problemas.
	<i>Coordinación de las representaciones semióticas en cada unidad didáctica.</i>	Incorpora nuevas representaciones del objeto.	
	<i>Incidencia de las actividades cognitivas en el aprendizaje a partir de la resolución de problemas.</i>	Aporte de las representaciones semióticas del objeto progresiones para la resolución de problemas.	-Las transformaciones en la resolución de problemas
		Obstáculos y dificultades que puede generar el mal uso de un registro representacional.	
TRATAMIENTO DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN LOS PROBLEMAS MODELOS.	<i>Tipo de tratamiento utilizado durante el desarrollo del problema.</i>	Descripción del tipo de las unidades significantes empleadas.	
		- Determinación de unidades elementales.	Matriz de análisis sobre el tratamiento

	<i>Reglas de conformidad.</i>	- Las combinaciones admisibles de estas unidades elementales para formar unidades de orden superior. - Las condiciones para que una representación de orden superior sea una producción pertinente y completa.
CONVERSIÓN DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN LOS PROBLEMAS MODELOS.	<i>Fenómeno de Congruencia y No Congruencia.</i>	- <i>CORRESPONDENCIA SEMÁNTICA</i> <i>TERMINAL:</i> Relaciona cada unidad significativa del registro de partida con una unidad significativa elemental en el registro de llegada. - <i>UNIVOCIDAD SEMÁNTICA.</i> Corresponde a cada unidad significativa del registro de partida con una única unidad significativa en el registro de llegada. - <i>IGUAL ORDEN POSIBLE DE</i>

APREHENSIÓN.

Ostenta un igual orden
de aprehensión de las
unidades significantes
en las dos
representaciones de los
dos registros.

Fuente: Elaboración propia

3.3 DISEÑO METODOLÓGICO

Para esta investigación se consideran cuatro momentos de análisis, en concordancia con lo propuesto por Rodríguez, Gil y García (1999) y asimilándola parcialmente la metodología inductiva propuesta por Valdivé y Garbin (2008), en la que se propone en primer lugar la fragmentación de la información; posteriormente la identificación y clasificación de las unidades de análisis; luego, una disposición y organización de la Información y por último, se realiza una descripción estructurada de los hallazgos durante la investigación. De este modo, un *primer* momento, corresponde a la revisión teórica de las progresiones aritméticas y geométricas desde diferentes fuentes bibliográficas, enmarcada desde la teoría de Las Representaciones Semióticas, para tener una visión más completa de estos objetos matemáticos y de sus respectivas representaciones.

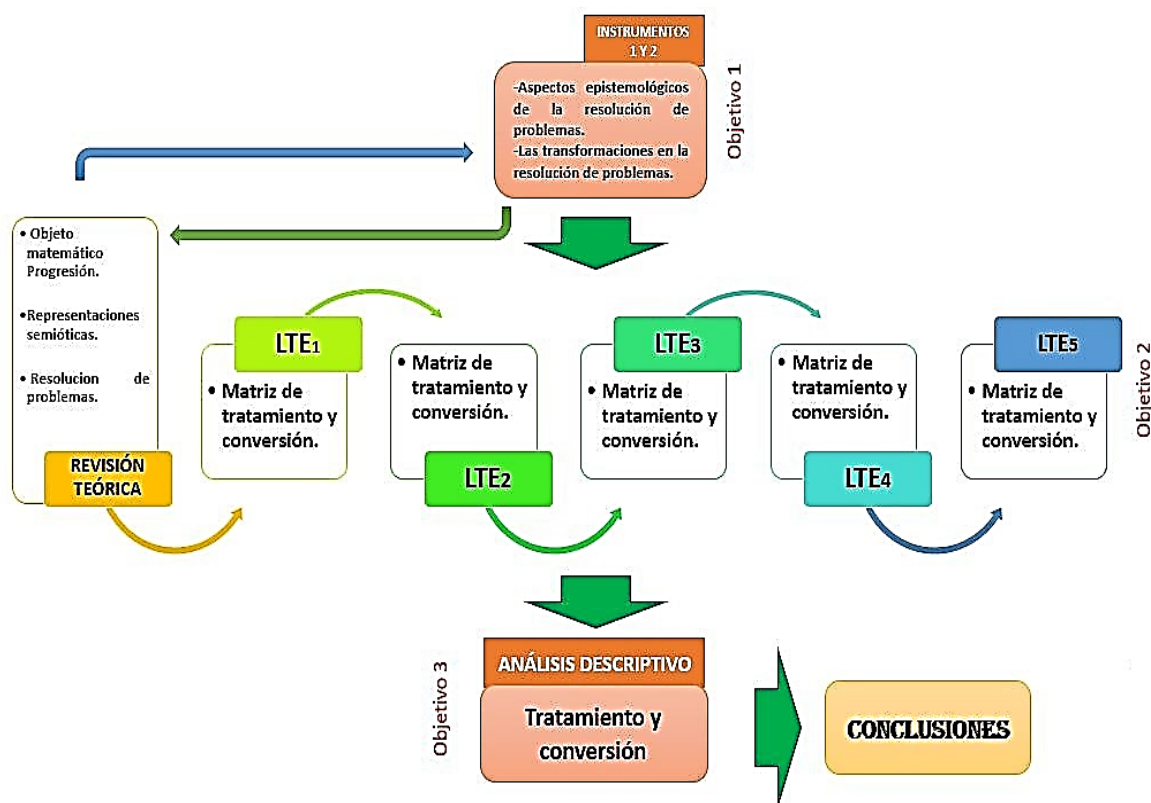
En concordancia con el primer objetivo específico, para el segundo momento se aplica dos instrumentos, a cada uno los cinco libros de textos escolares de matemática utilizados con frecuencia: el primero se denomina “*Aspecto epistemológicos de la resolución de problemas*”, con el fin de obtener una visión general del lenguaje (representaciones) sobre el contenido matemático, su estructuración y organización en cada unidad didáctica. Complementariamente se aplica un segundo instrumento designado *Las transformaciones en la resolución de problemas*, mediante una estadística sobre los *problemas modelos y los problemas para resolver* para cada clase de progresión.

Posteriormente, con el fin de dar cumplimiento al segundo objetivo, en el tercer momento se aplica el instrumento de *revisión del tratamiento y conversión*, a cada uno de los problemas desarrollados como modelo o ejemplo, propuesto por cada uno de los textos para facilitar la comprensión de las progresiones.

En la última fase, a partir de lo evidenciado a través de los instrumentos, en lo posible, emergen sugerencias didácticas para futuras formulaciones de las unidades didácticas referidas a las progresiones, que permitan superar obstáculos y dificultades halladas durante la investigación.

El diseño de esta investigación se haya plasmado en el siguiente diagrama:

Figura 6. Diseño de la investigación.

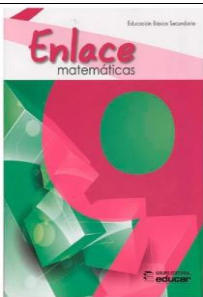


Fuente: elaboración propia.

3.3.1 Unidad de trabajo

Cinco libros de textos escolares utilizados en la educación matemática colombiana:

Tabla 3. Libros de texto escolares utilizados en la investigación.

				
ENLACE MATEMÁTICA S GRADO 9. Grupo editorial Educar [LTE _I]	AVANZA MATEMÁTICA S 9. Grupo editorial Norma. [LTE _{II}]	SECUENCIAS MATEMÁTICA S 9. Editorial Libros y Libros. [LTE _{III}]	HABILIDADES MATEMÁTICAS 9. Editorial Santillana [LTE _{IV}]	APPLICA MATEMÁTICA S 9. Ediciones SM. [LTE _V]
2014	2014	2016	2016	2016

Fuente: Elaboración propia

3.3.2 Unidad de análisis

Actividades de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas sobre los problemas propuestos como ejemplo para la comprensión de las progresiones aritméticas y geométricas.

3.4 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS

Para concretar los objetivos planteados en la investigación, se utiliza la técnica inductiva, ya que parte desde la indagación, lectura y análisis de información desde diferentes fuentes bibliográficas, para contribuir a la generación de una explicación, en dirección de cómo están enfocados representacionalmente los objetos matemáticos

progresiones aritméticas y geométricas en los libros de textos seleccionados aleatoriamente, hallar posibles obstáculos presentes en dicha organización de contenidos. Para ello, se diseñan tres instrumentos de análisis: el de *Aspectos epistemológicos de la resolución de problemas*; *Las transformaciones en la resolución de problemas* y, la *matriz de análisis para tratamiento y conversión*.

Instrumento 1: Aspectos epistemológicos de la resolución de problemas.

Para la elaboración de este instrumento, se modifica parcialmente algunos aspectos de la caracterización de los esquemas conceptuales y epistemológicos en su acepción cognitiva y epistemológica, propuesta por Valdivé y Garbin (2008, 2010, 2013); para esta investigación, las categorías se analizan desde las perspectivas de los autores del libro de texto y desde el rol que puede desempeñar el estudiante:

i. Las ideas que asocia el sujeto al concepto: en nuestro caso, sería la concepción que desarrolla el autor sobre los objetos matemáticos, incluyendo el enfoque histórico y, las posibles concepciones que desarrolla el lector.

ii. Las representaciones asociadas que hacen emerger la noción y representaciones propias de esta: particularizando en lo que el autor percibe del objeto matemático y que evoca ante las tareas y situaciones problemas propuestas.

iii. Los procedimientos: hace referencia a los distintos tipos, por ejemplo, algorítmicos, aritméticos, algebraicos, geométricos, manipulaciones simbólicas, entre otros, que el estudiante activa ante la tarea y actividades cognitivas.

iv. Las ideas más representativas asociadas al objeto matemático.

v. El contexto: como puede ser el geométrico, analítico, algebraico, aritmético, Ciencia Tecnología y Sociedad (CTS), o histórico, que tanto el autor y el estudiante asocia en las actividades didácticas.

vi. Los ejemplos y contraejemplos que el autor propone para explicitar sus ideas, así como los que el estudiante implementaría durante el desarrollo de la unidad didáctica.

A estas categorías se agrega otras dos: una relacionada con recursos didácticos y otra con los recursos históricos utilizados por el texto en la comprensión del objeto matemático progresión.

Tabla 4. Instrumento 1

SUBCATEGORÍAS DE ANÁLISIS	$[LTE_I]$	$[LTE_{II}]$	$[LTE_{III}]$	$[LTE_{IV}]$	$[LTE_V]$
<i>¿Cuáles son las ideas que asocia el autor al objeto? ¿Distingue al objeto de sus representaciones?</i>					
<i>¿Cuáles son las representaciones que hacen emerger la noción de progresión?</i>					
<i>¿Qué procesos matemáticos hace referencia y privilegia frecuentemente el autor?</i>					
<i>¿Cuáles contextos favorecen la resolución de problemas?</i>					
<i>¿Se distingue el estatus de representación autosuficiente y el estatus de representación auxiliar?</i>					
<i>¿Qué recursos didácticos propone el texto de texto para la comprensión del objeto matemático progresión?</i>					

¿Qué circunstancias filosóficas y científicas de diferentes épocas, recrea el texto, para explicar el desarrollo las progresiones aritméticas y geometrías?					
---	--	--	--	--	--

Fuente: Elaboración propia.

Instrumento 2: Las transformaciones en la resolución de problemas.

Con este instrumento se pretende conocer la demanda e incidencia con la que los autores usan las transformaciones semióticas para el aprendizaje de las progresiones a partir de la resolución de problemas; del mismo modo, permitirá determinar los posibles tipos de transformaciones que promueve los *problemas por resolver*, a la luz de los datos hallados en el instrumento 1.

Tabla 5. Cantidad de Problemas Modelos y Problemas para resolver en $[LTE_n]$.

TIPO DE TRANSFORMACIÓN SEMIÓTICA	PROGRESIÓN ARITMÉTICA			PROGRESIÓN GEOMÉTRICA		
	PROBLEMA MODELO					
	<i>Tipo de Registro</i>	<i>Cantidad de problemas</i>	<i>Porcentaje</i>	<i>Tipo de Registro</i>	<i>Cantidad de problemas</i>	<i>Porcentaje</i>
TRATAMIENTO						
CONVERSIÓN						
	TOTAL					
PROBLEMA PARA RESOLVER						

TRATAMIENTO						
CONVERSIÓN						
	TOTAL					

Fuente: Elaboración propia.

Instrumento 3: Revisión del tratamiento y conversión en la resolución de problemas modelos.

Puesto que, el interés de esta investigación implica, caracterizar los tratamientos y las conversiones de las representaciones semióticas, que se efectúan en los libros de textos escolares en la resolución de problemas modelos o ejemplares, para facilitar la comprensión del objeto matemático progresión; esta segunda actividad cognitiva, a la luz de cada uno de los criterios de congruencia entre las diversas representaciones, los cuales, se explicitan entre los registros de representación utilizados en el desarrollo de cada problema modelo, y las relaciones que se establecen entre las representaciones de las progresiones.

Tabla 6. Matriz de análisis sobre el tratamiento y la conversión de cada problema.

LIBRO DE TEXTO:								
PROBLEMA MODELO								
TRATAMIENTO			CONVERSIÓN					
REGLAS DE CONFORMIDAD								
DETER	COMBI	CONDIC						
MINAC	NACIO	IONES						
IÓN DE	NES	PARA						
UNIDA	ADMISI	QUE						
DES	BLES	UNA						
			REG	REG	UNIDA	CORRES	UNIV	CONSE
			ISTR	ISTR	DES	PONDEN	OCID	RVACI

TIPO DE TRATAMIENTO	ELEMENTAL	PARA FORMA UNIDA DES DE ORDEN SUPERIOR OR	REPRESENTACIÓN DE ORDEN SUPERIOR SEA UNA PRODUCCIÓN PERTINENTE Y COMPLETETA	O DE PAR TIDA	O DE LLEGADA	SIGNIFICANTES	CIA SEMÁNTICA	AD SEMÁNTICA	ÓN DEL ORDEN
Análisis descriptivo del tratamiento:				Análisis descriptivo de la conversión:					
PROBLEMA MODELO									

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
TIPO DE TRATAMIENTO	REGLAS DE CONFORMIDAD								
	DETERMINACIÓN DE UNIDADES ELEMENTALES	COMBINACIONES PARA ADMISIONES	CONDICIONES PARA UNA REPRESENTACIÓN DE ORDEN SUPERIOR SEA						

SUPERIOR	UNA PRODUCCIÓN PERTINENTE Y COMPLETA	
Análisis descriptivo del tratamiento:	Análisis descriptivo de la conversión:	

Fuente: Elaboración propia.

3.5 PLAN DE ANÁLISIS

El tipo de análisis que se realizará corresponde a un análisis de contenido, se efectuará confrontación de los instrumentos aplicados a cada libro de texto de la unidad de trabajo, incluyendo aspectos encontrados a partir de las posteriores observaciones por parte del investigador.

En primera instancia se analiza descriptivamente la información proveniente de los instrumentos 1 y 2 para cada uno de los cinco textos; posteriormente se realizará un análisis descriptivo detallado a la información obtenida por el instrumento 3 denominado *revisión del tratamiento y conversión en los problemas modelos*, en el que se contraste los aspectos teóricos con los hallazgos encontrados, con el cual se amplíe y concrete la información recogida durante los dos anteriores.

Para triangular la información obtenida en los tres instrumentos, se diseñará un *cuadro comparativo*, teniendo en cuenta la interacción de categorías trabajadas y sus respectivos aspectos relevantes; a partir de dichos hallazgos, se organiza el análisis cualitativo de los resultados en el que se exhiban las relaciones entre las diferentes acciones encontradas, por ejemplo, la frecuencia y la tendencia de cada actividad cognitiva en la resolución de

problemas, las representaciones emergentes, entre otras. Por último, se generarán las respectivas conclusiones y se presentan las consideraciones finales.

Para para efectos de la investigación, se usará la siguiente codificación en el proceso de análisis para referirnos a problemas particulares:

$LTE_{(I-IV \ 2,4-3)}^{PM,PpR \ [Ttm,Cv]}$ corresponde al Libro de Texto Escolar LTE, en el cual los números de la parte inferior (subíndices) consta de números romanos correspondientes al libro de texto, y los numero decimales a la posición del problema; por su parte, la coma designa que son consecutivos y el guion (o guiones) que no lo son. Mientras que los números en la parte superior (superíndices) hace referencia al tipo de Problema analizado (PM: problema modelo y PpR: problema para resolver, correspondientemente) y entre los corchetes el tipo de transformación semiótica al que fue sometido dicho problema, respectivamente.

CAPÍTULO 4 ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

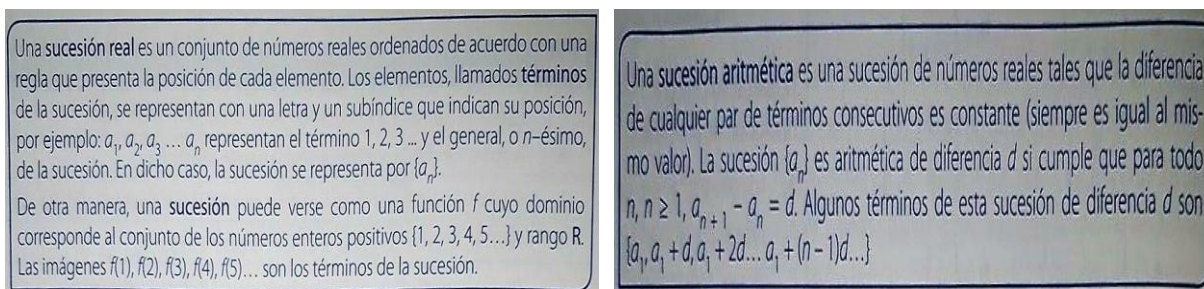
4.1 ANÁLISIS DEL INSTRUMENTO 1

En términos generales, las unidades didácticas de cada libro poseen una organización análoga, en las cuales tres de ellos presentan actividades para indagar los presaberes del lector, únicamente desde los registros verbal y numérico; esto en cierto modo coincide con lo expresado por Salazar y Valencia (2010) “Son casi nulas las actividades que permiten exploraciones, que implican algo más que un simple conteo o la aplicación de reglas o de algoritmos, actividades ya sean desde lo geométrico, que impliquen reconfiguraciones, transformaciones posicionales, etc.”. (pp. 58-59)

Posteriormente proponen algunas páginas con información introductoria que motivan a comprender el objeto matemático. A continuación, hace la exhibición del contenido matemático y los problemas modelos, algunos plantean una breve síntesis del contenido trabajado (uno de ellos) y por último, una lista problemas para resolver al terminar la explicación de la temática. En uno de los textos se sugiere el ingreso a tres enlaces web para interactuar en algunas actividades que involucra la utilización de un software educativo.

La primera subcategoría que indaga este instrumento está orientada hacia el reconocimiento de las ideas que relacionan los autores al objeto matemático, en este sentido, es evidente en la conceptualización de la mayoría de los libros de texto, que el objeto matemático progresión está asociado a la noción de sucesión, y estas últimas a su vez son definidas en términos de *función* y conjunto de números ordenados; como lo evidencia la siguiente figura:

Figura 7. Conceptualización de las progresiones



Fuente: Libro de texto escolar II.

De igual modo, se develan dos posturas bien definidas con respecto al objeto, una donde es definida como una tipología de sucesión y otra como una función, en la que no se aclara que las progresiones son un tipo especial de sucesión.

Otro aspecto a resaltar, es que en ninguno de los cinco textos analizados se hace explícita la distinción entre las representaciones semióticas utilizadas para el proceso de aprendizaje y el objeto progresión. Lo cual no contribuye de manera circunstancial a enmendar el problema de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas, ya que este problema es tanto de reconocimiento como de distinción. Desde la perspectiva de Duval (2016b) los libros de texto no estarían contribuyendo significativamente a que “los objetos matemáticos nunca se deben confundir con las representaciones semióticas utilizadas, aun si no hay acceso a ellos, diferente del uso de una representación semiótica” (p. 89).

Un tercer nodo analizado en este instrumento está relacionado con los *procesos* a los que hace referencia y privilegia frecuentemente los autores. En los LTE_I , LTE_{IV} LTE_V son cuatro los procesos, el primero es comunicar, que hace referencia a leer, escribir y comunicar la determinación de los términos de cualquier tipo de progresión; otro es conectar y relacionar los parámetros de las sucesiones para comprender aplicaciones; un tercer procedimiento es emplear estrategias para la resolución de problemas, y por último, desarrollar el razonamiento lógico para hallar el termino general en los dos tipos de progresión.

Los procesos que propone el LTE_{II} al lector están direccionados a razonar lógicamente, al momento de encontrar la fórmula general para el desarrollo de las progresiones, así como identificar patrones, conocer las progresiones e identificar sus principales elementos y propone tratamientos que permiten hallar en la progresión cualquier término.

Otro procedimiento está orientado a comunicar, en el sentido si una progresión es aritmética o geométrica, elaborar conjeturas sobre el comportamiento de los términos de la progresión. Un último procedimiento está encaminado al desarrollo del pensamiento crítico a partir del análisis y aplicación de la información para resolver problemas.

Por su parte, en el LTE_{III} se favorece de manera notoria el proceso ejercitación de algoritmos a medida que se desarrolla la unidad; sin embargo, al terminar la explicación de los dos tipos de progresión, se propone un taller en el cual se evidencia los procesos de interpretación, representación, argumentación, razonamiento, formulación y resolución de problemas y ejecución de algoritmos.

La siguiente pregunta de este instrumento, está destinada a percibir la clase de *contextos* que los libros de textos favorecen la resolución de problemas relacionados con las progresiones. Son variados y tienden a favorecer escasos registros semióticos. Por ejemplo, para el LTE_I se inicia la conceptualización con problemas matemáticos en las PA, sin embargo para las PG propone una situación problemática contextualizada: el sistema de filtración de agua.

En los PpR de las PA se propone dos problemas de altura de los pisos de un edificio, uno de física (movimiento de un objeto) y los demás desde las propias matemáticas (álgebra, aritmética y geometría). Igualmente, en las PG se propone dos PpR en contextos extramatemáticos, uno sobre depreciación y otro sobre interés de una inversión; los demás desde contexto de las propias matemáticas.

Por su parte, en el LTE_{II} para los PM, tanto en las PA como PG se favorece un contexto extramatemático enfatizando en las finanzas (inversión y ganancia por fideicomiso). En los PpR de las PA se propone problemas sobre depreciación, diseño de un teatro, intereses de una inversión, dobles en una cuerda y los demás desde las propias matemáticas (álgebra, aritmética y geometría).

Igualmente, en las PG se propone cuatro PpR, uno sobre depreciación, distancia recorrida, rebotes de un balón, y cantidad de dinero de la caja de un almacén; los demás desde contexto de las propias matemáticas.

Del mismo modo, en el LTE_V gran parte de los PM en ambos tipos de progresión se da desde el contexto de las matemáticas, excepto una situación de extracto mensual del salario para las PA y otra de ahorro semanal del salario y el rebote de una pelota en las PG; sin embargo, en los PpR se hallan otros contextos, para ilustrar mejor, en las PA se propone situaciones sobre cantidad de personas en ONG, edades, pilas de autos parqueados, disposición de las sillas en un teatro, calificaciones, cantidad de donantes de sangre y los demás son desde las matemáticas. En las PG igualmente se propone uno sobre depreciación, otro sobre el recorrido de una distancia, dosis de medicamento, donaciones de una fundación; los demás desde las mismas matemáticas.

En términos generales, podemos decir que son escasos los contextos extramatemáticos en los que se modela las progresiones para la mayoría de LTE, y más aún las transformaciones semióticas que implican la solución de dichos problemas. En cierto modo, esta observación coincide con Sánchez (2017) cuando asegura que se identifica mayormente problemas de tipo rutinarios que sirven para mecanizar procesos; los problemas no rutinarios o de contexto real aparecen en muy pocos casos.

Por otro lado, el siguiente punto del instrumento indagó si el modo como se presenta la información, hace evidente la distinción del estatus de una representación como autosuficiente o de representación auxiliar, sin embargo, en ninguno de los libros de texto

se hace evidente explícitamente esta diferenciación tanto en la conceptualización de las progresiones, como en los problemas modelos o los problemas para resolver. Con respecto a los registros auxiliares, plantea Duval (2006) que:

... representaciones auxiliares que pueden ayudar al estudiante a comprender cada etapa del proceso de resolución. (...) Las representaciones auxiliares pueden satisfacer solamente una función específica en la resolución de los problemas y ésta es relativa a pensar en la conversión o el tratamiento. De cualquier manera, lo que importa no es averiguar la ‘buena’ representación, sino las diversas y adecuadas representaciones para coordinarlas. (p.164).

El siguiente nodo se indagó por la utilización de recursos didácticos que proponen los textos para la favorecer la comprensión del objeto matemático progresión; se observa que los LTE_I y LTE_{III} no proponen recursos didácticos diferente a los utilizados tradicionalmente en la matemática escolar. Sin embargo, en los demás libros de textos si presentan recursos para facilitar una mejor comprensión de las progresiones, por ejemplo, en el LTE_{II} como forma de estimular la producción de nuevo conocimiento con respecto a las progresiones, a través de aprendizaje significativo que desarrollen la creatividad y la imaginación, el libro de texto propone el fractal “el tapete de Sierpinski” en el cual el número de cuadritos eliminados corresponde a una progresión geométrica. Por último, propone la creación de fractales a partir de la herramienta Fractint. Igualmente, el LTE_{IV} presenta dos recursos didácticos, amplía su información y la actividad denominada trabajo con Smath Studio mediada por una herramienta TIC.

En última instancia, se indaga en cada texto sobre las circunstancias filosóficas, históricas y científicas de diferentes épocas, recreadas para explicar el desarrollo las progresiones aritméticas y geométricas, así como las contribuciones que estos objetos matemáticos han aportado al bienestar de la humanidad.

En cuanto a los $LTE_{I-III-V}$ no se evidencia alguna circunstancia de tipo histórica o filosófica en la conceptualización, sin embargo, para la explicación del concepto sucesión

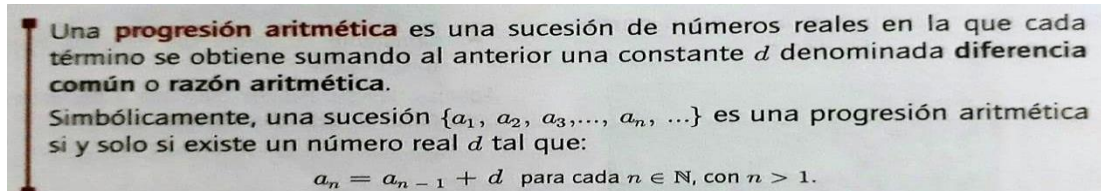
del cual proviene las progresiones, se anuncia una desde la historia de las matemáticas, en el LTE_I se propone la procreación de los conejos a través de la sucesión de Fibonacci, mientras que en LTE_{III-V} esta misma sucesión se muestra desde el espiral de Fibonacci y los espirales del girasol respectivamente; adicionalmete este último texto, data ladrados y triangulares estudiados por los Pitagóricos en el siglo VI a. C.

En el LTE_{IV} se hace una breve reseña histórica, en la que se menciona algunas de las antiguas progresiones desarrolladas antes de nuestra era. Sin embargo, no se percibe el tipo de registro semiótico en el que emerge dicho objeto matemático.

Esta última subcategoría permite señalar que, en términos generales los libros de textos analizados presentan un enfoque simplista hacia la historia de la matemática, ya que incluso algunos omiten actividades didácticas que promuevan el desarrollo histórico y epistemológico de las progresiones, a lo cual también se le suma, la imposibilidad para reconocer el devenir de las representaciones semióticas asociadas este objeto matemático. Esta observación concuerda en cierto modo con Fernández (2000) cuando propone que, al introducir los conocimientos científicos, los libros de texto no hacen referencia a aquellos problemas originaron o contribuyeron a la construcción de dichos conocimientos.

Por otro lado, ya que la investigación está encaminada hacia el análisis de cinco libros de texto escolares de matemáticas, este primer instrumento también permitió encontrar en segunda instancia algunos tipos de *obstáculos* que promueven las actividades de conceptualización que proponen los libros de textos, a partir de la formulación de cada unidad didáctica. El primer obstáculo hallado es de carácter didáctico, el cual fue definido por Giraldo (2014) como *obstáculo relacionado con el uso del lenguaje matemático*; en el LTE_{III} .

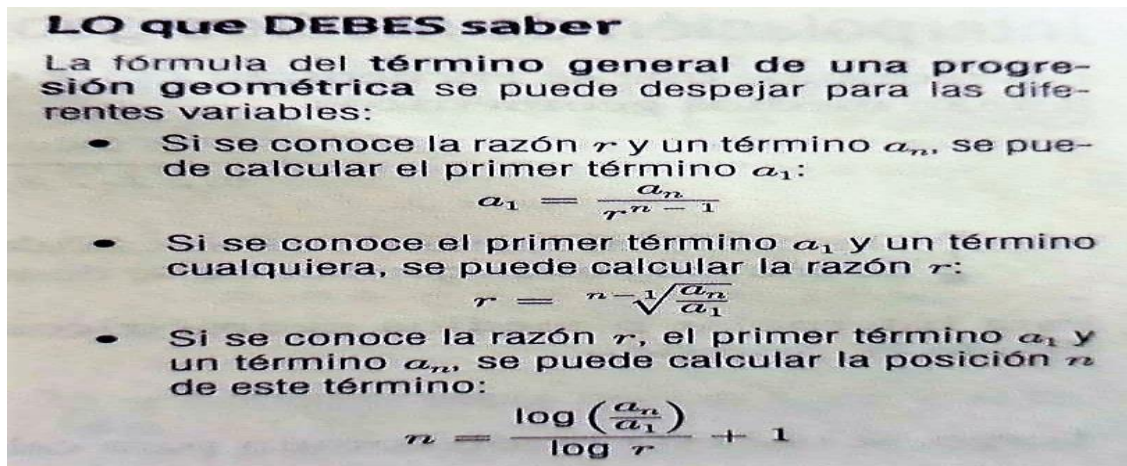
Figura 8. Ambigüedad al momento de utilizar “la diferencia común con la razón” en la definición de progresión.



Fuente: Libro de texto escolar III.

Esta ambigüedad en el registro verbal, puede originar una mala interpretación por parte del lector, ya que la razón es posteriormente utilizada por este mismo texto en la definición del término general de las progresiones geométricas:

Figura 9. Definición término general de una progresión geométrica.



Fuente: Libro de texto escolar III.

Otro tipo de obstáculos asociado a los contextos de ejemplificación y conceptualización para la construcción del conocimiento, es el que Giraldo (2014) denomina como *uso de modelos concretos* para las definiciones, ya que al analizar en el $LTE_{(I\ 1)}^{PM[Cv]}$, se infiere que puede inducirlo; en concordancia con este autor, los modelos concretos se refieren a las

maneras en que se contextualiza los objetos matemáticos, ya que generalmente, al iniciar una explicación de las progresiones geométricas, utiliza situaciones problemáticas para introducir la definición y conceptualización del objeto matemático, con dos intenciones implícitas, una es generar interés hacia el aprendizaje de concepto y por otro, intentar que el aprendizaje en profundidad; sin embargo, se deduce que este tipo de actividades puede generar un obstáculo debido a que estas maneras en que se contextualiza los objetos matemáticos, pueden generar inconveniente por la dependencia y confusión que genera al resolver otras situaciones en contextos diferentes; además esta clase de actividades normalmente favorecen la utilización de pocos registros representacionales, lo cual repercute en un empobrecimiento de las representaciones semióticas utilizables a la hora de apropiarse de las progresiones.

Otro caso relacionado con esta forma de obstáculo, se da con el abusivo uso de contextos de economía y finanzas en los PM propuesto en el LTE_{II} , aunque estos justifican la variación lineal para las PA y exponencial en las PG, puede volverse un obstáculo ya que el lector, de manera errónea únicamente podrá asimilar las progresiones en estas aplicaciones, lo que a la vez estará cohibido de referenciarlas en otras situaciones que implica variaciones de este tipo. Con respecto a este tipo de obstáculo, Rojas (2014) plantea que:

Se reconoce así una problemática de tipo cognitivo asociada con el uso de modelos concretos en la construcción de objetos de las matemáticas escolares. Si bien el material concreto puede proporcionar un apoyo eficaz a la intuición matemática, en algunos casos puede constituirse en un obstáculo. (p. 148)

A continuación, se presenta dispositivo de filtración de agua propuesto para la introducción para la definición de las progresiones geométricas:

Figura 10. PM sobre dispositivo de filtración de agua.

Ejemplo

El dispositivo mostrado corresponde a un filtro o sistema de filtración de agua. Se muestran solo tres de n zonas de filtración. Sabemos que cada una de estas regiones permite pasar solo los $\frac{2}{3}$ del total de sedimentos que contiene el agua en el momento que ingresa a un nuevo nivel. Asumamos que se vierten en el filtro 8 litros de agua que contienen 71 442 mg de sedimentos. Calculemos la cantidad de sedimento en miligramos que contiene el agua cuando atraviesa cada una de las zonas de purificación, supongamos seis en este caso.

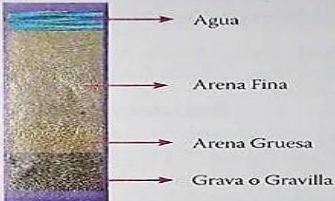


Diagrama de un dispositivo de filtración de agua con cuatro niveles: Agua, Arena Fina, Arena Gruesa y Grava o Gravilla.

$$M_0 = 71\,442 \text{ mg} \Rightarrow M_1 = 71\,442 \cdot \frac{2}{3} = 47\,628 \text{ mg} \Rightarrow M_2 = 47\,628 \cdot \frac{2}{3} = 31\,752 \text{ mg} \Rightarrow$$

$$M_3 = 31\,752 \cdot \frac{2}{3} = 21\,168 \text{ mg} \Rightarrow M_4 = 21\,168 \cdot \frac{2}{3} = 14\,112 \text{ mg} \Rightarrow M_5 = 14\,112 \cdot \frac{2}{3} = 9\,408 \text{ mg}$$

$$M_6 = 9\,408 \cdot \frac{2}{3} = 6\,272 \text{ mg} \dots$$

Ahora de acuerdo a la secuencia obtenida encontremos una expresión que nos permita determinar la cantidad de sedimento que aún queda en el agua en función del número de filtro o nivel n del dispositivo. Esta expresión la denominamos como término general o término *e-simo* de la progresión geométrica. Antes de encaminarnos hacia nuestro objetivo observemos como al dividir un valor de sedimento entre su anterior o antecesor se obtiene el mismo resultado, esto es:

$$\frac{6\,272}{9\,408} = \frac{9\,408}{14\,112} = \frac{14\,112}{21\,168} = \frac{21\,168}{31\,752} = \frac{31\,752}{47\,628} = \frac{47\,628}{71\,442} = 0,6$$

Que expresado en forma racional toma la forma $\frac{2}{3}$.

Fuente: Libro de texto escolar I.

A esto se suma, que el LTE_{IV} no se enfatiza interesadamente al uso y desarrollo de las representaciones semiótica en los problemas modelos para las progresiones, que solo se reducen a la ejercitación algorítmica, lo cual puede generar un obstáculo emotivo.

En el ámbito de los obstáculos de naturaleza emotiva-afectiva, se encontró la formalización teórica como obstáculo, dado que en LTE_{III} presenta la definición de progresión de manera reducida a un “formalismo vacío”, además no se contextualiza su uso, lo que puede acarrear en el estudiante, una falsa impresión de emplear las progresiones aritméticas únicamente desde el registro algebraico. Además, el reiterado énfasis hacia a

este tipo de actividades formales, puede desmotivar a que los estudiantes comuniquen sus ideas respecto a las progresiones. Asimismo, no se amplifica el contexto ni se ostentan otros aspectos de la vida real que den sentido a las diferentes representaciones semióticas. Este obstáculo, expresa que los libros de textos se han pensado para un público bastante especializado.

En suma, este instrumento aplicado a los cinco libros de texto refleja que, en general, no se enfatiza interesadamente al uso y desarrollo de las representaciones semióticas en las actividades de aprendizaje, ya que dichas ejemplificaciones y actividades se reducen a la ejercitación algorítmica, haciendo uso intensivo de registro representacional simbólico, numérico y algebraico; este déficit puede configurar obstáculos en el aprendizaje de diferente naturaleza.

La tendencia general encontrada en la mayor parte de los libros de textos, está encaminada a que ostentan poca diversidad de las representaciones semióticas asociadas al objeto matemático progresión; este resultado conecta con las observaciones de Barrantes, López y Fernández (2015) cuando manifiestan que los libros de texto exponen una variedad escasa de representaciones en el momento de presentar al objeto matemático.

De igual manera Morales (2013) al analizar libros didácticos propone “los autores no recurren con frecuencia a la utilización de diversos registros en la formación de los conceptos matemáticos, esto crea una dificultad cuando al alumno se le propone actividades con diversos registros, como el registro verbal y registro simbólico”. (p. 140). En consonancia con Duval (2004) cuando expresa que “lo necesario para favorecer la coordinación parece ser un trabajo de aprendizaje específico centrado en la diversidad de los sistemas de representación”. (p. 17).

En este sentido, también se puede notar cierta inclinación hacia la presentación por medio del registro simbólico, algebraico y verbal, lo que indica que hay predilección por representar las progresiones desde la perspectiva formal. Adicionalmente, en ninguno de

los libros se presenta una comparación de la gráfica cartesiana que permita apoyar visualmente la diferenciación entre la *diferencia común* de las progresiones aritméticas y la *razón común* de las progresiones geométricas.

Conclusiones del instrumento 1:

Los resultados de este instrumento ponen de manifiesto que, en cuanto sea posible, se hace primordial que los libros de textos permitan reconocer la diversidad de representaciones semióticas y registros de representación, para acceder completamente al objeto matemático progresión, considerando que cada registro muestra nuevas particularidades y características. En concordancia, deben igualmente posibilitar la representación en el registro, gráfico, figural y geométrico; para lo cual los autores de estos recursos didácticos deben conocer y hacer explícitas las reglas de conformidad de cada uno de estos registros, y evocarlas en actividades didácticas coherentes, que le permita al lector identificar cómo se compone y utiliza las progresiones en determinados contextos.

En cuanto a la función de los registros de representación, es sustancial tener en cuenta que desde la teoría base de esta investigación, la transformación de un registro a otro constituye el factor fundamental en la construcción del conocimiento y la apropiación de las progresiones. Por tanto, se debe abandonar la enseñanza desde el monoregistro, hacia el establecimiento de correspondencias entre registros de partida y de llegada. Sin embargo, de acuerdo a lo evidenciado en el análisis de este primer instrumento, se deduce que en la mayoría de los problemas modelos y los problemas por resolver en los libros de texto escolares examinados, no admiten el paso instantáneo de una representación semiótica a otra, acarreando al lector la imposibilidad de llevar a cabalidad la coordinación de registros en la resolución de situaciones problemáticas.

En ninguno de los libros de texto analizados se pone de manifiesto, las representaciones semióticas o sus registros de los que emerge la noción de progresión, es más, solo algunos autores citan escasos problemas que dieron origen a dichos objetos matemático, sin

evidenciar aspectos representacionales; lo cual muestra una visión ahistórica de las matemáticas.

Las representaciones que proponen los libros de textos para el aprendizaje de las progresiones, hacen referencia parcialmente a unas de sus características particulares, en otras palabras, cada registro de representación resalta únicamente algunas de los parámetros y propiedades de las Progresiones, lo cual implica que, para comprenderlo de manera profunda y extensa se hace necesario que se combinen, coordinen y transformen diversos registros. En este orden de ideas, desde la perspectiva de Duval (citado por Masías Sánchez, 2014) “poder movilizar y coordinar varios registros en el desarrollo de una misma tarea y en el aprendizaje de un concepto, o bien poder elegir un registro en lugar de otro, es esencial en la actividad matemática” (p.37)

Por otra parte, de acuerdo al análisis se puede inferir que, aunque la totalidad de los libros de textos tienden a favorecer el uso y manipulación con más de dos registros de representación para la comprensión de las progresiones, se puede decir que es escaso e insuficiente con respecto a las posibilidades que existen y admite dicho objeto matemático.

4.2 ANÁLISIS DEL INSTRUMENTO 2

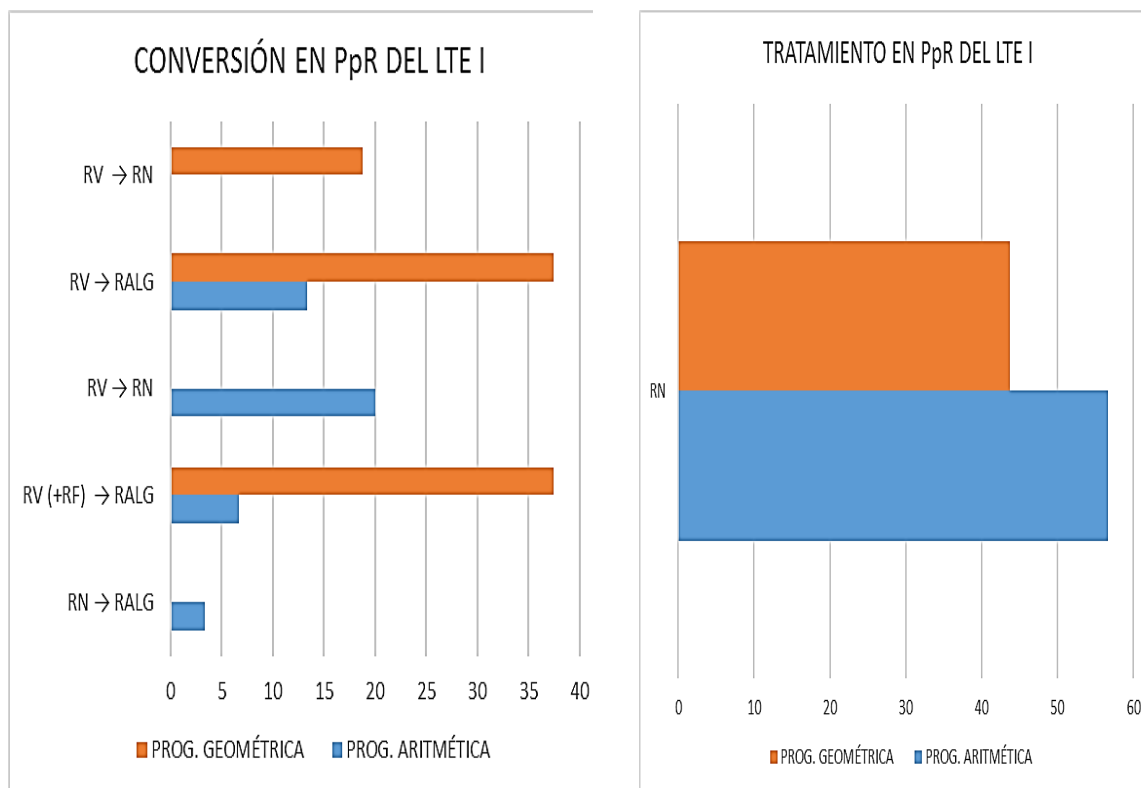
En esta parte del trabajo, se presenta información referida a la demanda e incidencia con que los autores usan las transformaciones semióticas para el aprendizaje de las progresiones a partir de la resolución de problemas; a su vez, consintió determinar cuantitativamente los posibles tipos de transformaciones que promueve los problemas por resolver.

Uno de los rasgos que permite revelar este instrumento de análisis, es que al parecer los libros de textos asumen la transformación de conversión como una acción simple. En vista de que se exhiben de manera análoga varios sistemas de representación, enfocados en comunicar de forma comprensiva y asequible las unidades significantes elementales; ante lo cual se deduce que esta actividad cognitiva se desarrolla gradualmente apoyada en el tratamiento y la evolución conceptual. En contraposición, Aristizabal (2014) propone que

“la conversión es necesaria en la actividad matemática y no tiene nada que ver con la actividad natural”. (p.34)

Por otro lado, se evidencia que la mayor parte de los problemas se emiten desde el registro verbal (ver figura 11), sin embargo, la resolución privilegia al registro algebraico. Este hallazgo concuerda con los de Aznar, Distéfano, Prieto y Moler (2010) cuando proponen que “La enseñanza tradicional de la matemática ha privilegiado el uso del registro algebraico en la resolución de problemas”. (p.13)

Figura 11. Transformaciones semióticas en los PpR del $\llbracket \text{LTE} \rrbracket$ _I



Fuente: Elaboración propia.

En cuanto al papel de representación auxiliar que cumple el registro gráfico en la resolución de problemas por parte de los libros de textos, en concordancia con Artigue (1995) cuando propone que se le ha ofrecido al registro gráfico un status inframatemático. Ya que la utilización de este registro en la resolución de problemas pareciera complementaria de las resoluciones analíticas, realizadas en el registro simbólico o algebraico, sin que el registro gráfico sea tomado en el registro de partida del cual extraer parámetros que conlleve a la resolución del problema.

Más aun, se evidencia una correlación fuerte y directa en la resolución de problemas, hacia la disociación del registro gráfico con otros registros. Esta observación converge con las observaciones de Tocto (2015) “También se enfatiza en las actividades propuestas y resueltas en el uso de los registros gráfico y algebraico de manera independiente, ya que no se presentan actividades en las que se evidencie la conexión entre estos dos registros”. (p. 46)

En lo que se refiere a la importancia que los textos analizados le dan a la segunda característica que posee la conversión, es decir, a la inversión de la dirección entre los registros de partida y llegada, respecto al registro gráfico, se nota cierta tendencia en los problemas por resolver, a ponerse en correspondencia únicamente con el registro algebraico, sin evidenciarse la transformación inversa; esto se contradice un poco a lo hallado por Aznar et al. (2010) “es frecuente observar que sólo aparecen aquellas en que la transformación va desde el registro algebraico al gráfico, pero no las de sentido inverso” (p.13).

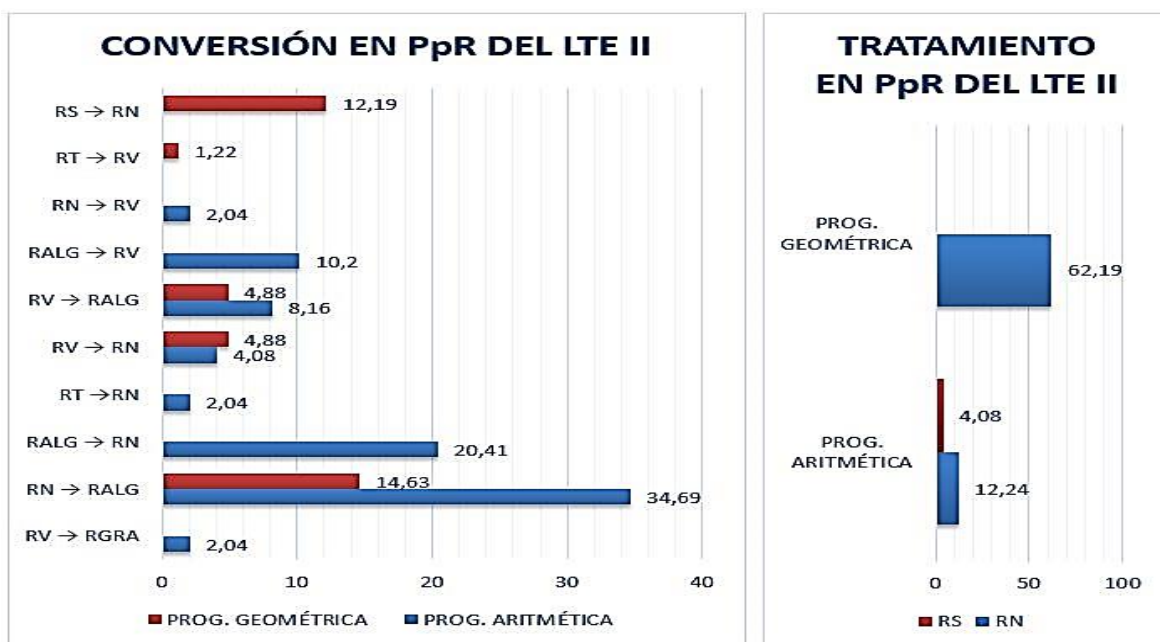
Debe tenerse en cuenta que, la desventaja de que en los libros de texto se privilegie únicamente transformaciones semióticas análogas a las que se propone en los problemas modelos, no garantiza al lector ampliar íntegramente sus capacidades cognitivas; sin embargo, considerando que logre ser competente para realizar la transformación desde un registro partida hacia otro de llegada, tampoco certifica que podrá hacerlo desde registros viceversos. No obstante, esta suposición se complementa con lo que menciona Tamayo,

Restrepo y Velasco (2012) “Hoy en día, se admite que la pluralidad de los sistemas semióticos permite diversificar las representaciones de un mismo objeto y, de esta forma, amplía las capacidades cognitivas de los sujetos, y por lo tanto, sus representaciones mentales”. (p. 250).

En importante señalar, la escasa transformación desde la representación algebraica a la gráfica, en la que el sujeto a partir del conjunto de pares ordenados procedente del término general (fórmula o ecuación) los asocie a sus respectivos puntos en el plano; y menos aún se proponen actividades que exija conversiones en el sentido inverso, ya que exige del lector un esfuerzo cognitivo superior al momento de realizar la respectiva segmentación de las unidades elementales de la gráfica y traducirla al término general. Esta cohibición hallada en los libros de textos contradice a Duval (2004) cuando expresa que, la imposibilidad para llevar a cabo este tipo de transformaciones entorpece la conceptualización del objeto y a la vez limita las posibilidades de visualización en la resolución de problemas.

En cuanto al registro numérico, dado a que es utilizado frecuentemente como registro auxiliar en la conceptualización de las progresiones, consideramos que la relevancia dada a este registro en las definiciones y en la mayoría de PM, tiende a que el lector lo confunda con el objeto matemático, lo cual difiere con Duval (1999) cuando expresa que al usar la representación en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, es necesario intentar que los objetos matemáticos no se confundan con la representación que se hace de ellos; de igual manera señala que las representaciones son indispensables y no pueden eliminarse, porque lo que importa conceptualmente es el objeto matemático. Nótese el uso de este registro en la siguiente figura:

Figura 12. Transformaciones semióticas en los PpR del [LTE] _II



Fuente: Elaboración propia.

Por otro lado, parece que los autores no hacen evidente que para la conceptualización de las progresiones se debe involucrar la coordinación de los registros de representación. Es necesario que los PM y PpR que proponen los libros de textos promuevan nivel de coordinación de registros semióticamente heterogéneos, en el que el lector alcance a discriminar en términos de Duval (2014) “el representante y lo representado” (p.63). Lo que implica que la comprensión conceptual se relaciona con la determinación de aspectos invariantes entre diversas representaciones semióticas. En este sentido Gonzales 2011 propone:

Un estudiante que ha desarrollado suficientemente la coordinación entre registros muy bien puede desempeñarse disponiendo sólo de las representaciones de un sólo registro, porque en realidad el dispone potencialmente de representaciones que provienen de otros registros pero que de manera latente permanecen asociadas a las que el utiliza en forma de

tratamientos cuasi-instantáneos. Esta coordinación le da ese grado de libertad que permite tener estrategias heurísticas para el desarrollo de la actividad cognitiva. (p.143)

Por otra parte, al referenciar el uso del registro tabular en el estudio de las progresiones, se encontró que en los problemas modelos es exiguo la utilización; no obstante, se propone en la mayoría de los apartados, durante la conceptualización de sucesión, que es la noción con que se define las progresiones, como se analizó en líneas precedentes. En este tipo de tablas, se ostenta las sucesiones con tratamientos en los registros simbólico o numérico, para visualizar el patrón que sigue cada uno de los términos.

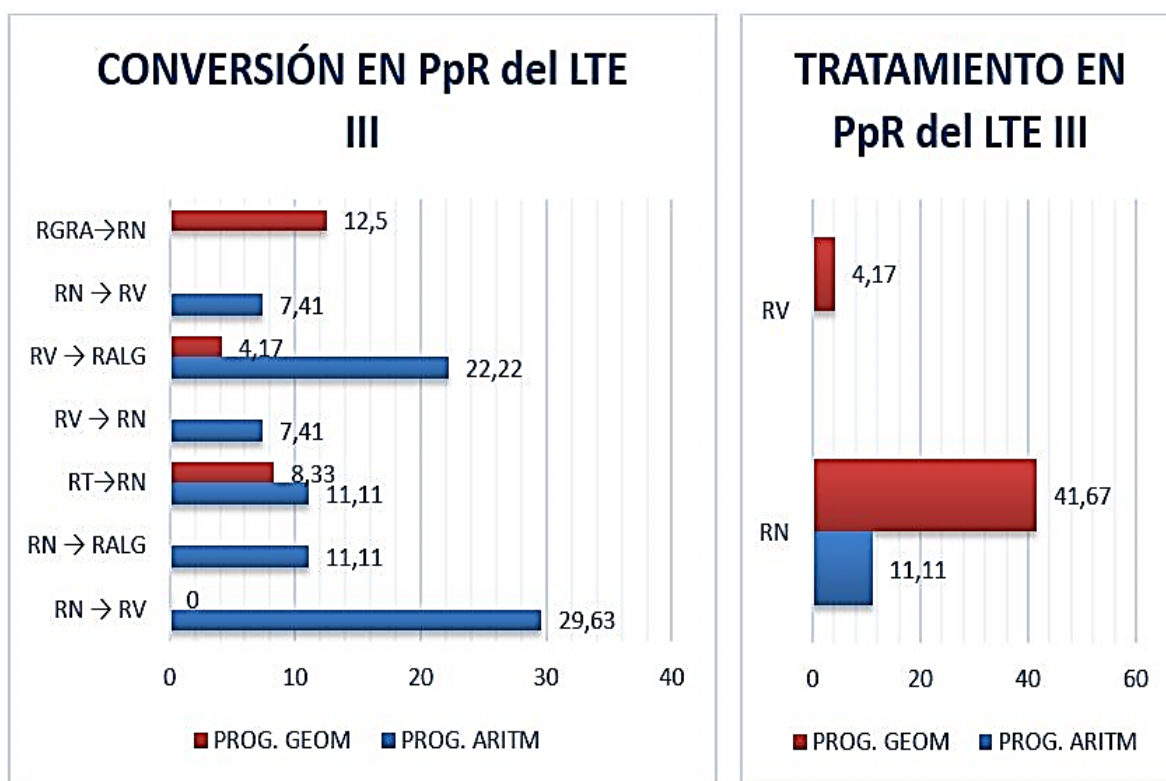
Conviene subrayar, que en los PpR la mayoría de los libros de texto proponen este registro, al promover la traslación entre los distintos registros involucrados, por ejemplo, pasar del registro verbal al tabular o del registro gráfico al tabular. Otros textos, emplean el registro tabular en tratamientos como completar a través de ejercicios, aunque no para brindar información en los PM.

En relación al registro gráfico, en el $LTE_{(IV\ 12)}^{PpR\ [Cv]}$ se propone un diagrama de barras (registro gráfico) al cual se pide representar a través de descripción (lengua natural) y por lo tanto se realiza una conversión. Aunque este tipo de registro suele emplearse básicamente para visualizar algunas propiedades y aspectos cualitativos durante la conceptualización de los objetos matemáticos, en el caso de las progresiones se hace nula su empleo; sin embargo, únicamente en el $LTE_{(V)}^{PM\ [Ttm]}$ es empleado como registro auxiliar.

Aunque el autor de referencia de esta investigación, aclara en varios de sus aportes teóricos que este tipo de registro permite ambos tipos de transformación semiótico, por ejemplo, Duval (1988) propone que es viable identificar puntos en el plano cartesiano que permitan realizar el trazo, e interpolar o extrapolar puntos en el plano cartesiano como tratamientos respectivamente. Asimismo, permite convertir un contenido lingüístico (lengua natural) a una representación gráfica (registro gráfico) cuando se realiza una ilustración o viceversa.

Con respecto al registro simbólico, se propone en los libros de texto, a partir de simbología que se ajustan a transformaciones desde la lógica matemática y la teoría de conjuntos. En transformaciones que no implicaban salir de sistema semiótico, se encontró que los libros de texto lo utilizan para deducir la definición de las progresiones, y demostrar matemáticamente la expresión simbólica (término general); En transformaciones que exigen cambia de sistema semiótico, se emplea para ejemplificar o explicar el significado de una expresión verbal o numérica; no obstante, las transformaciones que demanda los problemas modelos y para resolver (ver figura 13), es poco notorio este registro.

Figura 13. Transformaciones semióticas en los PpR del [LTE] _III



Fuente: Elaboración propia.

Así como lo afirma Duval (1999) (citado por Tocto 2015), las dificultades relativas a los problemas se basan en la comprensión de los enunciados, ya que la comprensión del enunciado de un problema de aplicación requiere necesariamente de una tarea de conversión”. (p.63)

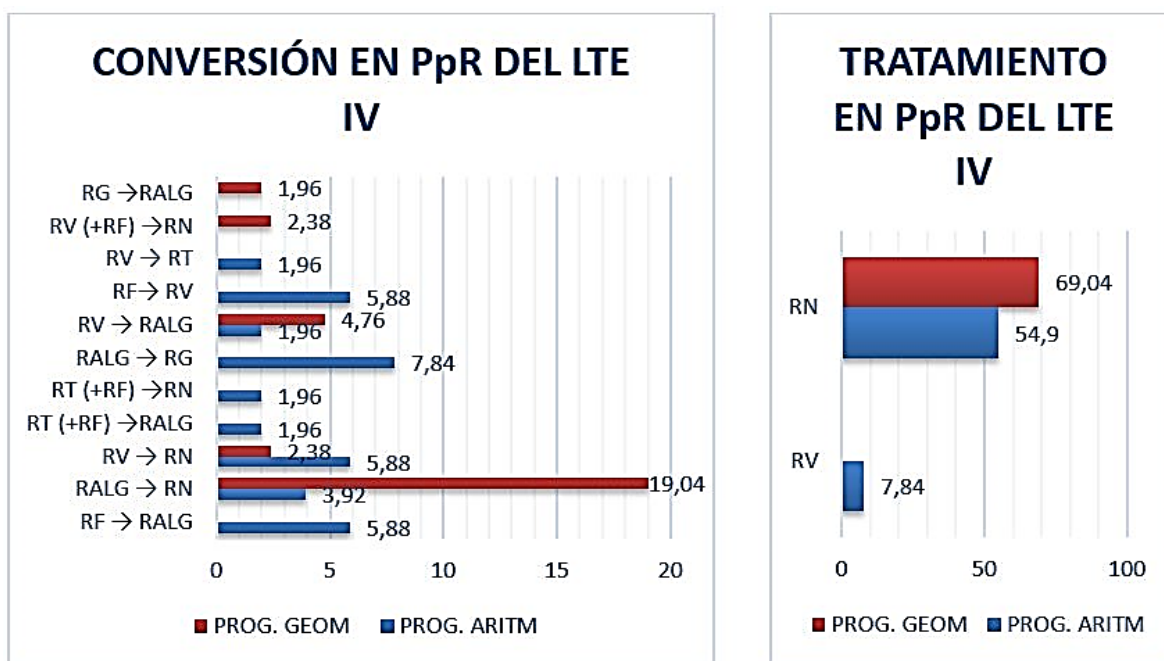
Al cuantificar las actividades cognitivas de tratamiento y conversión, en los problemas modelos, se encontró que el 24% corresponde a transformaciones en el mismo sistema semiótico. Esto se justifica desde la teoría de Duval (como se citó en Quintero, 2014) donde supone de manifiesto que:

... durante la solución de un problema matemático el tratamiento es incluso más importante que la conversión, ya que es quien hace relevante el mejor cambio de registro; también reconoce que la conversión parece ser –de los dos- el proceso cognitivo más complejo, debido a que no hay reglas ni es posible aprender (ni enseñar) un único e infalible método para que una conversión de representación semiótica sea siempre exitosa. (p.65)

Por consiguiente, lo anteriormente expresado se puede resumir en la siguiente frase: “Desde este punto de vista, la conversión sería el resultado de la comprensión conceptual y cualquier problema con la conversión sería indicativo de conceptos erróneos” (Duval, 2006, pp 157).

En cuanto al registro geométrico, en los PM no se propone este tipo de registro que permita realizar operaciones de manipulación y reconfiguración, para proveer la comprensión y la instauración de vínculos entre las progresiones. Sin embargo, únicamente en los PpR del LTE_{IV} (ver figura 14) se propone transformaciones de este registro, encaminadas a que a partir del análisis de la esponja de Sierpinski, la cual representa un fractal, se pide determinar la fórmula que permita describir la eliminación del área de la cara lateral, al realizar 30 veces el mismo proceso.

Figura 14. Transformaciones semióticas en los PpR del [LTE] _IV



Fuente: **Elaboración propia.**

Otro rasgo que se deriva, esta encauzado por el propósito que se evidencia en las conversiones que proponen los PpR en los libros de texto. A pesar de que este tipo de problemas tienden más beneficiar la comprensión de las progresiones y sus respectivas propiedades, poco se explicita y declara la necesidad de que el lector tenga en cuenta la complejidad que existe al coordinar algunas representaciones exigidas, por el afán encaminado hacia encontrar de manera coherente una respuesta.

Por último, es importante referirnos al registro más habitual en las unidades didácticas de los libros de textos escolares, el verbal, el cual es utilizado en gran medida como registro auxiliar. Es por esto que, Duval (2006) expresa que el uso del lenguaje natural es inevitable, ya que es imprescindible en todas las áreas del conocimiento. En este sentido, se debe articular este registro multifuncional con aquellas representaciones generadas dentro de los registros monofuncionales para alcanzar la comprensión en matemáticas.

4.3 ANÁLISIS DEL INSTRUMENTO 3

Para analizar el proceso de conversión de las representaciones semióticas, empleada por libros de texto en la resolución del problema, propuesto como ejemplo en la enseñanza de las progresiones, se hizo pertinente tener en cuenta las dos características propias de la conversión, expresadas por Duval (2004), la primera manifiesta que este proceso es orientado, es decir, posee registro semiótico de partida y un registro semiótico de llegada, lo cual si se cumple; y la segunda declara que puede ser o no congruente, para el caso de los problemas modelos, este tercer instrumento permitió reconocer que un el mayor de los caso, la conversión entre los registro empleado no es congruente. En correspondencia a la última característica, Duval (1999) cataloga que el proceso de conversión es congruente, si al fragmentar cada una de las representaciones en sus respectivas unidades significantes, para colocarlas en correspondencia; propone que se requiere considerar inevitablemente los tres criterios, si falla al menos uno, se dice que no hay congruencia.

Con la intención de realizar el análisis detallado del fenómeno de congruencia y no congruencia propuesto por Duval (1999), en la conversión entre los distintos registros de representación empleado por los autores de los libros de textos en cada problema modelo, se recurrió a la segmentación en las unidades significantes.

De acuerdo con la información analizada en el interior de este instrumento, se desglosan algunas observaciones. Una inicial, que es común en la mayor parte en los libros de textos la hegemonía de los tratamientos de naturaleza algorítmicos, principalmente desde el registro algebraico, numérico y simbólico; en relación a la resolución de problemas que implique estrategias de conversión entre registros.

Otra observación está asociada a la conversión, concretamente con lo que propone Duval (2006) respecto a la inversión de la *dirección de la conversión*, afirma que es notable la magnitud del fracaso cuando se propone este tipo de actividad. Se puede evidenciar que ni en los PM, ni en los PpR propuestos en los libros de textos se procura atender a este

fenómeno, es decir, en la resolución de problema no invierten el papel del registro de partida y del registro de llegada dentro de la transformación.

Por otro lado, es notable como en las actividades de aprendizaje propuesto por los libros de textos, el registro verbal impera de carácter absoluto, dado que se discurre habitualmente como fuente total del conocimiento, en el que además cumple integralmente dos roles elementales, el de comunicar y representar. Sin embargo, esta observación no implica que deba omitirse su importancia en los procesos de enseñanza de las matemáticas, sino que invita a que dicho registro se coordine de manera más intensa con los diferentes registros semióticos; lo que puede conllevar a incrementar el desempeño y rendimiento académico, al desarrollar la capacidad para la leer de manera comprensiva y crítica. Esto concuerda con Masías Sánchez (2014) al aseverar que “un empleo abusivo de dicho registro puede no ser adecuado, pues la comprensión de un enunciado es condición necesaria, aunque no suficiente, en la resolución de las diversas tareas que se les plantea a los estudiantes”. (p 53)

En las conversiones que involucran registros como el tabular, simbólico y algebraico, en ningún libro de texto se emplea como auxiliar el registro gráfico; esta observación hace un poco omisa la idea de Duval (2006), cuando afirma que en las matemáticas los gráficos cartesianos se manejan siempre de manera articulada con otros registros de representación.

Con respecto a transformaciones que se perpetran al interior de un mismo registro, en términos generales los problemas modelos, cumplen con las reglas de conformidad que constituyen el sistema semiótico, es decir, los autores de los libros de texto, al realizar dicha transformación, no se salen del dominio del sistema semiótico empleado; al respecto Duval propone que “...para hacer posible la utilización de los medios de tratamiento que ofrece ese sistema semiótico empleado. Una representación semiótica no debe salirse del dominio definido por las reglas que constituyen un sistema semiótico” (Duval, 1999, p.43).; es precisamente al conjunto de estas reglas que el autor de referencia denomina *reglas de conformidad*, las cuales hacen referencia a i) “la determinación de unidades elementales”; ii) “las combinaciones admisibles de estas unidades elementales para formar unidades de

orden superior” y iii) “las condiciones para que una representación de orden superior sea una producción pertinente y completa...” (p.43)

No obstante, es importante señalar que en algunos de los PM y PpR la intención está más encaminada a que el funcionamiento cognitivo del lector imite tratamientos de tipo algorítmico (ver figura 15) en consonancia con Duval (2004) cuando expresa que “... pero es en relación con la función de objetivación y no con las de expresión o la de tratamiento, que en últimas debe analizarse la estructura de las representaciones para comprender su papel en el funcionamiento cognitivo del pensamiento” (p.64). Esta observación implica que lo significativo es que tanto los PM como los PpR estén encaminados hacia la objetivación, es decir, en palabras de Duval “al descubrimiento por parte del sujeto mismo de aquellos que hasta entonces no sospechaba, incluso si otros se lo hubieran explicado” (p. 33)

Figura 15. Imitación de tratamientos de tipo algorítmico

The image consists of two panels from a textbook. The left panel, titled 'Ejemplo 1', shows a problem asking for the general term of an arithmetic progression with terms 8, 3, -2, -7, -12, -17, -22, -27, ... The solution identifies the first term $a_1 = 8$ and common difference $d = -5$, then derives the formula $a_n = 8 + (n-1)(-5) = 8 - 5n + 5 = 13 - 5n$. The right panel, titled 'Para practicar', lists six problems (a-f) asking for the general term of various arithmetic progressions, including sequences of natural numbers, multiples of 5, and fractions.

Ejemplo 1: Halla el término general de la siguiente progresión aritmética:

$$8, 3, -2, -7, -12, -17, -22, -27, \dots$$

Solución: El primer término de la progresión es $a_1 = 8$ y su diferencia común es $d = 3 - 8 = -5$. Por lo tanto, el término general es:

$$\begin{aligned} a_n &= 8 + (n - 1)(-5) \\ &= 8 - 5n + 5 \\ &= 13 - 5n \end{aligned}$$

Para practicar

1. Halla el término general para cada una de las siguientes progresiones aritméticas:

- 1, 3, 5, 9, 11, ...
- 4, 9, 14, 19, 24, ...
- 3, 3, 9, 15, 21, ...
- 2, -7, -12, ...
- 1, 5, 3, 2, 4, 9, ...
- $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$

Fuente: Libro de texto escolar III.

Del mismo modo, este instrumento permite vislumbrar que pese al gran número de PpR que proponen la mayoría libros de textos analizados, se tiende a ser mínima la coordinación entre diversos registros de representación que se debe realizar para su respectiva resolución; en cierto modo coincidimos con Tocto (2015) cuando afirma que:

...se observa que se proponen insuficientes actividades en las que se trabaje la coordinación entre los diversos registros de representación semiótica, es decir, no se proponen

actividades en las que se transiten por los diversos registros de representación y se logre la discriminación de unidades o de valores pertinentes de la representación semiótica que permitan relacionar los registros: lengua natural, gráfico y algebraico. (p. 47)

Por otro lado, es de aclarar que los problemas propuestos por los libros de textos, para la comprensión conceptual de las progresiones en el proceso de enseñanza y aprendizaje la sinergia de al menos dos registros. De esta manera, el libro de texto le permite al lector juzgar si lo que en las progresiones puede ser matemáticamente simple y se comprende en un primer acercamiento, puede ser cognitivamente complejo y demanda el desarrollo de una conciencia específica sobre esta coordinación de sus registros representacionales. En concordancia con Duval (2016b) afirma:

... si un solo registro de representación es suficiente desde un punto de vista matemático, desde un punto de vista cognitivo la actividad matemática involucra la movilización simultánea de por lo menos dos registros de representación, o la posibilidad de cambiar en cualquier momento de un registro al otro. (p.90)

Por último, es evidente que las transformaciones entre registros semióticos diferentes, los libros de texto lo hacen más desde un punto de vista matemático que cognitivo, es decir, se propone las conversiones con el propósito de elegir registros que permitan ciertos tratamientos fáciles de realizar, o como fuente de guía o apoyo para tratamientos que puedan realizarse en otro registro. Esto concuerda con Duval (2016b) al proponer que desde esta perspectiva “la conversión no juega un papel intrínseco en los procesos matemáticos de justificación o demostración”. (p.90) Sin embargo aclara que, al momento de convertir un registro, no se puede menospreciar el tratamiento porque es lo que determina la pertinencia en la elección del registro a convertir o convertido.

4.4 ANÁLISIS COMPARATIVO DE LOS TRES INSTRUMENTOS

Tabla 7. Cuadro comparativo para la triangulación de los resultados.

CATEGORÍAS DE ANÁLISIS		INSTRUMENTO APLICADO		
		<i>Instrumento 1</i>	<i>Instrumento 2</i>	<i>Instrumento 3</i>
		<i>Formas de representación semiótica utilizada por distintos textos para la conceptualización.</i>		
Categoría 1	REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN LA UNIDAD DIDÁCTICA.	La mayor parte de los libros de textos introducen la noción de progresión a partir de los registros verbal, simbólico y numérico; posteriormente en los PM se percibe cierta inclinación por el uso del registro algebraico, verbal y numérico, y en los PpR algunos textos proponen aisladamente el uso de registros como el tabular, icónico y figural.	En ambos tipos de problemas, el registro gráfico está relegado o subordinado a otros registros.	Algunos de los libros de textos analizados proponen problemas que implican conversión entre registros de representación recíprocos; no obstante, alguna de las transformaciones resulta ser incongruente. Como lo señala el autor de referencia “puede ocurrir que dos representaciones sean congruentes en un sentido de conversión y no congruentes en la conversión inversa.”. (Duval, 1999)
			Los libros de textos analizados no hacen evidente la distinción entre el objeto matemático Progresión y las representaciones semióticas asociadas a este; en tal sentido, (Duval, 1993, 2003, 2016a, 2016b, 2016c) sugiere que no se deben confundir los objetos matemáticos con su respectiva representación; adicionalmente cataloga a los registros de representación en un medio de expresión que	

se identifican por sus
signos propios y la forma
de organizarse.

Se hace necesario que los problemas modelos exploren soluciones con los diversos registros, de igual manera, planteen a que el lector alcance un buen nivel de coordinación de registros, de manera que logre solucionar los PpR a partir de un solo registro, no porque sea incapaz de usar otros registros, sino como prueba de eficacia al momento de elegir el más pertinente al discriminar las unidades significantes que posee, los tratamientos que admite realizar y la solución deseada.

Hay una tendencia marcada en no utilizar las distintas formas de representación, tanto en la conceptualización del objeto, como en los problemas propuestos. Lo cual va en contra de la idea fundamental para la comprensión matemática sustentada por la teoría base de esta investigación.

Orden de aparición de las representaciones semióticas.

El modo como emergen las representaciones semióticas asociadas a las progresiones no es recurrente en cada uno de los libros de texto analizados.	Ninguna de las representaciones con que se exhibe el objeto matemático progresión, sigue algún patrón de aparición preestablecido, por el contrario, es azaroso el registro semiótico que cada autor utiliza para para presentar inicialmente el objeto.	En las transformaciones dentro del mismo registro de representación, no es periódico el surgimiento y las posibilidades de emplear reglas de conformidad, en cierto modo depende del contexto del
--	--	--

La manera como se exhiben los problemas en cada libro de texto escolar es fortuita, de igual modo no presentan coincidencia en más de dos registros consecutivos.	problema; en consonancia con D'amore (2016) la posibilidad de realizar tratamientos depende esencialmente de las posibilidades de transformación semiótica que son concretas para el registro utilizado.
---	--

En cuanto a la conceptualización de las progresiones en todos los LTE, no se explicitan aquellas representaciones en las que según la historia de las matemáticas emergen estos objetos; de conformidad con D'amore (2016) “Mirando la historia del desarrollo de la matemática, se ve que el desarrollo de las representaciones semióticas (en el sentido de tratamientos y conversiones) fue una condición esencial para el desarrollo del pensamiento matemático mismo.” (p. 247)

Coordinación de las representaciones semióticas en cada unidad didáctica.

De manera aislada, algunos de los LTE incorporan, movilizan y articulan paulatinamente	Aunque muchos de los PpR están en contextos extramatemáticos, la resolución repite los procedimientos y los registros semióticos. En	El bajo interés por la coordinación entre los registros que muestran los textos analizados, puede crear obstáculos en el
--	--	--

nuevas representaciones de las progresiones.	este sentido Masías Sánchez (2014) Propone que quitar importancia a la pluralidad y diversidad de registros de representación, puede conllevar a que el sujeto considere erróneamente, que todas las representaciones de un objeto matemático determinado poseen equivalente contenido.	aprendizaje de las progresiones. Se requiere remontar este problema, a partir de un aprendizaje más concreto, orientado por la heterogeneidad y diversidad de los sistemas representativos; que admita comparar, corresponder y convertir la mayor cantidad de registros posibles, con la selección reflexiva del registro más coherente, para beneficiar las ventajas en la solución de problemas; ausentando la falta de congruencia y coordinación de registros.
Puesto a que la coordinación implica realizar transformaciones entre diferentes registros, lo cual es un proceso no trivial ni espontáneo según Duval, los LTE se quedan cortos en actividades de conversión que muestren y exijan acciones como la identificación de unidades significantes en los registros de partida y llegada; distinción entre representado y representante y la caracterización de los registros semióticos, y por ende, impiden en gran medida la comprensión conceptual. Según Duval (1999) “la ausencia de coordinación entre los diferentes registros produce con mucha frecuencia un handicap para los		

aprendizajes
conceptuales” (p.30).

No todos los problemas modelos propuestos por los LTE muestran interés para que el lector movilice y articule de manera transparente los registros de representación semiótica asociados a las Progresiones. Esta observación se evidencia al contrastar la condición principal que propone Duval (1999), es decir que los problemas no siempre discriminan las unidades significantes a colocar en correspondencia en cada registro empleado.

La enseñanza de las progresiones por parte de los libros de textos, tiende a relegar, tanto como sea posible, la utilidad de los registros multifuncionales y a persistir en los alcances de los registros monofuncionales, porque los tratamientos logran reiteradamente a tomar formas de algoritmos. Aunque aceptamos que es inevitable el uso del lenguaje natural en los libros de textos por su misma naturaleza, creemos que en cierto modo puede originar cierta afinidad para articular las representaciones producidas en el interior de los registros monofuncionales. Para evitar amañar esta enseñanza, se hace necesario optar por actividades que demande la conversión implícita o explícita de representaciones.

En este orden de ideas, Godino (2003) aclara que “La coordinación entre registros no es una consecuencia de la aprehensión conceptual (noesis) sino que, al contrario, el logro de dicha coordinación es una condición esencial de la noesis” (p. 57).

Incidencia de las actividades cognitivas en el aprendizaje a partir de la resolución de problemas.

Las representaciones semióticas que presentan los libros de textos para el objeto progresiones, incluyendo las exhibidas en la resolución de problemas, aunque son escasas con respecto a las posibilidades que ofrecen la diversidad de registro, inciden positivamente en la comprensión del objeto matemático en la medida en que permite la coordinación por parte del lector registros de representación semiótica; en términos de Duval (2016b) es “La coordinación de registros de representación semiótica proporciona algo así como una extensión de la capacidad mental”. (p.89)	Aunque todos los libros de textos proponen la realización de transformaciones semióticas, no se hace palpable la importancia que durante el proceso de aprendizaje, el lector pueda distinguir separadamente cada una de ellas. En relación a lo anterior, Duval (2016b) propone que “No podemos analizar profundamente y comprender el problema de la comprensión en matemáticas para la mayoría de estudiantes si no comenzamos por separar los dos tipos de transformación de representaciones.” (p.90)	La existencia de no congruencia entre algunos registros empleados en los problemas (PM y PpR) determina la complejidad cognitiva que implica la conversión. Los libros de texto escolares analizados, no hacen énfasis en la identificación de las unidades significantes propias de cada tipo de progresión, ni en el registro de partida como de llegada, aunque es condición ineludible para todo proceso de conversión y, por tanto, para la coordinación entre sus múltiples registros de representación.
---	---	--

En lo referente a la resolución de problemas, llama la atención que al tomar únicamente como recurso didáctico lo expuesto en un libro de texto, se corre el riesgo de omitir aspectos relevantes del objeto matemático, ya que ninguno de los textos abarca el total de posibles representaciones que puede tener las progresiones. De ahí la necesidad de los maestros para realizar un análisis representacional a priori de los problemas matemáticos a desarrollar en el aula, comparando la variabilidad cognitiva del contexto y exigencia de un problema u otro, respecto a los criterios de congruencia.

Por otro lado, se debe potenciar resolución de problemas con multiregistro en la comprensión de las progresiones, en general, en cualquier objeto matemático, porque cada registro semiótico empleado aprueba dimensionar algunas particularidades del mismo objeto; en consecuencia, es obligatorio admitir la importancia para el desarrollo del conocimiento matemático, emplear diferentes representaciones coordinadas entre ella, no de forma aisladas.

El hecho que los LTE no contemplen mayoritariamente los aspectos relevantes de la teoría de Duval, se traducen en el mal uso de los registros de representación tanto en la resolución de problemas como en los demás aspectos implícitos en el proceso educativo, lo cual conlleva a la generación de obstáculos y dificultades que pueden afectar de manera significativa la comprensión de las progresiones.

Categoría	2	TRATAM IENTO	INSTRUMENTO APLICADO		
			<i>Instrumento 1</i>	<i>Instrumento 2</i>	<i>Instrumento 3</i>
			<i>Tipo de tratamiento utilizado durante el desarrollo del problema.</i>		

Es notable la inclinación de los LTE por presentar las progresiones a partir de tratamientos desde el registro simbólico, algebraico y verbal, lo que indica que hay predilección por representar el objeto matemático desde la perspectiva formal. Consideramos que estas transformaciones ostentadas dentro de un mismo registro, buscan que el lector realice transferencia mediante un anclaje visual hacia anclaje discursivo o viceversa; y en consecuencia, captar algunas de las características en las progresiones, a partir de procesos meramente deductivos e inferenciales sin que se muestre las posibles	Son escasos la pluralidad de tratamientos que se utilizan en los PM y PpR, se destaca los tratamientos numéricos y algebraicos. Entre muchas razones por las que se monopoliza estos tratamientos en la resolución de problemas, consideramos la brindada por Duval (2006) cuando sostiene que “Los tratamientos, pueden ser llevados a cabo, dependiendo principalmente de las posibilidades de transformación semiótica, que son específicos al registro empleado” (p. 8).	Las transformaciones de un registro a otro que se realiza en los PM están fortalecidas y complementadas con tratamientos generalmente en el registro de llegada; adicionalmente no se realiza una conversión directa y acabada, por el contrario, requiere de tratamientos que fundamenta y facilita la resolución del problema.
---	--	--

representaciones que
puedan tener.

Aunque el tratamiento de las representaciones semióticas está direccionado por el registro de representación de partida, se encontró que en esta transformación predomina los realizados desde los registros monofuncionales numérico y algebraico; este último, posiblemente por el estatus del álgebra en el currículo colombiano y su posibilidad operacional. Esta observación constata en cierto grado a lo propuesto por Duval (2016b) dentro de un sistema semiótico monofuncional, la mayoría de procesos toman la forma de algoritmos, en tanto que dentro de un sistema semiótico multifuncional los procesos nunca se pueden convertir en algoritmos. (p 71)

De manera análoga a lo hallado por Duval (1999), los libros de textos en sus problemas modelo, privilegian los tratamientos en comparación con las conversiones de registros, una posible razón es porque se ignora o se desprecia la importancia y complejidad de esta última transformación.

Reglas de conformidad.

En la presentación de cada tipo de progresión, son expuestas algunas de las principales reglas que definen el sistema de representación empleado, es decir, consideran las más representativas unidades constitutivas,	Los tratamientos que ofrecen los problemas modelos, las representaciones semióticas empleadas no se salen del dominio de sus reglas de conformidad que la constituyen el sistema semiótico. Según	En los tratamientos efectuados por problemas modelos se hace más palpable la primera regla <i>determinación de unidades elementales</i> ; lo cual,
--	---	--

que le permite al lector identificar parcialmente un registro determinado de las progresiones.	Duval estas reglas son a. “Determinación de unidades elementales”. b. “Las combinaciones admisibles de estas unidades elementales para formar unidades de orden superior” y c. “Las condiciones para que una representación de orden superior sea una producción pertinente y completa...” (p. 43)	en cierto modo no visibiliza lo propuesto por Duval (1999) cuando señala que cada sistema semiótico está determinado por reglas de conformidad que consienten la determinación, combinación e incluso formación de sus unidades elementales.
--	--	--

Los contenidos conceptuales desarrollados por los libros de textos, deben permitir que el lector reconozca más a fondo las reglas de conformidad de los diversos registros a partir de actividades que permita coordinación de representaciones semióticas de las progresiones. Adicionalmente Duval (2004) sostiene que estas transformaciones semióticas tienen éxito si el aprendiz conoce las reglas de conformidad del propio registro.

El tratamiento dado por la mayoría de los libros de texto, es de tipo unidimensional, donde se emplean métodos algebraicos para calcular los diferentes parámetros de las progresiones.

Con este análisis logramos evidenciar que en los LTE son más habituales los tratamientos realizados desde contextos propios de la actividad matemática, ya que demandan la utilización de

las reglas de conformidad propias de cada tipo de progresión, algunas de manera implícita se explican en la fase de conceptualización.

Referente a la dificultad cognitiva presente en las transformaciones entre el mismo sistema semiótico, se hallaron tratamientos de mayor conflicto cognitivo obedeciendo al tipo de reglas de conformidad del propio sistema semiótico utilizado.

Categoría 3	CONVERSIÓN DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN LOS PROBLEMAS MODELOS.	INSTRUMENTO APLICADO		
		<i>Instrumento 1</i>	<i>Instrumento 2</i>	<i>Instrumento 3</i>
		<i>Fenómeno de Congruencia y No Congruencia.</i>		
		En la conceptualización que brindan los LTE, se emplean algunos registros de representación semiótica desde contextos meramente matemáticos en torno a las progresiones; consideramos que dentro de las mismos se proveen condiciones de congruencia, lo que permite alcanzar mayor aprendizaje entre lo que representa y lo representado; sin embargo, no es evidente	Se visualiza la dificultad que pueden afrontar los lectores al realizar algunas conversiones entre las representaciones que maneja la resolución de problemas en diversos tipos de registro; conforme a lo datado por Duval como <i>fenómeno de no congruencia</i> , el cual se da entre las representaciones de un mismo objeto que provienen de sistemas semióticos diferentes y el pasaje entre ellas no es	El análisis a cada uno de los PM, permitió encontrar que varias de las conversiones efectuadas se catalogan no congruentes. De acuerdo con Duval (2004) “la dificultad de la conversión de una representación depende del grado de no-congruencia entre la representación de partida y la representación de llegada”. (p. 53).

reconocerlos entre múltiples contextos de representación extramatemáticos que admitan procesos de modelización, lo cual sería plena garantía para identificar el fenómeno de congruencia.	inmediato” (Duval, 1999).
---	------------------------------

Muchos de los problemas modelos realizan transformaciones de un sistema semiótico a otro no se efectúa de carácter transparente, debido a la naturaleza de cada una de sus unidades significantes, apoyados en Duval (1999) quien considera que “la naturaleza de las unidades significantes y su discriminación dependen de cada registro, por lo que éstas pueden ser diferentes”.

Así mismo, consideramos que la manera y demanda en que los LTE contemplan la posibilidad de realizar conversiones entre los registros de representación semiótica es escasa e ineficiente en los problemas modelo, en vista a que muchas de las realizadas son incongruentes, lo que puede generar obstáculos por parte del lector en el aprendizaje de las progresiones.

La transformación de un registro a otro se hace más transparente en los problemas modelos propuestos por los libros de texto, cuando las representaciones implicadas son congruentes y más difíciles de interpretar cuando las representaciones no son congruentes. De igual manera, la facilidad de comprensión tiende a incrementar en aquellos problemas modelos con mayor grado

de no congruencia, es decir entre menos condiciones de congruencia satisfaga los dos registros empleados.

De acuerdo con lo observado en los libros de textos, la tendencia general es clara, no se recurre intencionalmente a la utilización de las diversas formas de representar; lo cual deja entredicho la importancia que dan los autores a las representaciones semióticas en el aprendizaje de las progresiones; en este sentido, como bien lo explica Duval (citado en D'Amore, 2004):

... por una parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser más que un aprendizaje conceptual y, por otra, es sólo por medio de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje (p. 6).

Por último, es importante tener en cuenta que la mayoría de las transformaciones semióticas entre diferentes registros de representación no son regidas por normas algorítmicas, sino que requieren habilidad para identificar unidades significantes entre los registros implicados (Duval, 1995, 2007), lo cual no es evidente ni espontáneo. Por ese motivo, consideramos que los PM y PpR deben brindar condiciones para que los estudiantes consigan realizar conversiones de manera espontánea de acuerdo a lo solicitado por la tarea y de esta manera adquiera habilidad para resolver situaciones problemas.

Fuente: Elaboración propia

5 CONCLUSIONES

La diversidad de registros de representación semiótica coexiste en la actividad matemática, como una de las peculiaridades más significativas, lo que implica la necesidad de movilizarlos en la enseñanza y aprendizaje de las progresiones, dado a que es exclusivamente a través de dichas representaciones, que podemos tener acceso al objeto matemático.

En la mayor parte de los libros de textos analizados, la noción de progresión es introducida y ostentada a través de los registro de representación verbal y simbólico, lo que por un lado, puede contribuir a la confusión para la identificación de las progresiones con la representación monopolizada, y por otra, no permite configurar dicho objeto en toda su extensión y profundidad; en otras palabras, es un requerimiento indispensable para los libros de textos, el empleo de diversas representaciones que evidencien todas las características y propiedades asociada a las progresiones.

Los sistemas o registros semióticos comunes con que los LTE comunican las PA y PG, consideramos que no son suficientes para que el lector comprenda y construya un significado holístico; teniendo en cuenta que la resolución de problemas generalmente demanda la coordinación de representaciones numéricas, algebraicas, simbólicas, y en menor instancia representaciones geométricas, icónicas, gráficas tabular.

El registro semiótico lengua natural desempeña imprescindibles funciones para facilitar los procesos de enseñanza y aprendizaje, sin embargo, dadas las particularidades que exige la enseñanza de las matemáticas, se hace necesario que en los libros de textos también se privilegie con la misma frecuencia el uso de los demás registros semióticos, de tal manera que favorezca las transformaciones semióticas que posibilite la evolución conceptual hacia conocimientos matemáticos más coherentes.

Desde los argumentos teóricos que propone la teoría de Duval, se puede inferir que los sistemas de representación semióticos están reducidamente unidos al proceso de enseñanza

y aprendizaje de las progresiones, sin embargo, el carácter con que se consideran en los libros de textos examinados, no promueven elocuentemente la adquisición y cualificación de las representaciones mentales que poseen y frecuentemente construyen los lectores, lo que inhabilita la coordinación y conexión para relacionar los significados con ideas matemáticas de manera explicativa en la resolución de problemas auténticos.

La escasa cantidad de registros empleados y sus respectivas transformaciones en la aprehensión del objeto matemático progresión, en especial desde la resolución de problemas, es índice del insuficiente atributo otorgado a la comprensión profunda y funcional de las nociones matemáticas. Para conseguir que los educandos asimilen de manera profunda las nociones de progresión, se debe tener en cuenta las heterogéneas formas de aprehender, que implica abandonar los procesos monorepresentacionales, basados en simples mecanismos algorítmicos, memorístico y unidireccionales; por procesos de enseñanza que atiendan a las singularidades del aprendizaje de cada sujeto y facilitarles aquellas estrategias didácticas en las que los diversos registros de representaciones semióticas y sus respectivas transformaciones cumplan un rol central.

En este sentido, la diversidad de representaciones para la comprensión de un objeto matemático se hace indispensable para la construcción cognitiva, sin embargo, al no tener en cuenta los criterios didácticos concretos y oportunos previos a las transformaciones, se puede caer en el error emplear excesiva cantidad de representaciones que conlleve a obstáculos posteriores.

Según el análisis realizado, la preparación que recibe los lectores de los libros de textos estudiados, en lo concerniente a coordinación entre registros de representación semiótica, que a la luz de la teoría base se requiere para un correcto funcionamiento cognitivo y una comprensión integrativa, es normalmente incompleto.

Las actividades de aprendizaje deben estar orientadas hacia la ejercitación de la coordinación entre los diversos sistemas de representación, ya que de este modo el sujeto

aprendiz estará en condiciones de llevar a cabo un funcionamiento cognitivo efectivo. Esta premisa a su vez implica que, los procesos de enseñanza y aprendizaje de las progresiones no puede limitarse a la memorización y apropiación de determinados tratamientos algorítmicos, sino que deben trascender hacia el afianzamiento de actividades cognitivas indispensables para el aprendizaje de las matemáticas, como lo es el razonamiento, la visualización, y en mayor proporción la conversión entre registros semióticos.

Para que los sujetos coordinen los registros de representación requeridos para la conceptualización de las progresiones, es pertinente tener en cuenta que dicho proceso no se da de manera espontánea, por el contrario, es un asunto complejo, que exige por parte de los autores de los libros de texto, y en general de cualquier recurso didáctico, una orientación intencionada y adecuada, de modo que se tenga en cuenta las dificultades que puede generar la coordinación de dos registros no congruentes.

Respecto al modo como los libros de textos presentan las transformaciones semióticas en los problemas matemáticos, consideramos que parcialmente hacen que el lector llegue al estadio de la coordinar representaciones semióticamente heterogéneas, de tal manera que pueda diferenciar el representante y lo representado, o la representación semiótica y el contenido conceptual que esta expresa.

Del mismo modo, durante la resolución de problemas que involucran procesos de conversión, es frecuente dos aspectos: el primero, es que muchos problemas requieren de un tratamiento “intermedio” del registro de partida, que facilite la discriminación y coordinación de las unidades significantes fundamentales con el registro de llegada; el segundo, para desarrollo de la conversión comúnmente demanda utilizar un sistema semiótico “auxiliar” en cualquiera de los dos registros transformados o incluso en ambos.

Por otro lado, en cuanto al proceso metodológico de esta investigación, consideramos que para analizar la resolución de problemas se debe distinguir por completo y de manera

independiente las dos clases de transformaciones de representaciones semióticas que proponen los libros de textos: el tratamiento y la conversión.

Por último, es importante tener en cuenta que, los libros de texto habitualmente no realizan una distinción explícita entre las transformaciones de tratamiento y las de conversión de las representaciones, y menos aún, en la resolución de problemas. No obstante, se hace imprescindible que el sujeto este en la capacidad de diferenciar que los tratamientos se efectúan en el interior de un mismo registro semiótico, bajo reglas de funcionamiento concisas, no suele movilizar más que un solo registro representacional; mientras que la conversión, puede movilizar dos o más registros de representación y requiere su coordinación de quien la efectúa; lo cual se traduce principalmente en la comprensión de las matemáticas.

6 RECOMENDACIONES

Se recomienda que este trabajo sea adaptado, complementado y replicado por parte de educadores e investigadores, con el fin de analizar objetos matemáticos y conceptos científicos en libros de textos escolares y demás recursos didácticos que cumplan funciones análogas, así como estudiar cognitivamente los procesos de pensamiento que permita analizar en profundidad los obstáculos asociados a la comprensión en matemáticas y las ciencias.

Por otro lado, esta investigación es una invitación a trascender el enfoque que generalmente indaga las formas de enseñar contenidos y procedimientos, hacia la comprensión o incomprensión conceptual en la que se le preste atención tanto a los recursos didácticos utilizados en el aula, como a al desempeño del estudiante y al rol de sus representaciones mentales durante la comprensión; ello implica, privilegiar y tener en cuenta la diversidad de los registros de representación.

En este trabajo se destacó la importancia de las transformaciones semióticas, en especial la conversión, ya que está mediada por el grado de coordinación de los diferentes registros de representación semiótica. Además, la construcción teórica de Duval pone de manifiesto que es durante esta transformación cuando se realiza una verdadera actividad conceptual (Duval, 1999).

Se debe agregar que para Duval (2016b) es “a partir de los diversos tipos de conversiones, más que a través de tratamientos, tocamos la complejidad cognitiva de la comprensión en el aprendizaje de las matemáticas y en los procesos de pensamiento específicos requeridos por la actividad matemática” (p.76); consideramos ahora que en los libros de texto, como en los demás recursos didácticos formulados para los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se hace indispensable suscitar actividades que conlleve a transformaciones de un registro semiótico a otro, que apruebe el cambio no

únicamente en términos de tratamiento, sino que trascienda hacia las unidades elementales que se pueden hacer evidentes.

En este sentido, se debe dar la posibilidad para que los sujetos conozcan la mayor parte de los registros representacionales del objeto matemático (ya sea desde la explicación del objeto, a través de problemas modelos o a partir de otro recurso didáctico), para que pueda optar por el más adecuado al momento de resolver los problemas solicitados.

Atendiendo a las dos características que Duval (2004) propone que posee la conversión, la primera hace referencia a la congruencia o no congruencia que pueda tener esta transformación, y la segunda encaminada a que esta actividad cognitiva posea una orientación o sentido, lo cual señala tanto al registro semiótico de partida como al registro semiótico de llegada; Es necesario por lo tanto que, en la enseñanza de las progresiones, y en general para cualquier objeto matemático se tengan en cuenta estas dos características.

Finalmente, consideramos que el papel del LTE por sí solo en un aula de clase no es suficiente, ya que por sí mismo asume los objetos matemáticos desde una forma unirepresentacional; lo importante es que el maestro de matemáticas esté preparado y utilice el libro de texto solo como un recurso didáctico y pedagógico; lo cual implica que, el maestro debe propiciar acciones para la aprehensión de los objetos matemáticos desde sus múltiples representaciones y sus respectivas transformaciones semióticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Andréu, J. (2000). Las técnicas de análisis de contenido; una revisión actualizada.
Recuperado el 12 de abril, 2015 de
<http://public.centrodeestudiosandaluces.es/pdfs/S200103.pdf>
- Artigue, M. (1995). *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos*. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 99-140). Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Aristizabal, W. (2014). *Procesos de conversión de registros semióticos en el aprendizaje de la lógica matemática en estudiantes universitarios*. (Tesis de maestría). Universidad de Caldas. Manizales, Colombia.
- Azcárate, P. y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, 340, 341-378.
- Aznar, M. A., Distéfano, M. L., Prieto, G., & Moler, E. (2010). Análisis de errores en la conversión de representaciones de números complejos del registro gráfico al algebraico. *Revista Premisa 12 (47)*, 13-22.
- Barrantes, M., López, M. y Fernández, M. A. (2015). Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto. *PNA*, 9(2), 107-127.
- Bell E. T. (1949). *Historia de la Matemática*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposicin didctica. Del saber sabido al Saber enseado*. Primera edicin. Buenos Aires: Aique, 134.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires. Aique.

- Collete J. P. (1986). *Historia de la matemática*, p.28, 41. México: Siglo XXI Editores, S.A.
- Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 10(1), 7-38.
- De Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de educación*, (43), 19-58.
- De Guzmán, M. (1993). *Tendencias Innovadoras en Educación Matemática*. Organización de los Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Editorial Popular.
- D'Amore, B. (2006). *Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido* (pp. 177-196). Radford, L. & D'Amore (Eds.). *Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático*. Relime. Número especial.
- D'Amore, B. & Fandiño (2008). *Change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations. How other disciplines can be useful to the analysis of this phenomenon*. ICMI, Rome, Symposium on the occasion of the 100th anniversary of ICMI, March 2008. WG5: The evolution of theoretical framework in mathematics education, organizers: Gilah Leder and Luis Radford. Disponible en: www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del Valle (Original publicado en 1995).
- Duval, R. (2004). *Los problemas Fundamentales en el Aprendizaje de la Matemáticas y las Formas Superiores del Desarrollo Cognitivo* (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del Valle (Original de 1999).

- Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas*. Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.
- Duval, R. (2005). *Transformations de representations semiotiques et demarche de pensée*.
- Duval, R. (2006). *Un tema Crucial en la Educación Matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*. La gaceta del RSME, 143-168.
- Duval, R. (2006). *Transformations de representation semiotiques et demarches de pensee en mathematiques*. In: J-C. Rauscher (Ed.). Actes du XXXIe Colloque COPIRELEM (pp.67-89). Strasbourg: IREM.
- Duval, R. (2016a). *Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos*. En A. Sáenz-Ludlow. (Ed.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 13-60) Bogotá: Colombia: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Duval, R. (2016b). *Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas*. En A. Sáenz-Ludlow. (Ed.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 61-94) Bogotá: Colombia: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Duval, R. (2016c). *El funcionamiento cognitivo y la comprensión de los procesos matemáticos de la prueba*. En A. Sáenz-Ludlow. (Ed.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 95-125) Bogotá: Colombia: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Fernández, I. (2000). *Análisis de las concepciones docentes sobre la actividad científica: Una propuesta de transformación*. Tesis Doctoral. Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals. Universidad de Valencia.

- Font, V., Godino, J. & D'Amore, B. (2007). *An onto-semiotic approach to representations in mathematics education*. For the Learning of Mathematics, 27(2): 2-7.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Mathematics. Education Library. D. Reidel Publishing Company.
- García, G. (2005). *La comprensión de las representaciones gráficas cartesianas presentes en los libros de texto de ciencias experimentales sus características y el uso que hace de ellas en el aula*. (Tesis doctoral). Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales de la Facultad de ciencias de la Educación. Universidad de Granada. España.
- García, L. I., & Campuzano, C. M. (2015). *Representaciones semióticas sobre el número racional*. Magistro, 8(15).
- Giraldo Osorio, L. (2014). *Los números enteros negativos en la matemática moderna y la matemática actual*. (Tesis de Pregrado). Universidad del Valle. Santiago de Cali, Colombia.
- Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Trabajo de investigación presentado para optar a la Cátedra de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Granada: Universidad de Granada.
- Godino, J.D. (2004). Matemáticas para maestros. Recuperado de <http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/welcome.htm>
- Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2007). *The ontosemiotic approach to research in mathematics education*. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39(1-2), 127-135.

- González, R. M. (1993): *A descriptive study of verbal problems selected in mathematics text books at the high school*. Ph. D.UMI: 9404811.
- González Chica, G. (2011). *Tratamiento de las representaciones semióticas de las funciones cuadráticas* (Tesis de maestría), Universidad Autónoma de Manizales, Colombia. recuperada de <http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/handle/11182/860>.
- González, M. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas: los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(3), 389-408.
- Gutiérrez, S. I., Parada, D. A. (2007). *Caracterización de tratamientos y conversiones: el caso de la función afín en el marco de las aplicaciones*. Bogotá (Colombia): Universidad Pedagógica Nacional.
- Hawking, S. (2006). *Dios creo los números: Los descubrimientos matemáticos cambiaron la historia*. Barcelona: Editorial Crítica.
- Herdeiro, C. (2010). *A resolução de problemas nos mauais escolares de matemática do 9º ano de escolaridade*. Tesis Doctoral. Universidad de Huelva.
- Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. (4 ed.). México: McGraw-Hill.
- Kang, W., & Kilpatrick, J. (1992). *Didactic transposition in mathematics textbooks. For the Learning of Mathematics*, 2-7.
- López, E. y Contreras, L. (2014). *Análisis de los problemas matemáticos de un libro de texto de 3º eso en relación con los contenidos de geometría plana*. Universidad de Huelva.

- Martínez, J (2010). Resignificación de la suma de fracciones. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/2647/1/Resignificaci%C3%B3nSalasAsocolme2012.pdf>
- Macías Sánchez, J. (2014) Los registros semióticos en Matemáticas como elemento personalizado en el aprendizaje. *Revista de Investigación Educativa Conect@2*, 4(9): 27-57
- Ministerio de Educación Nacional. MEN (1998). *Lineamientos Curriculares Matemáticas. Áreas obligatorias y fundamentales*. Santafé de Bogotá, Colombia.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanías*. Bogotá, Colombia, pp. 80-89.
- Monterrubio, M.C. y Ortega, T. (2012). *Creación y aplicación de un modelo de valoración de textos escolares matemáticos en Educación Secundaria*. *Revista de Educación*, 358, 471-496.
- Morales, Z. E. (2013). *Análisis de las transformaciones de las representaciones semióticas en el estudio de la función logarítmica en la educación escolar* (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.
- Morales, Z. E. (2013). *Resolución de problemas: una mirada a través de los registros de representación semiótica*. *Actas del VII CIBEM ISSN, 2301(0797)*, 770.
- Morgan, C. (1996): *The language of mathematics: Towards a critical analysis of Mathematics texts*, en *For the Learning of Mathematics*, 16, pp. 2-10.
- Tocto, E. (2015) *Comprensión de la noción función cuadrática por medio del tránsito de registros de representación semiótica en estudiantes de quinto año de secundaria*. Pontificia Universidad Católica del Perú. San Miguel, Perú.

- Ortega, M. (2012). Unidad didáctica. Sucesiones matemáticas. Progresiones aritméticas y geométricas (Trabajo de fin de Máster). Universidad de Granada, España.
Recuperada de
http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/TFM_Ortega_Manuel_2012.pdf.
- Ospina, D., y García, L. I. (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto funcional lineal* (Tesis de maestría), Universidad Autónoma de Manizales, Colombia. Recuperada de
<http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/handle/11182/245>.
- Osorio, L. E., y García, L. I. (2011). *Representaciones semióticas en el aprendizaje del teorema de Pitágoras* (tesis de maestría), Universidad Autónoma de Manizales, Colombia. recuperada de <http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/handle/11182/257>
- Parcerisa, A. (1996). *Materiales curriculares. Cómo elaborarlos, seleccionarlos y usarlos*. Barcelona, España: Grao.
- Pino, J. y Blanco, L.J. (2008). *Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad en España y Chile, en relación con los contenidos de proporcionalidad*. Publicaciones, 38, 63-88.
- Piñuel, J.L. (2002). *Epistemología, metodología y técnicas del análisis de contenido*. Estudios de Sociolingüística 3(1), 1-42.
- Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: Communication in mathematics classrooms*. Taylor & Francis.
- Polya, G. (1965) *Como plantear y resolver problemas*. Título original: "How to solve it". 1ra. Edición inglesa, 1945. Editorial Trillas. México.
- Posada, O., & Jaramillo, C. (2003). *El placer de doblar el papel*. Educación y Pedagogía, 19-23.

- Quintero, E. A. (2014). *Dificultades que identifican los estudiantes a través de la metacognición en el aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria*. (Tesis de maestría), Universidad Autónoma de Manizales, Colombia.
- Reys, B. J., Reys, R. E. y Chávez, O. (2004). *Why mathematics textbooks matter*. Educational Leadership, 61(5), 61–66.
- Riviere, A. (1986). *Razonamiento y representación*. Siglo XXI: España.
- Rodríguez Gómez, G., Gil Flores, J., & García Jiménez, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga: Aljibe.
- Rojas, P. (2014). Articulación de saberes matemáticos: representaciones semióticas y sentidos. Bogotá: Editorial de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Recuperada de http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/articulacion_de_saberes_matematicos_representaciones_semioticas_y_sentidos.pdf
- Ruesga, P., Valls, F., Rodríguez, T. (2006). *Un instrumento para seleccionar libros de texto de matemáticas*. Aplicación al bloque curricular de Geometría. REIFOP, 9(1), 1-13.
- Salazar, J., A. y Valencia, A. (2010). *La conversión de registros de representación semiótica en el trabajo con fracciones mayores que la unidad*. En G. Obando Zapata (Presidencia), Memorias del 11º ECME, Colombia.
- Sánchez, N. A. (2017). *Análisis de problemas en Estadística y Probabilidad en libros de texto de segundo año de Educación Secundaria*. Revista Científica, 30, 198-221. Recuperado de <http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/article/viewFile/198/pdf>
- Santos, M. A. (1991). *¿Cómo evaluar los materiales?* Cuadernos de Pedagogía, 194, 29-31.

- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic press.
- Schubring, G. (1987). *On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author*. *Learn. Math.*, 7(3), 41-51.
- Serrano, I. (2012). *Análisis de Problemas de libros de texto de Álgebra Lineal*. Trabajo Final de Máster. Universidad de Huelva.
- Sierra, M., González, M. T., & López, C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales escolares de educación secundaria de la segunda mitad del siglo XX. *Educación Matemática*, 15(1), 21-49.
- Tamayo, O. E., Restrepo, F., Velasco, L. A. (2012). *El caso de niños y maestros. Pequeños científicos*. Manizales: Universidad Autónoma de Manizales.
- Tamayo, O. E., Vasco, C.E., Suarez, M. M., Quiceno, C. H., García, L. I. Giraldo, A. M. (2011). *La clase multimodal y la formación y evolución de conceptos científicos a través del uso de tecnologías de la información y la comunicación*. Manizales: Universidad Autónoma de Manizales p. 105-138. Recuperado de <http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/bitstream/11182/368/1/Clase%20multimodal%20y%20la%20formaci%C3%B3n%20y%20evoluci%C3%B3n.pdf>
- Valdivé C. y Garbin, S. (2008). Estudio de los Esquemas Conceptuales Epistemológicos Asociados a la Evolución histórica de la Noción de Infinitesimal. *Relime* 11(3), 413-450.
- Valdivé, C. y Garbin, S. (2010). Estudio de la evolución de los esquemas conceptuales previos asociados al infinitesimal: Caso de un estudiante clave. *Educare, Revista de Investigación y Postgrado de la UPEL* 14(3), 3-31.
- Valdivé, C. y Garbin, S. (2013). *¿Cómo Piensan los Estudiantes el Infinitesimal antes de Iniciar un Curso de Análisis Matemático?* Paradigma XXXIV (1); 117 – 144

Verret, M. (1975). *Le temps des études* (vol. 1-2). Paris, France: Honoré Champion.

7 APÉNDICE

Apéndice A PRIMER INSTRUMENTO PARA LA RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN.

Tabla 8. Aplicación del Instrumento 1

	[LTE _I]	[LTE _{II}]	[LTE _{III}]	[LTE _{IV}]	[LTE _V]
SUBCATEGORÍAS DE ANÁLISIS					
¿Cuáles son las ideas que asocia el autor al objeto? ¿Distingue al objeto de sus representaciones?	Las progresiones se presentan como un tipo de sucesión, es decir, un conjunto de números ordenados bajo cierto criterio o regla específica;	Las progresiones están asociadas a dos nociones: inicialmente a las sucesiones que poseen un determinado orden en sus términos y	El autor relaciona la definición de las progresiones a partir de la noción de sucesión.	Se le asocia la idea de función, ya que inicialmente se definen las sucesiones como “toda función cuyo dominio sea el conjunto entero	En este libro de texto el objeto matemático progresión está asociado a la noción de sucesión, donde es definida

posteriormente se precisa que una sucesión es “Una función con dominio los números naturales y rango un conjunto de letras, símbolos o números...” (p 216).	posteriormente por la noción de “función” con dominio en los números entero positivo, propuesta para definir las sucesiones; ya que las progresiones son catalogadas como un caso de sucesión. En el caso de las PA se concibe como la sucesión que inicia con un determinado término, del cual se obtienen los demás términos al adicionar una constante fija d .	Para el caso de las PA, las define como aquella sucesión en la que el siguiente término se obtiene al adicionar o disminuir una cantidad constante al término anterior.	positivo es llamada una sucesión ” (p 188).	como una tipología de sucesión.
Se clarifica que la progresión aritmética es un tipo de sucesión, dado que al establecer las características y elementos de una sucesión se establece implícitamente para una progresión. Así		De igual manera, las PG cumplen la singularidad de que cada término es igual al anterior multiplicado por una constante r (razón).	En la sección <i>recuerda que...</i> la cual aporta información clave para comprender mejor la teoría, se propone “las sucesiones aritméticas son conocidas también como progresiones aritméticas” (p 190), sin que el lector logre concebirla como una clase de	Dado que la sucesión es catalogada como “un conjunto de números” consecutivos, para las progresiones aritméticas propone la peculiaridad de que cada uno de estos números excepto el primero es igual al anterior más un término fijo llamado diferencia.

mismo, define que “una progresión aritmética es una sucesión de números reales done se cumple que cada uno de ellos (excepto el primero) es igual al anterior más un número fijo llamado diferencia. (p. 217) Las PG son definidas como una sucesión de números reales tal que cada uno de ellos (excepto el primero) es igual al anterior	Las PG también es clasificada como un <i>caso especial</i> en el que debe existir un número real que resulte del cociente de dos términos consecutivos. El libro de texto no ostenta la distinción de objeto matemático con sus relativas representaciones.	En el desarrollo de la unidad didáctica no se hace visible la distinción entre el objeto y sus representaciones.	sucesión particular de los números reales. Los autores del texto no hacen explicita la distinción entre el objeto matemático y sus representaciones.	Del mismo modo las PG también son catalogadas como un tipo de sucesión, en la que cada término se obtiene al multiplicar el anterior con una cantidad fija llamada razón. No se presenta en la unidad didáctica la distinción de las progresiones de sus respectivas representaciones.
--	---	---	--	--

	multiplicado por un numero constante llamado razón... (p. 220) No se hace la respectiva distinción de las progresiones con las respectivas representaciones.				
<i>¿Cuáles son las representaciones que hacen emerger la noción de progresión?</i>	Las progresiones emergen desde el registro verbal, a partir de la descripción fundamentada a priori, es decir, inicialmente se	Los dos tipos de progresión emergen desde el registro simbólico, auxiliadas por el registro verbal y numérico. Sin embargo, durante el desarrollo de la	La noción de progresión aritmética emerge desde los registros numérico, simbólico y verbal respectivamente, sin embargo, en la progresión geométrica surge	En este libro de texto la noción de progresión brota a partir del registro verbal, numérico y simbólico respectivamente.	Aunque ambos tipos de progresiones se describen inicialmente a través del registro verbal, se tiende a que la conceptualización sea realizada a

proponen ciertas características que conducen a la definición de cada tipo de progresión y de las propiedades asociadas a cada una. Posteriormente se complementa la conceptualización de cada tipo de progresión, a partir de argumentos desde los registros algebraico y numérico.	unidad se propone actividades que promueven a la utilización de diferentes registros de representación que se consideran fundamentales en la comprensión de las progresiones (tabular, gráfico y numérico).	del simbólico y verbal. En las secciones PpR se complementa con problemas a partir del registro tabular, gráfico y simbólico.	Además, este libro emplea otros registros de representación como el registro figural, tabular y geométrico en algunos problemas de la sección de PpR.	partir del registro numérico. Para el caso concreto de las PA, surgen de la definición simbólica (notación conjuntista) propuesta las sucesiones, en la que se realiza una conversión al registro algebraico para generar las expresiones que permita describir y determinar la
--	--	---	--	---

					diferencia y el termino general.
					De manera análoga, en las PG se parte de la expresión que simboliza la razón, y se despeja el término general para definirlas, adicionalmente se presenta la expresión para la interpolación de medios geométricos.
¿Qué procedimientos hace referencia y	Las actividades que se proponen en este	Los procedimientos que propone el libro	Son cuatro los procedimientos, el	En este libro de texto se plantea	Son pocos los procedimientos que

<i>privilegia frecuentemente el autor?</i>	libro escolar están especificadas en tres procesos: el primero es <i>Razonar</i> y <i>argumentar</i> es el más demandado, prioriza la explicación y el uso de las propiedades de cada tipo de progresión en la resolución de los ejercicios; el segundo <i>Formular</i> y <i>resolver problemas</i> , aunque únicamente se usa en uno de los PM y dos PpR, se enfatiza el uso de diversos contextos, a partir de distintas estrategias de	de texto al lector están direccionados a <i>razonar lógicamente</i> , al momento de encontrar la fórmula formula general para el desarrollo de las progresiones, así como identificar patrones, conocer las progresiones e identificar sus principales elementos y propone tratamientos que permiten hallar en la progresión cualquier término.	primero es comunicar, que hace referencia a leer, escribir y comunicar la determinación de los términos de cualquier tipo de progresión; otro es conectar y relacionar los parámetros de las sucesiones para comprender aplicaciones; un tercer procedimiento es emplear estrategias para la resolución de problemas, y por último, desarrollar el razonamiento	cuatro procedimientos: interpretar situaciones, ejercitar algoritmos, razonar y solucionar problemas; con la intención de que el lector comprenda el concepto de cada clase de progresión y las pueda diferenciar; asimismo pretende hallar el término general y resolver situaciones problemáticas.	propone el texto para permitir la conceptualización del objeto. Presenta un solo tratamiento al solucionar la situación introductoria en cada tipo de progresión. La función de los procedimientos está orientada hacia la modelación de las formulas dada en la definición. Frecuentemente se propone en los PpR
---	---	---	---	--	--

	solución, así como la verificación y comprobación del resultado; y los que requiere <i>Comunicar</i> y <i>modelar</i> obedecen a la descripción, interpretación, representación y visualización de regularidad en contextos que se pueden resolver matemáticamente con las progresiones.	Otro procedimiento está orientado a <i>comunicar</i> , en el sentido si una progresión es aritmética o geométrica, elaborar conjeturas sobre el comportamiento de los términos de la progresión. Un último procedimiento está encaminado a analizar y aplicar información para <i>resolver problemas</i> .	lógico para hallar el término general en los dos tipos de progresión.	procedimientos desde el registro numérico y algebraico.	
<i>¿Cuáles contextos favorecen la</i>	En el desarrollo temático del capítulo	En los PM el autor inicia con ejercicios	En los dos tipos de progresiones los	La totalidad de los PM en ambos tipos	Para los PM, tanto en las PA como PG

resolución de problemas?	dispuesto para la comprensión de las progresiones, la resolución de problemas tanto PM como PpR, además de favorecer contextos netamente matemáticos, propone algunas situaciones de la vida real, por ejemplo, para las PA se presentan dos PpR (altura de los pisos de un edificio, móvil con aceleración constante). Las PG son introducidas a partir de un PM sobre filtro o	descontextualizados desde las matemáticas, y culmina cada tipo de progresión con un problema que favorece un mismo contexto financiero (interés simple mensual por inversión en fideicomiso). Sin embargo, en los PpR además de problemas de ejercitación comunes, propone para las PA un problema sobre depreciación de un PC, diseño de filas en	PM están planteados desde contexto estrictamente matemático. Sin embargo, los PpR se proponen situaciones problemáticas contextualizadas: para el caso de las PA tenemos sobre calificaciones de exámenes, monto de ahorro mensual, tiempo de entrenamiento deportivo, salario de los empleados de una empresa, distancia que recorre un ciclista,	de progresión se da desde el contexto de las matemáticas; sin embargo, en los PpR se hallar otros contextos, por ejemplo, en las PA se propone uno sobre depreciación, otro de pilas de objetos arrumados y otro sobre la disposición de las sillas en un teatro, los demás son desde las matemáticas. En las PG igualmente se propone uno sobre depreciación, otro sobre el recorrido de una distancia,	se favorece contexto: “juego de azar” enfatizando en las finanzas (cuentas bancarias e inversión y ganancia por apuesta, respectivamente). En los PpR de las PA se propone dos problemas de matemática financiera, uno de física (recorrido de un ciclista), otro de historia de las matemáticas (sucesión de Fibonacci) y los demás desde las
---------------------------------	--	--	--	--	--

sistema de filtración de agua; en los PpR se presentan dos contextos financieros: depreciación de un artículo e inversión capitalizable trimestralmente; los demás en contextos propios de las matemáticas.	un teatro, monto de interés simple y un último sobre longitud de una cuerda al doblarse; para las PG propone la depreciación con interés compuesto, distancia recorrida por una persona, altura de rebote de una pelota y cantidad de dinero ahorrado por un cajero de almacén.	distancia entre postes, construcción de obra civil y perforación petrolera. En cuanto a las PG se encuentra problemas en contextos como densidad poblacional, inversiones, altura de una pelota, movimiento acelerado de un proyectil, crecimiento de bacterias en un cultivo, fractales, entre otros.	uno sobre rebote de un balón; los demás desde las mismas matemáticas.	propias matemáticas (álgebra, aritmética y geometría). Igualmente, en las PG se propone tres PpR sobre nociones de matemáticas financieras (interés, deudas, ganancias, planes d ahorros, etc.), uno sobre crecimiento poblacional, uno de depreciación, otro sobre ganancias sobre apuestas, uno de aumento en producción de
---	---	--	---	--

madera en un bosque; los demás desde contexto de las propias matemáticas.

¿Se distingue el estatus de representación autosuficiente y el estatus de representación auxiliar?	No se hace explícita la distinción entre las representaciones autosuficientes y auxiliares asociadas a las progresiones.	No es evidente la distinción entre las representaciones autosuficientes y auxiliares relacionadas con las progresiones.	El libro de texto no manifiesta una distinción relevante entre las representaciones autosuficientes y auxiliares propuestas para la comprensión de las progresiones.	En el desarrollo del contenido empleado para cada tipo de progresión, no se evidencia una distinción del estatus entre representaciones autosuficientes y representaciones auxiliares.	No se hace explícita la distinción entre las representaciones autosuficientes y auxiliares empleadas por el libro de texto en la unidad didáctica destinada a la comprensión de las progresiones.
¿Qué recursos didácticos propone el texto de texto para la comprensión del	El libro de texto no presenta innovadores recursos didácticos	Como forma de estimular la producción de nuevo conocimiento con	El libro de texto no propone recursos didácticos diferentes a los	El libro de texto presenta dos recursos didácticos, <i>amplía su</i>	No se presenta recurso didáctico complementario que facilite la

<i>objeto matemático progresión?</i>	que le permita al lector explorar nuevas características del objeto para profundizar compresivamente en el estudio de las progresiones.	respecto a las progresiones, a través de aprendizaje significativo que desarrollen la creatividad y la imaginación el libro de texto propone el fractal “el tapete de Sierpinski” en el cual el número de cuadritos eliminados corresponde a una progresión geométrica. Por ultimo propone la creación de fractales a partir de la herramienta Fractint.	utilizados tradicionalmente en la matemática escolar, que proporcionen mejor comprensión de las progresiones.	<i>información y la actividad denominada trabajo con Smath Studio mediada por una herramienta TIC.</i>	compresión de las progresiones.
<i>¿Qué circunstancias filosóficas, históricas</i>	En la fase de conceptualización de	En la introducción de la unidad, y más	En la unidad dedicada por el	El libro únicamente realiza una breve	No se evidencia ninguna

<i>y científicas de diferentes épocas recrea el texto, para explicar el desarrollo las progresiones aritméticas y geométricas?</i>	las PA, como información complementaria brevemente en la sección <i>Amplía</i> presenta que la sucesión de Fibonacci se aplica en la interpretación de manifestaciones de la naturaleza; en la sección conoce propone que las progresiones surgen en el siglo XVII como una necesidad de facilitar el trabajo de computación y cálculos que se realizaban con difíciles tablas trigonométricas. De	precisamente en la conceptualización de sucesión únicamente se hace referencia al problema histórico desarrollado por Fibonacci, relacionado con el crecimiento de los conejos. Posteriormente se propone dicha sucesión para un PpR sobre las ramificaciones de un árbol.	libro de texto para la conceptualización de las progresiones, no se halla ninguna circunstancia de índole histórica, filosófica o científica relacionada con los aportes que las matemáticas brinden a partir de este objeto.	reseña histórica sobre algunas progresiones, por ejemplo, nombra que en el papiro de Rhind y en las tablillas babilónicas aparecen series geométricas; que los griegos utilizaron proporciones continuas que equivalen a PA; Euclides nombró números en proporción continua a las PA y números en proporción doble continua a las PG, por último, que	circunstancia filosófica. Para las PA desde la historia de las matemáticas se propone la como PpR la procreación de los conejos a través de la sucesión de Fibonacci. La mayoría de los problemas están recreados desde la economía y las finanzas.
---	--	--	---	---	---

igual modo, señala
que son los egipcios
y los babilonios
quienes las inventan
y que es retomada
en la edad media por
Nicolas Oresme. Del
mismo modo, las PG
son concebidos
como herramienta
matemáticas que
permite modelas
muchos fenómenos
naturales.

Arquímedes uso
una serie
geométrica para
hallar el área de un
segmento
parabólico.

Tabla 9. Cantidad de Problemas Modelos y Problemas para resolver en [[LTE]

II.

TIPO DE TRANSFORMACIÓN SEMIÓTICA	PROGRESIÓN ARITMÉTICA			PROGRESIÓN GEOMÉTRICA		
	PROBLEMA MODELO					
	<i>Tipo de Registro</i>	<i>Cantidad de problemas</i>	<i>Porcentaje</i>	<i>Tipo de Registro</i>	<i>Cantidad de problemas</i>	<i>Porcentaje</i>
TRATAMIENTO						
CONVERSIÓN	RV → RN	1	25%	RV → RN	1	25%
	RN → RALG	1	25%			
				RV → RALG	1	25%
	TOTAL	2	50%	TOTAL	2	50%
	PROBLEMA PARA RESOLVER					
TRATAMIENTO	RN	8	34,78%			
CONVERSIÓN	RV → RALG	3	13,04%			
	RV → RN	4	17,39%	RV → RN(+RV)	5	21,73%

	RV (+RS) →RAL G	1	4,34%		
				RV (+RT) →RN	2 8,69%
	TOTAL L	16	69,56%	TOTAL	7 30,43%

**Tabla 10. Cantidad de Problemas Modelos y Problemas para resolver en [[LTE]]
_II].**

TIPO DE TRANSFORMACIÓN SEMIÓTICA	PROGRESIÓN ARITMÉTICA			PROGRESIÓN GEOMÉTRICA		
	PROBLEMA MODELO					
	Tipo de Registro	Cantidad de problemas	Porcentajes	Tipo de Registro	Cantidad de problemas	Porcentajes
TRATAMIENTO				RN	1	11,11%
	RALG	2	22,22%			
CONVERSIÓN	RN → RALG	1	11,11%	RN → RALG	1	11,11%
				RALG→RN	1	11,11%
	RV→RN	1	11,11%			
				RV → RALG	2	22,22%
	TOTAL	4	44,44%	5 55,56%		
	PROBLEMA PARA RESOLVER					

TRATAMIENTO	RN	%	RN	%
CONVERSIÓN	RN →	%	RV → RN	%
	RALG			
	RV	%	RV	%
	(+RF)		→ RALG	
	→ RALG			
	G			
	RV →	%		
	RN			
	RV →	%		
	RALG			
	TOTAL	100%	TOTAL	100%

Tabla 11. Cantidad de Problemas Modelos y Problemas para resolver en [[LTE] _III].

TIPO DE TRANSFORMACIÓN SEMIÓTICA	PROGRESIÓN ARITMÉTICA			PROGRESIÓN GEOMÉTRICA		
	PROBLEMA MODELO					
	<i>Tipo de Registro</i>	<i>Cantidad de problemas</i>	<i>Porcentaje</i>	<i>Tipo de Registro</i>	<i>Cantidad de problemas</i>	<i>Porcentaje</i>
TRATAMIENTO				RN	3	
CONVERSIÓN	RN → RALG	3	18,75%	RN → RALG	1	6,25%

	RN → RV	2	12,5%	RN → RV	2	12,5%
	RALG → RN	3	18,75%			
				RV → RALG	2	12,5%
	TOTAL	8	50%	TOTAL	8	50%
PROBLEMA PARA RESOLVER						
TRATAMIENTO	RN	17	22,36%	RN	11	14,47%
	RV	1	1,31%			
				RALG	1	1,31%
				RS	1	1,31%
CONVERSIÓN	RN → RV	4	5,26%			
	RN → RALG	12	15,78%	RN → RALG	11	14,47%
	RFIG→RA LG	4	5,26%			
	RV → RT	1	1,31%			
	RV → RALG	5	6,57%	RV → RALG	3	3,94%
				RT→RV	4	5,26%
				RFIG→RN	1	1,31%
	TOTAL	44	57,89%	TOTAL	32	42,10%

Tabla 12. Cantidad de Problemas Modelos y Problemas para resolver en [[LTE] _IV].

TIPO DE TRANSFORMACIÓN SEMIÓTICA	PROGRESIÓN ARITMÉTICA			PROGRESIÓN GEOMÉTRICA		
	PROBLEMA MODELO					
	Tipo de Registro	Cantidad de problemas	Porcentaje	Tipo de Registro	Cantidad de problemas	Porcentaje
TRATAMIENTO				RALG	2	18.18%
CONVERSIÓN	RN → RV	2	18.18%	RN → RV	2	18.18%
	RALG → RN	1	9,09%			
	RN → RALG	1	9,09%	RN → RALG	1	9,09%
				RV → RALG	2	18.18%
	TOTAL	4	36,36%	TOTAL	7	63,64%
	L			L		
	PROBLEMA PARA RESOLVER					
TRATAMIENTO	RN	13	14,77%			
	RT	2	2,27%			
	RALG	9	10,22%	RALG	15	17,04%
				RV	5	5,66%
CONVERSIÓN	RN →RV	14	15,90%	RN →RV	7	7,95%
	RV → RN	5	5,68%	RV → RN	6	6,81%
	RALG →RN	14	15,90%			

	TOTAL	55	62,5%	TOTAL	33	37,5%
--	-------	----	-------	-------	----	-------

**Tabla 13. Cantidad de Problemas Modelos y Problemas para resolver en [[LTE]]
_V].**

TIPO DE TRANSFORMACIÓN SEMIÓTICA	PROGRESIÓN ARITMÉTICA			PROGRESIÓN GEOMÉTRICA		
	PROBLEMA MODELO					
	Tipo de Registro	Cantidad de problemas	Porcentaje	Tipo de Registro	Cantidad de problemas	Porcentaje
TRATAMIENTO				RN	3	16,66%
CONVERSIÓN	RN→ RALG	3	25%			
	RN→ RV	2	16,66%	RN→ RV	1	8,33%
	RALG → RN	1	8,33%			
				RV→ RALG	2	16,66%
	TOTAL	6	50%	TOTAL	6	50%
PROBLEMA PARA RESOLVER						
TRATAMIENTO	RV	1	4,54%			

CONVERSIÓN	RN →	5	22,72%	RN →	3	13,63%
	RALG			RALG		
	RV →	9	40,90%	RV →	2	9,09%
	RALG			RALG		
				RV→	1	4,54%
				RN		
				RG →	1	4,54%
				RALG		
	TOTAL	15	68,18%	TOTA	7	31,81%
				L		

Tabla 8. Análisis descriptivo sobre el tratamiento y la conversión de cada problema modelo de [LTE_I].

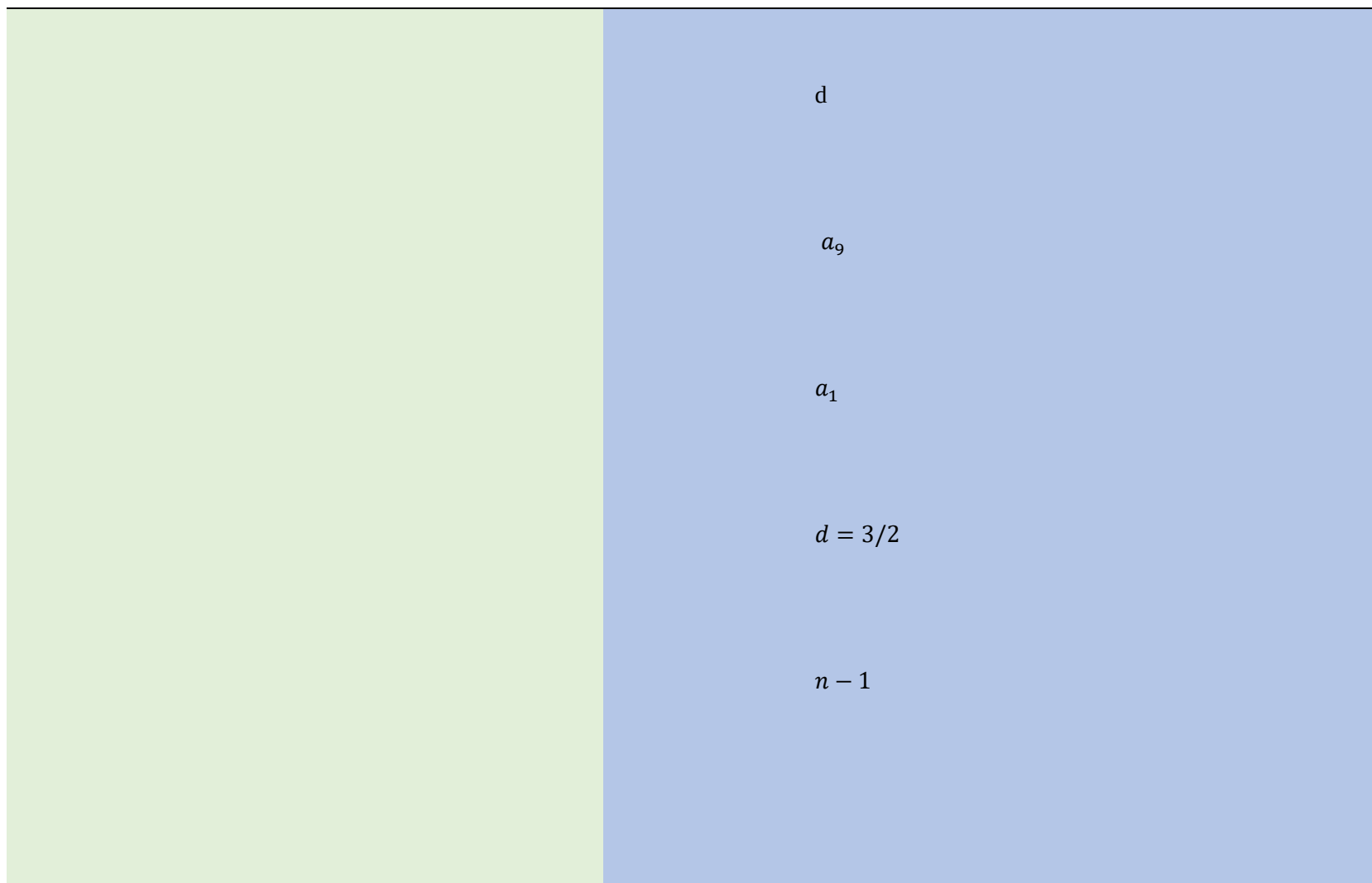
LIBRO DE TEXTO: Enlace Matemáticas 9	PROBLEMA MODELO
1. El primer y el noveno término de una sucesión aritmética son 4 y 16 respectivamente, ¿Cuál es el valor de la diferencia? De la expresión general despejamos d, reemplazamos los valores dados y calculamos, esto es: $d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$ Entonces $d = \frac{16-4}{9-1} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$, $d = \frac{3}{2}$ Por lo tanto la progresión en forma extendida será: $4, \frac{11}{2}, 7, \frac{17}{2}, 10, \frac{23}{2}, 13, \frac{29}{2}, 16, \frac{32}{2}, \dots$	

Figura 16. PM en el que se determina la diferencia común de una progresión aritmética. (p.217-218)

TRATAMIENTO	CONVERSIÓN
REGLAS DE CONFORMIDAD	

TIPO DE TRATAMIENTO	DETERMINACIÓN DE UNIDADES ELEMENTALES.	COMBINACIONES ADMISIBLES PARA FORMAR UNIDADES DE ORDEN SUPERIOR	CONDICIONES PARA QUE UNA REPRESENTACIÓN DE ORDEN SUPERIOR SEA UNA PRODUCCIÓN PERTINENTE Y COMPLETA						
				REGISTRO DE PARTIDA	REGISTRO DE LLEGADA	UNIDADES SIGNIFICANTES	CORRESPONDENCIA SEMÁNTICA	UNIVOCIDAD SEMÁNTICA TERMINAL	CONSERVACIÓN DEL ORDEN
Tratamiento numérico.	SI	SI	SI	Registro verbal	Registro algebráico y numérico.	Primer término. novenoséptimo término.	SI	SI	NO

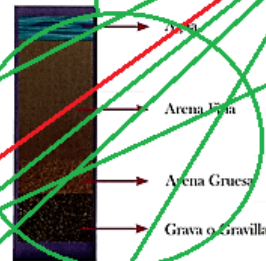
	valor de la diferencia.
	diferencia.
	4
	16
	Expresión general.
	Forma extendida.



Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
Este tipo de transformación dentro del mismo registro numérico, se da posteriormente a la segunda conversión, en la que aclara de manera verbal, que se ha despejado la diferencia común del termino general de una progresión aritmética (lo cual no es visible en el PM); y se sustituye los valores numéricos en dicha expresión, por la simplicidad de las operaciones involucradas, el tratamiento cumple con las tres reglas de conformidad propuesta por Duval (1999).	Por lo que se refiere a los criterios de congruencia entre registros de representación semiótica, la conversión del registro verbal hacia los registros algebraico y numérico no es congruente ; ya que no se cumple el tercer criterio de conservación del orden, porque el problema modelo presenta un orden diferente en la percepción de las unidades significantes.

PROBLEMA MODELO

El dispositivo mostrado corresponde a un filtro o sistema de filtración de agua. Se muestran solo de n zona de filtración. Sabemos que cada una de estas regiones permite pasar solo los $\frac{2}{3}$ del total de sedimentos que contiene el agua en el momento que ingresa a un nuevo nivel. Asumamos que se vierten en el filtro 8 litros de agua que contienen 71442 mg de sedimentos. Calculemos la cantidad de sedimento en miligramos que contiene el agua cuando atraviesa cada una de las zonas de purificación, supongamos seis en este caso.



$$M_0 = 71442 \text{ mg} \Rightarrow M_1 = 71442 \cdot \frac{2}{3} = 47628 \text{ mg} \Rightarrow M_2 = 47628 \cdot \frac{2}{3} = 31752 \text{ mg} \Rightarrow$$

$$M_3 = 31752 \cdot \frac{2}{3} = 21168 \text{ mg} \Rightarrow M_4 = 21168 \cdot \frac{2}{3} = 14112 \text{ mg} \Rightarrow M_5 = 14112 \cdot \frac{2}{3} = 9408 \text{ mg}$$

$$M_6 = 9408 \cdot \frac{2}{3} = 6272 \text{ mg} \dots$$

Ahora de acuerdo a la secuencia obtenida encontramos una expresión que nos permita determinar la cantidad de sedimento que aún queda en el agua en función del número de filtro o nivel n del dispositivo. Esta expresión la denominamos como término general o término n -ésimo de la progresión geométrica. Antes de encaminarnos hacia nuestro objetivo observemos como al dividir un valor de sedimento entre su anterior o antecesor se obtiene el mismo resultado, esto es:

$$\frac{6272}{9408} = \frac{9408}{14112} = \frac{14112}{21168} = \frac{21168}{31752} = \frac{31752}{47628} = \frac{47628}{71442} = 0,6$$

Que expresado en forma racional toma la forma $\frac{2}{3}$

Figura 17. PM introductorio al estudio de las progresiones geométricas. (p.220)

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
Tratamiento	SI	SI	SI	Registro	Registro	Filtro.	NO	SI	NO
o				o	o				
numérico.				verbal.	numérico.				
						n zona de filtración			
						Permite pasar solo $\frac{2}{3}$.			
						Ocho litros.			

	71442
	Sexta zona de purificació n.
	Nivel n del dispositivo.
	Término general.
	Dividir

	Un valor de sedimento. Su anterior o antecesor. El mismo resultado. $0,\overline{6}$ $\frac{2}{3}$
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:

Con respecto a la transformación en un mismo registro de representación semiótico, se puede evidenciar que se lleva a cabo en dos secciones durante desarrollo del PM; la primera esta contigua a la imagen del enunciado, se realiza desde el registro numérico con el fin de cuantificar la cantidad de sedimento (términos de la progresión); el segundo tratamiento de tipo numérico busca exteriorizar el valor fijo intrínseco obtenido de dividir una cantidad de sedimento entre la cantidad antecesora (razón). Consideramos que ambos tratamientos cumplen a cabalidad las reglas de conformidad.	En este PM se puede distinguir las unidades significantes presentes en el registro de partida (verbal) y se pueden poner en correspondencia con el registro de llegada (numérico), con lo cual el lector puede realizar una correcta interpretación de la situación, sin embargo, la conversión no es congruente debido a la ausencia del segundo y tercer criterio, ya que presenta un orden diferente en la posible aprehensión de las unidades significantes.
--	---

PROBLEMA MODELO

Calcula la razón de una progresión geométrica en la que el onceavo término es 5120 y el primero 5. Escribe la progresión hasta el término número 15.

De $a_n = a_1 r^{n-1}$ reemplazando tenemos:

$$a_{11} = a_1 r^{11-1} \Rightarrow 5120 = 5r^{10}$$

$$r^{10} = \frac{5120}{5} \Rightarrow r = \sqrt[10]{1024}$$

$$\Rightarrow r = 2$$

La progresión geométrica entonces es:

5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560, 5120, 10240, 20480, 40960, 81920, ...

Figura 18. PM en el que se encuentra cierta cantidad de términos de una progresión geométrica. (p.221)

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
Tratamiento	SI	SI	SI	Registro	Registro	Razón.	NO	SI	NO
numérico.				o verbal.	o numérico.	Onceavo término.			

Primer
término.

Término
número
quince.

a_n

r

$n - 1$

	a_{11} a_1 41920
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
Este PM presenta una transformación semiótica dentro del mismo registro algebraico, como consecuencia de reemplazar algunos datos provenientes de la descripción verbal en la fórmula del termino general de una progresión geométrica, para calcular el valor de la razón común; consideramos que dicho tratamiento obedece coherentemente a reglas internas del registro.	La conversión no es congruente puesto que no se cumplen dos de los criterios, el primero de correspondencia semántica porque la expresión exponencial del término general propuesto en el registro de partida no se relaciona con ningunas de las unidades significantes del registro de llegada; y el tercer criterio de conservación del orden de organización, como se puede evidenciar en el orden de las unidades significantes onceavo y primer término respectivamente.

Tabla 8.

Análisis descriptivo sobre el tratamiento y la conversión de cada problema modelo de $[LTE_{II}]$.

LIBRO DE TEXTO: AVANZA MATEMÁTICAS 9.
PROBLEMA MODELO

Ejemplo 1

La sucesión $3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots$ es aritmética porque para todo $n \geq 1$, $a_{n+1} - a_n = 2$.
 Si $\{a_n\}$ es una sucesión aritmética de diferencia común d , cumple que $a_{n+1} - a_n = d$ para todo n , $n \geq 1$. De manera equivalente $a_{n+1} = a_n + d$. Para valores particulares de n tenemos que

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d \\ a_4 &= a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d \end{aligned}$$

Si el primer término a_1 y la diferencia d son conocidos, entonces, el término general de la sucesión aritmética es $a_n = a_1 + (n - 1)d$. Si se conoce el k -ésimo término a_k y la diferencia d , entonces, el término general de la sucesión aritmética es $a_n = a_k + (n - k)d$.

Figura 19. Deducción de la fórmula del término general de una progresión aritmética. (p.162)

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
TIPO DE	REGLAS DE CONFORMIDAD								
TRATAMIENTO	DETERM	COMBINA	CONDICIO						
TO	INACIÓN	CIONES	NES PARA						
	DE	ADMISIBL	QUE UNA						
	UNIDAD	ES PARA	REPRESEN						
	ES	FORMAR	TACIÓN						
	ELEMEN	UNIDADE	DE ORDEN						
	TALES.	S DE	SUPERIOR						
		ORDEN	SEA UNA						
			PRODUCCI						

	SUPERIOR PERTINENTE Y COMPLETA								
Tratamiento algebraico y verbal.	SI	SI	SI	Registro	Registro	3	NO	SI	NO
				istro	istro				
				numér	algebr	5			
				ico	aico.	7			
				(Aux.					
				registr		9			
				o					
				verbal		a_1			
				).		a_2			
						a_3			
						a_4			
						$\{a_n\}$			

	Diferencia común a_{n+1} 2 $n \geq 1$ n d Término general $n - 1$ k-ésimo a_k
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
En este PM el autor propone una trasformación que se lleva a cabo dentro del registro algebraico, al terminar el	Aunque este problema presenta una transformación del registro verbal (y numérico como registro auxiliar), hacia el registro algebraico, notamos que

enunciado introductorio que busca generalizar la manera de obtener una expresión algebraica (término general) a partir una progresión aritmética presentada en registro numérico. De igual manera, en el párrafo final, lleva a cabo un nuevo tratamiento desde el registro verbal, en el que diferencia los dos tipos de fórmulas para obtener el término general a partir de los parámetro iniciales brindados por el problema; consideramos que ambas transformaciones cumplen con las reglas de conformidad propias de cada sistema que garantizan que legitiman la invariancia referencial.	se transita por el registro algebraico mediante un tratamiento que permite percibir el patrón algebraico para cada uno de los primeros términos de la progresión; teniendo en cuenta que se realiza una primera conversión en el enunciado y, en la respuesta nuevamente se exhibe la progresión en el registro numérico, que puede catalogarse como una segunda conversión del registro inicial, aunque provenga del registro precedente, notamos que la conversión no es congruente, ya que no hay correspondencia semántica en cinco unidades elementales del registro de partida; asimismo no existe organización de las unidades significantes porque en ambos registros no se conserva el mismo orden de aprehensión de las unidades puestas en correspondencia semántica.
---	---

PROBLEMA MODELO

Ejemplo 2

Hallemos el término general de la sucesión aritmética si

a. Sus primeros términos son 4, 9, 14, 19, 24, . . .

b. $a_{10} = 32$ y $d = 4$

Solución

a.

$$a_n = 4 + (n - 1)5$$

$$a_n = 4 + 5n - 5$$

$$a_n = 5n - 1$$

b.

$$a_n = 32 + (n - 10)4$$

$$a_n = 32 + 4n - 40$$

$$a_n = 4n - 8$$

Remplazamos $a_1 = 4$ y $d = 5$ en $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Aplicamos la propiedad distributiva.

Simplificamos la expresión.

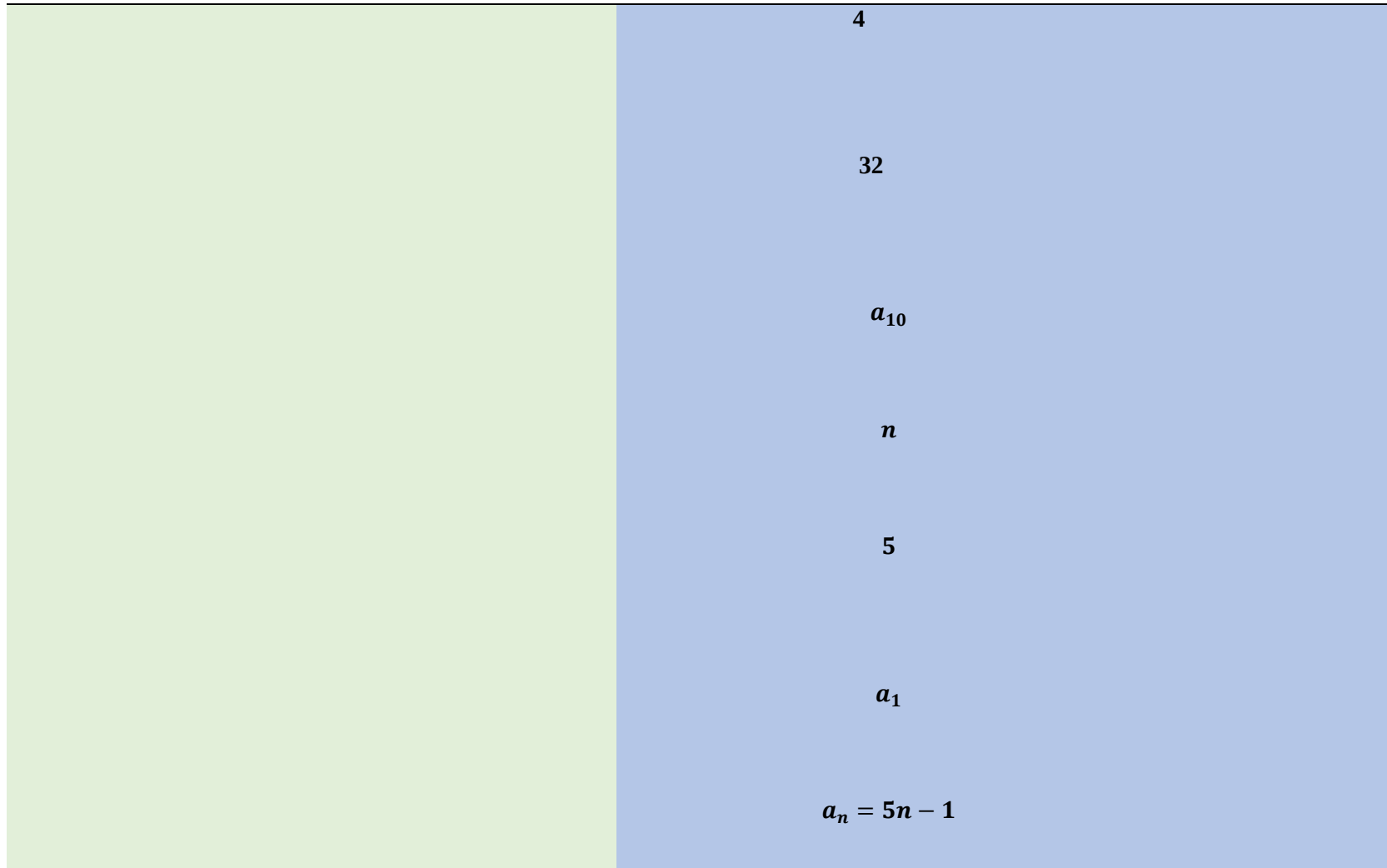
Remplazamos $k = 10$, $a_{10} = 32$ y $d = 4$ en $a_n = a_k + (n - k)d$

Aplicamos la propiedad distributiva.

Simplificamos la expresión.

Figura 20. Uso de la fórmula del término general de una progresión aritmética. (p.162)

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
Tratamiento	SI	SI	SI	Reg	Reg	Término	SI	SI	SI
o algebraico.				istro	istro	general			
				verbal	algebr				
				(aux.	aico				
				registr		d			
				o					
				numér					
				ico)					



	a_n a_k $a_n = 4n - 8$
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
En este PM se lleva a cabo dos transformaciones idénticas dentro del mismo registro de representación semiótica (algebraico); la primera se evidencia después de una conversión del primer ítem que va desde el registro numérico hacia el registro algebraico; la segunda como sustitución directa de los parámetros <i>decimo termino</i> y <i>diferencia común</i> en la expresión algebraica del n-ésimo termino. Consideramos que los dos tratamientos semióticos obedecen de manera coherente a las tres reglas de conformidad propuestas por Duval.	Este PM realiza de manera exitosa la conversión del registro de representación numérico al registro de representación algebraico; notamos que presenta correspondencia semántica, univocidad semántica y organización de las unidades significantes, lo cual significa que existe congruencia entre las dos representaciones.

PROBLEMA MODELO

Ejemplo 3
Hallemos el primer término, la diferencia y el término general de una sucesión aritmética sabiendo que $a_7 = \frac{1}{2}$, $a_{19} = \frac{13}{2}$.

Solución

$a_{19} = a_7 + (19 - 7)d$ Reemplazamos $n = 19$ y $k = 7$ en $a_n = a_k + (n - k)d$

$\frac{13}{2} = \frac{1}{2} + (19 - 7)d$ Reemplazamos que $a_7 = \frac{1}{2}$ y $a_{19} = \frac{13}{2}$.

$\frac{13}{2} - \frac{1}{2} = d$ Despejamos d .

$d = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ Simplificamos el numerador y la fracción.

Conociendo d , calculamos el primer término de la sucesión.

$\frac{13}{2} = a_1 + (19 - 1)\frac{1}{2}$ Reemplazamos $n = 19$ y $a_{19} = \frac{13}{2}$ y $\frac{1}{2} = d$ en $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

$\frac{13}{2} = a_1 + \frac{18}{2}$ Simplificamos la expresión.

$-\frac{5}{2} = a_1$ Despejamos a_1 .

Así, el término general de esta sucesión es $a_n = -\frac{5}{2} + (n - 1)\frac{1}{2} = \frac{n}{2} - 3$.

Figura 21. Uso de la fórmula del término general de una progresión aritmética para hallar otros parámetros. (p. 163)

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
Tratamient	SI	SI	SI	Reg	Reg	Primer	SI	SI	NO
o algebraico.				istro	istro	término			
				verbal	algebr				
				(Aux.	aico	La			
				Regist		diferencia			
				ro					
				Algebr		Termino			
				aico)		general			
						a_7			
						a_{19}			
						d			
						n			
						k			

	a_n $= a_k + (n - k)d$ a_1 $1/2$ $-5/2$ $a_n = \frac{n}{2} - 3$
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
En este PM se efectúa dos transformaciones análogas dentro del mismo registro de representación semiótica (algebraico); la primera se realiza en el primer ítem, en el que se sustituye en la fórmula del décimo noveno término (registro algebraico) algunos parámetros brindados en el enunciado; el segundo tratamiento se genera como sustitución directa de algunos parámetros en la expresión algebraica del término general, para luego realizar el despeje del <i>primer término</i> . Consideramos que se cumplen	Con respecto los criterios de congruencia, existe correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales, ya que las variables expresadas desde el registro verbal, se encuentran asociadas en el registro algebraico de llegada; de igual manera, a cada unidad significativa elemental de la representación en el registro verbal le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro algebraico; sin embargo, la conversión realizada en este PM no es congruente, ya que no existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en el registro de partida (verbal) y en el registro de llegada (algebraico).

PROBLEMA MODELO

Ejemplo 4

Se invierten \$ 3 000 000 en un fideicomiso a 5 años, que paga 2% de interés simple mensualmente.

¿Cuál es la cantidad acumulada en el fideicomiso el primer y el tercer mes, y al final de los cinco años?

Solución

$$d = (iP) = (0,02)(3\,000\,000) = 60\,000$$

Así, $a_1 = 3\,000\,000 + 60\,000 = 3\,060\,000$, que corresponde a la cantidad acumulada en el primer mes.

Para hallar la cantidad acumulada en el tercer mes, consideramos lo siguiente:

$$a_3 = 3\,060\,000 + (3 - 1)60\,000$$

$$a_3 = 3\,180\,000$$

Reemplazamos $n = 3$, $a_1 = 3\,060\,000$ y $d = 60\,000$ en $a_n = a_1 + (n - 1)d$.
Simplificamos la expresión.

De manera similar, tenemos que a los 5 años (60 meses) tendría

$$a_{60} = 3\,060\,000 + (60 - 1)60\,000 = 6\,600\,000, \text{ es decir } \$6\,600\,000.$$

Figura 22. PM de las progresiones aritméticas en contexto financiero. (p.163)

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
Tratamiento	SI	SI	SI	Reg	Reg	3000000	SI	SI	NO
o numérico.				istro	istro	5 años			
				verbal	algebraico	2%			
						Interés simple			
						Cantidad acumulada			
						El primer			
						Tercer mes			
						d			
						i			

	P
	n
	0,02
	60000
	3060000
	3180000
	a_1
	a_3
	60 meses
	a_{60}
	\$6.600.00
	0

Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
Con respecto a las tres reglas de conformidad propuestas por el autor de referencia, consideramos que se cumplen completamente, en la transformación semiótica dentro de un mismo registro (registro numérico) de este problema modelo.	Atendiendo al criterio de congruencia entre la representación semiótica de partida y de llegada, se evidencian correspondencia semántica por cuanto las unidades significantes simple del registro verbal le corresponde una unidad significativa elemental del registro algebraico; de igual manera se observa que las unidades significativas simples del registro verbal se relaciona con una única unidad significativa del registro de llegada, por tanto existe univocidad semántica terminal; sin embargo, la conversión no es completamente congruente, dado que la unidad significativa 5 años no cumple el tercer criterio, dado que no posee igual orden de aprehensión en el registro de llegada (algebraico).

PROBLEMA MODELO

Ejemplo 1

En la sucesión geométrica 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, . . . , la razón común es

$$r = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \dots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \dots = 2 \text{ y el primer término, } a_1 = 1.$$

Figura 23. PM en el que se deduce la fórmula para encontrar la razón común de una progresión geométrica a partir de dos términos consecutivos. (p.165)

TRATAMIENTO	CONVERSIÓN
-------------	------------

Trata	SI	SI	SI	Regist	Reg	1	SI	SI	NO
miento				ro	istro	1, 2, 4, 8, 16, 3			
numérico				numér	algebr				
				ico	aico	La razón			
				(Aux.		común			
				registr					
				o		r			
				verbal		2, 4, 8,			
				)		16, ...			
						a_{n-1}			
						1, 2, 4, 8,			
						...			
						a_n			
						2			
						Primer			
						término			

	a_1 1
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
En este PM se lleva a cabo una transformación dentro de un mismo registro de representación semiótica (numérico); se encuentra antecedido de una conversión que va desde el registro numérico hacia el registro algebraico, en el cual se demuestra como la <i>razón común</i> se encuentra inmersa entre cualquier término de la progresión geométrica y el inmediatamente antecesor. Consideramos que el tratamiento semiótico descrito anteriormente, obedece de manera coherente a las tres reglas de conformidad propuestas por Duval.	De acuerdo a la estructura del PM, se evidencia correspondencia semántica, dado que cada unidad significativa elemental del registro numérico, se puede relacionar con una unidad significativa elemental del registro de representación de llegada; de igual manera, se evidencia univocidad semántica terminal, debido a que todas las unidades significativas elementales del registro de partida le corresponde solamente una unidad significativa elemental en el registro representacional de llegada; sin embargo, no se cumple el tercer criterio, referente a la conservación del orden puesto que entre los registros de representación no se conserva el mismo orden de aprehensión de las unidades elementales puestas en correspondencia semántica, en consecuencia la conversión es incongruente.
PROBLEMA MODELO	

Ejemplo 2

Determinemos los primeros cinco términos y el vigésimo término de la sucesión geométrica con el primer término $a_1 = 3$ y $r = 2$.

Solución

Si $a_1 = 3$ y $r = 2$, tenemos que $a_2 = a_1 r = 3(2) = 6$; $a_3 = a_2 r = 6(2) = 12$; $a_4 = a_3 r = 12(2) = 24$ y $a_5 = a_4 r = 24(2) = 48$.

Para determinar el vigésimo término, es conveniente emplear la fórmula recursiva

$a_n = a_1 r^{n-1}$. Por tanto, $a_{20} = a_1 r^{19} = 3(2^{19}) = 1\,572\,864$.

Así, la sucesión geométrica es $3, 6, 12, 24, 48, \dots, 3(2^{n-1}), \dots$

Figura 24. Uso de la fórmula del término general para hallar ciertos términos a partir del primer término y la razón común de una progresión geométrica. (p.165)

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
Trata	SI	SI	SI	Reg	Reg	Primeros	SI	SI	NO
miento				istro	istro	cinco			
algebraic				verbal	algebr	términos			
o y				(Aux.	aico				
numérico				registr	(Aux.	Vigésimo			
.				o	registr	término			
				algebr	o				
				aico)	numér	Primer			
					ico)	término			

	a_1
	r
	a_2
	a_3
	a_4
	a_5
	Fórmula recursiva
	a_n $= a_1 r^{n-1}$
	a_{20}
	1572864

	3, 6, 12, 24, 48, ... $3(2^{n-1})$
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
En este PM se lleva a cabo simultáneamente dos transformaciones dentro del mismo registro de representación semiótica; el primer tratamiento semiótico se evidencia progresivamente y no de manera continua desde el registro algebraico, a partir de la determinación de los primeros cinco términos de una PG; el segundo tratamiento, se presenta luego de la sustitución directa de cada parámetro en la expresión algebraica del n-ésimo término para obtener cada uno de los cinco términos. Consideramos que se cumplen a cabalidad las reglas de conformidad en los dos transformaciones semióticas descritas.	En cuanto a las unidades significantes presentes en este PM, se evidencia que cada una del registro de partida se relaciona con una unidad significativa en el registro de llegada; asimismo poseen univocidad semántica terminal, ya que a cada una de estas le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de algebraico. No obstante, la conversión no es congruente, debido a la ausencia del criterio tres, porque existe un orden diferente en la posible aprehensión de las unidades significantes a_1 y r.

PROBLEMA MODELO

Ejemplo 3

Determinemos los primeros cinco términos y el décimo término de la sucesión geométrica 10; 10,5 . . .

Solución

Como el primer término es 10 y el segundo es 10,5, entonces, $a_1 = 10$ y $a_2 = 10,5$; luego,

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{10,5}{10} = 1,05. \text{ Por tanto, } a_n = 10(1,05)^{n-1}.$$

Los cinco primeros términos son 10; 10,5; 11,025; 11,57625; 11,1550625. Así, el décimo término de la sucesión es $a_{10} = 10(1,05)^9 = 15,513282159785$.

Figura 25. Determinación de ciertos términos a partir de la razón común de una progresión geométrica. (p.165)

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
Tratamiento	SI	SI	SI	Registro	Registro	Primeros	SI	SI	NO
o numérico.				istro	istro	cinco			
				verbal	numér	términos			
					ico				
					(Aux.	Decimo			
					registr	término			
					o				
					algebr	10; 10,5;			
					aico)	...			

	a_1 a_2 r 1,05 a_n $= 10(1,05)^{n-}$ 10; 10,5; 11,025; 11,57625; 11,1550625 a_{10} 15,5132821!
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
Con respecto a la transformación en un mismo registro de representación semiótico, esta se lleva a cabo durante	Con respecto al criterio de congruencia entre el registro de representación semiótica inicial y el final propuesto por el PM, se evidencia

desarrollo del PM desde el registro numérico, inicialmente con el fin de obtener la razón común por medio del cociente entre el segundo y el primer término, luego la razón es sustituida en la fórmula del n -ésimo término para encontrar los seis términos solicitados en el enunciado. Consideramos que tratamiento cumple a cabalidad las reglas de conformidad planteadas por el autor de referencia de esta investigación.

correspondencia semántica, debido a que cada unidad significativa simple del registro verbal le corresponde una unidad significativa elemental del registro de numérico. De igual manera evidenciamos univocidad semántica terminal por cuanto a que cada unidad significativa simple del registro de partida se relaciona con una única unidad elemental en el registro de llegada; sin embargo, la manera de relacionar las unidades significantes entre ambos registros impide la conservación del mismo orden de aprehensión de las unidades puestas en correspondencia semántica, lo cual es suficiente para catalogar la conversión como incongruente.

PROBLEMA MODELO

Ejemplo 4

El tercer término de una sucesión aritmética es 9 y el sexto es 243. Determina una fórmula para el n -ésimo término de la sucesión.

Solución

Para determinar la fórmula para el n -ésimo término de la sucesión, necesitamos hallar los valores de a_1 y de r . Como la sucesión es geométrica, el n -ésimo término es de la forma $a_n = a_1 r^{n-1}$.

$$a_3 = a_1 r^{3-1} = a_1 r^2 = 9$$

$$a_6 = a_1 r^{6-1} = a_1 r^5 = 243$$

Al dividir a_6 entre a_3 , obtenemos que $r^3 = 27$, es decir, $r = 3$ y $a_1 = 1$. Por tanto, $a_n = 3^{n-1}$.

Figura 26. Determinación de la fórmula para el n -ésimo término de una progresión geométrica. (p.166)

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
Tratamiento	SI	SI	SI	Reg	Reg	Tercer	SI	SI	NO
o algebraico				istro	istro	término			
				verbal	algebraico	Sexto			
					(Aux. registr	Fórmula			
					o	n-ésimo			
					numérico)	término			
						a_1			
						r			
						a_n			
						$= a_1 r^{n-1}$			
						a_3			
						a_6			
						Dividir			

	$a_n = 3^{n-1}$
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
Este PM presenta una transformación semiótica dentro del mismo registro algebraico, al reemplazar en la fórmula general del n-ésimo término de una PG la posición del término (n) que es un dato implícito asociados al tercer y sexto término respectivamente, para inicialmente calcular el valor de la razón común a través de la división entre los dos términos y el despeje; posteriormente presenta que el primer término es uno. A pesar que el tratamiento no es tan claro porque omite el procedimiento para de algunas operaciones y la determinación del primer término, consideramos que dicho tratamiento obedece coherentemente al cumplimiento de las reglas de conformidad del registro algebraico.	Se evidencia en este PM correspondencia semántica, por cuanto a que cada unidad significativa simple del registro verbal, se le asocia una unidad significativa elemental del registro de representación algebraico; también observamos univocidad semántica terminal, ya que a cada unidad significativa elemental de la representación de partida le corresponde una sola unidad significativa elemental en el registro de llegada; pese a anterior, la conversión no es congruente completamente, debido a que la organización en la mayoría de las unidades significantes en ambos registros no conserva el mismo orden de aprehensión de las unidades puestas en correspondencia semántica.

PROBLEMA MODELO

Ejemplo 5

Se invierten \$ 2 000 000 en un fideicomiso a 3 años que paga 5% de interés compuesto mensualmente.

¿Cuál es la cantidad total acumulada en el fideicomiso a final de los tres años?

Solución

En este caso, $P = 2\,000\,000$, $t = 36$ meses e $i = 5\%$ compuesto mensualmente.

$$A_{36} = P(1 + i)^{36} = 2\,000\,000(1 + 0,05)^{36} = 2\,000\,000(1,05)^{36} \approx 11\,583\,632$$

Por tanto, el dinero acumulado en el fideicomiso al final de los 3 años es \$ 11 583 632, aproximadamente.

Figura 27. Uso de las progresiones geométricas en contexto financiero. (p.166)

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
Tratamiento	SI	SI	SI	Reg	Reg	\$2000000	SI	SI	SI
o numérico				istro	istro				
				verbal	algebr	3 años			
					aica	5%			
				(Aux.					
				registr	Interés				
				o	compuesto				
				numer	mensualmen				
				ico)	te				

	Cantidad total acumulada <i>P</i> <i>t</i> <i>i</i> <i>a</i>₃₆ 11583632
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
En este PM se lleva a cabo una transformación dentro de un mismo registro de representación semiótica (numérico); en la cual se modela una PG con la fórmula del interés compuesto, y se determina la cantidad ahorrada en un fideicomiso al cabo de tres años (36 meses), empleando	El modo como este PM realiza de manera transparente y espontanea la transformación semiótica de cada una de las unidades elementales significantes desde el registro verbal al registro algebraico, permite evidenciar explícitamente un fenómeno de congruencia entre las

las reglas de potenciación. Consideramos que el tratamiento semiótico descrito en el PM, obedece de manera coherente a las tres reglas de conformidad propuestas por Duval.	representaciones, como resultado de cumplir a cabalidad los tres criterios expuestos por Duval (1999).
---	--

Tabla 9.

Análisis descriptivo sobre el tratamiento y la conversión de cada problema modelo de $[LTE_{III}]$.

LIBRO DE TEXTO: SECUENCIAS Matemáticas 9
PROBLEMA MODELO

Ejemplo 1: Determina si cada sucesión es o no es una progresión aritmética.

a. $\{a_n\} = \{5, 6, 8, 11, 15, 20, \dots\}$

b. $\{b_n\} = \{2, -2, -6, -10, -14, \dots\}$

Solución: Al analizar cada sucesión, se tiene que:

a. $\{a_n\}$ no es una progresión aritmética, porque la diferencia entre dos términos consecutivos no es constante.

b. $\{b_n\}$ sí es una progresión aritmética, pues la diferencia entre dos términos consecutivos es constante y corresponde a la razón $d = -4$.

Figura 28. Clasificación del tipo de progresión para dos secuencias numéricas. (p.298)

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
REGLAS DE CONFORMIDAD									
TIPO DE TRATAM IENTO	DETERMI	COMBINA	CONDICIO	REGI	REGI	UNIDADES	CORRESPO	UNIVO	CONSER
	NACIÓN	CIONES	NES PARA						
	DE	ADMISIBL	QUE UNA						
	UNIDADE	ES PARA	REPRESEN						
	S	FORMAR	TACIÓN	PARTI	LLEG			TICA	ORDEN
		UNIDADE	DE ORDEN	DA	ADA				

	ELEMENTALES.	S DE ORDEN SUPERIOR	SUPERIOR SEA UNA PRODUCCIÓN PERTINENTE Y COMPLETA							TERMINAL
Tratamiento numérico.	SI	SI	SI	Registro numérico.	Registro verbal (Aux. Registro numérico)	es o no progresión aritmética $\{5, 6, 8, 11, 15, 20\}$ $\{2, -2, -6, -10, \dots\}$ $\{a_n\}$ Diferencia entre dos	SI	SI	NO	

	términos consecutivos No es constante 5, 6, 8, 11, 15, 20 +1 +2 +3 +4 +5 $\{b_n\}$ Razón d Es constante 2, -2, -4, -10, -14 -4 -4 -4 -4
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:

Con respecto a la transformación en un mismo registro de representación semiótico, se puede evidenciar que se lleva a cabo para verificar si dos secuencias numéricas son PA; ambos tratamientos de tipo numérico buscan exteriorizar el valor fijo intrínseco obtenido de restar dos términos consecutivos. Consideramos que ambos tratamientos cumplen a cabalidad las reglas de conformidad propuestas por Duval (1999).

Con respecto a las unidades significantes presentes en este PM, se evidencia que cada una del registro de partida se relaciona con una unidad significativa en el registro de llegada; asimismo poseen univocidad semántica terminal, ya que a cada una de estas le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de algebraico. No obstante, la conversión no es congruente, debido a la ausencia del criterio tres, porque existe un orden diferente en la posible aprehensión de la mayoría de unidades significantes puestas en correspondencia semántica.

PROBLEMA MODELO

Ejemplo 2: Determina los 4 primeros términos de la progresión aritmética definida mediante la regla de recurrencia $a_n = a_{n-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)$, $n > 1$, si su primer término es $a_1 = \frac{1}{4}$.

Solución: El segundo, el tercero y el cuarto término de la sucesión se calcula de la siguiente forma:

Segundo término
($n = 2$)

$$\begin{aligned} a_2 &= a_{2-1} + \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= a_1 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Tercer término
($n = 3$)

$$\begin{aligned} a_3 &= a_{3-1} + \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= a_2 - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Cuarto término
($n = 4$)

$$\begin{aligned} a_4 &= a_{4-1} + \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= a_3 - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

Entonces, los 4 primeros términos de la progresión son $\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}$ y $-\frac{5}{4}$.

Figura 29. Uso de la fórmula del término general para hallar los cuatros términos a partir del primer término y la razón común de una PA. (p.298)

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN				
Tratamie	SI	SI	SI	Reg	Reg	SI	SI	SI
nto				istro	istro			
numérico				verbal	numér			
.				(Aux.	ico			
				Regist	(Aux.			
				ro	Regist			
				algebr	ro			
				aico)	tabula			
				r)				
Descripción del tratamiento:				Descripción de la conversión:				
Con respecto a la transformación dentro de un mismo registro de representación semiótico, se puede evidenciar que se lleva a cabo de manera análoga, en las tres columnas durante desarrollo del PM; estos tratamientos semióticos se llevan a cabo desde el registro numérico con el fin de hallar el segundo tercero y cuarto término respectivamente. Consideramos que				Teniendo en cuenta la transformación semiótica que se realiza desde el registro verbal al registro numérico en el PM, existe correspondencia semántica porque a cada unidad significativa elemental de la registro verbal, se puede asociar una unidad significativa elemental del registro numérico; por otro lado, la conversión presenta univocidad semántica terminal por cuanto a cada unidad significativa elemental del registro verbal le corresponde una sola unidad significativa elemental en el registro numérico; en relación a la organización de				

ambos tratamientos cumplen a cabalidad las reglas de conformidad.	las unidades significantes, se ostenta igual orden de posible aprehensión de las unidades significantes puestas en correspondencia semántica. En consecuencia, el proceso de conversión que presenta este PM es congruente.
---	---

PROBLEMA MODELO

Ejemplo 3: Expresa mediante una regla de recurrencia la siguiente progresión aritmética.

$-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{7}{6}, \frac{5}{3}, \frac{13}{6}, \frac{8}{3}, \dots$

Solución: Se identifica el primer término y se halla la diferencia común.

- El primer término de esta sucesión es $a_1 = -\frac{1}{3}$.
- La diferencia común d se calcula restando dos términos consecutivos. $d = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

Por lo tanto, la regla de recurrencia es $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}$ $n > 1$, con $a_1 = -\frac{1}{3}$.

Figura 30. Deducción del termino general de una PA a partir de una secuencia numérica. (p.298).

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN			
Trata	SI	SI	SI	Regla de	SI	SI	NO
miento				recurrencia			
verbal y							
numérico				-1/3			

	Primer termino Diferencia común a_1 d Restando Dos términos consecutivos - $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}$
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
En este PM se lleva a cabo simultáneamente dos transformaciones dentro del mismo registro de representación semiótica; el primer tratamiento	En el PM se identifica las unidades significantes del registro de partida en las que existe correspondencia semántica con el registro de llegada; de igual manera, a cada una de estas unidades presentes en el primer registro se le

semiótico se realiza progresivamente desde el registro verbal, con el fin de aclarar aspectos esenciales de la progresión aritmética tratada; el segundo tratamiento, se presenta desde el registro numérico luego de la sustitución directa en la expresión algebraica para obtener la diferencia común. Consideramos que dichas transformaciones semióticas cumplen a cabalidad las reglas de conformidad de cada registro.

asocia una única unidad significativa del registro de llegada; sin embargo la conversión no es congruente debido a la ausencia del criterio tres, porque existe un orden diferente en la posible aprehensión de las unidades significantes *regla de recurrencia* y *primer término*.

PROBLEMA MODELO

Ejemplo 1: Halla el término general de la siguiente progresión aritmética:

$8, 3, -2, -7, -12, -17, -22, -27, \dots$

Solución:

El primer término de la progresión es $a_1 = 8$ y su diferencia común es $d = 3 - 8 = -5$. Por lo tanto, el término general es:

$$\begin{aligned} a_n &= 8 + (n - 1)(-5) \\ &= 8 - 5n + 5 \\ &= 13 - 5n \end{aligned}$$

Figura 31. Determinación de la fórmula del término general de una progresión aritmética. (p.299)

TRATAMIENTO

CONVERSIÓN

Trata	SI	SI	SI	Reg	Reg	Término	SI	SI	NO
miento				istro	istro	general			
algebraic				numér	algebr				
o				ico	aico	8			
				(Aux.		8, 3			
				registr					
				o		Primer			
				verbal		término			
				)					
						a_1			
						d			
						-5			
						$a_n = 13 - 5n$			
Descripción del tratamiento:				Descripción de la conversión:					
Este PM presenta una transformación semiótica dentro del mismo registro numérico, de ahí que reemplaza algunos parámetros provenientes de la descripción verbal en la fórmula del <i>n-ésimo término</i> de				Por lo que se refiere a los criterios de congruencia entre registros de representación semiótica, la conversión que efectúa el PM del registro verbal hacia el registro algebraico no es congruente; ya que no se cumple el tercer criterio de conservación del orden, porque presenta un orden diferente en la					

una progresión aritmética, para de este modo obtener el *término general* que describe la secuencia numérica; consideramos que dicho tratamiento obedece coherentemente a reglas internas del registro numérico.

percepción al momento de transformar las unidades significantes *término general, primer término y diferencia común*.

PROBLEMA MODELO

Ejemplo 2: Los dos primeros términos de una progresión aritmética son $a_1 = 1$ y $a_2 = -\frac{3}{5}$. Halla el décimotercer término.

Solución: La diferencia de la progresión dada es:

$$d = -\frac{3}{5} - 1 = -\frac{8}{5}$$

Para hallar el décimotercer término de la progresión aritmética, se aplica la fórmula para el término general $a_n = a_1 + (n - 1)d$. Entonces, si $n = 13$, se tienen que:

$$a_{13} = 1 + (13 - 1)\left(-\frac{8}{5}\right)$$

$$a_{13} = 1 + (12)\left(-\frac{8}{5}\right)$$

$$a_{13} = 1 - \frac{96}{5}$$

$$a_{13} = -\frac{91}{5}$$

Por lo tanto, el décimotercer término es $-\frac{91}{5}$. Esto se puede comprobar calculando los términos de la progresión aritmética:

$$\{a_n\} = \left\{1, -\frac{3}{5}, -\frac{11}{5}, -\frac{19}{5}, -\frac{27}{5}, -7, -\frac{43}{5}, -\frac{51}{5}, -\frac{59}{5}, -\frac{67}{5}, -15, -\frac{83}{5}, -\frac{91}{5}, -\frac{99}{5}, \dots\right\}$$

Figura 32. Determinación de un término cualquiera, a partir de dos términos consecutivos en una progresión aritmética. (p.299)

TRATAMIENTO

CONVERSIÓN

Trata	SI	SI	SI	Reg	Reg	Dos	SI	SI	SI
miento				istro	istro	primeros			
numérico				verbal	algebr	términos			
.				(Aux.	aico				
				registr	(Aux.	$a_1 = 1$			
				o	registr				
				algebr	o	$a_2 = -\frac{3}{5}$			
				aico)	numér				
					ico)	Decimoterce			
						r término			
						Diferencia			
						$d = -\frac{8}{5}$			
						Término			
						general			
						$a_{13} = -\frac{91}{5}$			
Descripción del tratamiento:				Descripción de la conversión:					

Este PM presenta una transformación semiótica dentro del mismo registro numérico, puesto que determina inicialmente la diferencia común, luego, el decimotercer término de una PA a partir de dos términos consecutivos de los que se deduce la diferencia. Discurremos que dichos tratamientos cumplen a cabalidad las reglas de conformidad.

Atendiendo al fenómeno de congruencia entre las representaciones semióticas, el PM desarrolla de manera exitosa la conversión del registro de representación verbal al registro de representación algebraico; se evidencia coherentemente los criterios de correspondencia semántica, univocidad semántica terminal e igual orden en la organización de las unidades significantes, de donde se infiere que existe congruencia entre las dos registros representacionales utilizados.

PROBLEMA MODELO

Ejemplo 3:

El primer término de una progresión aritmética es 6. Si su octavo término es -43, ¿Cuál es su diferencia común?

Solución:

Para determinar la diferencia común d conociendo el primer término y otro cualquiera se aplica la fórmula $d = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$. Entonces, como $a_1 = 6$ y $a_8 = -43$, se tiene que:

$$\begin{aligned} d &= \frac{-43 - 6}{8 - 1} \\ d &= \frac{-49}{7} \\ d &= -7 \end{aligned}$$

La diferencia común es -7 . Esto se puede comprobar verificando que el octavo término de la progresión aritmética es -43 , de la siguiente forma:

$$\{a_n\} = \{6, -1, -8, -15, -22, -29, -36, -43, -50, \dots\}$$

Figura 33. Cálculo de la diferencia común de una PA a partir de dos términos no consecutivos. (p.299)

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
Regist	SI	SI	SI	Reg	Reg	Primer	SI	SI	NO
ro numérico				istro	istro	término			
				verbal	algebr				
					aico	Octavo			
					(Aux.	término			
					registr				
					o	Diferencia			
					numér	común			
					ico)				
						d			
						a_1			
						a_8			
Descripción del tratamiento:				Descripción de la conversión:					
Este tipo de transformación dentro del mismo registro numérico, se da con la intención de determinar el valor de la diferencia común, mediante la sustitución directa del <i>primer término</i> y un <i>término cualquiera</i> , en				En este PM se evidencia correspondencia semántica, ya que a cada unidad significativa simple de los registros verbal le corresponde una unidad significativa elemental en el registro de algebraico; existe además univocidad semántica terminal puesto que a cada unidad significativa elemental de la					

una expresión algebraica en presenta despejada la diferencia común; es importante aclarar que dicha expresión algebraica emana del termino general de una progresión aritmética (tratamiento que se omite en el PM); por la simplicidad de las operaciones involucradas, el tratamiento cumple con las tres reglas de conformidad propuesta por Duval (1999).	representación de partida le corresponde sólo una unidad significativa elemental en el registro de llegada; no obstante, la conversión no es congruente porque presenta organización de las unidades significantes, porque en el criterio relativo a la organización de las unidades significantes es no es pertinente la distribución respectiva de las unidades significantes de los dos registros comparados, por tanto conlleva a que las unidades en correspondencia semántica no puedan ser aprehendidas en el mismo orden.
---	---

PROBLEMA MODELO

Ejemplo 1:
 Determina si cada sucesión es una progresión geométrica.

a. $\{c_n\} = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ **b.** $\{d_n\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\}$

Solución:
 Al analizar cada sucesión, se tiene que:

a. c_n no es una progresión geométrica, porque la división entre dos términos consecutivos no es constante.

b. d_n sí es una progresión geométrica, porque la división entre dos términos consecutivos es constante y corresponde a la razón $r = \frac{1}{2}$.

Figura 34. Clasificación del tipo de progresión para dos secuencias numéricas (p.304)

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
Trata	SI	SI	SI	Reg	Reg	si cada	SI	SI	NO
miento				istro	istro	sucesión			
numérico				numér	verbal				
.				ico	(Aux.				
				(Aux.	registr				

registro es una
 o número progresión
 simbólico) geométrica
 ico)

$$c_n$$

$$\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

$$2, 4$$

$$\frac{4}{2} = 2$$

$$d_n$$

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right\}$$

$$1, \frac{1}{2}$$

$$2, 4, 6, 8, 10, \dots$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
Con respecto a la transformación en un mismo registro de representación semiótico, se puede evidenciar que se lleva a cabo para verificar si dos secuencias numéricas son PG; ambos tratamientos de tipo numérico buscan exteriorizar el valor fijo intrínseco obtenido de dividir dos términos consecutivos. Consideramos que ambos tratamientos cumplen a cabalidad las reglas de conformidad propuestas por Duval (1999).	Atendiendo a la transformación semiótica que cambia de un registro a otro, se observa la existencia de correspondencia semántica, en vista de que todas las unidades elementales del registro numérico se relacionan con otra del registro verbal; de igual modo, existe univocidad semántica terminal puesto que a cada una de éstas le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de verbal. No obstante, la conversión no es congruente, por el incumplimiento del tercer criterio, ya que no existe un mismo orden en la posible aprehensión algunas de las unidades significantes puestas en correspondencia semántica..

PROBLEMA MODELO

Ejemplo 2: Los dos primeros términos de una progresión geométrica son $a_1 = 6$ y $a_2 = 2$. Halla el sexto término.

Solución: En primer lugar, se determina la razón común de la progresión geométrica:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Ahora, se calculan cada uno de los términos multiplicando por la razón común el término anterior:

$$a_3 = 2 \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} \quad a_4 = \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{2}{9} \quad a_5 = \left(\frac{2}{9} \right) \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{2}{27} \quad a_6 = \left(\frac{2}{27} \right) \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{2}{81}$$

Por lo tanto, el sexto término de la progresión geométrica es $\frac{2}{81}$.

Figura 35. Cálculo de un término cualquiera a partir de dos términos consecutivos en una PG. (p.304)

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
Trata	SI	SI	SI	Reg	Reg	Dos	SI	SI	NO
miento				istro	istro	primeros			
numérico				verbal	algebr	términos			
.				(Aux.	aico				
				registr	(Aux.	a_1			
				o	registr				
				algebr	o	a_2			
				aico)	numér				
				ico)					

	Sexto término
	Razón común
	r
	2
	6
	Cada uno
	Multiplicando
	Término anterior
	a_3
	a_4

	a_5 a_6 Sexto término $2/81$
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
Con respecto a la transformación en el mismo registro de representación numérico, se puede evidenciar que se lleva a cabo en dos fases durante desarrollo del PM; la primera busca cuantificar la cantidad constante intrínseca obtenida de dividir dos términos consecutivos de la progresión (razón); la segunda fase, se determina los cuatro términos faltantes a partir del producto entre la razón común y un término precedente. Consideramos que ambos tratamientos cumplen a cabalidad las reglas de conformidad.	Con respecto los criterios de congruencia, existe correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales, ya que las variables expresadas desde el registro verbal, se encuentran asociadas en el registro algebraico de llegada; de igual manera, a cada unidad signifiicante elemental de la representación en el registro verbal le corresponde una única unidad signifiicante elemental en el registro algebraico; sin embargo, la conversión realizada en este PM no es congruente, ya que no existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en el registro de partida (verbal) y en el registro de llegada (algebraico).

PROBLEMA MODELO

Ejemplo 3: En una progresión geométrica, el séptimo término es 128 y la razón común es -2.
¿Cuál es el primer término?

Solución: Para hallar cada uno de los términos anteriores al séptimo, se calcula el cociente entre el término siguiente al que se quiere hallar y la razón común -2.

$$a_6 = \frac{128}{-2} = -64$$

$$a_5 = \frac{-64}{-2} = 32$$

$$a_4 = \frac{32}{-2} = -16$$

$$a_3 = \frac{-16}{-2} = 8$$

$$a_2 = \frac{8}{-2} = -4$$

$$a_1 = \frac{-4}{-2} = 2$$

Por lo tanto, el primer término de la progresión geométrica es $a_1 = 2$.

Figura 36. Determinación del primer término de una PG a partir de un término cualquiera y la diferencia común. (p.304)

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
Trata	SI	SI	SI	Reg	Reg	Séptimo	SI	SI	SI
miento				istro	istro	término			
numérico				verbal	algebr				
.				(Aux.	aico	Razón			
				registr	(Aux.	común			
				o	registr				
				numér	o	Primer			
				ico)	numér	término			
					ico)				
						a_6			

	128 -2 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
En este PM se realizan tratamientos dentro del registro representacional numérico; precisamente, el PM muestra cómo obtener el primer término de una progresión geométrica en orden descendente, a partir del conocimiento de un término cualesquiera, la razón común y la posición del termino; mediante el cociente de un término posterior y la razón común.	Este PM realiza de manera exitosa la conversión del registro de representación numérico al registro de representación algebraico; notamos que presenta correspondencia semántica, univocidad semántica terminal e igual orden en la organización de las unidades significantes, lo cual significa que existe congruencia entre las dos registros representacionales empleados.

Consideramos que los tratamientos semióticos descritos anteriormente, obedecen de manera coherente a las tres reglas de conformidad propuestas por Duval.

PROBLEMA MODELO

Ejemplo 1:

Hallar el término general de la siguiente progresión geométrica:

$$\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27, 81, 243, \dots$$

Solución: Para empezar, se determina la razón común de la progresión, calculando en cociente entre dos términos consecutivos cualesquiera.

$$r = \frac{a_4}{a_3} = \frac{3}{1} = 3$$

Aplicando la fórmula, se obtiene:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$a_n = \frac{1}{9} \cdot 3^{n-1}$$

Por lo tanto, el término general de la progresión geométrica es $a_n = \frac{1}{9} \cdot 3^{n-1}$.

Figura 37. Deducción del término general de una PG a partir de una secuencia numérica. (p.305)

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
Trata	SI	SI	SI	Reg	Reg	Término	SI	SI	NO
miento				istro	istro	general			
algebraic				numér	algebr				
o.				ico	aico				

	(Aux. 1/9 registr o 1 verbal 3) Cociente Términos consecutivos r — a_n a_1 $a_n = \frac{1}{9} \cdot 3^{n-1}$
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
En este PM el autor propone dos trasformaciones que se llevan a cabo independientemente dentro del mismo	Se evidencia en este PM correspondencia semántica, por cuanto a que cada unidad signficante simple del registro numérico, se le asocia una unidad

registro, a partir de una secuencia numérica presente al final del enunciado, que admite inicialmente deducir en el registro numérico la razón común como el cociente entre dos términos cualesquiera; posteriormente, un tratamiento algebraico al reemplazar los parámetro iniciales brindados por el enunciado en la formula general de n-ésimo término de una PG, para obtener el término general que describe la secuencia numérica; consideramos que ambas transformaciones cumplen con las reglas de conformidad propias de cada sistema que garantizan que legitiman la invariancia referencial.

significante elemental del registro de representación algebraico; también observamos univocidad semántica terminal, ya que a cada unidad significativa elemental de la representación de partida le corresponde una sola unidad significativa elemental en el registro de llegada; pese a anterior, la conversión no es congruente completamente, debido a que la organización en la mayoría de las unidades significantes en ambos registros no conserva el mismo orden de aprehensión de las unidades puestas en correspondencia semántica.

PROBLEMA MODELO

Ejemplo 2: Los dos primeros términos de una progresión geométrica son $\frac{-1}{2}$ y $\frac{-1}{6}$. ¿Cuál es el décimo término?

Solución: En primer lugar, se calcula la razón común de la progresión geométrica:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{-1}{6}}{\frac{-1}{2}} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

Ahora, se aplica la fórmula del término general para hallar el décimo término, sabiendo que $a_1 = \frac{-1}{2}$ y $r = \frac{1}{3}$:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$a_{10} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10-1}$$

$$a_{10} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9$$

$$a_{10} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{19\,683} = -\frac{1}{39\,366}$$

Por lo tanto, el décimo término es $-\frac{1}{39\,366}$.

Figura 38. Cálculo del valor de cualquier término mediante dos términos consecutivos. (p.305)

TRATAMIENTO

CONVERSIÓN

Trata	SI	SI	SI	Reg	Reg	Dos	SI	SI	SI
miento				istro	istro	primeros			
numérico				verbal	algebr	términos			
.				(Aux.	aico				
				registr	(Aux.	Decimo			
				o	registr	término			
				algebr	o				
				aico)	numér	Razón			
					ico)	común			
						r			
						a_2			
						a_1			
						Término			
						general			
						a_n			
						a_{10}			

Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
Este PM presenta transformaciones semióticas dentro del mismo registro numérico, la primera encaminada a determinar la razón común mediante el cociente de dos términos consecutivos y la segunda como consecuencia de reemplazar algunos datos provenientes de la descripción verbal en la fórmula general del n-ésimo término de una progresión geométrica, para obtener el valor del décimo término; consideramos que ambos tratamientos respetan racionalmente las reglas internas del registro numérico.	Teniendo en cuenta los tres criterios de congruencia presentes durante la transformación entre registros de representación semiótica, para el caso puntual verbal y algebraico empleados por el PM; consideramos que se cumplen los tres criterios a cabalidad, lo cual indica que la conversión entre dichos registros de representación semiótica es congruente.
PROBLEMA MODELO	

Ejemplo 3: si el séptimo término de la progresión geométrica es $\frac{-729}{5}$ y la razón común es -3 , ¿Cuál es el primer término?

Solución: Como $a_7 = \frac{-729}{5}$ y $r = -3$, entonces para determinar el primer término, se aplica la siguiente formula:

$$a_1 = \frac{a_7}{r^{7-1}}$$

$$a_1 = \frac{\frac{-729}{5}}{(-3)^6}$$

$$a_1 = \frac{\frac{-729}{5}}{729} = -\frac{1}{5}$$

Por lo tanto, el primer término es $a_1 = -\frac{1}{5}$.

Figura 39. Determinación del primer término a partir de un término cualquiera y la razón común. (p.305)

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
Trata	SI	SI	SI	Reg	Reg	Séptimo	SI	SI	SI
miento				istro	istro	término			
numérico				verbal	algebr				
.				(Aux.	aico				

	registro (Aux. Razón o registro común numérico o ico) numérico Primer ico) término a_7 r a_1
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
En este PM se lleva a cabo un tratamiento dentro del registro representacional numérico; precisamente el PM muestra cómo obtener el primer término de una PG a partir de parámetros como la <i>razón común</i>, un <i>término cualquiera</i> y la <i>posición del termino</i>; mediante una expresión algebraica que permite conocer el primer término y que procede de la formula general del n-ésimo término de una PG. Consideramos que el tratamiento semiótico descrito anteriormente, obedece de manera coherente a las tres reglas de conformidad propuestas por Duval.	Este PM efectúa de manera exitosa la conversión desde el registro de representación verbal hacia el registro de representación algebraico; puesto que exterioriza correspondencia semántica, univocidad semántica terminal y organización de cada una de las unidades significantes, criterios suficientes para concebir que existe congruencia entre las dos representaciones empleadas.

Tabla 10.

Análisis descriptivo sobre el tratamiento y la conversión de cada problema modelo de $[LTE_{IV}]$.

LIBRO DE TEXTO: <i>HABILIDADES MATEMÁTICAS 9</i>
PROBLEMA MODELO

Ejercicios resueltos

Identifica cuales de las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas. En caso afirmativo determinar la razón d .

a. 5, 10, 20, 40, 80, ...

b. 2, -1, -4, -7, ...

Solución

- a. La sucesión 5, 10, 20, 40, 80, ... no es una progresión aritmética, pues la razón entre a_1 y a_2 es 5 pero, entre a_2 y a_3 es 10.
- b. La sucesión 2, -1, -4, -7, ... es una progresión aritmética. La diferencia d es -3, pues $-3 - 2 = -4 - (-1) = -7 - (-4) = -3$.

Figura 40. PM 1 identificación de una progresión aritmética a partir de secuencias numéricas. (p. 98).

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
TIPO DE TRATAMI ENTO	REGLAS DE CONFORMIDAD			REGI	REGI	UNIDADE	CORRESPO	UNIVO	CONSERV
	DETERM	COMBIN	CONDIC	STRO	STRO	S	NDENCIA	CIDAD	CIÓN
	INACIÓN	ACIONES	IONES	DE	DE	SIGNIFIC	SEMÁNTICA	SEMÁN	DEL
	DE	ADMISIBLE	PARA QUE	PARTI	LLEG	ANTES		TICA	ORDEN
	UNIDADES	S PARA	UNA	DA	ADA			TERMI	
	ELEMENTA	FORMAR	REPRESEN					NAL	
	LES.	UNIDADES	TACIÓN DE ORDEN						

		DE ORDEN SUPERIOR	SUPERIOR SEA UNA PRODUCCI ÓN PERTINEN TE Y COMPLET A						
Tratam iento numérico.	SI	SI	SI	Reg istro verbal (Aux. registr o numér ico)	Reg istro numér ico (Aux. registr o algebr aico)	Sucesio nes Son progresion es aritmética Caso afirmativo Razón d	SI	SI	SI

	5, 10, 20, 40, 80, ... No es progresión a_1 y a_2 5 a_3 y a_2 10 2, -1, - 4, -7, ... Es una progresión aritmética
--	---

	Diferencia -3
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
Este PM presenta en el segundo ítem una transformación semiótica dentro del mismo registro numérico; sin embargo, podemos decir que en el primer ítem existe un tratamiento desde el registro verbal, aunque no es tan transparente porque utiliza unidades elementales del registro algebraico; por la simplicidad de las operaciones involucradas, el tratamiento del segundo ítem cumple con las tres reglas de conformidad propuesta por Duval (1999).	Este PM realiza de manera exitosa la conversión del registro de representación numérico al registro de representación algebraico; notamos que presenta correspondencia semántica, univocidad semántica y organización de las unidades significantes, lo cual significa que existe congruencia entre las dos representaciones.

PROBLEMA MODELO

Ejercicios resueltos

1. Completar la progresión aritmética 5, ..., 32 si se sabe que 32 es el décimo término.

Solución

Para completar la progresión aritmética es necesario hallar d . De la progresión 5, ..., 32 se tiene que:

$$a_1 = 5$$

$$a_{10} = 32$$

$$n = 10$$

$$\text{Luego, } d = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{32 - 5}{10 - 1} = \frac{27}{9} = 3$$

La diferencia d entre los términos es 3. Así, la progresión completa es:

5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32.

Figura 41. Verificación de la posición que ocupa el término de una progresión aritmética. (p.99).

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
Tratam	SI	SI	SI	Reg	Reg	5	SI	SI	NO
iento				istro	istro				
numérico.				numér	algebr	...			
				ico	aico	32			

	Decimo término d a_1 a_{10} n a_n $n - 1$ 3 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29,
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
Este PM presenta una transformación semiótica dentro del mismo registro numérico, al remplazar algunos parámetros en una expresión que proviene de un tratamiento algebraico	Dado a que en este PM se muestra cómo obtener la diferencia común (d) a partir de una progresión en RN, en el proceso de conversión de este problema no es congruente en el registro de salida porque no cumple el

(despeje de la diferencia común omitido en el PM) de la fórmula general del n-ésimo término de una PA, para calcular el valor de la d . Consideramos que dicho tratamiento obedece coherentemente al cumplimiento de las reglas de conformidad del registro numérico.

tercer criterio propuesto por Duval. Por otro lado, la resolución brindada por el problema exige hacer uso de la expresión algebraica “termino general” a la cual tampoco alude el enunciado. Estas dos observaciones pueden llevar a que el lector se le dificulte comprender el proceso de conversión empleado.

PROBLEMA MODELO

2. Hallar el número de términos de la progresión aritmética 1, 4, ..., 34.

Solución

En la progresión 1, 4, ..., 34 se tiene que:

$$a_1 = 1$$

$$a_n = 34$$

$$d = 4 - 1 = 3$$

$$\text{Luego, } n = \frac{a_n - a_1 + d}{d} = \frac{34 - 1 + 3}{3} = \frac{36}{3} = 12$$

Luego, el número de términos de la progresión es 12.

Figura 42. Uso de la fórmula general de una progresión aritmética para descubrir la posición de un término. (p.99).

TRATAMIENTO

CONVERSIÓN

Tratamiento	SI	SI	SI	Registro	Registro	Número de	SI	SI	NO
numérico.				numérico	algebraico	términos			
						1			
						34			
						a_1			
						a_n			
						d			
						n			
						12			
Descripción del tratamiento:				Descripción de la conversión:					
El tratamiento propuesto por este PM se da en el registro numérico, a partir de una simple sustitución de los parámetros numéricos <i>primer término</i> , <i>duodécimo término</i> y la <i>diferencia común</i> , en una expresión algebraica que permite obtener el <i>puesto de término</i> que emana de la fórmula del				Se evidencia en este PM correspondencia semántica, por cuanto a que cada unidad significativa simple del registro numérico, se le asocia una unidad significativa elemental del registro de representación algebraico; también observamos univocidad semántica terminal, ya que a cada unidad significativa elemental de la representación de partida le corresponde una					

término general de una progresión aritmética; y se efectúa las respectivas operaciones indicadas, por la simplicidad de las operaciones involucradas, consideramos que el tratamiento cumple con las tres reglas de conformidad propuesta por Duval (1999).

sola unidad significativa elemental en el registro de llegada; pese a anterior, la conversión no es congruente completamente, debido a que la organización en la mayoría de las unidades significantes en ambos registros no conserva el mismo orden de aprehensión de las unidades puestas en correspondencia semántica.

PROBLEMA MODELO

Ejercicios resueltos

Identificar cuáles de las siguientes sucesiones son progresiones geométricas. En caso afirmativo determinar la razón r .

a. $2, 4, 6, 8, 10, \dots$

b. $-1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$

Solución

Se verifica si el cociente de cada término con el anterior es constante. Así:

a. $4 \div 2 \neq 6 \div 4 \neq 8 \div 6 \neq 10 \div 8$. Luego, la progresión no es geométrica.

b. $\frac{1}{3} \div (-1) = \left(-\frac{1}{9}\right) \div \frac{1}{3} = \frac{1}{27} \div \left(-\frac{1}{9}\right) = -\frac{1}{3}$.

Luego, la progresión es geométrica y $r = -\frac{1}{3}$.

Figura 43. Clasificación del tipo de progresión para dos secuencias numéricas. (p.103).

TRATAMIENTO

CONVERSIÓN

Tratam	SI	SI	SI	Reg	Reg	Sucesio	SI	SI	NO
iento				istro	istro	nes			
numérico.				numér	verbal				
				ico	(Aux.	Son			
				(Aux.	registr	progresion			
				registr	o	es			
				o	numér	geométric			
				verbal	ico)	as			
				)					
						Caso			
						afirmativo			
						Razón			
						r			
						Cocient			
						e			
						Cada			
						término			
						El			
						anterior			

	Es constante
	4
	$\div$
	2
	$\neq$
	No es geométric a
	$\frac{1}{3}$
	-1
	$-\frac{1}{3}$

	Es geométrica
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
Con respecto a la transformación en un mismo registro de representación semiótico, se puede evidenciar que se lleva a cabo para verificar si dos secuencias numéricas son PG; ambos tratamientos de tipo numérico buscan exteriorizar el valor fijo intrínseco obtenido de dividir dos términos consecutivos. Consideramos que ambos tratamientos cumplen a cabalidad las reglas de conformidad.	Teniendo en cuenta los tres criterios de congruencia presentes en el proceso de conversión de registros de representación semiótica, el PM cumple durante la transformación de manera espontánea con el primero y segundo criterio: correspondencia semántica y univocidad semántica terminal; no obstante, la conversión no es congruente debido que no cumple el tercer criterio: conservación del mismo orden de aprehensión de las unidades puestas en correspondencia semántica.

PROBLEMA MODELO

Ejercicios resueltos

Hallar el quinto término de la progresión $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \dots$

Solución

Primero se identifica los elementos: $a_1 = \frac{2}{3}$, $n = 5$ y $r = \frac{1}{2} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$

Luego, $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$$a_5 = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{27}{128} \quad \text{se reemplaza en la formula}$$

Así, el quinto término de la progresión dada es $\frac{27}{128}$.

Figura 44. Uso de la fórmula del término general de una progresión geométrica. (p.103).

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
Tratam	SI	SI	SI	Reg	Reg	Quinto	SI	SI	NO
iento				istro	istro	término			
numérico.				numér	algebr				
				ico	aico	$\frac{2}{3}$			
						a_1			
						n			

	r a_n a_5 $\frac{27}{28}$
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
Este PM presenta una transformación semiótica dentro del mismo registro algebraico, puesto que determina el quinto término de una PG a partir de la secuencia numérica de la que se deduce la <i>razón común</i>, y dos parámetros: <i>primer término</i> y la <i>posición del término</i>. Discurremos que dicho tratamiento obedece racionalmente a las reglas internas del registro algebraico.	Aunque este problema presenta una transformación del registro verbal (y numérico como registro auxiliar), hacia el registro algebraico, notamos que se transita por el registro algebraico mediante un tratamiento para lograr obtener cada uno de los parámetros de la progresión; en cuanto al fenómeno de congruencia presente en el proceso de conversión, se puede evidenciar que existe correspondencia semántica y univocidad semántica terminal en las unidades significantes elementales; en contraste con lo anterior, la conversión que presenta este PM no es congruente, porque no se cumple el tercer criterio de congruencia propuesto por Duval, es decir, exhibe un orden desigual en la posible aprehensión de las unidades significantes.

PROBLEMA MODELO

Ejercicios resueltos

1. Hallar el primer término de una progresión geométrica cuyo quinto término es 432 y su razón es 6.

Solución

Se identifican los elementos: $a_5 = 432$, $r = 6$ y $n = 5$.

Así, $a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}} = \frac{432}{6^4}$ Se remplaza en la fórmula.

$$a_1 = \frac{432}{1.296} = \frac{1}{3}. \text{ Luego, el primer término es } \frac{1}{3}.$$

Figura 45. Uso de la fórmula general de una progresión geométrica para determinar el primer término. (p.104)

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
Tratam	SI	SI	SI	Reg	Reg	Primer	SI	SI	NO
iento				istro	istro	término			
numérico.				verbal	algebr				
					aico	Quinto			
					(Aux.	término			
					registr				
					o	Razón			
					numér	a_5			
					ico)				

	r n a_1 $n - 1$ $\frac{1}{3}$
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
En este PM se lleva a cabo un tratamiento dentro del registro representacional numérico; se encuentra antecedido de una conversión que va desde el registro verbal (enunciado) hacia el registro algebraico. Puntualmente el PM muestra cómo obtener el primer término de una progresión geométrica a partir de conocer un término, la razón común y la posición del termino; mediante una expresión algebraica que permite conocer el primer término y procede de la formula general del n-ésimo término de una PG. Consideramos que el tratamiento semiótico descrito	Con relación a los criterios de congruencia, existe correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales, ya que las variables expresadas desde el registro verbal, se encuentran asociadas en el registro algebraico de llegada; de igual manera, a cada unidad significativa elemental de la representación en el registro verbal le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro algebraico; sin embargo, la conversión realizada en este PM no es congruente, ya que no existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en el registro de partida (verbal) y en el registro de llegada (algebraico).

anteriormente, obedece de manera coherente a las tres reglas de conformidad propuestas por Duval.

PROBLEMA MODELO

2. Hallar la razón de la progresión geométrica cuyo primer término es $\frac{1}{2}$ y su sexto término es $\frac{1}{486}$.

Solución

Se identifican los elementos: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_6 = \frac{1}{486}$ y $n = 6$

Así, $r = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_1}}$

$$r = \sqrt[6]{\frac{\frac{1}{486}}{\frac{1}{2}}}$$

Se reemplaza en la fórmula.

$$r = \sqrt[6]{\frac{2}{486}} = \frac{1}{3}$$

Luego, la razón es $r = \frac{1}{3}$

Figura 46. Determinación de la raíz común a partir del término general de una progresión geométrica. (p.104).

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
Tratam	SI	SI	SI	Reg	Reg	La	SI	SI	NO
iento numérico.				istro verbal	istro algebr aico (Aux. registr o numér ico)	razón Primer término Sexto término a_1 a_6 $n = 6$ r $\frac{1}{3}$			
Descripción del tratamiento:				Descripción de la conversión:					

Este PM presenta como hallar la razón común de una progresión geométrica conociendo dos términos no consecutivos, a partir de una transformación semiótica dentro del mismo registro numérico, como consecuencia de reemplazar los parámetros *primer término*, *sexto termino* y *posición del termino* en una expresión algebraicas que presenta despejada la razón común, esta expresión es proveniente de la fórmula del termino general de una progresión geométrica; consideramos que dicho tratamiento obedece coherentemente a reglas internas del registro numérico.

Con respecto a las unidades significantes presentes en este PM, se evidencia que cada una del registro de partida se relaciona con una unidad significativa en el registro de llegada; asimismo poseen univocidad semántica terminal, ya que a cada una de estas le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de algebraico. No obstante, la conversión no es congruente, debido a la ausencia del criterio tres, porque existe un orden diferente en la posible aprehensión de la mayoría de unidades significantes puestas en correspondencia semántica.

PROBLEMA MODELO

3. Hallar el número de términos de la progresión geométrica donde

$a_1 = 2$, $a_n = 486$ y $r = 3$.

Solución

Se reemplaza los elementos dados en la fórmula. Así

$$n = \frac{\log\left(\frac{a_n}{a_1}\right)}{\log r} + 1$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{486}{2}\right)}{\log 3} + 1 = 6$$

Se resuelven las operaciones indicadas

Luego, la progresión geométrica tiene seis términos.

Figura 47. Determinación de la posición que ocupa un término en una progresión geométrica. (p.105).

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
Tratam	SI	SI	SI	Reg	Reg	Númer	SI	SI	NO
iento				istro	istro	o de			
numérico.				algebr	numér	términos			
				aico	ico				
						$a_1 = 2$			
						$a_n = 486$			

	$r = 3$ Fórmul a n $\log \frac{a_n}{a_1}$ $\log r$ 6 Seis términos
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
Este PM presenta una transformación semiótica dentro del mismo registro numérico, al exhibir despejado la posición del término (n) procedente de la fórmula general del n-ésimo término de una PG. A pesar que el tratamiento omite algunos procedimientos para las operaciones indicadas, consideramos que dicho tratamiento obedece transparentemente al	En cuanto al proceso de conversión, en este PM se puede distinguir que las unidades significantes elementales presentes en el registro de partida (algebraico) se pueden poner en correspondencia con el registro de llegada (numérico); de igual manera, a cada unidad significativa del registro algebraico le corresponde una sola unidad en el registro numérico; sin embargo, la conversión no es congruente debido a la

cumplimiento de las reglas de conformidad del registro numérico.	ausencia tercer criterio, ya que exhibe un orden desigual en la posible aprehensión de las unidades significantes.
--	--

PROBLEMA MODELO

4. En una progresión geométrica el término $a_3 = 18$ y el término $a_5 = 162$, hallar a_{12}

Por la fórmula del término general para a_3 y a_5 se tiene el sistema:

$$\begin{cases} 18 = a_1 \cdot r^2 & \text{Ecuación 1} \\ 162 = a_1 \cdot r^4 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que puede resolverse por cualquiera de los métodos vistos en la unidad 4. En este caso se utilizará el método de igualación.

$$a_1 = \frac{18}{r^2} \quad \text{En la ecuación 1.}$$

$$a_1 = \frac{162}{r^4} \quad \text{En la ecuación 2.}$$

$$\text{de donde } \frac{18}{r^2} = \frac{162}{r^4} \quad \text{Se iguala}$$

$$\frac{r^4}{r^2} = \frac{162}{18} \quad \text{Se simplifica}$$

$$r^2 = 9, \text{ entonces, } r = 3$$

Para hallar a_1 se reemplaza r en 1. Así,

$$a_1 = \frac{18}{9} \quad \text{Se simplifica.}$$

Finalmente se halla a_{12} . Así,

$$a_{12} = 2 \cdot (3)^{12-1}$$

$$a_{12} = 354.294$$

Se reemplaza en la fórmula del término general y se resuelven las operaciones indicadas.

Figura 48. Determinación del cualquier término a partir de dos términos no consecutivos en una progresión geométrica. (p.105).

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
Tratam	SI	SI	SI	Reg	Reg	$a_3 = 18$	SI	SI	NO
iento				istro	istro				
numérico.				algebr	numér	$a_5 = 162$			
				aico	ico				
						a_{12}			
						Termin			
						o general			
						Sistem			
						a			
						a_1			
						r^2			
						r^4			
						{			

	r a_{12} $= 2 \cdot (3)^{12-1}$ $a_{12} =$ 354.294
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
En este PM el autor propone una transformación que se lleva a cabo dentro del registro algebraico, con la finalidad de determinar cualquier término teniendo como indicio dos términos cualquiera de la progresión, a partir de la formulación y desarrollo de un sistema de ecuaciones cuadráticas; consideramos que ambas transformaciones cumplen con las reglas de conformidad propias de cada sistema que garantizan y que legitiman la invariancia referencial.	En el proceso de conversión que efectúa este PM se observa correspondencia semántica, por cuanto a que cada unidad significativa simple del registro algebraico, se le asocia una unidad significativa elemental del registro de representación numérico; también observamos univocidad semántica terminal, ya que a cada unidad significativa elemental de la representación de partida le corresponde una sola unidad significativa elemental en el registro de llegada; pese a anterior, la conversión no es congruente completamente, debido a que la organización en la mayoría de las unidades significantes en ambos registros no conserva el mismo orden de aprehensión de las unidades puestas en correspondencia semántica.

Tabla 11.

Análisis descriptivo sobre el tratamiento y la conversión de cada problema modelo de [LTE_v].

LIBRO DE TEXTO: Applica Matemática 9	
PROBLEMA MODELO	
Ejemplo 39 La sucesión numérica Es una progresión aritmética porque cada término, desde el segundo, se obtiene sumándole $4\sqrt{5}$ al anterior, es decir $d = 4\sqrt{5}$ y el primer término de la progresión a_1 es $3\sqrt{5}$. Para hallar el décimo término, se procede de la siguiente manera $3\sqrt{5}, 5\sqrt{5}, 11\sqrt{5}, 15\sqrt{5}, \dots$ $3\sqrt{5} + 9(4\sqrt{5})$ $= 39\sqrt{5}$	

Figura 49. Determinación de cualquier un término en una PA, conociendo la diferencia común y el primer término. (p.194).

TRATAMIENTO	CONVERSIÓN
REGLAS DE CONFORMIDAD	

TIPO DE TRATAMIENTO	DETERMINACIÓN DE UNIDADES ELEMENTALES.	COMBINACIONES ADMISIBLES PARA FORMAR UNIDADES DE ORDEN SUPERIORES	CONDICIONES PARA QUE UNA REPRESENTACIÓN DE ORDEN SUPERIOR SEA UNA PRODUCCIÓN PERTINENTE Y COMPLETA						
				REGISTRO DE PARTIDA	REGISTRO DE LLEGADA	UNIDADES SIGNIFICANTES	CORRESPONDENCIA SEMÁNTICA	UNIVERSALIDAD SEMÁNTICA	CONSERVACIÓN DEL ORDEN
Tratamiento verbal y numérico	SI	SI	SI	Registro verbal	Registro numérico	Sucesión numérica $3\sqrt{5}, 5\sqrt{5}, 11\sqrt{5}, 15\sqrt{5}, \dots$	SI	SI	NO

	Sumándole Al anterior $d = 4\sqrt{5}$ Primer termino a_1 décimo término 9 $+9(4\sqrt{5})$
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
Con relación a la transformación heurística para comunicar acciones matemáticas, el tratamiento tanto verbal como numérico dado por los autores en este PM es de orden unidimensional, donde emplean métodos discursivos para dilucidar algunas de las principales	Se observa la dificultad que presentan los autores para llevar a cabo de manera transparente la conversión entre representaciones, en este caso del registro numérico verbal; Ya que la algunas de las unidades significantes explícitas del registro verbal no cumplen el tercer criterio de congruencia: conservación del orden; este problema es llamado por Duval como “fenómeno

características de las PA. Consideramos que los tratamientos semiótico descritos en ambos registros, obedecen de manera coherente a las tres reglas de conformidad propuestas por Duval.

de no-congruencia, el cual se da entre las representaciones de un mismo objeto que provienen de sistemas semióticos diferentes y el pasaje entre ellas no es inmediato” (Duval, 1999).

PROBLEMA MODELO

Ejemplo 40

La sucesión $\{3, 8, 13, 18, 23, \dots\}$ es una progresión aritmética porque cada término se obtiene sumando 5 al término anterior.



La sucesión $\{10, 7, 4, 1, -2, \dots\}$ es una progresión aritmética porque cada término se obtiene adicionando -3 al término anterior.

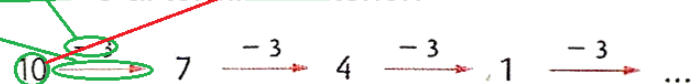


Figura 50. Clasificación de dos secuencias mediante la diferencia común en una progresión aritmética. (p.194).

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
Tratamiento	SI	SI	SI	Registro	Registro	Sucesión	SI	SI	NO
numérico.				Verbal	Algebraico.	$\{3, 8, 13, 18, 23, \dots\}$			

**Es una
progresión
aritmética**

**Cada
término**

Se obtiene

Sumando 5

**Término
anterior**

3

+5

→

{10, 7, 4, 1, -2,

	Adicionan do -3 10 -3
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
Este PM presenta transformaciones semióticas que se efectúa dentro del registro numérico, al mostrar cómo se obtiene una progresión aritmética creciente cuando se adiciona un valor fijo (entero positivo) a cada término; de manera análoga, se obtiene una PA decreciente si la diferencia común es un número entero decreciente. Por la simplicidad de las operaciones involucradas, el tratamiento cumple con las tres reglas de conformidad propuesta por Duval (1999).	Con referencia a los criterios de congruencia, existe correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales, ya que las variables expresadas desde el registro verbal, se encuentran asociadas en el registro algebraico de llegada; de igual manera, a cada unidad significativa elemental de la representación en el registro verbal le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro algebraico; sin embargo, la conversión realizada en este PM no es congruente, ya que no existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en el registro de partida (verbal) y en el registro de llegada (numérico).

PROBLEMA MODELO

Ejemplo 41

$a_n = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ es una progresión aritmética de diferencia 2.

$b_n = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$ no es una progresión aritmética, ya que los términos no se obtienen sumando el término anterior un número fijo.

Figura 51. Uso de la diferencia común para contrastar si dos secuencias numéricas son progresiones aritméticas. (p.194).

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
Tratam	SI	SI	SI	Reg	Reg	a_n	NO	SI	NO
iento				istro	istro				
verbal.				numér	verbal	$\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$			
				ico		Es			
						Progresión			
						aritmética			
						Diferencia			
						2			
						b_n			

	{1, 2, 4, 8, 16, ... 1, 2, 4, 8, 16 No es Los términos No se obtienen Sumando Al termino anterior Número fijo
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:

En este PM el autor propone una transformación que se lleva a cabo dentro del registro verbal; aunque el PM no propone un enunciado como convencionalmente lo realizan los demás libros examinados; sin embargo, dicha transformación dentro del registro verbal permite validar si la secuencia numérica es una progresión; consideramos que ambas transformaciones cumplen con las reglas de conformidad propias de cada sistema que garantizan y legitiman la invariancia referencial.

Al analizar la actividad de conversión presente en este PM, se distingue que entre los sistemas de representación no existe congruencia, puesto que cada unidad significativa elemental del registro de partida no le corresponde una unidad elemental en el registro de llegada; además, en el sistema de representación final no se mantiene el orden del arreglo de las dos unidades que se ponen en correspondencia semántica con la representación inicial. Como lo afirma Duval, en caso de que no se cumpla algún o todos los criterios de congruencia, se considera que las dos representaciones no son congruentes.

PROBLEMA MODELO

Ejemplo 42

Para hallar el término general de las progresiones aritméticas:

a. $a_n = \{3, 8, 13, 18, 23, \dots\}$

b. $b_n = \{10, 8, 6, 4, 2, \dots\}$

Se procede así:

a. $a_1 = 3; d = 5;$

$a_n = 3 + (n-1)5 = 3 + 5n - 5 = 5n - 2;$

$a_n = 5n - 2.$

b. $a_1 = 10; d = -2;$

$b_n = 10 + (n-1)(-2) = -2n + 12;$

$b_n = -2n + 12.$

Figura 52. Determinación de la fórmula del término general de dos PA dada las secuencias numéricas. (p.195).

TRATAMIENTO

CONVERSIÓN

Tratamiento algebraico.	SI	SI	SI	Registro numérico	Registro algebraico	Términos generales	SI	SI	NO
						Progresiones aritméticas			
						$a_n = \{ \quad \}$			
						3, 8, 13, 18, 23,			
						$b_n = \{ \quad \}$			
						10, 8, 6, 4, 2, ...			
						a_1			
						d			
						$n - 1$			
						$a_n = 5n - 2$			
						b_n			
						$= -2n + 12$			

Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
Con respecto a la transformación en un mismo registro de representación semiótico, se puede evidenciar que de manera semejante se lleva a cabo en dos fases durante el desarrollo del PM; ambos tratamientos se realizan desde el registro algebraico a partir del conocimiento del primer término y la diferencia común, con el fin de obtener una expresión algebraica que permita determinar cualquier término. Consideramos que ambos tratamientos cumplen a cabalidad las reglas de conformidad propuestas por el autor de referencia de esta investigación.	Se evidencia en este PM correspondencia semántica, por cuanto a que cada unidad significativa simple del registro verbal, se le asocia una unidad significativa elemental del registro de representación algebraico; también observamos univocidad semántica terminal, ya que a cada unidad significativa elemental de la representación de partida le corresponde una sola unidad significativa elemental en el registro de llegada; pese a anterior, la conversión no es congruente completamente, debido a que la organización en la mayoría de las unidades significantes en ambos registros no conserva el mismo orden de aprehensión de las unidades puestas en correspondencia semántica.

PROBLEMA MODELO

Ejemplo 43

Si se sabe que en una progresión aritmética, $a_4 = 9$ y $d = 2$, entonces a_1 se calcula de la siguiente manera:

$$a_1 = 9 - (4 - 1) \cdot 2 = 3$$

Por tanto es posible determinar que la progresión está dada por:

$$\{3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$$

Figura 53. Empleo de la fórmula del término general para obtener los primeros términos de una progresión aritmética. (p.195).

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
Tratam	SI	SI	SI	Reg	Reg	Progresión	SI	SI	NO
iento numérico.				istro algebr aico	istro numér ico	aritmética $a_4 = 9$ $d = 2$ a_1 $(4 - 1)$ 3 $\{3, 5, 7, 9, 11, \dots$			
Descripción del tratamiento:				Descripción de la conversión:					
En este PM se lleva a cabo un tratamiento dentro del registro representacional numérico; precisamente, el PM muestra cómo obtener el primer término de una progresión aritmética a partir de conocer un término, la				Con relación a los criterios de congruencia, existe correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales, ya que las variables expresadas desde el registro algebraico, se encuentran asociadas en el registro numérico de llegada; de igual manera, a cada unidad significativa elemental de					

razón común y la posición del termino; mediante una expresión algebraica que permite conocer el primer término y que proviene de la formula general del n-ésimo término de una PA. Consideramos que el tratamiento semiótico descrito anteriormente, obedece de manera coherente a las tres reglas de conformidad propuestas por Duval.	la representación en el registro algebraico le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro numérico; sin embargo, la conversión realizada en este PM no es congruente, ya que no existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en el registro de partida y en el registro de llegada (numérico).
---	--

PROBLEMA MODELO

Ejemplo 45

La sucesión $\{1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 3, 3, 1, \dots\}$ es una progresión geométrica porque cada término no se multiplica por 1,1 para encontrar el siguiente. Lo anterior indica que la razón de la progresión es 1,1.

Figura 54. Uso de la razón común para contrastar si una secuencia numérica corresponde a una progresión aritmética. (p.198).

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
Tratam	SI	SI	SI	Reg	Reg	Sucesión	SI	SI	NO
iento				istro	istro				
verbal.				numér	verbal	$\{1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 3, 3, 1, \dots\}$			
				ico		$1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 3, 3, 1, \dots$			

	Es una progresión geométrica Cada término Se multiplica 1.1 El siguiente Razón
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
En este PM el autor propone una transformación que se lleva a cabo dentro del registro verbal; no obstante, el PM no presenta un enunciado como generalmente lo plasman los demás libros de textos escolares; pese a ello, el tratamiento dentro del registro verbal garantiza si la secuencia numérica es una progresión geométrica;	En cuanto a las unidades significantes presentes en este PM, se evidencia que cada una del registro de partida se relaciona con una unidad significativa en el registro de llegada; asimismo poseen univocidad semántica terminal, ya que a cada una de estas le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de algebraico. No obstante, la conversión no es congruente, debido a la ausencia del criterio tres, porque existe un orden

razonamos que el tratamiento cumple con las tres reglas de conformidad propuesta por Duval (1999).

diferente en la posible aprehensión de la mayoría de unidades significantes puestas en correspondencia semántica.

PROBLEMA MODELO

Ejemplo 46

En la sucesión {4, 8, 16, 32, ...} cada término se obtiene multiplicando por 2 el término anterior.



En la sucesión {16, 8, 4, 2, ...} cada término se obtiene multiplicando por $\frac{1}{2}$ el término anterior.



Figura 55. Empleo de la razón común para verificar si dos secuencias numéricas son progresiones geométricas. (p.198).

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
Tratam	SI	SI	SI	Reg	Reg	Sucesión	SI	SI	NO
iento numérico.				istro verbal	istro numér ico	{4, 8, 16, 32, ...}			

	4, 8, 16, 32, ...
	Cada término
	Multiplica do por 2
	Término anterior
	4
	$\times 2$
	$\rightarrow$
	8
	{16, 8, 4, 2, ...}
	16, 8, 4, 2, ...

	Multiplica ndo por $\frac{1}{2}$ 16 $\times \frac{1}{2}$ $\rightarrow$ 8
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
Este PM presenta transformaciones semióticas que se efectúa dentro del registro numérico, puesto que ilustra cómo se obtiene una progresión geométrica creciente cuando se multiplica un valor entero fijo por un término antecesor; de igual manera, se obtiene una PG decreciente si la razón común es un número racional. Consideramos que dicho tratamiento obedece coherentemente a las reglas internas del registro.	En cada una de los espacios expuestos por el PM, se realiza de manera exitosa los dos primeros criterios de congruencia desde el registro de representación verbal al registro de representación numérico, es decir, este el PM presenta correspondencia semántica y univocidad semántica; no obstante, la organización de las unidades significantes no permite cumplir el tercer criterio de congruencia, lo que nos indica que no existe congruencia entre las dos representaciones utilizadas por los autores.
PROBLEMA MODELO	

Ejemplo 47

Para determinar la razón de la progresión geométrica

{243, 81, 27, 9, ...}

Basta con dividir cualquiera de sus términos inmediatamente anteriores. Así:

$$\frac{9}{27} = \frac{27}{81} = \frac{81}{243} = \frac{1}{3} \leftarrow \text{razón}$$

Figura 56. Deducción de la razón común inmersa en una secuencia numérica, a partir del cociente entre dos términos consecutivos. (p.198).

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
Tratam	SI	SI	SI	Reg	Reg	Razón	SI	SI	NO
iento numérico.				istro verbal	istro numér ico	Progresión geométrica {243, 81, 27, 9, Dividir Cualquiera de sus términos			

	Inmediata mente anterior 9 / 27 1/3
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
En este PM se lleva a cabo una transformación dentro de un mismo registro de representación semiótica numérico; con el fin de mostrar cómo obtener la razón común de cualquier PG a partir del cociente de un término y el término inmediatamente antecesor. Consideramos que el tratamiento semiótico descrito anteriormente, obedece de manera coherente a las tres reglas de conformidad propuestas por Duval.	En cuanto a la transformación semiótica cambia de un registro a otro, se observa la existencia de correspondencia semántica, por cuanto a que todas las unidades elementales del registro verbal se relacionan con otra del registro numérico; de igual modo, existe univocidad semántica terminal dado que a cada una de estas le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de numérico. Sin embargo, la conversión no es congruente, debido a la ausencia del tercer criterio, porque existe un orden diferente en la posible aprehensión algunas de las unidades significantes puestas en correspondencia semántica.

PROBLEMA MODELO

Ejemplo 48

Una persona decide ahorrar una cantidad de dinero cada semana. La primera semana ahorra \$ 2 000; la segunda \$ 4 000; la tercera \$ 8 000, y así sucesivamente. Se observa que la sucesión {2 000, 4 000, 8 000, ...} es una progresión geométrica cuyo término general está dado por:

$$a_n = a_1 r^{n-1} = 2\,000 \cdot 2^{n-1}, \text{ porque } a_1 = 2\,000 \text{ y } r = 2$$

Por tanto, si se quiere determinar la cantidad ahorrada en la séptima semana, se calcula:

$$a_7 = 2\,000 \cdot 2^{7-1} = 2\,000 \cdot 2^6 = 128\,000$$

Figura 57. Uso de las PG para modelar situaciones en contextos financieros. (p.198).

TRATAMIENTO				CONVERSIÓN					
Tratam	SI	SI	SI	Reg	Reg	Cantidad	SI	SI	NO
iento				istro	istro	de dinero			
numérico.				verbal	algebr				
					aico	Cada			
					(Aux.	semana			
					registr				
					o	La			
					numér	primera			
					ico)	semana			

	La
	segunda
	La tercera
	Y así
	sucesivamente
	Sucesión
	$\{2000, 4000, 8000, \dots\}$
	2000
	4000
	8000
	...
	Progresión
	geométrica

	Término general $a_n = a_1 r^{n-1}$ a_1 r Cantidad ahorrada Séptima semana a_7 128000
Descripción del tratamiento:	Descripción de la conversión:
En este PM se lleva a cabo una transformación dentro del registro de representación algebraico con el fin de mostrar el termino general que satisface los términos de la cantidad de dinero ahorrado en cada semana;	Se evidencia en este PM correspondencia semántica, por cuanto a que cada unidad significativa simple del registro verbal, se le asocia una unidad significativa elemental del registro de representación algebraico; también observamos univocidad semántica terminal, ya que a cada unidad significativa

posteriormente se efectuá un tratamiento en el registro numérico para determinar la cantidad de dinero que ahorrara en la séptima semana si continúa la tendencia de ahorro; Consideramos que los tratamientos semiótico descritos en ambos casos, obedece de manera coherente a las tres reglas de conformidad propuestas por Duval.

elemental de la representación de partida le corresponde una sola unidad significativa elemental en el registro de llegada; pese a anterior, la conversión no es congruente completamente, debido a que la organización en la mayoría de las unidades significantes en ambos registros no conserva el mismo orden de aprehensión de las unidades puestas en correspondencia semántica.

PROBLEMA MODELO

Ejemplo 49

Una pelota se deja caer libremente desde una altura de 40 cm, alcanza en cada rebote el 75% de la altura del rebote inmediatamente anterior. La altura aproximada que alcanza la pelota en el quinto rebote se halla utilizando la fórmula para el término general de una progresión geométrica.

Como $a_1 = 40$ y $r = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$, entonces:

$$a_5 = 40 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{5-1} = 40 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = 12,65625$$

Lo anterior indica que en el quinto rebote la pelota alcanza una altura aproximada de 12,7 cm.



Figura 58. Empleo de las PG para modelar la altura con la que decrece al rebotar una pelota. (p.198).

Tratam	SI	SI	SI	Reg	Reg	40 cm	SI	SI	NO
iento				istro	istro	75%			
numérico.				verbal	algebr	Altura			
					aico	Quinto			
						rebote			
						Termino			
						general.			
						a_1			
						r			
						a_5			
						$40. \left(\frac{3}{4}\right)^{5-1}$			
						12,7 cm			
Descripción del tratamiento:				Descripción de la conversión:					

En este PM se realiza una transformación dentro del mismo registro numérico, a partir de un simple sustitución de los parámetros numéricos *primer término*, *razón común* y *puesto de termino* en la expresión algebraica del término general de una progresión geométrica; y se efectúa las respectivas operaciones indicadas, por la simplicidad de las operaciones involucradas, consideramos que el tratamiento cumple con las tres reglas de conformidad propuesta por Duval (1999).

Con respecto los criterios de congruencia, existe correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales, ya que las variables expresadas desde el registro verbal, se encuentran asociadas en el registro algebraico de llegada; de igual manera, a cada unidad significativa elemental de la representación en el registro verbal le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro algebraico; sin embargo, la conversión realizada en este PM no es congruente, ya que no existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes en el registro de partida (verbal) y en el registro de llegada (algebraico).