



DESCRIPCIÓN DE LOS CAMBIOS QUE PRESENTAN LOS ESTUDIANTES CUANDO
APLICAN ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y METACOGNITIVAS,
EN LA SOLUCIÓN PROBLEMAS CON NÚMEROS FRACCIONARIOS

Autor: JESSICA LORENA RICO PATIÑO

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES
DEPARTAMENTO DE ESTUDIOS A DISTANCIA
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
MANIZALES

2018

DESCRIPCIÓN DE LOS CAMBIOS QUE PRESENTAN LOS ESTUDIANTES CUANDO
APLICAN ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y METACOGNITIVAS
AL SOLUCIONAR PROBLEMAS DE NÚMEROS FRACCIONARIOS

JESSICA LORENA RICO PATIÑO

Proyecto de grado para optar al título de Magister en Enseñanza de las Ciencias

Tutor

Alejandra Idarraga

Mg. Enseñanza de las Ciencias

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES
DEPARTAMENTO DE ESTUDIOS A DISTANCIA
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
MANIZALES

2018

DEDICATORIA

*A mis padres, por la confianza depositada en mí y sus palabras de aliento:
“¡Sacrificio y voluntad! No desfallecer para alcanzar la meta”.*

A Eriksson Estupiñan, por su amor, estímulo y apoyo.

AGRADECIMIENTOS

A Alejandra Idarraga, por su asesoría y orientación oportuna en la realización de este trabajo.

A los estudiantes objeto de investigación quienes contribuyeron decididamente para que la propuesta de intervención se llevara a cabo con éxito y a sus padres por la colaboración brindada.

Al rector Otardo Rincón por su buena disposición al permitir desarrollar este trabajo en la Institución Educativa Colegio Santos Apóstoles.

A Juan Ricardo Caro Riaño, por ser el impulsor de iniciar este proceso de formación.

A Eriksson Eduardo Estupiñan por su constante motivación y apoyo durante la maestría.

RESUMEN

En este trabajo se pretende describir los cambios de nivel que presentan los estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa Colegio Santos Apóstoles de la ciudad de Cúcuta, en la resolución de problemas con números fraccionarios, comparando los resultados de la prueba diagnóstica con los resultados de la prueba final, después de la intervención en el aula con estrategias Metacognitivas y el Método de Polya. Para ello se propone una investigación de tipo descriptivo con enfoque cualitativo, de un estudio de casos con seis estudiantes que fueron seleccionados al azar, a los cuales se les aplicó una Prueba Diagnóstica, seguidamente la Unidad Didáctica de cinco intervenciones y por último la Prueba Final. Después de conocer el Método de Polya los estudiantes obtuvieron mejores resultados en cuanto al nivel de resolución de problemas. El estudio permite concluir que los estudiantes mostraron cambios positivos en la resolución de problemas, evidenciándose un progreso con tendencia a seguir mejorando con más intervenciones apoyados en el Método de Polya y estrategias metacognitivas, ya que con ellas desarrollan habilidades de identificación, comprensión, proposición, ejecución y verificación autónoma, reflexionando todo el tiempo sobre su proceder, mejorando la concentración, organización y capacidad de razonar.

Palabras Claves: Estrategias, Metacognición, Resolución, problemas, Fraccionarios.

ABSTRACT

This paper aims to describe the level changes presented by the sixth grade students of the Colegio Santos Apostles Institution in the city of Cúcuta, in the resolution of problems with fractional numbers, comparing the results of the diagnostic test with the results of the final test, after the intervention in the classroom with Metacognitive strategies and the Polya Method. For this, a descriptive research with a qualitative approach is proposed, from a case study with six students who were selected at random, to whom a diagnostic test is applied, then to the Didactic Unit of five interventions and finally to the Final test . After knowing the Polya Method, the students obtained better results regarding the level of problem solving. The study allows to conclude that the students have achieved a positive change in problem solving, evidencing a progress with the progressive tendency improved with more interventions supported by the Polya Method and metacognitive strategies, since with their identification, comprehension, proposition skills , execution and autonomous verification, reflecting all the time on their behavior, improving concentration, organization and ability to reason.

Keywords: Strategies, Metacognition, Resolution, problems, Fractional.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	10
ANTECEDENTES.....	12
Antecedentes relacionados con la Metacognición.....	12
Antecedentes relacionados con la resolución de problemas.....	16
Antecedentes relacionados con números fraccionarios.....	19
ÁREA PROBLEMÁTICA Y PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN	23
JUSTIFICACIÓN	26
REFERENTE TEÓRICO	29
Metacognición.....	29
Resolución de problemas.....	31
Resolución de problemas en matemáticas.....	37
Matemáticas y números fraccionarios.....	40
OBJETIVOS	42
Objetivo general	42
Objetivos específicos.....	42
METODOLOGÍA	43
Tipo de investigación	43
Población y unidad de trabajo	43
Método.....	44

Categorías de análisis	46
Técnicas e instrumento de recolección de información	49
RESULTADOS	56
DISCUSIÓN DE RESULTADOS	59
CONCLUSIONES	68
RECOMENDACIONES	70
REFERENCIAS	71
ANEXOS.....	77

LISTA DE TABLAS

Tabla 1 Niveles de solución de problemas.....	33
Tabla 2 Resolución de problemas y metacognición.....	47
Tabla 3 Preguntas de la prueba inicial de acuerdo a la categoría.....	49
Tabla 4 Preguntas de la evaluación final de acuerdo a la categoría.....	52
Tabla 5 Niveles según la Evaluación Diagnóstica y Evaluación Final de cada estudiante.....	57
Tabla 6. Comparación entre prueba inicial y prueba final para la categoría de planificación	61
Tabla 7. Comparación entre prueba inicial y prueba final para la categoría de identificación	63
Tabla 8. Comparación entre prueba inicial y prueba final para la categoría de ejecución.....	64
Tabla 9. Comparación entre prueba inicial y prueba final para la categoría de evaluación....	65

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Tipos de tareas matemáticas. Tomada de Rodríguez (2005).....	39
Figura 2 Relación Resolución de Problemas-Metacognición	48

LISTA DE ANEXOS

ANEXO A Evaluación diagnóstica.....	78
ANEXO B. Intervenciones de la Unidad Didáctica.....	84
ANEXO C. Evaluación Final	114
ANEXO D. Autorización de los padres de familia para la aplicación de instrumentos	124
ANEXO E. Autorización del rector para la aplicación de instrumentos.....	125
ANEXO F. Respuesta de los estudiantes en las pruebas Diagnóstica y final	126

INTRODUCCIÓN

Los estudiantes pueden resolver en muchas ocasiones ejercicios propuestos por el profesor puesto que de manera mecánica repiten los algoritmos que han trabajado durante las clases, pero no siempre son capaces de resolver problemas para aplicar los conceptos trabajados, como el caso de los números fraccionarios que pertenecen al conjunto de los números racionales y que se les dificulta por el hecho de haber aprendido el conteo y están acostumbrados a realizar operaciones entre naturales y no logran comprender como un número se ubica sobre otro para formar una división, que puede volverse por ejemplo decimal o porcentaje y que depende si es propia o impropia cambia la estructura mental que ha elaborado desde el inicio.

Es por ello, que en el primer periodo del plan de área de matemáticas de grado sexto se cuenta con el repaso de operaciones básicas entre números naturales y teoría de números, para que en el segundo periodo del mismo grado se pueda dar inicio a los números fraccionarios con sus respectivas operaciones y propiedades.

Se observa que cuando a los estudiantes se les plantea un problema de cualquier tipo, para resolver, no dedican el tiempo necesario para leerlo, analizarlo y comprender que es lo que se plantea en dicho problema, sino por el contrario por la ligereza de dar una respuesta sin importar que tan acertada sea, extraen los datos números y realizan la operación que les parece más sencilla para aplicarla entre los datos extraídos. Es decir que no reconocen las variables dadas, ni las incógnitas pedidas, ni elaboran un plan y mucho menos verifican procesos. En algunos casos los profesores de primaria enseñan a escribir tres subtítulos que son datos, solución y respuesta

por tener una organización en la solución, pero que no le hacen el respectivo análisis que requiere como estrategia de resolución de problemas y de reflexión de su aprendizaje. Pero con el paso del tiempo van perdiendo la organización de estos tres subtítulos y prefieren en bachillerato tan solo resolver de manera algorítmica el proceso de solución del problema, acostumbrados al menos esfuerzo.

En el trabajo se determinan los niveles con los que inician los estudiantes de grado sexto en la resolución de problemas con números fraccionarios, y los niveles, después de la intervención donde se enseña imbricadamente estrategias metacognitivas y de resolución de problemas, basado en el Modelo de Polya, con el fin de describir los cambios que se presentan en dichos estudiantes, para proponer las conclusiones que puedan contribuir en el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en estudiantes de grado sexto. Para ello se plantea una investigación de estudio de casos de tipo cualitativo descriptivo con seis estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa Colegio Santos Apóstoles de la ciudad de San José de Cúcuta del Departamento de Norte de Santander.

ANTECEDENTES

Antecedentes relacionados con la Metacognición

En la tesis doctoral **“Papel de la inteligencia y de la metacognición en la resolución de problemas”** de Domenech (2004) se estudió la existencia de una relación entre la inteligencia y la capacidad metacognitiva de los estudiantes en la resolución de problemas y se concluyó que no existe relación directa. En este estudio se tomaron dos grupos, uno identificado con alta capacidad intelectual y el otro con capacidad intelectual media. Los de alta capacidad escogen la información más importante para resolver el problema y cometen menos errores que los de capacidad media, aunque no se diferencian respecto al número y tipo de estrategias utilizadas en la resolución de problemas, ni el número de inferencias. En la mayoría de los problemas se observó la misma experiencia, eficacia y conocimiento metacognitivo entre los dos grupos de participantes. La muestra fue extraída de una fase anterior conformada por todos los estudiantes de los 14 centros públicos de la ciudad de Reus de la Provincia de Tarragona que cursaron en 1998 y 1999 que provenían de entornos socio-culturales heterogéneos.

En el trabajo **“La evaluación y mejora del proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a través de la metacognición”** de Annemie Desoete (2007), se realizó un estudio para investigar el aprendizaje matemático y las habilidades metacognitivas de niños de tercer y cuarto grado, concluyendo que los profesores interesados en la metacognición infantil deben emplear diseños de métodos múltiples. Además que la metacognición puede ser entrenada y tiene

algo de valor añadido en la intervención con los niños en la resolución de problemas matemáticos; según los datos que les arroja la investigación, se sugiere que las habilidades metacognitivas deben ser enseñadas explícitamente y no se debe desarrollar por una experiencia libre de las matemáticas. Se espera que al dedicar más tiempo a la instrucción metacognitiva se mejore el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Campanario (2000), en su investigación **“El desarrollo de la metacognición en el aprendizaje de las ciencias: estrategias para el profesor y actividades orientadas al alumno”** presenta diversas propuestas dirigidas al profesor de ciencias y estrategias metacognitivas en la enseñanza y aprendizaje de las ciencias. Las propuestas son estrategias dirigidas al profesor y recursos y actividades orientadas a los estudiantes. En la primera se toma la evaluación como una actividad de enseñanza importante para fomentar el uso de estrategias metacognitivas, es así como se recomienda la evaluación inicial que sirve como elemento control para que el estudiante tome conciencia de sus propios conocimientos; además de realizar constantes evaluaciones que permiten aplicar destrezas de autorregulación metacognitiva, con preguntas de tipo análisis de situaciones vistas anteriormente, corrección de errores conceptuales y análisis de situaciones cotidianas.

Entre las actividades orientadas al estudiante el autor propone predecir-observa-explicar, para aprender mejor y sobre su propio aprendizaje; mapas conceptuales para representar gráficamente relaciones entre conceptos, porque así el estudiante de sus procesos de aprendizaje y la resolución de problemas que se puede convertir en investigación.

En conclusión el estudio de la metacognición ha sido muy complicado tratarla porque se requiere de procesos psicológicos que no tienen los especialistas en didáctica, muy poco los problemas metacognitivos se enfocan desde el punto de vista de la enseñanza de las ciencias.

En el artículo “**Metacognición un camino para aprender a aprender**” de Osses y Jaramillo (2008), se presenta la metacognición como una alternativa para formar estudiantes autónomos, potenciando conciencia sobre sus propios procesos cognitivos y autorregulación, que los lleve a “aprender a aprender”.

Los autores diferencian dos componentes metacognitivos que son el declarativo y el procedimental y hace referencia al conocimiento metacognitivo de tres formas: las personas, las tareas y las estrategias. Plantean dos criterios para orientar la enseñanza de las estrategias metacognitivas que son el grado de conciencia sobre las estrategias y el nivel de ayuda que ofrece el profesor o grado de autonomía que otorga al alumno.

Finalmente sintetizan afirmando que la metacognición es importante para que el aprendizaje de los estudiantes trascienda el ámbito escolar y se proyecte en la vida cotidiana en un aprender a aprender. Se hace necesario formar estudiantes conscientes y autónomos de sus aprendizajes, teniendo en cuenta la motivación y estrategias de aprendizaje, por ello los docentes tiene la tarea importante en el proceso ya que también deben ser metacognitivos y ser conscientes de sus potencialidades y limitaciones, planificando, controlando y evaluando su quehacer.

Ottonello, Del Valle y Ross (2001) en su trabajo “**Estrategias metacognitivas en el aprendizaje del álgebra**”, realizaron un diagnóstico a los estudiantes de primer año universitario que cursaban álgebra, para determinar debilidades y fortalezas de las estrategias de aprendizajes que presentaban, así como sus intereses, motivación y actitud en el estudio del Álgebra. Con los resultados obtenidos se logró proponer herramientas metacognitivas en las tareas de aprendizaje para el estudio de la asignatura, que los incentivaran en el control y la autorregulación de su propio aprendizaje, llevando a la reflexión de la propia actividad cognitiva.

Trabajaron con 292 estudiantes del primer año universitario de álgebra en el 2008, a quienes se aplicó una encuesta diagnóstica validada por el método de expertos, utilizando la escala Likert para mediciones.

Se estudiaron de los procesos autorreguladores, las dimensiones: apropiación de objetivos, orientación en la tarea, apropiación de los criterios de evaluación y autogestión de las dificultades y errores, dando como resultado bajo desempeño en la actividad metacognitiva, mostrando así la necesidad de implementar estrategias metacognitivas para mejorar el desarrollo de habilidades que contribuyan a proceso de aprender a aprender.

En la investigación “**La metacognición en los modelos para la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias**” de Tamayo Oscar (s.f.) se hace una estructuración de la importancia de la metacognición en la educación y la didáctica de las ciencias debido a que incide en la adquisición, comprensión, retención y aplicación de lo que se aprende, influyendo en un mejor

aprendizaje, desarrollo del pensamiento crítico y habilidad en la resolución de problemas. El autor pretende mostrar los desarrollos más significativos que ha tenido el concepto de metacognición para la didáctica de las ciencias desde diferentes modelos para la enseñanza y aprendizaje.

A modo de conclusión se presenta la urgencia de articular la reflexión metacognitiva a la enseñanza de las ciencias, para tener un mejor aprendizaje que sea profundo y consciente.

Antecedentes relacionados con la resolución de problemas

El trabajo **“Efectos de la resolución de problemas Mediado por el Weblog sobre el rendimiento en matemáticas”** de Thais Marlene Yáñez Bolívar (2010), de carácter descriptivo no experimental, tuvo como objetivo diseñar y aplicar actividades en la que los estudiantes solucionaran problemas, actuaran como partícipes activos en la construcción de conocimientos, produciendo o desarrollando estrategias de resolución y el docente sólo actuara de moderador del proceso. La muestra estuvo conformada por 24 estudiantes de grado quinto, a los cuales se les aplicó una evaluación diagnóstica para determinar las habilidades cognitivas, un pretest para evidenciar la resolución de problemas antes del uso de Weblog y un post-test para medir el efecto del estudio después de aplicado el estímulo de la estrategia de resolución de problemas y la herramienta tecnológica weblog. También participaron en la muestra dos profesores de matemáticas del mismo grado a quienes se les aplicó un cuestionario de 25 preguntas para conocer su percepción de la metodología de resolución de problemas, uso de estrategias de trabajo, uso y dominio de TIC, entre otras.

Se concluyó que después de la aplicación del Weblog con resolución de problemas no se observó variaciones significativas en las calificaciones, permitiendo ser una herramienta de carácter informativa para los docentes pero no un recurso primordial para la docencia en el proceso de enseñanza. Quizás podría haber afectado el poco tiempo dedicado a este proceso, el escaso dominio de operaciones básicas y otros factores propios del aula. Por otro lado utilizar herramientas tecnológicas motiva el proceso enseñanza-aprendizaje, puesto que se generaron espacios de discusión y comunicación en el grupo. La resolución de problemas desarrolló en los estudiantes sistemas de pensamientos matemáticos.

En el estudio realizado a estudiantes de quinto grado de primaria de una escuela rural oficial en Guatemala titulado “**Método Pólya en la resolución de problemas matemáticos**” de Escalante (2015), se utilizó la metodología cuantitativa de diseño cuasiexperimental, con una distribución probabilística de manera que se trabajó con 25 estudiantes que están en un rango de edad de 9 y 11 años, a los cuales se les aplicó tres evaluaciones (evaluación diagnóstica, intermedia y final) con el objeto de observar el progreso de los estudiantes al aplicar el método de Pólya a través de estrategias de resolución de problemas. Se concluyó estadísticamente que el método de Pólya en la resolución de problemas fue significativo ya que en poco tiempo los resultados de progreso fueron positivos.

En la publicación de Pérez y Ramírez (2011), titulado “**Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos**” se hace un estudio descriptivo documental de los fundamentos teóricos de la resolución de problemas

matemáticos y estrategias para su enseñanza. Esta investigación aporta a la formación y actualización de los docentes de primaria en la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos.

Los autores señalan que en primaria la enseñanza de la resolución de problemas es rutinaria porque se asignan ejercicios para resolver en forma mecánica y no problemas en los que tengan que utilizar una estrategia, y en los casos donde los docentes si utilizan situaciones problemas, no lo contextualizan al entorno del estudiante sino que es fiel copia de un libro, por tanto se recomienda que la resolución de problemas lleve al estudiante a suponer e inferir, discutir conjeturas, argumentar y hasta equivocarse.

En este trabajo se presentan teóricamente diversos métodos de resolución de problemas y estrategias propuestas por varios investigadores que se propone el docente debe conocer para mejorar en la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos.

Agudelo, Bedoya y Restrepo (2008), en su trabajo “**Método Heurístico en la resolución de problemas matemáticos**” se propusieron aplicar estrategias constructivistas para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en sexto grado de la educación básica, basado en el método heurístico de George Polya para resolver problemas de números naturales. Con pretest y posttest a un solo grupo, hicieron las respectivas comparaciones de resultados y de esta manera determinaron que aprender estrategias para la resolución de problemas matemáticos ayuda a tener un mejor análisis de los mismos y no hacer ejercicios mecánicos. En los resultados obtenidos en el pretest se evidencia que los estudiantes no tiene claridad de los pasos que van a

realizar para resolver el problema, así como no verifican si están haciendo las cosas bien o no. Y con el post-test los estudiantes no se preocuparon tanto por obtener un resultado sino por verificar el proceso. Concluyeron que uno de los factores más relevantes en la capacidad resolutoria de problemas es la comprensión lectora.

Bueno (2012) en su monografía **“propuesta metodológica para mejorar la interpretación, análisis y solución de ejercicios y problemas matemáticos en los estudiantes de quinto grado de la institución educativa Alejandro Vélez Barrientos”** describe los pasos de Pólya para la solución de problemas matemáticos, lleva a cabo un diagnóstico en una institución educativa de Envigado con estudiantes que tienen edades de 10 y 11 años y son del grado quinto, los del A cuentan con 47 y el B con 48 estudiantes, entre hombres y mujeres. Con los resultados obtenidos propone las estrategias para trabajar con 5°A por medio de guías de trabajo que contengan lecturas para comprensión y solución de problemas de mcm, MCD, fraccionarios y operaciones básicas, para mejorar la capacidad de análisis y comprensión de estos estudiantes y fueron comparados con el grupo 5°B a quienes no se aplicaron las guías. La conclusión es que el método de Pólya para la solución de problemas es pertinente y eficaz y contribuye en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Antecedentes relacionados con números fraccionarios.

En el trabajo de grado de magister presentado por Raul Octavio Morales Diaz, (2014) titulado **“Dificultades y errores en la solución de problemas con números racionales”**, se pretende

reconocer los errores y dificultades que presentan los estudiantes de educación básica al enfrentarse a la resolución de problemas con números racionales.

Se realizó un estudio cualitativo con alcance interpretativo, donde por medio de cuatro talleres (en diferentes momentos) de resolución de problemas con números racionales se evidenciaron los errores y después se clasificaron, para identificar las posibles dificultades asociadas a ellos, así se hizo la triangulación entre los datos que emergieron del análisis, los autores y las posturas como investigadores.

Todos los talleres se estructuraron con cinco situaciones problemas. El primero con duración de tres horas, se aplicó a 50 estudiantes; el segundo con duración de tres horas, se aplicó a 35 estudiantes que mostraron el interés por continuar colaborando con la investigación; mientras que para el tercer taller se seleccionaron 10 estudiantes que mostraron gran compromiso con la investigación y asistieron normalmente a clase, empleando tres horas y finalmente el último taller realizado por los 10 estudiantes seleccionados emplearon tres horas y media, haciendo mucho énfasis en la justificación de cada una de las respuestas.

En la investigación se encontró que algunos errores puede deberse a dificultades del lenguaje matemático, algunos no tiene un manejo espacial relacionado con formas geométricas para hacer particiones, dificultad en el manejo de algoritmos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos. Se puede concluir que: la comprensión del problema se puede convertir en una de las dificultades más esenciales a la hora de solucionar

problemas con números racionales, falencia en la comprender la noción parte-todo ya que los estudiantes no realizan particiones equitativas y más si son particiones impares.

En la investigación “**Reconocimiento de algunas dificultades en la práctica docente sobre la enseñanza de fraccionarios**” de Marta E. Valdemoros y Elena Fabiola Ruiz (2008), se realizó un estudio de caso, a un profesor específico que continuó sus estudios de maestría, para reconocer las dificultades de enseñanza en relación a los números fraccionarios. El estudio fue realizado en dos fases, el primero empleó como instrumento la observación y la segunda realizando dos entrevistas. Dichos instrumentos fueron triangulados para dar validez al estudio de caso.

Se concluyó que el docente con 14 años de desempeño enseña las fracciones por medio de algoritmos, con un solo libro de guía y se basa en la memorización, pobre dominio semántico y conceptual de los números fraccionarios, falta de interpretación del problema por parte de los estudiantes, que evidencian faltas de interpretación del problema ya sea en la lectura o comprensión.

Los autores Parra y Flores (2008), en su investigación “**Aprendizaje cooperativo en la solución de problemas con fracciones**”, presentan el análisis del proceso de solución de problemas con fracciones, así como el análisis de la interacción efectuada en una interacción de aprendizaje cooperativo principalmente por dos alumnos de secundaria con bajo aprovechamiento. Como resultado se observó problemáticas de los estudiantes con respecto al

concepto se fracción, así como la interpretación deficiente del problema, lo cual los indujo a soluciones inadecuadas.

En el trabajo **“Construyendo el concepto de fracción y sus diferentes significados, con los docentes de primaria de la Institución Educativa San Andrés de Girardota”** de Claudia Hincapie (2011), se diseñaron y aplicaron unas guías de trabajo a partir de situaciones problema, se realizaron análisis para verificar la comprensión de los docentes y finalmente presentar una propuesta de mejoramiento de los procesos matemáticos, con el fin de fortalecer las prácticas de enseñanza de números fraccionarios de los docentes de primaria de la Institución Educativa San Andrés. La investigación se realizó en tres etapas que fueron: diagnóstica, implementación y análisis, con la participaron 23 docentes de Educación Básica Primaria, donde 17 eran de preescolar a quinto grado y 6 de escuela nueva.

En el trabajo se concluye que las situaciones problema generaron mayor participación de los docentes, todo el tiempo mostraron un desempeño satisfactorio, mostrando interés y motivación por seguir aprendiendo o desaprendiendo. Por lo tanto se recomiendan las situaciones problema como estrategia didáctica para la enseñanza de las matemáticas, ya que permite que el trabajo sea más participativo y autónomo que conlleva a un aprendizaje significativo.

ÁREA PROBLEMÁTICA Y PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Una de las líneas a nivel internacional del estudio de las matemáticas tiene que ver con la implicación en la resolución de problemas de contexto real, ya que los estudiantes no ven la aplicabilidad de algunos temas en su vida cotidiana, generando así una barrera en la adquisición del conocimiento (Ospina, Agudelo, Osorio, 2014). Eso mismo sucede con el sistema educativo en Colombia y es por esta razón, tanto esfuerzo del Ministerio de Educación Nacional (MEN), para mejorar la enseñanza de las matemáticas en el país.

Por lo anterior, el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) propone los estándares básicos de competencias para que todos los estudiantes del país sin importar su condición, tengan un mínimo de conocimiento al finalizar cada año escolar. Es así como teniendo en cuenta el tema de los números fraccionarios propuesto para este trabajo, los estudiantes de grado sexto deberán conocer y utilizar los números fraccionarios, así mismo la solución de los problemas planteados con este tema, como lo dice en el pensamiento numérico y sistemas numéricos: “Utilizo los números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas con contextos de medida” y “Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre los números racionales y de operaciones entre ellos en diferentes contextos”.

El Ministerio de Educación Nacional también publica los lineamientos curriculares en matemáticas como directrices generales del currículo. Explica que ser matemáticamente competente requiere formular, plantear, transformar y **resolver problemas** a partir de situaciones

de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas. Lo que requiere razonamiento, en tanto exige formular argumentos que justifiquen los análisis y procedimientos realizados y la validez de las soluciones planteadas. Es por ello que en los lineamientos curriculares de matemáticas se plantearon los cinco procesos generales de la actividad matemática que son: formular y **resolver problemas**; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar; y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos.

En el año 2015, el MEN publica los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) en matemáticas, que fueron modificados en la segunda versión para el año 2017 y se plantea que el estudiante al finalizar grado sexto: “Interpreta los números y racionales (en sus representaciones de fracción y de decimal) con sus operaciones, en diferentes contextos, al resolver problemas de variación, repartos, particiones, estimaciones, etc. Reconoce y establece relaciones (de orden y equivalencia y las utiliza para argumentar procedimientos” y “Utiliza las propiedades de los números enteros y racionales y las propiedades de sus operaciones para proponer estrategias y procedimientos de cálculo en la solución de problemas”.

Pero con todas las mejoras propuestas por el MEN con el ánimo de obtener resultados más altos en las pruebas saber a nivel nacional y PISA a nivel internacional, aún se observa que los estudiantes no cuentan con estrategias para resolver problemas planteados en los diferentes contextos. Aunque ellos logren resolver en el aula, ejercicios propuestos por sus profesores, sólo hacen copias de algoritmos sin realizar análisis de lo planteado para determinar la forma cómo van a resolver la situación, desarrollarlo y luego hacer una prueba para verificar los resultados, puesto que los profesores no hacen esa orientación en sus clases sino que se limitan a explicar

ejemplos y proponer ejercicios que tengan la misma estructura, y menos de hacer a los estudiantes conscientes del aprendizaje que están adquiriendo.

El Modelo de Polya propone los pasos que se deben seguir para resolver adecuadamente problemas planteados, donde los estudiantes comprendan, planeen, solucionen y revisen sus procesos en la resolución de problemas matemáticos. Con este trabajo se pretende conocer los cambios que muestran los estudiantes de grado sexto cuando solucionan problemas matemáticos, exactamente en el tema de los números fraccionarios, después de conocer el Modelo de Polya, teniendo también en cuenta las estrategias metacognitivas que ayudan al estudiante a tomar conciencia de su proceso de aprendizaje, que lo lleva a tener un sentido de autorregulación (planificación, control y evaluación).

¿Qué cambios se generan en los estudiantes de grado sexto, al solucionar problemas de números fraccionarios después de aplicar estrategias de resolución de problemas y metacognitivas?

JUSTIFICACIÓN

En Colombia, el MEN, cumpliendo con los fines de la educación, ha hecho reestructuración en los procesos de enseñanza de las matemáticas debido a los diferentes estudios realizados con el paso del tiempo y los cambios en la sociedad que ameritan una nueva visión. Una propuesta se planteó a través de los estándares para nivelar a todos los estudiantes del país con un mínimo de conocimientos en cada área básica y los lineamientos curriculares de matemáticas donde se contemplaron los cinco procesos entre ellos está el de resolver problemas, para que los estudiantes tengan la capacidad de solucionar cualquier situación propuesta poniendo en práctica los conocimientos aprendidos anteriormente.

Es decir que siempre se encuentra la preocupación de formar estudiantes competentes en matemáticas para un mejor desenvolvimiento en la sociedad actual, por esta razón propone rutas para que los docentes tengan material de temáticas que pueden ser abordados de acuerdo a cada grado, con el fin de obtener mejores resultados en las pruebas saber que se aplican en el país y de igual manera en las pruebas internacionales PISA. Pero en la actualidad, aún se encuentran docentes trabajando en las clases de matemáticas con ejemplos copiados textualmente de los libros, sin utilizar con sus estudiantes estrategias para que ellos puedan resolver cualquier problema relacionado con el tema, sin necesidad de hacer memorístico el algoritmo.

En la Institución Educativa Colegio Santos Apóstoles, en los últimos años, se han obtenido excelentes resultados en las pruebas saber once, debido a la dedicación de los docentes, por preparar de manera apropiada a los jóvenes para resolver este tipo de pruebas. Esto quiere decir

que los estudiantes de grado undécimo de dicho colegio son capaces de resolver problemas planteados, porque sus profesores de último nivel de bachillerato, les han aportado estrategias de resolución de problemas. Pero no sucede lo mismo con estudiantes de grado sexto que inician el bachillerato, porque no tienen presentes estrategias de resolución de problemas y metacognición (ver marco teórico) que les permitan obtener resultados satisfactorios.

Los estudiantes de grado sexto deben desarrollar una temática propuesta por el MEN durante el año escolar, desarrollando adecuadamente los problemas propuestos en dichos temas. Para el segundo periodo calendario el tema propuesto es el de los números racionales iniciando con fraccionarios, donde deberán entender el concepto del número fraccionario, su representación, orden, solución de operaciones (suma, resta, multiplicación y división) y aplicaciones en situaciones problemas presentados.

Por otro lado grandes investigadores (George Polya, 1984; Alan Schoenfeld, 1992; Miguel de Guzman, 1993, entre otros) han aportado distintas estrategias para la resolución de problemas, considerando que de esta manera se va ganando confianza en el uso de las matemáticas y así se adquieren las competencias necesarias para solución problemas tanto escolares como del contexto.

Con este trabajo se pretende describir los cambios que se presentan en los estudiantes de grado sexto después que conocen el método de Polya en la resolución de problemas de números fraccionarios, con respecto a la resolución de problemas cuando no conocen dicho método. Es decir, que se realizará un estudio de casos, con la selección de unos estudiantes a quienes se les

aplicará la unidad didáctica que está conformada por tres partes, la primera para indagar los conocimientos previos que tienen los estudiantes al solucionar problemas con números fraccionarios, la segunda para trabajar en diferentes sesiones el Modelo de Polya por medio de estrategias metacognitivas y por último se conocerán los resultados de los estudiantes cuando resuelven problemas después de conocer estrategias de resolución de problemas, para de esta manera presentar los cambios que se presentan en los estudiantes después de todo el proceso.

REFERENTE TEÓRICO

Metacognición.

Según Allueva (2002, p. 60), se produce aprendizaje cuando hay un cambio en la persona, que puede ser intencionado o fortuito, agradable o desagradable. Mientras que para los conductistas el aprendizaje es un cambio de conducta, para los cognitivistas es un proceso interno que no se puede observar y compone la capacidad que tiene una persona para responder en determinada situación.

La cognición es el proceso de conocer. La metacognición va más allá, se refiere a autorregular los procesos de aprendizaje. Afirmar Flavell (1976) que la metacognición se refiere “al conocimiento que uno tiene de los propios procesos y productos cognitivos o cualquier otro asunto relacionado con ellos, es decir, las propiedades de la información o los datos relevantes para el aprendizaje” y también “a la supervisión activa y consecuente regulación y organización de estos procesos, en relación con los objetos o datos cognitivos sobre los que actúan, normalmente en aras de alguna meta u objetivo concreto”.

La metacognición aún no es considerada un área consolidada, aún se realizan procesos de investigación en la didáctica de las ciencias y en la misma actuación del profesor (Campanario, Cuerva, Moya y Otero, 1997). Pero se está considerando la metacognición como relevante para el estudio de las estrategias de aprendizaje (Allueva, 2002, p. 67).

Para Flavell (citado en Allueva, 2002, p. 78) “el desarrollo metacognitivo consiste, por una parte, en adquirir conocimiento acerca de las personas, las tareas y estrategias que afectan al funcionamiento cognitivo, y por otra parte la comprensión de experiencias metacognitivas”, para ello es necesario la utilización de estrategias que permitan regular el proceso de aprendizaje para desarrollar los procesos cognitivos (Otake, 2006).

Las estrategias metacognitivas son herramientas que ayudan al estudiante a tomar conciencia de cómo es su proceso de aprendizaje y lo lleva a autorregular dicho aprendizaje. Son empleadas para planificar, supervisar y evaluar la aplicación de estrategias cognitivas (las estrategias cognitivas favorecen el almacenamiento de información, recuperación y utilización en la solución de problemas) (Osses y Jaramillo, 2008). Serrano (s.f) propone como estrategias de aprendizaje metacognitivos organizadores previos, atención dirigida, atención selectiva, autoadministración y autoevaluación.

Gunstone y Mitchell (1998), abordan la metacognición desde los tres aspectos que son: *conocimiento, conciencia y control* sobre sus propios procesos de pensamiento.

El *conocimiento metacognitivo* es el conocimiento sobre los propios procesos cognitivos y dentro de ellos se tienen conocimiento declarativo (saber qué), procedimental (saber cómo) y condicional (Saber cuándo y por qué) (Tamayo, s.f). Según Hartman (1998) en (Tamayo, s.f) la *conciencia metacognitiva* es el conocimiento de los propósitos de las actividades que se desarrollan y la conciencia que se tiene sobre el progreso personal, esto quiere decir que permite el control o autorregulación del pensamiento, de los procesos y productos del aprendizaje. Según

Schraw (1998) en (Tamayo, s.f) el *control metacognitivo*, también llamado regulación metacognitiva se refiere a las actividades con las que el estudiante controla su aprendizaje y se relaciona con el antes, durante y después de realizar las tareas de aprendizaje.

Silva (2006) define la regulación metacognitiva: “a las sensaciones de conocimiento que experimenta conscientemente el sujeto que está llevando a cabo su proceso cognitivo: sobre la complejidad del problema que aborda; distinguir una ruta y sus diferencias con otras, saber qué tan cerca y tan lejos se está de tener éxito”. Para ello se encuentran como actividades metacognitivas reguladoras en la solución de problemas:

- Planificar: consiste en antes de ejecutar el plan, determinar la estrategia más adecuada para la solución de un problema determinado.
 - Controlar: es la supervisión durante la ejecución de la solución del problema.
 - Evaluación: contrastar la respuesta obtenida con la situación problema planteada.
- También es la apreciación de la eficacia de las estrategias utilizadas en la solución del problema.

Resolución de problemas.

Hayes (citado en Poggioli, 1999) define el problema como “Cuando existe un vacío entre la situación en la que se encuentra usted ahora y aquella que quiere alcanzar, y no conoce cómo encontrar una forma de salvar tal vacío, entonces usted tiene un problema”.

Pero es importante saber que existe una diferencia notoria entre “ejercicio” y “problema”, puesto que el primero es una serie de pasos rutinarios que se lleva a cabo para llegar a una

respuesta, mientras que en el segundo se debe parar, reflexionar y utilizar un método que no siempre es rutinario para llegar a la solución. Cabe resaltar que en ocasiones un ejercicio se convierte en un problema dependiendo del nivel mental en el que se esté trabajando y que los ejercicios son importantes porque ayudan a aprender conceptos y desarrollar algoritmos que pueden servir a la solución de problemas.

Según Campanario (2000), la resolución de problemas es primordial para los procesos de investigación y en el estudio de las ciencias, pero no se debe confundir el planteamiento de problemas contextuales con solución de ejercicios mecánicos sin saber en algunas ocasiones el tema. Es así como la resolución de problemas puede ser un proceso investigativo, sin necesidad de seguir pasos sino de manejar una componentes generales como estudio cualitativo de la situación, la formulación de hipótesis, elaboración y discusión de posibles estrategias de solución, búsqueda de soluciones y análisis de resultados de acuerdo con las hipótesis planteadas. Como ventaja del uso de resolución de problemas como investigación desde el punto de vista metacognitivo, se observa que los estudiantes se apropian de la actuación cognitiva en las áreas de ciencias, se promueve la solución de problemas que no sean mecánicos y se incentiva a la reflexión sobre sus propios procesos de pensamiento. Shuell (1990), afirma el valor de proponer diferentes tipos de problemas, ya que el aprendizaje es significativo cuando se estudian diferentes ámbitos.

Pozo (1994) hace una descripción que diferencia según la experticia, a los expertos de los novatos en resolución de problemas, porque tienen mejor organización de conocimientos, menor número de errores y menor tiempo empleado en encontrar la solución. Por otro lado como se

muestra en la Tabla 1, Tamayo (2014) describe los niveles para evaluar la calidad de solución de problemas.

Tabla 1
Niveles de solución de problemas

Solución de Problemas	
Nivel 1	Redescripción de la experiencia, enuncia el problema y describe el experimento según sus observaciones o utiliza datos de las instrucciones para justificar sus respuestas.
Nivel 2	Redescripción de la experiencia de manera libre, ha realizado la experiencia anteriormente, utiliza opiniones, describe lo que sintió durante las experiencias o utiliza analogías.
Nivel 3	Identificación de una o más variables, en ese nivel se reconocen las variables sin realizar algún tipo de relación entre ellas.
Nivel 4	Resolución de problemas de manera inadecuada identificando y relacionando variables y justificando o no dichas relaciones.
Nivel 5	Resolución de problema de manera adecuada identificando, relacionando variables y justificando o no dichas relaciones

Fuente de Tamayo (2014). TED.

La resolución de problemas es un proceso cognitivo que pretende llegar a una solución, por medio de una secuencia de operaciones que transforman datos en metas. Se pueden plantear dos estrategias básicas, ya sea siguiendo una secuencia fija de pasos partiendo desde las variables iniciales hasta llegar a un resultado final, tratado como algoritmo, donde se requiere conocer todos los datos y las reglas u operaciones para conducir a un resultado seguro, y la otra de manera Heurística, donde no existen todas las variables o reglas fijas (Arredondo, 1999).

Estas operaciones han generado una variedad de estrategias, métodos, sugerencias, esquemas, fases o secuencias que organizan y resumen el proceso de resolución y se les asigna el nombre de Modelos de Resolución de Problemas, que diferentes autores han estudiado con el paso del tiempo (Dewey, 1888; Wallas, 1926; Polya, 1945; Shoenfeld, 1985; Guzman, 1991) y algunos han perfeccionado la propuesta de otros.

Polya (1965) propone uno de los métodos más utilizados aún en la actualidad para resolver problemas matemáticos, que se basa en cuatro pasos: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución o btenida; llegando así a un resultado acertado.

1. Comprender el problema.

- ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos?
- ¿Cuál es la condición? ¿Es la información suficiente para determinar la incógnita?
¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?

2. Concebir un plan.

- ¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿O ha visto el problema planteado de forma ligeramente diferente?
- ¿Conoce un problema relacionado con éste? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar.
- He aquí un problema relacionado al suyo y que se ha resuelto ya ¿Podría usted utilizarlo? ¿Podría utilizar su resultado? ¿Podría emplear su método? ¿Le haría a usted falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo?
- ¿Podría enunciar el problema de otra forma? ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiera a las definiciones.
- Si no puede resolver el problema propuesto trate de resolver algún problema similar ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? ¿Un problema más general? ¿Un problema más particular? ¿Un problema análogo? ¿Puede resolver una parte del problema? Considere sólo una parte de la condición; descarte la otra parte;

- ¿En qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿En qué forma puede variar?
- ¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita?
- ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén cercanos entre sí?
- ¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Ha considera usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?
3. Ejecutar el plan.
- Al ejecutar el plan de acción compruebe cada uno de los pasos.
 - ¿Puede ver usted claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?
4. Visión retrospectiva.
- ¿Puede usted verificar el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento?
 - ¿Puede obtener el resultado de forma diferente? ¿Puede emplear el resultado o el método en otro problema?

Estos cuatro pasos se detallan según Hernández (2013) así: en el primer paso de comprender el problema, se induce a conocer cuál es la incógnita, los datos que dan y las condiciones que se plantean. Aquí los estudiantes se les pueden hacer preguntas tales como ¿Entiende lo que se dice?, ¿Cómo se replantearía con otras palabras el problema?, ¿Cuáles son los datos?, ¿A dónde se quiere llegar? En el segundo paso se pretende relacionar los datos que presentan y la incógnita, y para ello se requiere recordar problemas semejantes, teoremas que pueden ser aplicados o plantear el problema de manera diferente, es decir el estudiante planea una estrategia de solución, ya sea ensayo y error, usar una variable, buscar un patrón, hacer una lista, resolver

un problema similar que sea más simple, hacer un dibujo, hacer un diagrama, usar las propiedades de los números, usar un modelo, usar simetría, usar razonamiento directo, usar razonamiento indirecto, devolverse desde la posible solución hasta el planteamiento del problema, resolver una ecuación, usar casos o buscar fórmulas. En el tercer paso de ejecución del plan, como su nombre lo indica es llevar a cabo lo planteado en el paso anterior, comprobando cada uno de los pasos de la solución. Y por último examinar la solución obtenida es hacer una visión retrospectiva, donde se verifique el resultado y el razonamiento empleado, examinando detalladamente los cálculos y razonamientos utilizados y que la solución corresponda al problema planteado, además verificar si es posible resolver el problema de forma diferente.

En el proceso de enseñanza aprendizaje, el rol del docente para Polya (1954), debe ser, el de ayudar a sus estudiantes en la solución de los problemas, pero sin excederse demasiado, porque si el estudiante se deja sólo en el trabajo puede no tener el progreso esperado por los docentes. El profesor puede, a través de estrategias heurísticas, mejorar en los estudiantes, la capacidad para resolver problemas e incentivarlos para que reflexionen sobre el proceso que realizan, esto permitirá que el estudiante sea consciente de la forma como resuelve los problemas, es decir que trabaje la metacognición.

En cuanto a los estudiantes, los que mejor resuelven problemas tiene seis características que son: mayor conocimiento previo sobre la materia del problema, más habilidad de razonamiento formal, más conocimiento conceptual, más capacidad de memoria a corto plazo, mayor aptitud para procesar la información del enunciado del problema y mejores estrategias de estudio. Solaz-Portolez y Sanjosé (2006).

La resolución de problemas es entonces en el proceso de enseñanza-aprendizaje muy importante, como lo afirman Pifarre, Manoly, Sanuy y Jorba (2001, p 297) ya que uno de los objetivos principales del área de matemáticas es que los estudiantes sean competentes en la resolución de problemas. Y Polya plantea de manera acertada unas preguntas en cada uno de los pasos propuestos para que al estudiante se le facilite y le muestre el camino correcto a la solución del problema.

Resolución de problemas en matemáticas

En 1980 el National Council of Teacher of Mathematics de los EEUU, recomendó la resolución de problemas como objetivo principal de la enseñanza matemática. Puesto que el estudiante que sabe resolver problemas matemáticos es capaz de analizar, razonar, comprender, mecanizar y concluir.

La matemática es considerada en general por un lado como el desarrollo de habilidades y destrezas para *resolver problemas* de la vida práctica, para usar ágilmente el lenguaje simbólico, los procedimientos y algoritmos, y por otra, en el desarrollo del pensamiento lógico-formal.

Según Flavell en (citado en Peñalva, 2010, p 145), en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, el propósito es lograr en el estudiante una actividad mental cognitivamente madura por medio de:

- Conocimiento de los objetivos que se quieren alcanzar con el conocimiento mental.

- Elección de estrategias.
- Autoobservación de la ejecución para determinar si fueron adecuadas las estrategias elegidas.
- Evaluación de los resultados.

Parra y Flores (2008), plantean la existencia de investigaciones (Flores, 1999; Schoelfeld, 1992) donde se observan deficiencias específicas de matemáticas en estudiantes con problemas de aprendizaje como conocimientos matemáticos erróneos, razonamientos inconsistentes, errores en la realización de operaciones, dificultad para comprender el texto de un problema, falta de estrategias metacognoscitivas para dirigir el proceso de solución, dificultad para identificar la fuente de errores.

Charles y Lester (1982), (citado en Rodríguez, 2005) clasifican los problemas de matemáticas en cuatro formas así:

- Problemas estándar: requiere hacer una transformación de afirmaciones verbales a modelo matemático.
- Problemas no estándar: donde se fomenta el uso de método flexible, es decir no hay una rutina o un proceso estándar.
- Problemas de la vida real: donde los estudiantes necesitan seleccionar y aplicar herramientas matemáticas a su discreción.
- Puzzle: donde la solución es al azar, suerte o con el uso de estrategias inusuales.

Mientras que Borasi (1986), (en Rodríguez, 2005) plantea la clasificación de problemas utilizando como elementos estructurales: el contexto del problema, la formulación del problema, el conjunto de soluciones que pueden considerarse aceptables y el método de aproximación que podría utilizarse para alcanzar la solución.

Rodríguez (2005) expone una clasificación de tareas matemáticas en los que se encuentran tareas problemáticas, de práctica y mixtas ver figura 1.

Figura 1

Tipos de tareas matemáticas. Tomada de Rodríguez (2005).

- 1) *Tareas problemáticas:*

 - 1.1) *De modelización:* tanto la modelización como la ejecución (si es necesaria) son no rutinarias, es decir, implican bloqueo, son no-algorítmicas.
 - 1.2) *De ejecución:* sólo implican ejecución y ésta es de carácter no-rutinario.
 - 1.2.1) *Contextualizadas:* se hace referencia en la tarea a la situación que modeliza.
 - 1.2.2) *Descontextualizadas:* la tarea no hace referencia a ningún contexto.

2) *Tareas de práctica:*

 - 2.1) *De modelización:* tanto la modelización como la ejecución (si es necesaria) son rutinarias.
 - 2.2) *De ejecución:* sólo implican ejecución y ésta es de carácter rutinario.
 - 2.2.1) *Contextualizadas:* se hace referencia en la tarea a la situación que modeliza.
 - 2.2.2) *Descontextualizadas:* no se hace referencia en la tarea a la situación que modeliza.

3) *Tareas mixtas* (implican tanto modelización como ejecución, teniendo uno de los procesos carácter rutinario y el otro no rutinario). En estos casos será imprescindible especificar:

 - 3.1) De modelización algorítmica y ejecución no-rutinaria.
 - 3.2) De modelización no-algorítmica y ejecución rutinaria

Lo anterior indica que hay que tener en cuenta el tipo de tarea que ha de proponerse a los estudiantes de acuerdo a lo que se pretenda con ello.

Matemáticas y números fraccionarios.

Los números fraccionarios, pero de la forma $1/n$ donde $n = 2,3,4,\dots$, según los hallazgos, fueron utilizados por primera vez por los egipcios, en el año 1650 a.C. Así a través del tiempo varios investigadores en matemáticas siguieron trabajando los números fraccionarios

Los números fraccionarios se empiezan a impartir desde básica primaria y continúan trabajándose en la básica secundaria y a pesar de todo el tiempo que se dedica a este tema aún se encuentran falencias en el desarrollo de ejercicios y solución de problemas, existiendo un rechazo y confusión por parte de los estudiantes al solucionar operaciones entre fracciones.

En algunos casos los estudiantes pueden conocer la solución de las operaciones con números fraccionarios, pero tienen dificultad para determinar la operación de fraccionarios que se encuentra dentro de un problema planteado como lo expresan Contreras y Gómez (2009).

Según León (2011), los niños con el tiempo van comprendiendo el concepto de fracción en la medida en que la van aplicando, aunque la cantidad de aplicaciones resulta confusa para los estudiantes. Como los estudiantes vienen trabajando con los números naturales, cuando aparece la noción de fracción se presenta la primera dificultad para que den el significado correcto. En la

suma y resta de fracciones una dificultad presentada es que los estudiantes suman o restan los numeradores y suman o restan los denominadores. En cuanto al orden, al comparar dos fracciones, cometen el error de pensar que la que tenga el mayor denominador es la que tiene mayor valor. Se les dificulta comprender que al multiplicar un entero por una fracción propia, el resultado disminuye y que por el contrario, la división de un número entero por una fracción propia aumenta, ya que están acostumbrados a que siempre que se multiplican los enteros el resultado aumenta y al dividir enteros el resultado disminuye. Comenten el error de hacer el proceso de suma cuando se plantea la multiplicación de fracciones. Y por último los estudiantes no tienen en cuenta la jerarquía de operaciones en la solución de ejercicios con diferentes operaciones entre fraccionarios.

OBJETIVOS

Objetivo general

Describir los cambios que se presentan en los estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa Colegio Santos Apóstoles al solucionar problemas relacionados con los números fraccionarios cuando aplican estrategias de resolución de problemas y metacognitivas.

Objetivos específicos

- Diagnosticar el nivel de resolución de problemas¹ en el que se encuentran los estudiantes de grado sexto, cuando solucionan problemas relacionados con números fraccionarios antes de la intervención en el aula.

- Determinar el nivel de resolución de problemas en el que se encuentran los estudiantes de grado sexto cuando solucionan problemas relacionados con números fraccionarios después de la intervención en el aula.

- Contrastar los resultados de los niveles iniciales y finales en los que se encuentran los estudiantes de grado sexto al resolver de problemas de números fraccionarios, para describir los cambios presentados.

¹ Según los niveles propuestos por Tamayo (2014).

METODOLOGÍA

Tipo de investigación

El proyecto de investigación es de tipo descriptivo ya que por medio de la observación y comparando con la teoría consultada se escriben los resultados obtenidos.

El enfoque es cualitativo, ya que básicamente el objetivo de la investigación es describir los cambios que se presentan en los estudiantes cuando aplican las estrategias de resolución de problemas. El análisis no es estadístico.

El diseño es un estudio de caso para que el análisis pueda ser más personalizado y profundo.

Población y unidad de trabajo

La población seleccionada para este estudio está conformada por los estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa Colegio Santos Apóstoles de la ciudad de Cúcuta- Norte de Santander, donde laboro actualmente como docente de aula encargada de la titulación del grupo 605, en la jornada de la tarde.

El establecimiento está ubicado en el Barrio Chapinero de la ciudadela Atalaya en la ciudad San José de Cúcuta, del Departamento Norte de Santander, de carácter oficial académico, atendiendo estudiantes de primaria repartidos en 4 sedes, y bachillerato en la sede principal que tiene dos bloques. En el bloque B se encuentran los estudiantes de sextos, con cuatro grupos en la jornada de la mañana y cuatro en la tarde que son 605, 606, 607 y 608. Todos de estrato bajo,

incluyendo desplazados y familias desintegradas. Los niños tienen entre los 10 y 15 años de edad, constituido por género masculino y femenino, la mayoría vienen de las escuelas promovidos de grado quinto, mientras algunos reinciden el grado porque el año pasado no alcanzaron las competencias propuestas.

La visión del colegio es: “La Institución Educativa Santos Apóstoles, será reconocida por su calidad en la formación de niños, niñas y adolescentes en valores, crítica, autónoma, analítica y competente, con sensibilidad social y respeto por el medio ambiente mediante la aplicación del mejoramiento continuo” y por otro lado la institución se encuentra clasificada en A+ en pruebas del saber once, siendo la segunda entre colegio oficiales del Departamento Norte de Santander. Por esta razón la importancia trabajar con los estudiantes desde el inicio del bachillerato, las estrategias metacognitivas y los pasos para la resolución de problemas.

De la población total, se seleccionaron al azar para el estudio de casos, a 6 estudiantes del grado 605, de los cuales 4 son mujeres y 2 son hombres, con edades que oscilan entre los 11 y 13 años. Se escogieron de esta edad teniendo en cuenta a Mateos (2001, p.61) quien señala que el “conocimiento metacognitivo empieza a manifestarse más claramente durante los años de educación primaria y es mucho más completo alrededor de los 11 o 12 años”

Método

Se inicia con una prueba para recoger la información cualitativa del nivel en el que se encuentran los estudiantes en la solución de problemas (ver Figura 1) antes de conocer el método

de Polya. A su vez se aplica una encuesta para conocer la percepción acerca de la solución de problemas matemáticos en general y de los conocimientos de los números fraccionarios que tienen los estudiantes.

Una vez realizada la prueba inicial, se hacen las intervenciones en el aula. Compuesta por 5 encuentros así: 1. Repaso de los conceptos y operaciones de números fraccionarios y explicación de los cuatro pasos del Método de Polya (1961) en un problema de números fraccionarios. 2. Videos de aplicación del Método de Polya en la solución de problemas y explicación por medio de un problema de la forma adecuada para resolver los problemas con el método de Polya. 3. Propuesta de problemas de números fraccionarios para resolver con el método de Polya donde se enfatice conocer los datos y la incógnita, de tal manera que sea más fácil el planteamiento de estrategias que lleven a la solución. Se muestra a los estudiantes la importancia de comprender el problema antes de iniciar el proceso de solución, identificando lo que tiene y lo que le piden. 4. Explicación de algunas estrategias que pueden utilizarse en la solución de problemas, entre ellas el ensayo y error, hacer un dibujo, resolver un problema más simple, usar un razonamiento directo, usar un razonamiento indirecto, entre otros. Y solucionar diferentes problemas de números fraccionarios donde se utilicen variadas estrategias. 5. Solución de problemas propuestos con números fraccionarios, dando importancia a la verificación, donde se compare el resultado obtenido con el contexto del problema y sea el momento para reflexionar si se podía resolver de otra manera y si la estrategia utilizada fue la más apropiada.

Finalmente, se aplica la prueba final, que suministra información cualitativa del nivel en el que se encuentran en cuanto a la resolución de problemas los estudiantes, después de aplicadas las intervenciones de aula.

Con la información de las pruebas inicial y final se hace la respectiva comparación para las conclusiones y recomendaciones.

Categorías de análisis

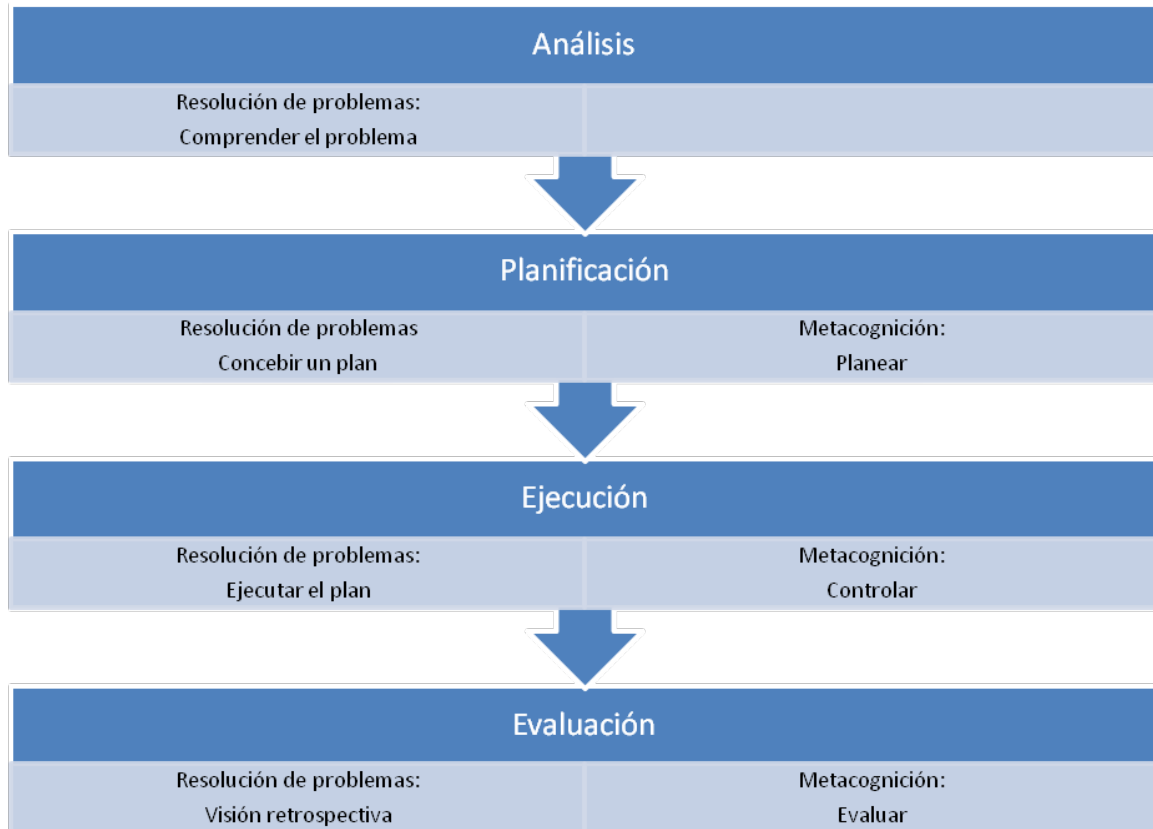
De acuerdo a la pregunta planteada las categorías generales para este trabajo serían Resolución de Problemas, Metacognición y aprendizaje de números fraccionarios. El hecho de hacer un paralelismo entre Resolución de problemas y Metacognición como se presenta en la Tabla 2, da como resultado cuatro categorías que se estudiarán en este trabajo: identificación, planificación, ejecución y evaluación. Los números fraccionarios serán el tema excusa para razonar entre las categorías propuestas, por lo tanto no se tendrá en cuenta específicamente para la investigación.

En la figura 2 se pretende mostrar cómo es la relación entre Resolución de problemas y Metacognición, teniendo en cuenta para el primero, los pasos del Método de Polya: Comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y visión retrospectiva y de la metacognición: planear, controlar y evaluar. Como lo indica la figura 1 es una secuencia de pasos que se realizan para llegar a la solución del problema de manera acertada, haciendo la regulación, es decir, reflexionando en el desarrollo del problema.

Tabla 2
Resolución de problemas y metacognición.

Categorías	Resolución de problemas	Metacognición	Índices
Identificación	1. Comprender el problema		- Identificar los datos - Identificar la Incógnita
Planificación	2. Concebir un plan	1. Planificar	- Determinar una estrategia.
Ejecución	3. Ejecutar el plan	2. Controlar	- Escribir los pasos. - Implementar la idea de solución. - Verificar cada paso.
Evaluación	4. Visión retrospectiva	3. Evaluar	- Reconsiderar la solución. - Implementar otras alternativas de solución. - Comparar el contexto con el resultado.
Comparación de la resolución del problema con la metacognición (elaboración propia)			

Figura 2
Relación Resolución de Problemas-Metacognición



En la identificación el estudiante debe comprender el problema, leyendo, identificando los datos y la incógnita. En la planificación el estudiante debe escoger la estrategia más apropiada para resolver el problema, analizando los datos y la incógnita identificada, recordando si ha resuelto con anterioridad problemas similares que pueda tomar como base para la solución. En la ejecución el estudiante resuelve el problema y reflexiona si está haciendo las cosas bien y si ha llevado a cabo lo planeado. Y por último la evaluación es donde el estudiante revisa todo el proceso llevado a cabo durante la solución del problema, verificando los resultados obtenidos y reflexionando sobre el problema resuelto que sea coherente con el contexto del planteamiento.

Para lo anterior se plantean preguntas en cada una de las categorías, cuyos resultados darán cuenta de las estrategias de resolución de problemas y metacognición, antes y después de la intervención por parte del docente.

Técnicas e instrumento de recolección de información

- Prueba inicial (ver anexo A). Compuesta por tres problemas planteados para que los estudiantes apliquen operaciones básicas de números fraccionarios con una serie de preguntas cerradas y abiertas. Este instrumento contribuye a dar respuesta al primer objetivo específico.

En la Tabla 3, se presentan cada uno de los problemas de números fraccionarios donde se relacionan las preguntas planteadas con las categorías: identificación, planificación, ejecución y evaluación que se presentaron en la Figura 2.

Tabla 3
Preguntas de la prueba inicial de acuerdo a la categoría

PROBLEMA 1. <i>Luis y Andrea encontraron chocolates en la casa de la abuela. Luis se comió 6/10 de los chocolates y Andrea se comió 3/10 ¿Qué fracción se comieron entre Luis y Andrea?</i>	
Categoría	Preguntas
Identificación	- ¿Ha entendió el problema?
	- Explique con sus propias palabras el problema planteado.
	- ¿Cree que puede resolver el problema?
	- ¿A qué tengo que responder?
Planificación	- ¿Tengo todos los datos que se necesitan para resolver el problema?
	- ¿El problema planteado se parece a otro problema que haya resuelto antes?
	- Explique la forma como se podría resolver el problema.

	- Qué temas debe saber para resolver el problema. - ¿Ha resuelto problemas de operaciones con fraccionarios?
Ejecución	- Resuelva el problema: - Explique cómo se sintió resolviendo el problema. - ¿Qué dificultades encontró para resolver el problema?
Evaluación	- ¿Cómo comprobaría que el resultado obtenido es correcto? - Haga la prueba. - ¿Cómo le pareció el problema planteado? - ¿Cómo se sintió contestando todas las preguntas?

PROBLEMA 2. En un restaurante se ofrecen 12 platos diferentes. La gráfica muestra la cantidad de platos internacionales y nacionales ¿Cuántos platos son internacionales?



Categoría	Preguntas
Identificación	- ¿Ha entendió el problema? - Plantee el problema de otra manera. - Ha dibujado gráficas antes para representar fraccionarios. - En ocasiones anteriores ¿Ha resuelto problemas parecidos al planteado? - ¿Cuáles son los datos o valores conocidos? - ¿Qué se está preguntando en el problema? - ¿La gráfica es de ayuda? ¿Por qué? - ¿Entiende la gráfica que se presenta? - Escriba la fracción que representa lo sombreado ¿Lo sombreado corresponde a internacional o nacional? - ¿Planeó algunos pasos para resolver el problema?
Planificación	- Escriba los pasos para resolver el problema. - ¿Son necesarios todos los pasos para resolver el problema? - ¿Por qué?
Ejecución	- Resuelva el problema. - ¿Cómo se sintió al solucionar el problema?
Evaluación	- ¿Está seguro de la respuesta del problema? - ¿Cómo comprobaría que la respuesta es correcta? - ¿Cómo le parece el problema planteado?

PROBLEMA 3. En un día de trabajo, una pastelería ha producido 100 pasteles, de los cuales $\frac{1}{4}$ tienen crema pastelera, $\frac{2}{5}$ de la producción de pasteles no tiene crema y el resto

<i>son para diabéticos ¿Cuántos pasteles para diabéticos produjo la pastelería?</i>	
Categoría	Preguntas
Identificación	- ¿Cómo se siente después de leer el problema? - ¿Cree que puede resolver el problema?
Planificación	- ¿Tiene un plan para resolverlo? - ¿En qué consiste?
Ejecución	- Resuelva el problema - ¿Cómo se sintió resolviendo el problema?
Evaluación	- ¿Identificó los datos que necesitaba para solución el problema? ¿Cuáles fueron los datos? - ¿Cuál fue el plan que hizo para encontrar la solución? - ¿Resolvió completamente el problema propuesto? ¿Qué pudo descubrir? - ¿Qué le faltó saber? - ¿De qué manera comprobó el resultado? - ¿Le pareció sencillo solucionar el problema? Explique. - ¿Cómo se sintió contestando todas las preguntas propuestas?

Tabla con los tres problemas de la evaluación inicial que relacionan las preguntas con cada paso de resolución de problemas y la metacognición (elaboración propia)

- Unidad Didáctica (ver anexo B). La intervención por parte del docente, para cada encuentro con los estudiantes se realizó mediante la explicación y socialización de los cuatro pasos del Método Polya (1945), basada en estrategias metacognitivas. Además del tema de operaciones con números fraccionarios aplicados a situaciones problemas.

Los problemas seleccionados para el trabajo fueron contextualizados para un mejor desenvolvimiento de los estudiantes en la solución de problemas pero sobre todo en la verificación de la respuesta según el Método de Polya. Teniendo en cuenta los estándares básicos de competencias y los derechos básicos de aprendizaje del Ministerio de Educación Nacional.

- Prueba final (ver anexo C). Se plantean cinco problemas para aplicar operaciones con números fraccionarios, después de la intervención por parte de la docente de matemáticas, para conocer el nivel en el que se encuentran los estudiantes de grado sexto cuando solucionan problemas. Este instrumento contribuye a dar respuesta al segundo objetivo específico planteado, puesto que da información para hacer comparación entre la información que resulta de la prueba inicial y la prueba final.

En la tabla 4 se presentan las categorías con las respectivas preguntas para cada uno de los problemas de la Evaluación Final, teniendo en cuenta las estrategias metacognitivas y de resolución de problemas según se presenta en la Figura 2.

Tabla 4
Preguntas de la evaluación final de acuerdo a la categoría

PROBLEMA 1. Hoy un árbol midió $\frac{453}{3}$ cm, hace un mes había medido $\frac{267}{4}$ cm ¿Cuánto ha crecido el árbol?	
Categoría	Preguntas
Identificación	- ¿Ha entendió el problema? - Escriba los datos que se presenta en el problema. - ¿Cuál es la incógnita? - ¿Se parece a un problema que haya resuelto antes?
Planificación	- Escriba la estrategia (gráfica, operaciones, razonamiento, ecuaciones,...) que piensa utilizar para resolver el problema. - Escriba los pasos para resolver el problema de forma correcta.
Ejecución	- Resuelva el problema. - Lo que hizo para resolver el problema, fue lo mismo que pensó desde el principio o durante el proceso se le ocurrió otra manera. - Escriba la respuesta del problema.
Evaluación	- ¿Cómo verificaría que el resultado obtenido es correcto?

- ¿Es correcta la respuesta obtenida de acuerdo al contexto del problema? Explique.
- Como se sintió resolviendo el problema.
- ¿Se puede resolver el problema de otra manera? Explique.
- Escriba las dificultades presentadas para resolver el problema.

PROBLEMA 2. Juliana tiene \$200.000 y gastó $\frac{3}{5}$ en comprar zapatos y $\frac{2}{10}$ en comprar una camiseta ¿Cuánto dinero le quedó a Juliana?

Categoría	Preguntas
Identificación	- ¿Ha entendió el problema? - Escriba los datos que se presenta en el problema. - ¿Cuál es la incógnita? - ¿Se parece a algún problema que haya resuelto antes?
Planeación	- Escriba las estrategias (gráfica, operaciones, razonamiento, ecuaciones,...) que piensa utilizar para resolver el problema. - Escriba los pasos para resolver el problema.
Ejecución	- Resuelva el problema. - Lo que hizo para resolver el problema, fue lo mismo que pensó desde el principio o durante el proceso se le ocurrió otra manera.
Evaluación	- Escriba la respuesta del problema. - ¿Cómo verificaría que el resultado obtenido es correcto? - ¿Es correcta la respuesta obtenida de acuerdo al contexto del problema? Explique. - Como se sintió resolviendo el problema. - ¿Se puede resolver el problema de otra manera? Explique. - Escriba las dificultades presentadas para resolver el problema.

PROBLEMA 3. Alejandra compró $\frac{1}{2}$ m de tela azul a \$3500 el metro y $\frac{15}{4}$ m de telas de

distintos colores a \$4000 el metro. Pagó con dos billetes de \$10.000 ¿Cuánto costaron los dos pedazos de tela?

Categoría	Preguntas
Identificación	- ¿Ha entendió el problema? - Escriba los datos que se presenta en el problema. - ¿Cuál es la incógnita? - ¿Se parece a un problema que haya resuelto antes?
Planeación	- Escriba la estrategia (gráfica, operaciones, razonamiento, ecuaciones,...) que piensa utilizar para resolver el problema. - Escriba los pasos para resolver el problema de forma correcta.

Ejecución	- Resuelva el problema. - Lo que hizo para resolver el problema, fue lo mismo que pensó desde el principio o durante el proceso se le ocurrió otra manera. - Escriba la respuesta del problema. - ¿Cómo verificaría que el resultado obtenido es correcto? - ¿Es correcta la respuesta obtenida de acuerdo al contexto del problema? Explique.
Evaluación	- Como se sintió resolviendo el problema. - ¿Se puede resolver el problema de otra manera? Explique. - Escriba las dificultades presentadas para resolver el problema.

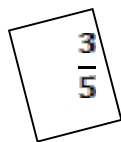
PROBLEMA 4. Yeimi compra una pizza y la reparte entre sus amigos. A Karen le dio $\frac{3}{12}$, a

Felipe le dio $\frac{5}{12}$ y a José le dio $\frac{2}{12}$. ¿Cuántas porciones de pizza le quedan a Yeimi?

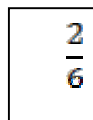
Categoría	Preguntas
Identificación	- ¿Ha entendió el problema? - Escriba los datos que se presenta en el problema. - ¿Cuál es la incógnita? - ¿Se parece a algún problema que haya resuelto antes? - ¿Cree que puede resolverlo?
Planeación	- Escriba la estrategia (gráfica, operaciones, razonamiento, ecuaciones, ensayo y error...) que piensa utilizar para resolver el problema. - Escriba los pasos para resolver el problema de forma correcta.
Ejecución	- Resuelva el problema. - ¿Mientras resolvía el problema iba rectificando lo que hacía? - Durante la solución del problema: ¿Revisó nuevamente los datos y la incógnita? ¿Leyó nuevamente el problema? - Lo que hizo para resolver el problema, fue lo mismo que pensó desde el principio o durante el proceso se le ocurrió otra manera.
Evaluación	- Escriba la respuesta del problema. - ¿Cómo verificaría que el resultado obtenido es correcto? - ¿Es correcta la respuesta obtenida de acuerdo al contexto del problema? Explique. - Como se sintió resolviendo el problema. - ¿Se puede resolver el problema de otra manera? Explique. - Escriba las dificultades presentadas para resolver el problema.

PROBLEMA 5. Un grupo de niños juega con cuatro fichas que tienen números

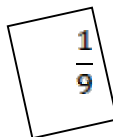
fraccionarios, haciendo diferentes operaciones entre ellos. Al hacer la multiplicación entre dos de ellos, les dio como resultado $\frac{2}{45}$.



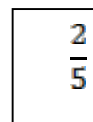
A



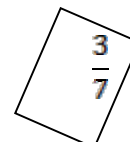
B



C



D



E

¿Cuáles son las dos fichas que han fichas que seleccionaron los niños?

Categoría	Preguntas
Identificación	- ¿Ha entendió el problema? - Escriba los datos que se presenta en el problema. - ¿Cuál es la incógnita? - ¿Se parece a algún problema que haya resuelto antes? - ¿Cree que puede resolverlo?
Planeación	- Escriba la estrategia (gráfica, operaciones, razonamiento, ecuaciones, ensayo y error...) que piensa utilizar para resolver el problema. - Escriba los pasos para resolver el problema de forma correcta.
Ejecución	- Resuelva el problema. - ¿Mientras resolvía el problema iba rectificando lo que hacía? - Durante la solución del problema: ¿Revisó nuevamente los datos y la incógnita? ¿Leyó nuevamente el problema? - Lo que hizo para resolver el problema, fue lo mismo que pensó desde el principio o durante el proceso se le ocurrió otra manera.
Evaluación	- Escriba la respuesta del problema. - ¿Cómo verificaría que el resultado obtenido es correcto? - ¿Es correcta la respuesta obtenida de acuerdo al contexto del problema? Explique. - Como se sintió resolviendo el problema. - ¿Se puede resolver el problema de otra manera? Explique. - Escriba las dificultades presentadas para resolver el problema.

Tabla con los cinco problemas de la evaluación final que relacionan las preguntas con cada categoría (elaboración propia)

RESULTADOS

En el proceso de investigación se desarrollaron tres etapas que son: el diagnóstico, la intervención y la evaluación final. Para el análisis de resultados se utilizan las Tablas F1 y F2 con la pregunta, la respuesta y el análisis de la respuesta dada por los estudiantes de acuerdo a los antecedentes y marco teórico propuesto.

Se aplicó la prueba piloto a 10 estudiantes de los grados 607 y 608 de la Institución Educativa Santos Apostoles, escogidos al azar. Las dificultades detectadas dieron la información necesaria para corregir la prueba diagnóstica que fue aplicada a los seis estudiantes seleccionados para el estudio de casos del grado 605, quienes se denominaran de ahora en adelante **E1, E2, E3, E4, E5 y E6**, cada uno respectivamente.

En la Prueba Diagnóstica con los tres problemas planteados se recoge la información del nivel en el que se encuentran los estudiantes respecto a la resolución de problemas. En la Tabla F1 (Ver ANEXO F) se aprecian las respuestas de cada uno de los estudiantes en cada problema dividido por las categorías detectadas y el análisis.

En la Tabla F2 (Ver ANEXO F) se presentan los resultados de la Evaluación Final, con los cinco problemas propuestos, las preguntas y respuestas de los seis estudiantes y la interpretación correspondiente a cada respuesta.

Después de conocer el desempeño de las pruebas Diagnóstica y Final se determinó de acuerdo a la Tabla 1, el nivel en el que se encuentra cada estudiante en resolución de problemas, teniendo en cuenta los tres problemas de la Prueba Diagnóstica y cinco problemas de la Prueba Final, los cuales se muestran en la Tabla 5.

Tabla 5
Niveles según la Evaluación Diagnóstica y Evaluación Final de cada estudiante

NIVELES							
PRUEBA DIAGNOSTICA	PROBLEMA	E1	E2	E3	E4	E5	E6
	1	5	5	5	5	5	5
	2	3	5	5	1	3	1
	3	4	5	5	1	1	1
PRUEBA FINAL	PROBLEMA	E1	E2	E3	E4	E5	E6
	1	5	5	5	5	4	5
	2	5	5	5	4	5	5
	3	5	5	5	5	4	5
	4	5	5	5	5	5	5
	5	5	5	5	5	5	5
Elaboración propia							

En cuanto a las categorías identificación, planeación, ejecución y evaluación en las pruebas diagnóstica y final realizada a los estudiantes de grado sexto en esta investigación:

Identificación: En la prueba diagnóstica los estudiantes no conocen la palabra incógnita, durante la intervención se explicó la definición y comprendieron que era el valor desconocido,

por esta razón en la prueba final los estudiantes identificaron en todos los casos los datos que daba el problema y la incógnita para la solución.

Planeación: En la evaluación inicial los estudiantes no tenían en cuenta la solución de ejercicios con antelación, no se preocupaban en general por elaborar un plan para resolver los problemas sino que pasaban a la ejecución del mismo. En la prueba final los estudiantes siempre consideraban que habían realizado problemas similares o parecidos al planteado que según Polya (1945) (citado en: May, 2015, p 419) en esta fase se sugiere encontrar problemas similares al que confronta para analizar qué proceso se puede llevar a cabo para la solución del mismo.

Ejecución: los estudiantes en la mayoría de los casos pasaban directamente a la ejecución de la solución del problema utilizando los datos numéricos presentados, sin identificar el tipo de variables, ni la incógnita. En la prueba final se observa mayor un paso a paso en la solución llevando a cabo lo planeado para resolver el problema, utilizando una estrategia estudiadas en la intervención de aula.

Evaluación: Definitivamente los estudiantes en la prueba diagnóstica no hacían revisión de sus procesos, asumiendo como correctas todas las soluciones. En la prueba final los estudiantes hacían una revisión de resultados y se preocupaban por volver a leer las variables y la incógnita verificando coherencia entre situación planteada y respuesta obtenida.

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

El primer objetivo planteado es “Diagnosticar el nivel de resolución de problemas en el que se encuentran los estudiantes de grado sexto, cuando solucionan problemas relacionados con números fraccionarios antes de la intervención en el aula.”. Para ello se tiene en cuenta la Tabla 1 donde Tamayo (2014) propone los niveles para la resolución de problemas matemáticos, determinados por medio de la Evaluación Diagnóstica aplicada antes de la Unidad Didáctica.

En la Tabla 5 se observan los estudiantes **E1, E4, E5, E6** quienes en la Prueba Diagnóstica no alcanzan el nivel 5 en la resolución de problemas, excepto por el primer problema. Los tres últimos estudiantes mencionados aún están en nivel 1 de resolución de problemas.

Los estudiantes en general utilizaron estrategias irreflexivas (Rizo y Campistrous, 1999, p 33) ya que trataban de responder sin hacer un análisis previo para resolver los problemas, sino que de manera prácticamente automática querían solucionar los problemas planteados y se les hacía muy difícil responder las preguntas propuestas en el proceso de solución del problema, ya que no están acostumbrados a reflexionar sobre su proceso, conocimiento y resultados.

En el segundo objetivo del trabajo se plantea: “Determinar el nivel de resolución de problemas en el que se encuentran los estudiantes de grado sexto cuando solucionan problemas relacionados con números fraccionarios después de la intervención en el aula” observándose en los resultados de la Prueba Final que los estudiantes **E1, E2, E3, E6** se encuentran en el nivel 5 de resolución de problemas, mientras que los estudiantes **E4 y E5** están entre el nivel 4 y 5.

En el tercer objetivo se propone: “Contrastar los resultados de los niveles iniciales y finales en los que se encuentran los estudiantes de grado sexto al resolver de problemas de números fraccionarios, para describir los cambios presentados” y para ello se tienen en cuenta los resultados obtenidos en las pruebas Diagnóstica y Final.

Los estudiantes **E2** y **E3** antes de las intervenciones con el Modelo de Polya estaban en el nivel 5 de resolución de problema y mantuvieron este nivel pero ahora con mayor grado de reflexión durante su proceso. Antes no sabían cómo verificar sus resultados ahora recuerdan problemas similares, proponen otras estrategias y van rectificando lo que hacen mientras lo resuelven gracias a las intervenciones realizadas en el aula respecto a las estrategias metacognitivas.

Los estudiantes **E1** y **E6** después de trabajar los pasos del Modelo de Polya obtuvieron un nivel de 5 en todos los problemas propuestos y antes de las intervenciones sólo en el primer problema de la prueba diagnóstica obtuvieron este nivel mientras que en los otros problemas estuvieron nivel 1, 3 y 4, es decir que se observa en estos estudiantes mejores resultados después de la intervención donde se explicaba sobre los pasos para resolver problemas de manera adecuada.

Por otro lado los estudiantes **E4** y **E5** en la prueba diagnóstica también obtuvieron nivel 5 en el primer problema, pero nivel 1 y 3 en los demás problemas de dicha prueba; mejoraron en la Evaluación Final donde se posicionaron en un nivel de 4 y 5 en los cinco problemas,

observándose en la prueba resultados coherentes y procesos mejor elaborados que al iniciar el proceso.

En cuanto las categorías de identificación, planificación, ejecución y evaluación se encontró que los estudiantes en la prueba diagnóstica no lograban en un 100% llevar a cabo de manera eficiente una estrategia para la solución de problemas sino que preferían realizar operaciones al azar o como le parecía más fácil de acuerdo a los valores numéricos que eran expresados en el planteamiento del problema. Mientras que en la prueba final los estudiantes proponían diferentes estrategias para llegar a una solución correcta, aplicando lo trabajado durante las intervenciones, ver Tabla 6. Según Sanz (2010) en la planeación se tiene en cuenta la selección de estrategias, las cuales se pueden encontrar variadas para cada uno de los problemas, pero que se puede escoger la más apropiada.

Tabla 6.
Comparación entre prueba inicial y prueba final para la categoría de planificación.

EN LA PRUEBA INICIAL	EN LA PRUEBA FINAL	TEORIA QUE LO SUSTENTA
No conocen las diferentes estrategias que podrían aplicar para resolver los problemas planteados.	Conocen algunas de las estrategias para resolver los problemas planteados. Reconocen que pueden utilizar	Según Thornton (1998) los niños son capaces de recordar varias estrategias que pueden ser aplicables para resolver un problema y el niño por su experiencia escoge la estrategia que lo lleve al éxito.
Piensan que existe sólo una forma de solucionar el problema y tratan de buscar la mejor forma para encontrar la	varías estrategias para resolver el problema. Entienden que antes de resolver el problema deben planificar paso a	Para Brown (1987), la planeación es un proceso de regulación metacognitivo que se manifiesta antes de resolver problemas; consiste en anticipar las actividades, prever resultados, enumerar pasos.

solución.	paso lo que van a tener	Thornton (1998) afirma que los niños son
En algunos casos los	en cuenta para la	capaces de diferenciar entre las estrategias
estudiantes quieren	solución.	que lo han llevado al éxito de aquellas que
omitir este paso de	Saben que de dos	no, y cuando descubren una estrategia que
concebir un plan y	alternativas de	lo lleva al éxito son capaces de son capaces
preferirían pasar a	solución, se debe	de alterarla y mejorarla.
resolver el problema.	iniciar por aquella que	Polya (1945) la mayoría de los estudiantes
Algunos tratan de dar	sea más acorde al	no dedican el tiempo necesario para
respuesta a unos pasos	objetivo del problema o	preparar un plan de resolución del
que podrían seguir como	que sea más sencillo de	problema, puesto que no dejan aflorar
plan para resolver el	realizar.	aquellas ideas que pueden tener alguna
problemas, pero la	Logran recordar	relación con el problema para luego elegir
explicación no es	problemas resueltos	aquella que parezca que puede llevar a la
satisfactoria.	anteriormente para	solución, se lanzan directamente a
	emplear las mismas	desarrollar el primer plan que se les ocurre.
	estrategias haciendo	
	comparación.	
	Los estudiantes	
	escriben paso a paso lo	
	que van hacer para	
	solución el problema	
	propuesto.	

Análisis de resultados de la categoría identificación (Fuente: elaboración propia)

En cuanto a la identificación, los estudiantes en la prueba inicial como se dijo anteriormente trataban de resolver obviando los primeros dos pasos propuestos por Polya que son la identificación y planificación. Pero al inicio no era fácil entender los problemas propuestos porque no lograban contextualizarlo. Como dice May (2015, p 419) este es uno de los pasos más complicados por llevar a cabo, ya que no lo consideran importante y éste se tiene en cuenta en la

verificación, para hacer la respectiva comparación entre los resultados obtenidos y lo propuesto, haciendo un análisis de los mismos. En la prueba final los estudiantes sentían mayor motivación para resolver problemas de números fraccionarios, comenzando con la identificación de los datos extraídos del problema y la incógnita, ver Tabla 7.

Tabla 7.
Comparación entre prueba inicial y prueba final para la categoría de identificación.

EN LA PRUEBA INICIAL	EN LA PRUEBA FINAL	TEORIA QUE LO SUSTENTA
- No se observaba una actitud motivada para resolver el problema. - Los estudiantes no comprendieron todos los problemas. - Al pedir plantear el problema de otra manera, trataban de plantear un problema similar porque no reflexionaban acerca del problema que estaban leyendo y desglosarlo con sus propias palabras. - En general no fue fácil la comprensión de los problemas para los estudiantes, no reconocían las	- Los estudiantes al conocer el modelo de Polya se sentían motivados para resolver problemas. - Los estudiantes comprendieron todos los problemas, entendían el contexto que se estaba trabajando. - Identificaron los datos propuestos en el problema y la incógnita faltante en cada situación. Ya sabían el concepto del término “incógnita”.	Polya (1945) plantea que los problemas propuestos deben ser de todo tipo de tema o situaciones. Polya (1945) es importante el interés para iniciar a resolver un problema. Thornton (1998) dice que cuando se comprende la situación, esto favorece la creación de nuevas herramientas mentales. Polya (1945) El docente debe proponer problemas que no sean imposibles de resolver por los estudiantes, que se encuentren a nivel de éste. Para Piaget (1981) las influencias sociales o educativas, lo mismo que la experiencia física, “sólo puede afectar al sujeto si es éste es capaz de asimilarlas, y sólo puede hacerlo si ya posee instrumentos o las estructuras adecuadas (o sus formas primitivas). En realidad, lo que enseña... sólo es verdaderamente asimilado cuando

incógnitas (en la prueba piloto no entendieron el término por tanto se cambió la pregunta), ni los datos.	da lugar a una reconstrucción activa o incluso a una intervención por parte del niño”.
---	--

Análisis de resultados de la categoría identificación (Fuente: elaboración propia)

En cuanto a la ejecución, ver Tabla 8, en la prueba final, el desarrollo de la solución de los problemas fue más correcto que en la prueba diagnóstica. En la última prueba los estudiantes iban monitoreando el desarrollo de la actividad como lo indica Sanz (2010) los sujetos revisan si es adecuada la estrategia seleccionada llevando a cabo el control durante el proceso.

Tabla 8.

Comparación entre prueba inicial y prueba final para la categoría de ejecución.

EN LA PRUEBA INICIAL	EN LA PRUEBA FINAL	TEORIA QUE LO SUSTENTA
Los estudiantes que no propusieron un plan para resolver el problema, tampoco pueden hacer una ejecución correcta. Los estudiantes al no conocer estrategias en el paso anterior, no lograban ser óptimos en la ejecución. Algunos estudiantes propusieron algún plan de solución, pero al	Los estudiantes que no propusieron un plan para resolver el problema, tampoco pueden hacer una ejecución correcta. Los estudiantes al no conocer estrategias en el paso anterior, no lograban ser óptimos en la ejecución. Algunos estudiantes propusieron algún plan	Según Thornton (1998) antes de solucionar un problema es importante la disposición de un plan para analizar submetas, que lo lleven a continuar con la solución. Thornton (1998), los niños son capaces de recurrir a nuevas estrategias, haciendo a un lado la inicial. Para Brown (1987), el control es un proceso de regulación metacognitivo que consiste en un monitoreo que se hace durante la ejecución de la solución del problema: verificación, rectificación, revisión de la estrategia empleada.

momento de ejecutarlo realizaban otra estrategia que al momento les parecía más acertada para el problema propuesto.	de solución, pero al momento de ejecutarlo realizaban otra estrategia que al momento les parecía más acertada para el problema propuesto.
--	---

Análisis de resultados de la categoría identificación (Fuente: elaboración propia)

Para Sanz (2010) la evaluación significa revisar los resultados obtenidos teniendo en cuenta el planteamiento del problema, es allí donde los estudiantes descubren errores cometidos. Que no se llevaban a cabo en la prueba diagnóstica, pero si tenía en cuenta en la prueba final ver Tabla 9, y por esa razón descubrieron errores que lograron corregir antes de dar la respuesta.

Tabla 9.

Comparación entre prueba inicial y prueba final para la categoría de evaluación.

EN LA PRUEBA INICIAL	EN LA PRUEBA FINAL	TEORIA QUE LO SUSTENTA
Terminan el proceso de ejecución y exponen la solución del problema, sin verificar que esté bien o no el resultado propuesto.	Los estudiantes son capaces de evaluar su propio proceso. Eran capaces de decir si se les presentó dificultad para resolver los problemas.	Como lo indica Thornton (1998) los niños pueden verificar acciones anteriores para terminar, corregir o completar lo que está realizando.
No saben cómo pueden verificar la respuesta obtenida en el problema.	Reconocen que existen diferentes formas de resolver problemas.	Para Thornton (1998), así los estudiantes tengan el mismo proceso de enseñanza en la solución de problemas, tienen diversas posibilidades de éxito gracias a los diferentes conocimientos y experiencias,
Les parece extraño		llevándolos a aplicar estrategias diferentes.

preguntarse cómo se sintieron resolviendo la prueba.	Conocen formas de verificar la solución del problema. Se preguntan sobre lo que sintieron al solucionar los problemas, que se les facilitó y que se les dificultó.	Para Brown (1987), la evaluación es un proceso de regulación metacognitivo que se hace al final de la tarea, evalúa los resultados de la estrategia seguida en términos de eficacia. Polya (1945) la mayoría de los estudiantes una vez que han llegado a un resultado, consideran que han terminado y no se detienen a corregir o mejorar el proceso y a reflexionar para aprender del mismo. Callejo (1994) Los estudiantes tienen experiencias anteriores como afectos, creencias, actitudes y prácticas, que cuando son negativas es necesario que las desaprendan.
--	---	---

Análisis de resultados de la categoría identificación (Fuente: elaboración propia)

Al observar las pruebas de los estudiantes se puede hacer una comparación entre la prueba inicial o diagnóstica y la prueba final, ya que en la segunda se muestra orden desde la letra hasta en la solución, además se presentan menos tachones y borrones vislumbrando más seguridad para resolver problemas con números fraccionarios.

Las herramientas heurísticas son fáciles de entender en la enseñanza, puesto que para avanzar en la solución de problemas difíciles se requiere de estas estrategias (Pino, 2012, pp.50). Los estudiantes al utilizar las estrategias heurísticas obtuvieron mejores resultados, solucionando todos los problemas y así alcanzaron mejores niveles.

Las intervenciones de la unidad didáctica fueron de gran importancia para los estudiantes ya que presentaron grandes cambios positivos en la resolución de problemas y como lo indica Larios (2000) los que aprenden matemáticas deben construir conceptos a través de la interacción con los objetos y otros sujetos, que para este caso fue resolver ellos mismos los problemas y compartir con otros compañeros sus conocimientos durante el desarrollo de los mismos.

De acuerdo a las categorías se puede inferir que cuando los estudiantes no logran hacer un paso de la resolución de problemas del Método de Polya, es muy difícil que puedan dar la solución correcta del problema, es decir que los pasos propuestos son necesarios para una adecuada respuesta al problema propuesto y es por esta razón que los resultados de los niveles de resolución de problemas de algunos estudiantes son bajos.

Después de la intervención de la docente en el aula, los estudiantes reflexionan más sobre sus procesos ya que se observa mayor atributo metacognitivo en la evaluación final que en la prueba diagnóstica, como lo expresan Feuerstein, Hoffman, Jesen y Rand (1985) los profesores son modelos en el empleo de estrategias, siendo una parte importante para el desarrollo metacognitivo.

CONCLUSIONES

El estudio permite concluir que los estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa Colegio Santos Apóstoles de San José de Cúcuta mostraron cambios en positivos en la resolución de problemas, evidenciándose un progreso con tendencia a seguir mejorando con más intervenciones con el Método de Polya, comprobando la efectividad de esta estrategia de resolución de problemas.

Se lograron cambios en cuanto a la concentración, organización y capacidad de razonar por parte de los estudiantes, quienes con el Método de Polya obtuvieron mejores resultados en el desempeño académico de resolución de problemas con números fraccionarios, subiendo de nivel aquellos estudiantes que estaban por debajo del quinto, mientras que los que estaban en el quinto nivel se mantuvieron pero con mayor grado de reflexión de sus respuestas.

Se observó mayor interés por parte de los estudiantes para resolver problemas de números fraccionarios por medio del Método de Polya, mejorando la comunicación e interacción entre ellos, contribuyendo así al trabajo en equipo.

El Método de Polya como estrategia de resolución de problemas se puede trabajar con estrategias Metacognitivas imbricadamente para lograr estudiantes más reflexivos a la hora de solucionar problemas matemáticos propuestos.

Los estudiantes objeto de estudio mejoraron su rendimiento académico en matemáticas, debido a que el trabajo de regulación metacognitiva, mejora la atención de los estudiantes, ya que controla su aprendizaje puesto que tiene en cuenta las decisiones del antes, durante y después de la solución del problema (Schraw, 1998).

El trabajo de estudio de casos permitió analizar de manera más detallada el proceso de cada estudiante para solucionar problemas de aplicación de operaciones de números fraccionarios.

Los estudiantes realizaban procesos metacognitivos en la planeación, ejecución y evaluación desde el sentir, ya que se observó seguridad en las respuestas de la prueba final y plasmaban de acuerdo a la pregunta del cómo se sentían en la solución de cada problema.

Los estudiantes en su proceso metacognitivo regulaban la solución de problemas por medio del control recurriendo a otras estrategias de solución cuanto eran conscientes que no eran pertinentes para la solución de problemas.

RECOMENDACIONES

Proponer a los docentes de matemáticas, la utilización de estrategias de resolución de problemas para disminuir la apatía hacia las matemáticas por parte de los estudiantes y facilitar la solución de problemas.

Como estrategia de enseñanza-aprendizaje en las matemáticas se trabaja la resolución de problemas y el método de Polya es el más utilizado para estos casos ya que sus cuatro pasos son sencillos, organizados y entendibles para obtener respuestas más acertadas.

Se propone para estudios posteriores realizar encuestas y entrevistas a los estudiantes para dar a conocer percepciones más acertadas acerca de lo que piensan de sus procesos, aunque para este caso se tuvo en cuenta la observación, sin ser una herramienta nombrada como método en el trabajo de investigación.

REFERENCIAS

Agudelo, G. B., Bedoya, V. y Restrepo, A. M. (2008). Método heurístico en la resolución de problemas matemáticos. Universidad Tecnológica de Pereira.

Allueva, P. (2002). Conceptos básicos sobre la metacognición. Desarrollo de habilidades metacognitivas: programa de intervención. Zaragoza: Consejería de educación y ciencia. Diputación general de Aragón, 59-85.

Arredondo, C. J. (1999). Solución de problemas, Desarrollo del pensamiento y creatividad. Ediciones CoopAsociados. Santiago de Cali. Segunda Edición.

Blanco, J. L., La resolución de problemas. Una revisión teórica. Federación Española de sociedades de profesores de matemáticas. SUMA 21. Pp 11-20.

Brown, A. (1987). Metacognition, executive control, self-regulation and other more mysterious mechanisms. In: Weinert, F. E. and Kluwe, R., Metacognition, motivation and understanding. Lawrence Erlbaum Associates, publishers: London.

Bueno, D. (2012). Propuesta metodológica para mejorar la interpretación, análisis y solución de ejercicios y problemas matemáticos en los estudiantes de quinto grado de la Institución Educativa Alejandro Vélez Barrientos. Universidad Nacional de Colombia.

Campanario, J.M., Cuerva, J., Moya, A. y Otero, J.C. (1997). «El papel de las estrategias metacognitivas en el aprendizaje de las ciencias». Ponencia presentada en el V Congreso Internacional sobre la Enseñanza de las Ciencias. Murcia, Septiembre de 1997.

Campanario, J. (2000). El desarrollo de la metacognición en el aprendizaje de las ciencias: estrategias para el profesor y actividades orientadas al alumno. Enseñanza de las Ciencias. 18 (3). Universidad de Alcalá. Alcalá de Henares. Madrid.

Contreras, M. y Gómez, B (2009). Sobre problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. PNA, 3(4), 169-183.

Desoete, A. (2007). La evaluación y mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a través de la metacognición. Editorial EOS. Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa. No. 13 Volumen5(3). Pp 705-730.

Domenech, M. (2004). Papel de la inteligencia y la metacognición en la resolución de problemas. Tesis Doctoral Universitat Rovira y Virgili. Tarragona. España.

Escalante, S. (2015). Método Polya en la resolución de problemas matemáticos. Universidad Rafael Landívar. Quetzaltenango. Guatemala.

Feuerstein, R., Jensen, M., Rand, Y. y Hoffman, M. (1984). Instrumental Enrichment: An intervention program for structural cognitive modifiability. En J. Segal, S. Chipman y R. Glaser (Eds.), Thinking and learning skills (Vol. 1). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Flavell, J. H. (1976). Metacognitive aspects of problema solving. En: L. B. Resnik (ed.). The nature of intelligence (pp 231-235). Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

Gunstone, R. F. y Mitchell, I. J. (1998). Metacognition and conceptual change. In: Mintzes, Wandersee and Noval (Eds.). Teaching Science for Understanding. Academic press: California.

Hernandez, A (2013). Estratégias de solución de problemas matemáticos en estudiantes preuniversitarios. I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe (I CEMACYC). Santo Domingo, República Dominicana.

Hincapie, C (2011). Construyendo el concepto de fracción y sus diferentes significados, con los docentes de primaria de la Institución Educativa San Andrés de Girardota. Universidad Nacional de Colombia.

Larios, V. (2000). “Constructivismo en tres patadas”, *Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas*, año 1, núm. 1, pp. 2-8.

Leon, G. (2011). Trabajo Fin de Master. Unidad didáctica: Fracciones. Universidad de Granada.

Mateos, M. (2001). *Metacognición y educación*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor S. A.

May, J. (2015). George Polya (1965). Cómo plantear y resolver problemas. *Entreciencias: Dialogos en la sociedad del conocimiento*. Universidad Autónoma de México, vol 3, numero 8, pp 419-420.

Ministerio de Educación Nacional, (1998). *Matemáticas, lineamientos curriculares*. Santafé de Bogotá D. C. Colombia. Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional, (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje V.2*. Santafé de Bogotá D. C. Colombia. Panamericana Formas e Impresos S. A.

Morales, R. (2014). *Dificultades y errores en la solución de problemas con números racionales*. Universidad Autónoma de Manizales.

Ospina, D., Agudelo, M., Osorio, A. (2014). Línea de investigación en didáctica de las matemáticas.

Osses, S. y Jaramillo, S. (2008). *Metacognición: un camino para aprender a aprender*. Estudios pedagógicos. XXXIV, No. 1: 187-197. Universidad Austral de Chile. Valdivia-Chile.

Otake, C. Las experiencias metacognitivas, sus estrategias y su relación con las plataformas educativas. En memorias del 6° Encuentro Nacional e Internacional de Centros de Autoacceso de

Lenguas. *La autonomía al aprendiente: escenarios posibles*. Agosto 2017. Recuperado en <http://cad.cele.unam.mx:8080/RD3/prueba/pdf/otake7.pdf>.

Ottonello, S., Del Valle Velis, M., Ross, S. (2008). Estrategias metacognitivas en aprendizaje del álgebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 24. (2001)

Peñalva, L. P. (2010). Las matemáticas en el desarrollo de la metacognición. *Política y cultura, primavera 2010*, No. 33, pp 135-151.

Parra, M. A y Flores, R. del C. (2008). Aprendizaje cooperativo en la solución de problemas con fracciones. *Educación matemática*. Vol. 20 (1), 31-52.

Perez, Y., Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de investigación* Vol. 35. No. 73. Caracas.

Pifarré, M. y Sanuy, B. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: un ejemplo concreto. *Enseñanza de las ciencias* 2001, 19(2), pp 297-308.

Piggioli, L. (1999). Estrategias de resolución de problemas. Serie enseñando a aprender. Caracas: Fundación Polar.

Polya, G. (1945). Cómo plantear y resolver problemas. Editorial Trillas. Serie de Matemáticas. México.

Polya, G. (1954). How to Solve it. Princeton. Princeton: University Press.

Polya, G. (1961). Matemáticas y razonamiento plausible. Madrid. Editorial Tecnos.

Pozo, J. (1994). La solución de problemas. Madrid. Editorial Santillana S.A.

Rizo, C. y Campistrous, L. (1999). Estrategias de resolución de problemas en la escuela. Revista latinoamericana de investigación en matemáticas educativa, vol2, número 2-3, Comité Latinoamericanode matemática educativa. Distrito federal, México, pp 31-45.

Rodríguez, E. (2005). Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico. Tesis doctoral Universidad Complutense de Madrid. ISBN: 84-669-2873-1.

Rosario, P., Núñez, J., y González-Pienda, J. (2004). Stories that show how to study and how to learn: an experience in Portuguese school system. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, (1), 131-144.

Rosenshine, B., Meister, C. y Chapman, S. (1996). Teaching student to generate questions: A review of the invention studies. *Review of Educational Research*, 66, pp 181-221.

Santos Trigos, L. M. (1997). Principios y Métodos de la Resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. Capítulo 6. *Centro de investigación y de estudios avanzados del IPN*. Grupo Editorial Iberoamericana. Segunda Edición. México.

Sanz, María (2010). Competencias cognitivas en Educación Superior. Editorial: NARCEA, SA. Madrid, España.

Schraw, G. (1998). Promoting general metacognitive awareness. *Instructional Science*, 26, pp. 113-125.

Serrano, D. (s.f). Estrategias de aprendizaje. Guía de Estudio. Lenguas Extranjeras. UAM Azcapotzalco. Disponible en:
<http://www.lapaginadelprofe.cl/UAconcagua/formacionprofesional/estrategiasdeaprendizaje.pdf>.

Shuell, T. J. (1990). Phases of meaningful learning. *Review of Educational Research*, 60, pp. 531-547.

Silva, C. (2006). Educación en matemática y procesos metacognitivos en el aprendizaje. *Revista del Centro de Investigación. Universidad La Salle*, Vol. 7, núm 26, Distrito Federal, Mexico, pp 81-91.

Solaz-Portolez, J., Sanjosé, V. (2006). ¿Podemos predecir el rendimiento de nuestros alumnos en la resolución de problemas? *Revista de educación*, 339, pp.693-710.

Tamayo, O. E. (2014). Pensamiento crítico dominio-específico en la didáctica de las ciencias. *TED_36 indb*. pp 25-46.

Tamayo, O. E. (s.f.). La metacognición en los modelos para la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias. Universidad Autónoma de Manizales.

Thornton, S (1998). La resolución de problemas infantil de problemas. Madrid: Ediciones Morata.

Valdemoros, M., Ruiz, E. (2008). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 21. México.

Yanez, T. (2010). Efectos de la resolución de problemas mediado por el weblog sobre el rendimiento en matemáticas. Universidad central de Venezuela.

ANEXOS

ANEXO A
Evaluación diagnóstica



PRIMER MOMENTO: EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA
INSTITUCIÓN EDUCATIVA COLEGIO SANTOS APOSTOLES

"Con calidad y eficiencia lograremos la excelencia"

Nombre del estudiante: _____ Grado: _____

PROBLEMA 1. Luis y Andrea encontraron chocolates en la casa de la abuela. Luis se comió $\frac{6}{10}$ de los chocolates y Andrea se comió $\frac{3}{10}$ ¿Qué fracción se comieron entre Luis y Andrea?

Después de leer el problema contestar las siguientes preguntas de la manera más sincera:

¿Ha entendido el problema? _____ Explique con sus propias palabras el problema planteado:

¿Cree que puede resolver el problema? Si _____ No _____

Explique la forma cómo se podría resolver el problema: _____

¿Qué temas debe saber para resolver el problema? _____

¿Ha resuelto problemas de operaciones con fraccionarios? Si _____ No _____

¿El problema planteado se parece a otro problema que haya resuelto antes? Si _____ No _____

¿A qué tengo que responder? _____

¿Tengo todos los datos que se necesitan para resolver el problema? Si _____ No _____

Resuelva el problema:

<i>Solución:</i>	
------------------	--

Explique cómo se sintió resolviendo el problema: _____

¿Qué dificultades encontró para resolver los problemas? _____

¿Cómo comprobaría que el resultado obtenido es correcto? _____

Haga la prueba:

Solución:

¿Cómo le pareció el problema planteado? _____

¿Cómo se sintió contestando todas las preguntas anteriores? _____

PROBLEMA 2. En un restaurante se ofrecen 12 platos diferentes. La gráfica muestra la cantidad de platos internacionales y nacionales ¿Cuántos platos son internacionales?



Después de leer el problema contestar las preguntas justificando cada respuesta:

¿Ha entendido el problema? _____

Plantee el problema de otra manera: _____

¿Ha dibujado gráficas antes para representar fraccionarios? Si ____ No ____

En ocasiones anteriores ¿Ha resuelto problemas parecidos al planteado? Si ____ No ____

¿Cuáles son los datos o valores conocidos? _____

¿Qué se está preguntando en el problema? _____

¿La gráfica es de ayuda? Si ____ No ____ ¿Por qué? _____

¿Entiende la gráfica que se presenta? Si ____ No ____

Escriba la fracción que representa lo sombreado _____ ¿Lo sombreado corresponde a Internacional o Nacional? _____

Resuelva el problema:

<i>Solución</i>	
-----------------	--

Respuesta: _____

¿Planeó algunos pasos para resolver el problema? Si ____ No ____

Escriba los pasos para resolver el problema:

1. _____

2. _____

3. _____

4. _____

5. _____

¿Son necesarios todos los pasos para resolver el problema? Si ____ No ____ ¿Por qué? _____

¿Está seguro de la respuesta del problema? Si ____ No ____

¿Cómo comprobaría que la respuesta es correcta? _____

¿Cómo se sintió al solucionar el problema? _____

¿Cómo le parece el problema planteado? Explique _____

Después de leer el problema contestar las preguntas justificando cada respuesta:

¿Tienen un plan para resolverlo? ____ ¿En qué consiste? _____

Solución

¿Cómo se sintió resolviendo el problema? _____

¿Comprendió toda la información? _____

¿Identificó los datos que necesitaba para solucionar el problema? ¿Cuáles fueron los datos? _____

¿Cuál fue el plan que hizo para encontrar la solución? _____

¿Resolvió completamente el problema propuesto? Si _____ No _____ ¿Qué pudo descubrir? _____

¿Qué le faltó saber? _____

¿De qué manera comprobó el resultado? _____

¿Le pareció sencillo solucionar el problema? Explique _____

¿Cómo se sintió contestando todas las preguntas propuestas? _____

ANEXO B.

Intervenciones de la Unidad Didáctica

UNIDAD DIDÁCTICA



INSTITUCIÓN EDUCATIVA COLEGIO SANTOS APOSTOLES

ÁREA DE MATEMÁTICAS

Profesora: Jessica Lorena Rico Patiño

Grado: sexto

INTERVENCIÓN 1: “Repaso de los conceptos y operaciones de números fraccionarios y explicación de los cuatro pasos del Método de Polya”

Objetivo de la intervención:

- Repasar los conceptos y operaciones de números fraccionarios.
- Explicar el Método de Polya para la solución de problemas.

Tiempo de la intervención: 2 horas

Trabajo del docente:

1. Repasar con los estudiantes el concepto de número fraccionario y las operaciones entre ellos: suma, resta, multiplicación y división.
2. Explicar los pasos del Método de Polya para la solución de problemas y que los estudiantes los copien en el cuaderno.

Desarrollo:

Fracciones

El conjunto de los números racionales incluyen los fraccionarios y los decimales. La definición formal de número racional es el cociente a/b tal que a y b pertenecen a los enteros y b es diferente de cero, es decir:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} / a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Es decir una fracción $\frac{a}{b}$ es el cociente de dos números enteros, donde el denominador no puede ser cero. Donde a es el numerador e indica el número de partes que se toman y b es el denominador e indica el número de partes iguales en que se divide la unidad. Al dividir el numerador en el denominador se obtiene el número decimal.

Fandiño destaca varios contextos desde donde se puede abordar la fracción. La fracción como: Parte de un todo, Cociente, Razón, Operador, Probabilidad, Número racional, Punto de una recta orientada, Puntajes, Medida, Porcentaje. Es decir, a pesar de ser un número racional y representarse de la misma manera, de acuerdo a la situación que se trabaje se puede realizar una interpretación diferente del planteamiento.

Dos fracciones son equivalentes cuando representan la misma cantidad. Por ejemplo una unidad dividida en tres partes y se toman dos, mientras que otra unidad igual se divide en seis partes y se toman cuatro, esto quiere decir que estas dos fracciones son equivalentes porque representan la misma cantidad.

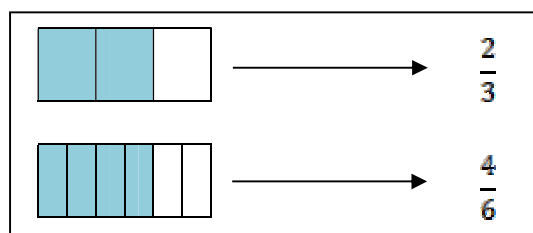


Figura 1. Fracciones equivalentes.

Dos fracciones son homogéneas cuando tiene igual denominador, y son heterogéneas cuando tienen diferente denominador.

Para sumar fracciones homogéneas se suma el numerador, dejando el denominador igual. Mientras que cuando las fracciones son heterogéneas se debe buscar la homogeneidad, haciendo que las fracciones a sumar queden con el mismo denominador. De igual manera que la suma se resuelve la resta.

Para multiplicar fraccionarios simplemente, se multiplican los numeradores y se multiplican los denominadores. Para multiplicar una fracción por un número entero, se multiplica el numerador por el número entero y se deja el mismo denominador. La inversa de una fracción se consigue intercambiando el numerador y el denominador, si el numerador inicial es cero entonces la fracción no tiene inversa.

Para dividir fraccionarios se multiplica el primer numerador con el segundo denominador, y el primer denominador con el segundo numerador, mejor conocido como multiplicar en equis.

Método de Polya

Para solucionar problemas varios investigadores han propuesto métodos, pero el más trabajado es el de Polya quien trabaja cuatro pasos:

- Comprender el problema: Antes de iniciar a realizar algo del problema lo primero será entender lo que dice y lo que pregunta. Allí se debe escribir los datos, es decir todo lo que sepa del problema, la incógnita es decir, que es lo que nos preguntan en el problema o hace falta.
- Concebir un plan: Es buscar la forma más adecuada para resolver el problema, aquí se deben mirar estrategias.
- Ejecutar el plan: Es llevar a cabo lo planeado anteriormente.
- Visión retrospectiva: Es volver a revisar todo la solución del problema y analizar si había otra forma de resolverlo para otras oportunidades.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA COLEGIO SANTOS APOSTOLES

ÁREA DE MATEMÁTICAS

Profesora: Jessica Lorena Rico Patiño

Grado: sexto

INTERVENCIÓN 2: “Video de explicación del Método de Polya y aplicación en la solución de un problema matemático de fraccionarios”

Objetivo de la intervención:

- Visualizar la solución de un problema matemático de fraccionarios con el Método de Polya.
- Resolver un problema de fraccionarios con el Método de Polya.

Tiempo de la intervención: 2.5 horas

Trabajo del docente:

1. Presentar el video de youtube en el cual se explican los cuatro pasos del Método de Polya.
2. Explicar la solución de un problema con los cuatro pasos.
3. Durante el proceso de resolución de problema hacer que los estudiantes reflexionen sobre lo que están haciendo, lo que pueden hacer y lo que no.

Desarrollo:

- Presentar el video titulado “**METODO DE POLYA EL ARTE DE RESOLVER PROBLEMAS MATEMATICA**” link:

<https://www.youtube.com/watch?v=ygHEaMUrMFs>.

- Explicar con los dos primeros problemas de la Evaluación Diagnóstica los pasos del Método de Polya y con el último problema observar el trabajo que realizan.

PROBLEMA 1. Luis y Andrea encontraron chocolates en la casa de la abuela. Luis se comió 6/10 de los chocolates y Andrea se comió 3/10 ¿Qué fracción se comieron entre Luis y Andrea?

Comprender el problema:

Datos: Luis se comió 6/10 de los chocolates y Andrea se comió 3/10 de los chocolates

Incógnita: Escribir el fraccionario de lo que se comieron entre Luis y Andrea

Concebir el plan:

Se puede utilizar la estrategia de operaciones, ya que se debe realizar una suma de fracciones homogéneas, es decir se suma los numeradores y queda el mismo denominador.

Ejecutar el plan:

$$\frac{6}{10} + \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$$

Respuesta: entre los dos se comieron 9/10 de chocolate

Visión retrospectiva:

Es coherente la respuesta puesto que la suma de 6 y 3 es 9, que son los 9 chocolates que se comen y como había 10, quiere decir que sobró 1.

Otra forma de solucionar el problema es realizando la gráfica, en ella se hace una partición de 10 partes iguales, se sombrea 6 que corresponden a Luis y 3 que corresponden a Andrea. El total sombreado es lo que se comieron entre los dos.

Cabe resalta que durante el proceso el estudiante debe ir preguntándose ¿Estoy haciéndolo bien? ¿Estoy seguro de lo que estoy haciendo? ¿Están bien las operaciones? ¿Puede ser que tenga otra forma de resolverlo? ¿Es coherente el resultado? Es decir trabajar la autorregulación.

PROBLEMA 2. En un restaurante se ofrecen 12 platos diferentes. La gráfica muestra la cantidad de platos internacionales y nacionales ¿Cuántos platos son internacionales?



Comprender el problema:

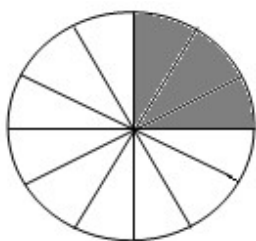
Datos: 12 platos se ofrecen en total. Según la gráfica $\frac{1}{4}$ son internacionales y $\frac{3}{4}$ son nacionales.

Incógnita: Cantidad de platos internacionales.

Concebir un plan:

Se puede utilizar la estrategia de realizar una gráfica, ya que se hace la división de 12 partes iguales de ese círculo y se observa cuantas de esas partes quedan en la parte de internacionales y así se determina el fraccionario correspondiente.

Ejecutar el plan:



Respuesta: 3 platos son internacionales.

Visión retrospectiva:

La respuesta es correcta porque tiene sentido con el problema, es decir tiene coherencia porque al tener una cantidad de 12 platos es la división de la gráfica en partes iguales.

Otra manera era halla la fracción de un número, es decir los platos internacionales son $\frac{1}{4}$ de 12, por tanto $12/4 = 3$.

PROBLEMA 3. En un día de trabajo, una pastelería ha producido 100 pasteles, de los cuales $\frac{1}{4}$ tienen crema pastelera, $\frac{2}{5}$ de la producción de pasteles no tiene crema y el resto son para diabéticos ¿Cuántos pasteles para diabéticos produjo la pastelería?

Comprender el problema:

Datos:

100 pasteles en total

Con crema $\frac{1}{4}$ de 100

Sin crema $\frac{2}{5}$ de 100

Diabéticos el resto

Incógnita:

¿Cuántos pasteles son para diabéticos?

Concebir un plan:

Hay que hacer operaciones:

Primero: Cuantos con crema la fracción de un número

Segundo: Cuantos sin crema la fracción de un número

Tercero: se suman los que no tiene crema, con los que tienen crema.

Cuarto: al total se le resta el resultado anterior, lo que da es la respuesta de los pasteles para diabéticos.

Ejecutar el plan:

Primero $100/4 = 25 \times 1 = 25$

Segundo: $100/5 = 20 \times 2 = 40$

Tercero: $25 + 40 = 65$

Cuarto: $100 - 65 = 35$

Respuesta: 35 pasteles son para diabéticos

Visión retrospectiva:

Es coherente la respuesta 35 porque es menor que 100. Se puede realizar de otra manera que es sumar los fraccionarios $1/4$ y $2/5$

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{5}{20} + \frac{8}{20} = \frac{13}{20} \quad \text{Este es el resultado de los pasteles con crema y si crema.}$$

Que corresponde a $13/20$ de $100 = 100/20 = 5 \times 13 = 65$

Entonces $100 - 65 = 35$ que es la misma respuesta anterior.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA COLEGIO SANTOS APOSTOLES

ÁREA DE MATEMÁTICAS

Profesora: Jessica Lorena Rico Patiño

Grado: sexto

INTERVENCIÓN 3: “Comprensión del problema planteado”

Objetivo de la intervención:

- Reconocer la importancia de la comprensión del problema antes de iniciar la solución.

Tiempo de la intervención: 2 horas

Trabajo del docente:

1. Explicar la importancia de comprender el problema antes de iniciar la solución.
2. Con los primeros problemas explicar cómo sacar los datos, la incógnita y hacer el proceso de reflexión.
3. Plantear problemas para que los estudiantes identifiquen los datos que son importantes y la incógnita que pide el problema.

Desarrollo:

PROBLEMA 1: Joaquín de 13 años tiene \$15.000 y María de 14 años tiene igual \$15.000.

Joaquín gasta la mitad de lo que tiene y María gasta $\frac{2}{4}$ partes de su dinero. ¿Cuánto dinero gasta cada uno?

Comprender el problema:

Datos:

María tiene \$15.000 y Joaquín tiene \$15.000

María gasta $\frac{1}{2}$ de \$15.000

Joaquín gasta $\frac{2}{4}$ de \$15.000

Incógnita: ¿Cuánto dinero gasta María? ¿Cuánto dinero gasta Joaquín?

Nótese que la edad de Joaquín y María no se necesitan para resolver el problema, así que no es importante identificarlo.

PROBLEMA 2: Un señor tiene un lote de 80m^2 . En $\frac{1}{4}$ del lote construye una casa y en $\frac{1}{6}$ de lo que le queda construye una piscina ¿Cuánta área en m^2 queda sin construir?

Comprender el problema:

Datos:

1 lote de 80 m^2

$\frac{1}{4}$ de 80 m^2

$\frac{1}{6}$ de lo que le queda

Incógnita:

¿Cuánta área en m^2 queda sin construir?

Nótese que el dato $\frac{1}{4}$ corresponde a todo el lote, mientras que el dato $\frac{1}{6}$ es únicamente a lo que queda, si no se lee bien el problema se puede caer en el error de hallar $\frac{1}{6}$ de 80.

PROBLEMA 3: Roberto suma dos fraccionarios y obtiene 1 como resultado ¿Cuáles son esos fraccionarios?

a. $\frac{5}{2}$ y $\frac{5}{2}$

b. $\frac{4}{3}$ y $\frac{8}{3}$

c. $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{6}$

d. $\frac{3}{8}$ y $\frac{5}{8}$

Comprender el problema:

Datos:

Primera pareja $\frac{5}{2}$ y $\frac{5}{2}$, Segunda pareja $\frac{4}{3}$ y $\frac{8}{3}$, tercera pareja $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{6}$ y cuarta pareja $\frac{3}{8}$ y $\frac{5}{8}$

Incógnita:

¿Cuál es la pareja que al sumar da el resultado 1?

PROBLEMA 4: Un juego vale \$50.000. Me hacen una rebaja de $\frac{1}{5}$ y luego sobre el nuevo precio me rebajan $\frac{2}{5}$ ¿Cuál es el precio final que debo pagar por el juguete?

Comprender el problema:

¿Ha entendido el problema? Si ____ No ____

¿Crees que puedes resolver el problema? Si ____ No ____ ¿Por qué? _____

Escriba los datos: _____

Escriba la incógnita: _____

Vuelva y lea el problema planteado, compare los datos identificados y la incógnita ¿Cree que están correctos? Si ____ No ____

Explique cómo se sintió en la comprensión del problema: _____

PROBLEMA 5: Un tanque se llena con agua $\frac{1}{3}$ de su capacidad. Más tarde se llena $\frac{1}{4}$ de lo que quedaba ¿Cuánto le falta al tanque para terminarse de llenar? Exprese en fraccionario.

Comprender el problema:

¿Ha entendido el problema? Si ____ No ____

¿Crees que puedes resolver el problema? Si ____ No ____ ¿Por qué? _____

Escriba los datos: _____

Escriba la incógnita: _____

Vuelva y lea el problema planteado, compare los datos identificados y la incógnita ¿Cree que están correctos? Si ____ No ____

Explique cómo se sintió en la comprensión del problema: _____

INSTITUCIÓN EDUCATIVA COLEGIO SANTOS APOSTOLES

ÁREA DE MATEMÁTICAS

Profesora: Jessica Lorena Rico Patiño

Grado: sexto

INTERVENCIÓN 4: “Concebir un plan y ejecutarlo”

Objetivo de la intervención:

- Conocer algunas estrategias para la solución de problemas matemáticos.
- Reflexionar sobre la planeación de los problemas.
- Resolver problemas teniendo en cuenta el plan.

Tiempo de la intervención: 2 horas

Trabajo del docente:

1. Explicar algunas estrategias utilizadas en la solución de problemas matemáticos.
2. Tomar los problemas trabajados en las sesiones anteriores para continuar con el proceso de solución de un problema con los pasos de Polya, que para este caso es elaborar y plan y ejecutarlo.

Desarrollo:

El segundo paso del Modelo de Polya es concebir un plan, es acá donde se escoge la mejor estrategia para solucionar el problema planteado.

Estrategias: Las estrategias son caminos para obtener un resultado, pudiéndose modificar para adaptarse al contexto. Permiten buscar la manera más sencilla de resolver el problema, por tanto entre más estrategias se conozca mejor preparados se encontraran los estudiantes en la solución de problemas. Algunas de las estrategias utilizadas para resolver un problema son:

- *Ensayo y error*. “Una estrategia muy directa es la utilización de respuestas al azar, sobre los operadores legales, hasta que se llegue al estado final. Así si uno se encuentra en un estado determinado, puede elegir al azar cualquier movimiento como paso siguiente a efectuar” Begoña (s.f).

El ensayo y error puede ser fortuito cuando es realizado al azar sin normas, sistemático cuando los valores se eligen en forma ordenada para evitar repeticiones y dirigido cuando contrastamos cada respuesta para conocer que tal lejos o cerca estamos del objetivo.

- *Representación gráfica*. Consiste en un trazado de cualquier objeto que represente la situación propuesta en el problema. Pueden ser dibujos, figuras, esquemas, entre otros. Es importante tener en cuenta que al realizar la representación gráfica, éstas no deben contener las propiedades de las que se esté seguro, para evitar confusiones, es por ello que la identificación de los datos e incógnita se hace primordial.
- *Problemas relacionados*. Recordar problemas similares que ha resuelto antes para buscar similitud en sus procesos. En este caso lo difícil puede ser escoger entre todos los problemas que recuerde para encontrar las mismas características.
- *Razonamiento*. En el razonamiento el estudiante no necesita hacer representación, ni operaciones detalladas de los procesos que va a llevar a cabo, sino por el contrario

analiza la situación presentada. En este caso el estudiante puede mentalmente resolver el problema y la mayoría de las veces lo hace adecuado el problema a una situación de su contexto particular.

- *Operaciones.* En esta estrategia se sigue un orden lógico de operaciones que se llevarán a cabo para resolver el problema.

PROBLEMA 1: Joaquín de 13 años tiene \$15.000 y María de 14 años tiene igual \$15.000.

Joaquín gasta la mitad de lo que tiene y María gasta $\frac{2}{4}$ partes de su dinero. ¿Cuánto dinero gasta cada uno?

Comprender el problema:

Datos:

María tiene \$15.000 y Joaquín tiene \$15.000

María gasta $\frac{1}{2}$ de \$15.000

Joaquín gasta $\frac{2}{4}$ de \$15.000

Incógnita: ¿Cuánto dinero gasta María? ¿Cuánto dinero gasta Joaquín?

Concebir un plan:

Se puede realizar con operaciones.

Primero: para lo que gasta María, la fracción de un número donde se divide 15000 en 2 y luego se multiplica el resultado por 1.

Segundo: para lo que gasta Joaquín, la fracción de un número donde se divide 15000 en 4 y luego se multiplica el resultado por 2.

Ejecutar el plan:

$$\text{María: } 15.000 / 2 = 7.500 \times 1 = 7.500$$

$$\text{Joaquín: } 15.000 / 4 = 3.750 \times 2 = 7.500$$

PROBLEMA 2: Un señor tiene un lote de 80m^2 . En $1/4$ del lote construye una casa y en $1/6$ de lo que le queda construye una piscina ¿Cuánta área en m^2 queda sin construir?

Comprender el problema:

Datos:

1 lote de 80 m^2

Casa: $1/4$ de 80 m^2

Piscina: $1/6$ de lo que le queda

Incógnita:

¿Cuánta área en m^2 queda sin construir?

Concebir un plan:

Con operaciones.

Primero: para hallar el área de la casa $1/4$ de 80, dividir el 80 en 4 y luego multiplicar por 1.

Segundo: A 80 le resto el resultado anterior.

Tercero: para hallar el área de la piscina, será $1/6$ del resultado anterior.

Cuarto: se suma el área de la casa y de la piscina.

Quinto: se resta el total del lote (80) con el resultado anterior, para determinar lo queda sin construir.

Ejecutar el plan:

Primero: área de la casa = $80 / 4 = 20 \times 1 = 20$

Segundo: $80 - 20 = 60$

Tercero: Piscina = $60 / 6 = 10 \times 1 = 10$

Cuarto: $20 + 10 = 30$

Quinto: $80 - 30 = 50 \text{ m}^2$

PROBLEMA 3: Roberto suma dos fraccionarios y obtiene 1 como resultado ¿Cuáles son esos fraccionarios?

a. $\frac{5}{2}$ y $\frac{5}{2}$

b. $\frac{4}{3}$ y $\frac{8}{3}$

c. $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{6}$

d. $\frac{3}{8}$ y $\frac{5}{8}$

Comprender el problema:

Datos:

Primera pareja $\frac{5}{2}$ y $\frac{5}{2}$, Segunda pareja $\frac{4}{3}$ y $\frac{8}{3}$, tercera pareja $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{6}$ y cuarta pareja $\frac{3}{8}$ y $\frac{5}{8}$

Incógnita:

¿Cuál es la pareja que al sumar da el resultado 1?

Concebir un plan:

Ensayo y error. Para este caso se deben sumar cada pareja (y simplificar) hasta que de el resultado 1.

Ejecutar del plan:

$$\frac{5}{2} + \frac{5}{2} = \frac{10}{2} = \frac{5}{1} = 5$$

Esta pareja no da como resultado 1

$$\frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{12}{3} = \frac{4}{1} = 4$$

Esta pareja no da como resultado 1

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Esta pareja no da como resultado 1

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

Esta pareja si da como resultado 1, así que es la respuesta correcta.

PROBLEMA 4: Un tanque se llena con agua $\frac{1}{3}$ de su capacidad. Más tarde se llena $\frac{1}{4}$ de lo que quedaba ¿Cuánto le falta al tanque para terminarse de llenar? Exprese en fraccionario.

Comprender el problema:

Datos:

$\frac{1}{3}$ del total del tanque se llena

$\frac{1}{4}$ de lo que queda se sigue llenándose.

Incógnita: ¿Cuánto falta por llenarse? Escribirlo en fraccionario.

Concebir un plan:

Gráfico.

Primero: dibujar el tanque (un rectángulo que hace las veces de tanque).

Segundo: se divide en tres partes y se sombrea 1, que será lo que se llena inicialmente.

Tercero: se divide lo que queda en 4 partes y se sombrea 1, que será lo que se llena después.

Cuarto: se debe mirar que todas las partes queden iguales, completar las divisiones.

Quinto: lo que quede sin sombrear es lo que no se ha llenado.

Ejecutar el plan:



PROBLEMA 5: Un juego vale \$50.000. Me hacen una rebaja de $\frac{1}{5}$ y luego sobre el nuevo

precio me rebajan $\frac{2}{5}$ ¿Cuál es el precio final que debo pagar por el juguete?

Comprender el problema:

Datos:

Costo inicial del juego = \$50.000

Primera rebaja $\frac{1}{5}$ de \$50.000

Segunda rebaja $\frac{2}{5}$ de la primera rebaja

Incógnita: ¿Cuánto se debe pagar por el juguete?

Concebir un plan:

Escriba la estrategia que va a utilizar: _____

¿Por qué escogió esta estrategia? _____

Enumere los pasos para solucionar el problema:

Ejecución del plan

Solucione el problema:

¿Fue fácil solucionar el problema? Si ____ No ____

¿Utilizó la estrategia planteada? Si ____ No ____

¿Quiso cambiar de estrategia cuando solucionaba el problema? Si ____ No ____

¿Iba revisando las operaciones que estaba realizando? Si ____ No ____

INSTITUCIÓN EDUCATIVA COLEGIO SANTOS APOSTOLES

ÁREA DE MATEMÁTICAS

Profesora: Jessica Lorena Rico Patiño

Grado: sexto

INTERVENCIÓN 5: “Método de Polya: Visión retrospectiva”

Objetivo de la intervención:

-
- Reflexionar sobre la evaluación del problema resuelto.
- Resolver problemas teniendo en cuenta el plan.

Tiempo de la intervención: 2 horas

Trabajo del docente:

1. Explicar algunas estrategias utilizadas en la solución de problemas matemáticos.
2. Tomar los problemas trabajados en las sesiones anteriores para continuar con el proceso de solución de un problema con los pasos de Polya, que para este caso es elaborar y plan y ejecutarlo.

Desarrollo:

PROBLEMA 1: Joaquín de 13 años tiene \$15.000 y María de 14 años tiene igual \$15.000.

Joaquín gasta la mitad de lo que tiene y María gasta $\frac{2}{4}$ partes de su dinero. ¿Cuánto dinero gasta cada uno?

Comprender el problema:

Datos:

María tiene \$15.000 y Joaquín tiene \$15.000

María gasta $\frac{1}{2}$ de \$15.000

Joaquín gasta $\frac{2}{4}$ de \$15.000

Incógnita: ¿Cuánto dinero gasta María? ¿Cuánto dinero gasta Joaquín?

Concebir un plan:

Se puede realizar con operaciones.

Primero: para lo que gasta María, la fracción de un número donde se divide 15000 en 2 y luego se multiplica el resultado por 1.

Segundo: para lo que gasta Joaquín, la fracción de un número donde se divide 15000 en 4 y luego se multiplica el resultado por 2.

Ejecutar el plan:

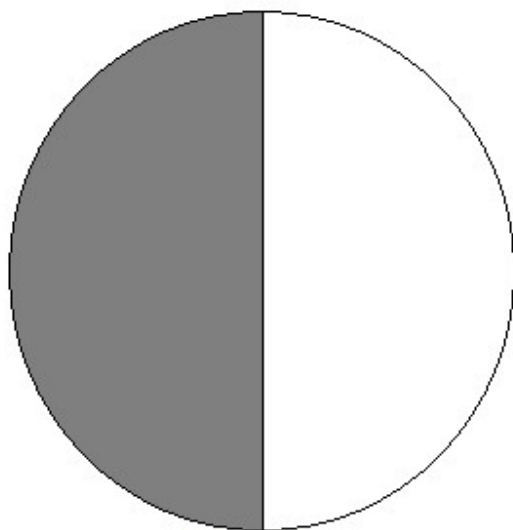
María: $15.000 / 2 = 7.500 \times 1 = 7.500$

Joaquín: $15.000 / 4 = 3.750 \times 2 = 7.500$

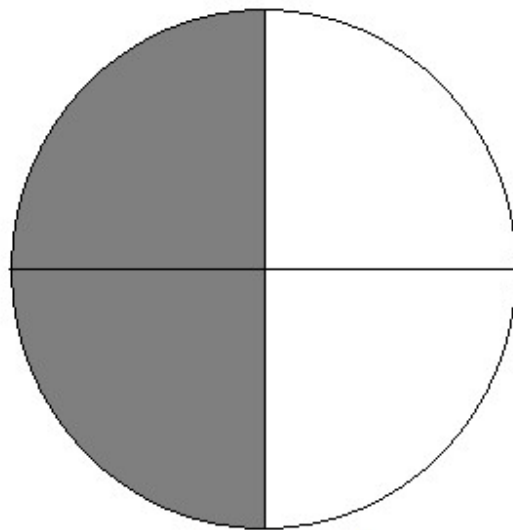
Visión retrospectiva:

Es importante revisar todo el proceso llevado a cabo, comparar el resultado con el contexto del problema.

Para saber si correcta la respuesta que ambos, María y Joaquín gastaron lo mismo, se puede representar por medio de gráficos $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ como se muestra a continuación.



María $\frac{1}{2}$



Joaquín $\frac{2}{4}$

PROBLEMA 2: Un señor tiene un lote de 80m^2 . En $\frac{1}{4}$ del lote construye una casa y en $\frac{1}{6}$ de lo que le queda construye una piscina ¿Cuánta área en m^2 queda sin construir?

Comprender el problema:

Datos:

1 lote de 80 m^2

Casa: $\frac{1}{4}$ de 80 m^2

Piscina: $\frac{1}{6}$ de lo que le queda

Incógnita:

¿Cuánta área en m^2 queda sin construir?

Concebir un plan:

Con operaciones.

Primero: para hallar el área de la casa $\frac{1}{4}$ de 80, dividir el 80 en 4 y luego multiplicar por 1.

Segundo: A 80 le resto el resultado anterior.

Tercero: para hallar el área de la piscina, será $\frac{1}{6}$ del resultado anterior.

Cuarto: se suma el área de la casa y de la piscina.

Quinto: se resta el total del lote (80) con el resultado anterior, para determinar lo queda sin construir.

Ejecutar el plan:

Primero: área de la casa = $80 / 4 = 20 \times 1 = 20$

Segundo: $80 - 20 = 60$

Tercero: Piscina = $60 / 6 = 10 \times 1 = 10$

Cuarto: $20 + 10 = 30$

Quinto: $80 - 30 = 50 \text{ m}^2$

Es importante ir controlando la ejecución del plan para evitar errores.

Visión retrospectiva:

Todo el proceso fue revisado durante su ejecución, la respuesta es lógica con el planteamiento del problema. Para comparar el resultado se puede hacer una gráfica y determinar si es un resultado coherente.

PROBLEMA 3: Roberto suma dos fraccionarios y obtiene 1 como resultado ¿Cuáles son esos fraccionarios?

- a. $\frac{5}{2}$ y $\frac{5}{2}$ b. $\frac{4}{3}$ y $\frac{8}{3}$ c. $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{6}$ d. $\frac{3}{8}$ y $\frac{5}{8}$

Comprender el problema:

Datos:

Primera pareja $\frac{5}{2}$ y $\frac{5}{2}$, Segunda pareja $\frac{4}{3}$ y $\frac{8}{3}$, tercera pareja $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{6}$ y cuarta pareja $\frac{3}{8}$ y $\frac{5}{8}$

Incógnita:

¿Cuál es la pareja que al sumar da el resultado 1?

Concebir un plan:

Ensayo y error. Para este caso se deben sumar cada pareja (y simplificar) hasta que de el resultado 1.

Ejecutar del plan:

$$\frac{5}{2} + \frac{5}{2} = \frac{10}{2} = \frac{5}{1} = 5$$

$$\frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{12}{3} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

Visión retrospectiva:

Al probar con todas las parejas, solo una de ellas da como resultado lo que se pedía en el problema, que es 1. La suma de fracciones homogéneas se resuelven sumando en numerador y dejando igual al denominador.

PROBLEMA 4: Un tanque se llena con agua $\frac{1}{3}$ de su capacidad. Más tarde se llena $\frac{1}{4}$ de lo que quedaba ¿Cuánto le falta al tanque para terminarse de llenar? Exprese en fraccionario.

Comprender el problema:

Datos:

$\frac{1}{3}$ del total del tanque se llena

$\frac{1}{4}$ de lo que queda se sigue llenándose.

Incógnita: ¿Cuánto falta por llenarse? Escribirlo en fraccionario.

Concebir un plan:

Gráfico.

Primero: dibujar el tanque (un rectángulo que hace las veces de tanque).

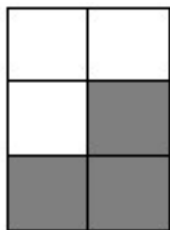
Segundo: se divide en tres partes y se sombrea 1, que será lo que se llena inicialmente.

Tercero: se divide lo que queda en 4 partes y se sombrea 1, que será lo que se llena después.

Cuarto: se debe mirar que todas las partes queden iguales, completar las divisiones.

Quinto: lo que quede sin sombrear es lo que no se ha llenado.

Ejecutar el plan:



Visión retrospectiva:

¿Logró resolver el problema? Si ___ No ___

Escriba la respuesta del problema: _____

Escriba la forma para comprobar que la respuesta es correcta: _____

¿Es coherente la respuesta con el contexto del problema? Si ____ No ____

De que otra forma se podría resolver el problema: _____

¿Qué fue lo que más se le dificultó al resolver el problema? _____

PROBLEMA 5: Un juego vale \$50.000. Me hacen una rebaja de $\frac{1}{5}$ y luego sobre el nuevo precio me rebajan $\frac{2}{5}$. ¿Cuál es el precio final que debo pagar por el juguete?

Comprender el problema:

Datos:

Costo inicial del juego = \$50.000

Primera rebaja $\frac{1}{5}$ de \$50.000

Segunda rebaja $\frac{2}{5}$ de la primera rebaja

Incógnita: ¿Cuánto se debe pagar por el juguete?

Concebir un plan:

Operaciones

Primero: hallar la fracción de un número.

Segundo: restar el total menos el resultado anterior.

Tercero: hallar la fracción de un número con el resultado anterior, para la segunda rebaja.

Cuarto: restar el total inicial con el resultado anterior.

Ejecución del plan:

Primero: $50.000 / 5 = 10.000 \times 1 = 10.000$

Segundo: $50.000 - 10.000 = 40.000$

Tercero: $40.000 / 5 = 8.000 \times 2 = 16.000$

Cuarto: $50.000 - 16.000 = 34.000$

¿Logró resolver el problema? Si ☐ No ☐

Escriba la respuesta del problema: _____

Escriba la forma para comprobar que la respuesta es correcta: _____

¿Es coherente la respuesta con el contexto del problema? Si ☐ No ☐

De que otra forma se podría resolver el problema: _____

¿Qué fue lo que más se le dificultó al resolver el problema? _____

ANEXO C.
Evaluación Final

Tercer momento: Evaluación Final

Problema 1.

Hoy un árbol midió $\frac{453}{3}$ cm, hace un mes había medido $\frac{267}{4}$ cm ¿Cuánto ha crecido el árbol?

Después de leer el problema contestar las preguntas justificando cada respuesta:

¿Ha entendido el problema? Si ____ No ____

Escriba los datos que se presentan en el problema: _____

¿Cuál es la incógnita? _____

¿Se parece a algún problema que haya resuelto antes? _____

Escriba la estrategia (gráfica, operaciones, razonamiento, ecuaciones,...) que va a utilizar para resolver el problema: _____

Escriba los pasos para resolver el problema de forma correcta:

1. _____

2. _____

3. _____

4. _____

5. _____

Resuelva el problema:

Solución

¿Lo que hizo para resolver el problema, fue lo mismo que pensó desde el principio o durante el proceso se le ocurrió otra manera? _____

Escriba la respuesta del problema: _____

¿Cómo verificaría que el resultado obtenido es correcto? _____

¿Es correcta la respuesta obtenida de acuerdo al contexto del problema? Si ____ No ____

Explique: _____

Cómo se sintió resolviendo el problema: _____

¿Se puede resolver el problema de otra manera? Si ____ No ____

Explique: _____

Escriba las dificultades presentadas para resolver el problema _____

Problema 2.

Juliana tiene \$200.000 y gastó $\frac{3}{5}$ en comprar zapatos y $\frac{2}{10}$ en comprar una camiseta ¿Cuánto dinero le quedó a Juliana?

Después de leer el problema contestar las preguntas justificando cada respuesta:

¿Ha entendido el problema? Si ____ No ____

Escriba los datos que se presentan en el problema: _____

¿Cuál es la incógnita? _____

¿Se parece a algún problema que haya resuelto antes? _____

Escriba la estrategia (gráfica, operaciones, razonamiento, ecuaciones,...) que va piensa utilizar para resolver el problema: _____

Escriba los pasos para resolver el problema de forma correcta:

1. _____

2. _____

3. _____

4. _____

5. _____

Resuelva el problema:

Solución

¿Lo que hizo para resolver el problema, fue lo mismo que pensó desde el principio o durante el proceso se le ocurrió otra manera? _____

Escriba la respuesta del problema: _____

¿Cómo verificaría que el resultado obtenido es correcto? _____

¿Es correcta la respuesta obtenida de acuerdo al contexto del problema? Si ____ No ____

Explique: _____

Cómo se sintió resolviendo el problema: _____

¿Se puede resolver el problema de otra manera? Si ____ No ____

Explique:

Escriba las dificultades presentadas para resolver el problema _____

Problema 3.

Alejandra compró $\frac{1}{2}$ m de tela azul a \$3500 el metro y $\frac{15}{4}$ m de telas de distintos colores a \$4000

el metro. Pagó con dos billetes de \$10.000 ¿Cuánto costaron los dos pedazos de tela?

Después de leer el problema contestar las preguntas justificando cada respuesta:

¿Ha entendido el problema? Si ____ No ____

Escriba los datos que se presentan en el problema: _____

¿Cuál es la incógnita? _____

¿Se parece a algún problema que haya resuelto antes? _____

Escriba la estrategia (gráfica, operaciones, razonamiento, ecuaciones,...) que va a utilizar para resolver el problema: _____

Escriba los pasos para resolver el problema de forma correcta:

1. _____

Resuelva el problema:

Solución

¿Lo que hizo para resolver el problema, fue lo mismo que pensó desde el principio o durante el proceso se le ocurrió otra manera? _____

Escriba la respuesta del problema: _____

¿Cómo verificaría que el resultado obtenido es correcto? _____

¿Es correcta la respuesta obtenida de acuerdo al contexto del problema? Si ____ No ____

Explique:

Cómo se sintió resolviendo el problema: _____

¿Se puede resolver el problema de otra manera? Si ____ No ____

Explique:

Escriba las dificultades presentadas para resolver el problema _____

Problema 4.

Yeimi compra una pizza y la reparte entre sus amigos. A Karen le dio $\frac{3}{12}$, a Felipe le dio $\frac{5}{12}$ y a

José le dio $\frac{2}{12}$. ¿Cuántas porciones de pizza le quedan a Yeimi?

Después de leer el problema contestar las preguntas justificando cada respuesta:

¿Ha entendido el problema? Si ____ No ____

Escriba los datos que se presentan en el problema: _____

¿Cuál es la incógnita? _____

¿Se parece a algún problema que haya resuelto antes? Igual ____ Similar ____ Un poco ____ Nada ____

¿Cree que puede resolverlo? Si ____ No ____

Escriba la estrategia (gráfica, operaciones, razonamiento, ecuaciones, ensayo y error...) que piensa utilizar para resolver el problema: _____

Escriba los pasos para resolver el problema de forma correcta:

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____
5. _____

Resuelva el problema:

— *Solución* —

¿Mientras resolvía el problema iba rectificando lo que hacía? Si ____ No ____

Durante la solución del problema: ¿revisó nuevamente los datos y la incógnita? Si ____ No ____

¿Leyó nuevamente el problema? Si ____ No ____

¿Lo que hizo para resolver el problema, fue lo mismo que pensó desde el principio o durante el proceso se le ocurrió otra manera? Explique _____

Escriba la respuesta del problema: _____

¿Cómo verificaría que el resultado obtenido es correcto? _____

¿Es correcta la respuesta obtenida de acuerdo al contexto del problema? Si ____ No ____

Explique: _____

Cómo se sintió resolviendo el problema: _____

¿Se puede resolver el problema de otra manera? Si ____ No ____

Explique: _____

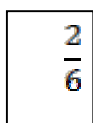
Escriba las dificultades presentadas para resolver el problema _____

Problema 5.

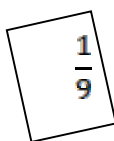
Un grupo de niños juega con cuatro fichas que tienen números fraccionarios, haciendo diferentes operaciones entre ellos. Al hacer la multiplicación entre dos de ellos, les dio como resultado $\frac{2}{45}$.



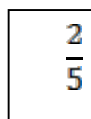
A



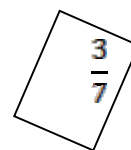
B



C



D



E

¿Cuáles son las dos fichas que han seleccionado los niños?

Después de leer el problema contestar las preguntas justificando cada respuesta:

¿Ha entendido el problema? Si ___ No ___

Escriba los datos que se presentan en el problema: _____

¿Cuál es la incógnita? _____

¿Se parece a algún problema que haya resuelto antes? Igual ___ Similar ___ Un poco ___ Nada ___

¿Cree que puede resolverlo? Si ___ No ___

Escriba la estrategia (gráfica, operaciones, razonamiento, ecuaciones, ensayo y error...) que piensa utilizar para resolver el problema: _____

Escriba los pasos para resolver el problema de forma correcta:

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____
5. _____

Resuelva el problema:

Solución

¿Mientras resolvía el problema iba rectificando lo que hacía? Si ____ No ____

Durante la solución del problema: ¿revisó nuevamente los datos y la incógnita? Si ____ No ____

¿Leyó nuevamente el problema? Si ____ No ____

¿Lo que hizo para resolver el problema, fue lo mismo que pensó desde el principio o durante el proceso se le ocurrió otra manera? Explique _____

Escriba la respuesta del problema: _____

¿Cómo verificaría que el resultado obtenido es correcto? _____

¿Es correcta la respuesta obtenida de acuerdo al contexto del problema? Si ____ No ____

Explique:

Cómo se sintió resolviendo el problema: _____

¿Se puede resolver el problema de otra manera? Si ____ No ____

Explique: _____

Escriba las dificultades presentadas para resolver el problema _____

ANEXO D.

Autorización de los padres de familia para la aplicación de instrumentos

San José de Cúcuta, Junio 5 del 2017

ASUNTO: Autorización para aplicación de instrumentos en sexto

INSTITUCIÓN EDUCATIVA COLEGIO SANTOS APÓSTOLES

SEDE B

Yo _____ padre de familia
y/o acudiente del estudiante _____ de _____
años de edad y quien cursa actualmente el grado _____ en esta institución,
autorizo a mi hijo(a) y/o acudido(a), menor de edad, para participar en el proyecto de
investigación que desarrolla la docente Jessica Lorena Rico Patiño, en el área de
matemáticas para la Maestría Virtual en Enseñanza de las Ciencias de la Universidad
Autónoma de Manizales, durante el año en curso.

De igual manera doy total y plena autorización a la docente para grabar, fotografiar y
filmar con mi hij(a) y/o acudido(a) además interactuar a través de un grupo formado en
la redes sociales específicas en cuanto a lo que esté relacionado con dicho proyecto.

ATENTAMENTE

Padre de familia y/o acudiente

C.C. _____

ANEXO E.

Autorización del rector para la aplicación de instrumentos

San José de Cúcuta, Junio 5 del 2017

ASUNTO: Autorización para aplicación de instrumentos en sexto

INSTITUCIÓN EDUCATIVA COLEGIO SANTOS APÓSTOLES

SEDE B

Yo OTARDO RINCÓN CONTRETAS rector y representante legal de la Institución Educativa Colegio Santos Apóstoles, de la Ciudad de San José de Cúcuta, en el departamento de Norte de Santander, autorizo a la docente Jessica Lorena Rico Patiño, para desarrollar el proyecto de la Maestría en Enseñanza de la Ciencias, de la Universidad Autónoma de Manizales, en el área de matemáticas, con los estudiantes del grado a su cargo, de la Sede B de ésta institución, durante el año en curso.

De igual manera doy total y plena autorización a la docente para grabar, fotografiar y filmar a los estudiantes, además interectuar a través de un grupo formado en la redes sociales específicas en cuanto a lo que esté relacionado con dicho proyecto. Todo lo anterior con previa autorización escrita del padre de familia y/o acudiente.

ATENTAMENTE

RECTOR

C.C. _____

ANEXO F.

Respuesta de los estudiantes en las pruebas Diagnóstica y final

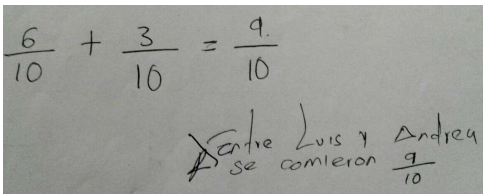
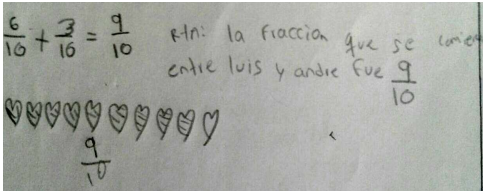
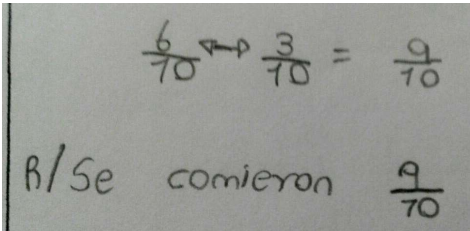
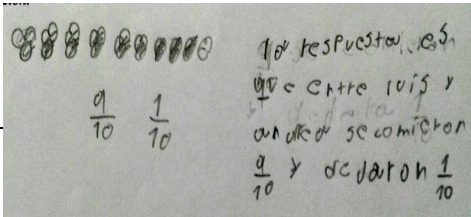
Tabla F1.
Respuestas Prueba Diagnóstica

PROBLEMA 1. Luis y Andrea encontraron chocolates en la casa de la abuela. Luis se comió 6/10 de los chocolates y Andrea se comió 3/10 ¿Qué fracción se comieron entre Luis y Andrea?		
Preguntas	1. Identificación: Comprensión del problema Respuesta	Interpretación
- ¿Ha entendió el problema? Explique con sus propias palabras el problema planteado.	E1. Si. Luis y Andrea compraron chocolates en la casa de Doña pepa. Luis se comió 6/10 de los chocolates y Andrea se comió 3/10 de los mismos. E2. Si. Es una suma porque dice que fracción se comió entre Luis y andrea en tonces es una suma. E3. Si. Luis se comio 6/10 y Andrea 3/10 eso da en total 9/10. E4. Si. Que Luis y Andrea encontraron chocolates en la casa de la abuela luis se comio 6/10 y andrea 3/10. E5. Si. heran 10 chocolates Luis comio 6 y andrea 3. E6. Si. Se trata que Luis se comio 6/10 de los chocolates y Andrea 3/10 de los chocolates.	Los estudiantes expresan entender el problema planteado y hacen la explicación con sus propias palabras de lo que entendieron en el enunciado. E1 dice lo mismo cambiando el lugar casa de abuela por casa de Doña pepa. Los demás si tratan de dar una interpretación con sus palabras para entender el contexto de los datos y la incógnita.
- ¿Cree que puede resolver el problema?	E1. Si. E2. Si. E3. Si. E4. Si. E5. Si. E6. Si.	Todos los estudiantes pueden resolver el problema.
- ¿A qué tengo que responder?	E1. Que fracción se comieron entre Luis y Andrea E2. ¿Qué fracción se comieron? E3. A la pregunta de Luis y andrea E4. Que fracción se comiero luis	Identifican la incógnita, pero aún no conocen esta palabra.

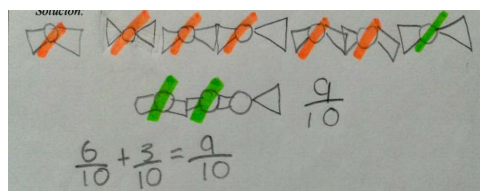
	y andrea	
	E5. cuantos chocolates se comieron	
	E6. “ ”	
- ¿Tengo todos los datos que se necesitan para resolver el problema?	E1. Si E2. Si E3. Si E4. Si E5. Si E6. Si	Conocen los datos y piensan que tienen todo lo que necesitan para resolver el problema, porque están acostumbrados a que siempre se les plantea problemas donde tienen todos los datos.
2. Planificación: Concebir un plan- Planear		
Preguntas	Respuesta	Interpretación
- ¿El problema planteado se parece a otro problema que haya resuelto antes?	E1. Si E2. Si E3. Si E4. No E5. Si E6. Si	Sólo el estudiante E4 piensa que no ha resuelto problemas similares antes.
- Explique la forma como se podría resolver el problema.	E1. Con una suma E2. sumando $3+6$ y da como resultado 9 y como es el mismo denominador se coloca el mismo denominador $9/10$. E3. una forma sería con gráficos por ejemplo bolitas. E4. Con una grafica E5. Haciendo fracción Haciendo 10 chocolates y eliminando los los que comieron. E6. que hay que hacer sumas de fracciones y es $6/10$ y $3/10$	Los estudiantes E1 , E2 , E5 y E6 dan la explicación de su proceso, que sin saberlo utilizaran la estrategia operaciones utilizando la suma de fracciones homogéneas, mientras que E3 y E4 escriben que con gráficos. Con esta pregunta se induce a pensar en un plan para resolver el problema y sin saberlo están escogiendo la estrategia que les parece más adecuada. A ellos desde primaria se les ha trabajado operaciones y dibujos, así que es lo que más conocen para resolver un problema.
- Qué temas debe saber para resolver el problema.	E1. Luis $6/10$ chocolates Andrea $3/10$ E2. fraccionarios, sumar, restar, multiplicar y dividir E3. Números fraccionarios	Cuando se les pregunta por los temas los estudiantes E1 y E4 escriben los datos. Mientras que los estudiantes E2 , E3 , E5 y E6 , escriben

	E4. 6/10 y 3/10 E5. Fraccionarios E6. suma de fraccionarios	fraccionarios, el cual es el tema que se está trabajando, aunque E6 es más acertado y escribe la operación que se necesita para resolver este problema: suma de fraccionarios. Todos los estudiantes han resuelto problemas con fraccionarios antes.
- ¿Ha resuelto problemas de operaciones con fraccionarios?	E1. Si E2. Si E3. Si E4. Si E5. Si E6. Si	

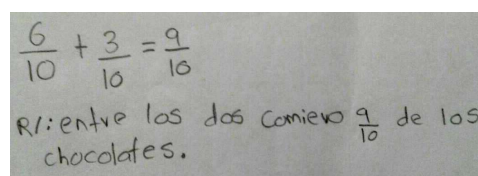
3. Ejecución: Ejecutar el plan- Controlar

Preguntas	Respuesta	Interpretación
- Resuelva el problema:	E1. 	E1 propone la suma de fraccionarios y así lo resuelve correctamente. E2 propone la suma de fraccionarios explicando la manera y lo resuelve como lo propuso, además realiza el dibujo.
	E2. 	E3 propone realizar dibujo para resolver el problema pero al solucionarlo realiza la operación de suma de fracciones homogéneas.
	E3. 	E4 propone la gráfica y efectivamente realiza un dibujo y da como respuesta lo que se comieron entre Luis y Andrea como lo que les sobró.
	E4. 	E5 propone la suma de fracciones y el dibujo, y en la solución realiza las dos cosas E6 propone suma de fracciones y es lo que realiza.

E5.



E6.



- Explique cómo se sintió resolviendo el problema

E1. Me sentí bien porque sabía lo que hacía

E2. Nerviosa porque pensaba que no era capaz

E3. Bien porque estaba fácil

E4. Bien porque ya se la respuesta

E5. Bien por que recuerdo algo que vi ya

E6. bien lo entendí

Todos se sintieron bien, aunque **E2** expresa nervios porque pensaba que no podía resolver el problema.

- ¿Qué dificultades encontró para resolver el problema?

E1. Ninguna

E2. Si era suma o resta

E3. Al responder algunas preguntas

E4. Ninguna por que era fácil

E5. Ninguna

E6. Pues las fracciones porque no sabía cual era pero hay lo entendí

E1, E4 y E5 no presentaron dificultad al resolver el problema, mientras que **E2** y **E6** no sabían la operación que debían realizar.

Por otro lado **E3** está acostumbrado a resolver operaciones y solucionar problemas sin responder a preguntas que lo lleven a hacer una reflexión sobre su proceso.

4. Evaluación: Visión retrospectiva-Evaluar

Preguntas	Respuesta	Interpretación
-----------	-----------	----------------

- ¿Cómo comprobaría que el resultado obtenido es correcto?	E1. No se... E2. No se E3. E4. No se E5. E6.	E2 y E5 realizan la suma de fraccionarios y el dibujo en la solución, no caen en cuenta que de esta forma podría comprobar porque en la operación y dibujo dan el mismo resultado.
- Haga la prueba.	E1. No se... E2. No se E3. E4. no se E5. E6. No se	Ninguno de los estudiantes logra hacer la prueba para saber si está bien el problema
- ¿Cómo le pareció el problema planteado?	E1. Exelente difcil al probar pero fácil lo de sumar. E2. Facil, pero lo difcil es la prueba porque no se E3. fácil E4. no se como probar E5. Mas omenos E6. vien	A los estudiantes les pareció adecuado el problema planeado, pero admiten no saber hacer la prueba de la respuesta obtenida.
- ¿Cómo se sintió contestando todas las preguntas?	E1. Bien, porque eso si lo sabia de lo que me explicaron eso se me queda E2. nerviosa, porque tenia miedo al no contestarlas bien. E3. Algo raro, porque en algunas no sabía que escribir. E4. bien era facil E5. Pues poco Normal E6. Bien	Los estudiantes no están acostumbrados a contestar preguntas durante el proceso de resolver un problema, puesto que siempre se plantea un problema con un contexto y al final viene la pregunta, pero no preguntas durante el proceso y menos para saber si ha entendió o como le parece.

PROBLEMA 2. En un restaurante se ofrecen 12 platos diferentes. La gráfica muestra la cantidad de platos internacionales y nacionales ¿Cuántos platos son internacionales?



1. Identificación: Comprensión del problema

Preguntas	Respuesta	Interpretación
-----------	-----------	----------------

- ¿Ha entendió el problema?	E1. no mucho E2. Si E3. Si E4. Si E5. Si E6. Si	Los estudiantes E2, E3, E4, E5 y E6 despues de leer el problema manifiestan que lo han entendido, mientras que E1 tiene algunas dudas puesto que su respuesta es “no mucho”
- Plantee el problema de otra manera.	E1. en una heladería ofrecen 10 helados diferentes. La grafica muestra la cantidad de helado de Fresa y Chocolate ¿Cuántos helados son de chocolate E2. se parten en porciones iguales entonces $\frac{1}{4}$ E3. El problema me dice que deben encontrar de esos 12 platos cuales son internacionesl. O se podría hablar de temas distintos. ej: Animales. E4. no se E5. en la resta se dan los platos la gráfica muestra los platos conocidos por las personas y los que no conocen E6. lo mismo si no que seria lo sombreado nacionales y la otra internacionales	Nuevamente E1 plantea el mismo problema pero cambia el contexto de restaurante por heladería. Así lo hace E6 cuando dice que cambiar lo sombreado en vez de ser nacional ponerlo internacional. E4 no sabe como plantearlo de otra manera aunque dice que si ha entendido el problema. Los estudiantes E2, E3 y E5 intentan expresar el problema con sus palabras aunque no es entendible lo que quieren plantear. De acuerdo a lo escrito en ninguno de los estudiantes se puede dar cuenta que hayan entendido el problema de acuerdo a lo escrito.
- Ha dibujado gráficas antes para representar fraccionarios.	E1. Si E2. Si E3. Si E4. Si E5. Si E6. Si	Todos los estudiantes dicen que si han dibujado gráficas para representar fraccionarios.
- En ocasiones anteriores ¿Ha resuelto problemas parecidos al planteado?	E1. No E2. Si E3. Si E4. No E5. Si E6. Si	A pesar que han representado gráfico para fraccionarios, no es lo mismo que el problema tenga el gráfico en el contexto y menos que el problema de una información y gráfico otra.

- ¿Cuáles son los datos o valores conocidos?	E1. hay doce platos diferentes. En la grafica muestra los negros son internacionales y blancos nacionales E2. una parte son internacionales y el resto nacionales E3. No lo entiendo E4. Ofrecen 12 platos internacionales E5. Ofrecen 12 y muestran una grafica los nacionales e internacionales E6. Pues la grafica	En este caso los estudiantes E1 y E4 no han resuelto problemas similares al planteado, los demás dicen que si han resuelto de este modo. E1 aunque al principio pensaba no entendía bien el problema logra identificar los datos correctamente, así como E5. E2 expresa una parte de los datos. Mientras que E4 y E6 no interpretan bien y E3 no tendiente.
- ¿Qué se está preguntando en el problema?	E1. Cuantos platos son internacionales. E2. ¿Cuántos son internacionales? E3. que... ¿cuántos platos son internacionales? E4. Cuantos platos internacionales E5. Cuantos platos son internacionales E6. Que grafican cuantos sena nacionales o interna	Sólo E6 no identifica lo que se pregunta en el problema. Los demás si lo identifican.
- ¿La gráfica es de ayuda? ¿Por qué?	E1. Si. por que en el problema no dice lo que menciona la grafica. E2. Si. por las porciones son iguales entonces solo 12 agara un peaso E3. Si. me ayuda a dividir el circulo en 12 partes. E4. Si. mas o menos se cuanto E5. Si. se puede entender de una manera que se nos facilite mas a los estudiantes E6. Si. hay una puede saber cuales platos son nacionales e internacionales	Todos los estudiantes opinan que la gráfica es de ayuda, pero sólo E1, E2 y E3 saben cómo utilizarla.
- ¿Entiende la gráfica que se presenta?	E1. Si E2. E3. Si	Los estudiantes E1, E3, E5, E6 dicen que entienden la gráfica que se presenta en el

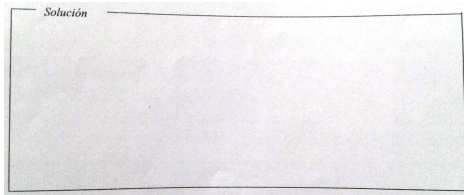
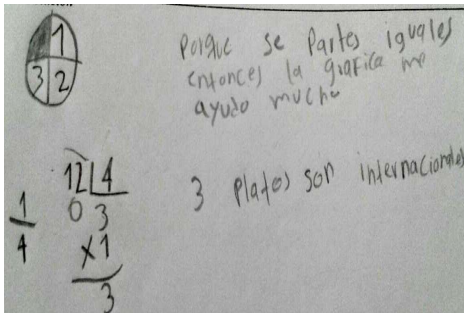
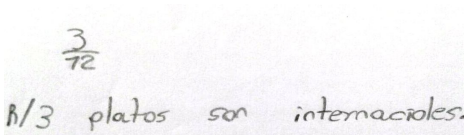
	E4. No E5. Si E6. Si	problema.
- Escriba la fracción que representa lo sombreado ¿Lo sombreado corresponde a internacional o nacional?	E1. 2/12. internacional E2. 1/4. internacional E3. 3/12. Internacional E4. No se. internacional E5. 1/4. Internacional E6. 2/8. Internacional	Sólo E2 y E4 nombraron la parte que en la gráfica se muestra lo internacional, E3 escribe la respuesta del fraccionario que representa lo internacional. Mientras que los estudiantes E1, E5 y E6 no plantean el fraccionario correcto.

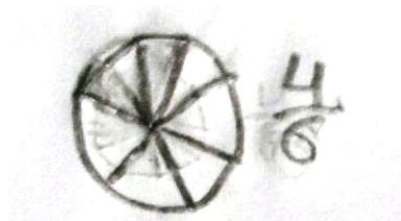
2. Planificación: Concebir un plan- Planear

Preguntas	Respuesta	Interpretación
- ¿Planeó algunos pasos para resolver el problema?	E1. No E2. Si E3. Si E4. Si E5. Si E6. No	E1 y E6 dicen que no planearon los pasos.
- Escriba los pasos para resolver el problema. <i>Nota: esta pregunta la puse después de resolver el problema para que escribieran los pasos que habían hecho para resolver el problema.</i>	E1. E2. 1 Leerlo con calma 2 ver la grafica 3 leer la pregunta 4 Resolverlo E3. 1 Dividir el circulo en 12 partes 2 Ver cuales eran nacionales e internacionales 3 Tome las internacionales 4 Las mire 5 Y escribi 3/12 E4. 1 cuantos internaciona 2 nacional 3 mi cuanto es menos internacion 4 y cuarto es mayor nacional 5 hacer una grafica E5. 1 Repartir partes iguales la grafica 2 contar cuantas partes hay R/ 4 3 contar la parte sombreada que es internacional R/ 1	Solo E1 no escribe los pasos para resolver el problema.

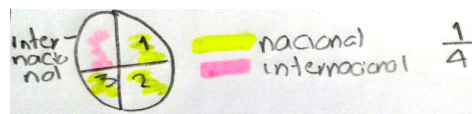
- ¿Son necesarios todos los pasos para resolver el problema? ¿Por qué?	E6.	1 hacer la grafica 2 Poner la fracción 3 ver si es suma multiplicación o division de fracciones 4 resolverlo 5 Poner la respuesta	Los estudiantes E3, E4, E6 opinan que es importante tener en cuenta los pasos para resolver el problema, ya que se facilita la solución. E1 no opina nada. E2 y E5 no piensan que no son importantes porque son elaborados por ellos mismos.
	E1.		
	E2. No. Los pasos los hice yo		
	E3. Si. Uno se puede confundir en el problema.		
	E4. Si. si no se puede resolver. E5. No. porque de esa manera se me facilito		
	E6. Si. hay uno lo puede resondre bien		

3. Ejecución: Ejecutar el plan- Controlar

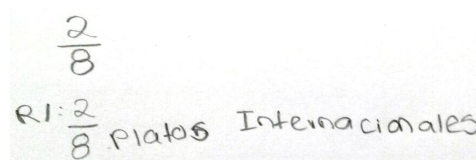
Preguntas	Respuesta	Interpretación
- Resuelva el problema.	E1.	Los estudiantes E2 y E3 lograron resolver el problema. E4, E5 y E6 no resolvieron bien el problema, mientras que E1 no intentó resolverlo.
		
	E2.	
		
	E3.	
		
	E4.	



E5.



E6.



- ¿Cómo se sintió al solucionar el problema?

E1. No muy bien por que no me acorde de nada de lo que estudi y no me sentí naa bien

E2. Nerviosa porque me da miedo que no lo pueda responder

E3. Angustiado porque casi no la encuentro.

E4. mas o menos

E5. Regular porque no supe comprobar

E6. vien lo entendí

Sólo **E6** manifiesta que se sintió bien al resolver el problema, los demás expresan nervios, angustia o no sentirse bien.

4. Evaluación: Visión retrospectiva-Evaluar

Preguntas	Respuesta	Interpretación
¿Está seguro de la respuesta del problema?	E1. No E2. Si E3. Si E4. Si E5. Si E6. Si	E1 no está seguro de la respuesta del problema, los demás si lo están.
¿Cómo comprobaría que la respuesta es	E1. E2. No me acuerdo	Ninguno de los estudiantes sabe como comprobar la

correcta?	E3. no se E4. no se E5. No lo sabría E6. no se	respuesta.
¿Cómo le parece el problema planteado? Explique	E1. E2. Pues a lo principio difícil pero lo analice y me pareció fácil E3. Bien me parece un problema excelente E4. Mas o menos un poco difícil E5. muy bien esta bien planteado E6. Vienen pues ese problema yo ya lo tenía entendido	E2 hizo una reflexión del problema, donde al principio no lo entendió pero después del análisis ya comprendió el problema. E6 dice que estaba bien porque ya lo tenía planteado, pero más que tenerlo planteado quiso decir que lo entendía.
¿Comprendió toda la información?	E1. Si porque esta bien expresado E2. Si E3. Si E4. Si E5. Si E6.	E6 no opina nada, mientras que los demás dicen que si comprendieron la información que planteaba el problema.

PROBLEMA 3. En un día de trabajo, una pastelería ha producido 100 pasteles, de los cuales $\frac{1}{4}$ tienen crema pastelera, $\frac{2}{5}$ de la producción de pasteles no tiene crema y el resto son para diabéticos ¿Cuántos pasteles para diabéticos produjo la pastelería?

1. Identificación: Comprensión del problema

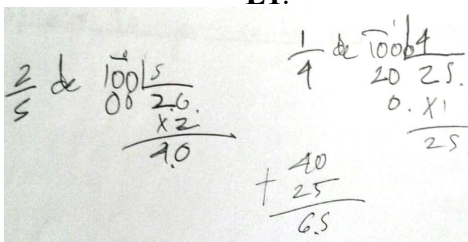
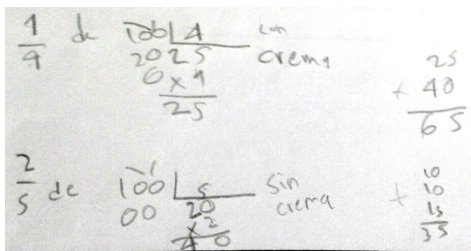
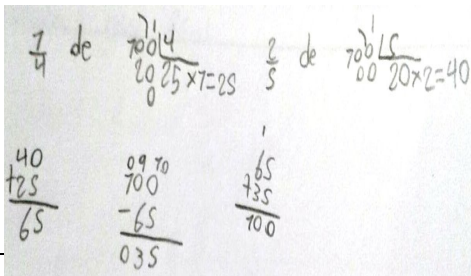
Preguntas	Respuesta	Interpretación
- ¿Cómo se siente después de leer el problema? ¿Por qué?	E1. Excelente E2. normal E3. relajado E4. estresado E5. Bien favorecería relajado E6. Bien	Sólo E3 manifiesta estrés al iniciar el problema, los demás estudiantes están bien.
- ¿Cree que puede resolver el problema? ¿Por qué?	E1. Si. Porque se le que voy a hacer. E2. Si. esta muy fácil. E3. Si. tengo lo suficiente para resolverlo E4. Si. no se E5. No. No entiendo que toca hacer E6. No. no entendí la fracción de los diabéticos	Sólo los estudiantes E1 , E2 , E3 entendieron el problema. Los estudiantes E4 , E5 , E6 creen que no pueden resolver el problema.

2. Planificación: Concebir un plan- Planear

Preguntas	Respuesta	Interpretación
-----------	-----------	----------------

- ¿Tiene un plan para resolverlo?	E1. Si. E2. Si. E3. Si. E4. no E5. Si. E6.	Los estudiantes E1, E2, E3 y E5 tienen un plan para resolver el problema. Aunque E4 y E5 pensaron que no podían resolver el problema, dicen tener un plan.
- ¿En qué consiste?	E1. en hacer operaciones. E2. en dividir E3. 100 dividido en 4 y multiplicado en 1. 100 dividido en 5 y multiplicado por 2 y luego resto 100 menos el resultado de la suma de los dos números anteriores. E4. E5. E6.	Cuando se pregunta por el plan para resolver el problema sólo los E1, E2 y E3 proponen lo que van a hacer. E4, E5, E6 no escriben nada.

3. Ejecución: Ejecutar el plan- Controlar

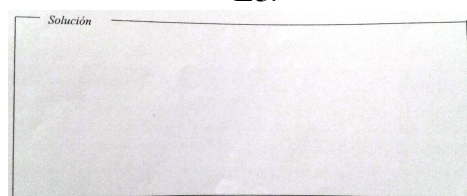
Preguntas	Respuesta	Interpretación
- Resuelva el problema	E1.  E2.  E3. 	E1 resuelve el problema hasta una parte correctamente, pero le hizo falta la resta de $100 - 65$ para que le diera la cantidad de pasteles para diabéticos. E2 y E3 resuelven el problema correctamente. E4, E5, E6 no resuelven el problema

E4.

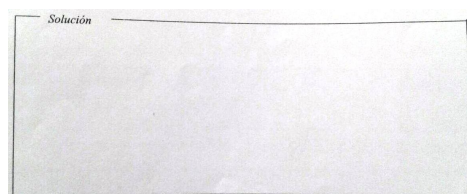
$\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$

$\frac{2}{5} \times \frac{100}{1} = \frac{500}{2}$

E5.



E6.



- Respuesta del problema

E1. 65 de 100 pasteles diabético.

E2. 35 son para diabéticos

E3. 35 pasteles hicieron para diabéticos

E4. 500/2

E5.

E6.

- ¿Cómo se sintió resolviendo el problema?

E1. bien porque sabía lo que hacía

E2. bien

E3. bien porque estaba fácil

E4. bien fácil

E5.

E6.

Las respuestas de **E2** y **E3** son correctas, la respuesta de **E1** y **E4** no son correctas. **E4** da una respuesta sin haber tenido un plan trazado.

E1, E2 y **E3** dicen que se sintieron bien resolviendo el problema.

Por otro lado el estudiante **E4** dice que se sintió bien, que estaba fácil pero su respuesta no fue correcta, no tenía

ningún plan, no sabía que iba a hacer.

4. Evaluación: Visión retrospectiva-Evaluar

Preguntas	Respuesta	Interpretación
- ¿Identificó los datos que necesitaba para solución el problema? ¿Cuáles fueron los datos?	E1. Si, hay 100 pasteles los cuales hay $\frac{1}{4}$ con crema, pastelera $\frac{2}{5}$ sin y el resto para diabeticos E2. Si. $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{5}$ y cuantos era pa diabeticos E3. Si y fueron; necesitaba saber perfectamente los números fraccionarios. E4. $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{4}$ E5. No E6.	E1 y E3 sabían perfectamente los datos. E2 planteó los datos sin especificar a que pertenecen, pero puso la incógnita. E4 sólo puso dos fraccionarios sin especificar. E5 no identificó y E6 no escribió nada.
- ¿Cuál fue el plan que hizo para encontrar la solución?	E1. La fracción E2. Dividir E3. sume lo que me dio de los resultados anteriores E4. fraccion E5. Leer y hasta y porque no entendi E6.	Ninguno de los estudiantes son claros en el plan para encontrar la solución. El estudiante E2 escribió dividir, es lo más coherente de estrategia para la solución.
- ¿Resolvió completamente el problema propuesto? ¿Qué pudo descubrir?	E1. Si. resolviendo y buscando el resultado E2. Si. que el es 35 de pasteles es para diabeticos E3. Si. Nada. E4. Si. nada E5. No. Por el momento nada E6.	Los estudiantes E1, E2, E3, E4, si resolvieron el problema completamente, que no significa que esté bien, sino que lo hayan completado. E5 y E6 no lo siguieron.
- ¿Qué le faltó saber?	E1. nada E2. no se E3. De este problema nada E4. Nada E5. El problema #3 E6.	Ninguno de los estudiantes pensaron en que les faltó saber.
- ¿De qué manera comprobó el resultado?	E1. Eso si no se como se hace no me acuerdo perfectamente. E2. todo lo entendi E3. Sumé el resultado de los resultados anteriores. E4. no se combar E5. No lo puede hacer E6.	Ninguno de los estudiantes comprobó el resultado.

- ¿Le pareció sencillo solucionar el problema? Explique	E1. Si. porque estaba bien digitado. E2. Si porque solamente tenia que dividir E3. Si porque ya he hecho problemas parecidos. E4. Si porque era una fraccion E5. No difcil porque no lo entendi E6.	Los estudiantes E1, E2, E3, E4 , creen que está sencillo el problema el problema.
- ¿Cómo se sintió contestando todas las preguntas propuestas?	E1. Exelente porque espresé lo que sentía respondiendo E2. normal E3. Bien, porque estaba muy fácil. E4. bien E5. pues un poco tranquila E6.	Todos los estudiantes excepto E6 se sintieron bien contestando las preguntas.

Elaboración propia

Tabla F2.

Respuestas Prueba Final

PROBLEMA 1. Hoy un árbol midió $\frac{453}{3}$ cm, hace un mes había medido $\frac{267}{4}$ cm ¿Cuánto ha crecido el árbol?		
1. Identificación: Comprensión del problema		
Preguntas	Respuesta	Interpretación
- ¿Ha entendió el problema?	E1. Si E2. Si E3. Si E4. Si E5. Si E6. Si	Todos los estudiantes dicen entender el problema
- Escriba los datos que se presenta en el problema.	E1. 453/3 cm hoy y 267/4 cm hace un mes E2. Resta 453/3 y 267/4 E3. Leer , planear lo que voy a hacer (convertir a fraccionarios) y luego restar E4. 453/3 medio y en un mes había medido	Los estudiantes E1, E3, E4, E5, E6 , identifican los datos que plantea el problema, mientras que E2 se confunde y escribe la

	367/4 E5. 453/3 y 267/4 E6. Hoy el árbol midió 453/3 cm y al otro día 267/4 cm.	planeación de lo que realizará sin escribir los datos.
- ¿Cuál es la incógnita?	E1. Cuanto a crecido E2. ¿Cuánto Ha crecido el arbol? E3. Cuanto a crecido el árbol E4. Cuanto crecio el árbol E5. Cuanto a crecido un árbol E6. ¿Cuanto ha crecido el árbol	Todos los estudiantes saben lo que les pregunta el problema planteado.
- ¿Se parece a un problema que haya resuelto antes?	E1. si E2. si E3. si E4. si E5. No ninguno E6. Si	Los estudiantes excepto E5 recuerdan haber resuelto un problema similar antes y esto les puede ayudar para resolver el propuesto en este caso.

2. Planificación: Concebir un plan- Planear

Pregunta	Respuesta	Interpretación
- Escriba la estrategia (gráfica, operaciones, razonamiento, ecuaciones,...) que piensa utilizar para resolver el problema.	E1. Operaciones de resta E2. La estrategia es operación de resta heterogénea E3. operaciones E4. operaciones E5. Resta heterogenia E6. Una resta, operación	Los estudiantes E1, E2, E3, E4, E6 proponen como estrategia la operación para resolver el problema, el estudiante E5, no escribe que hará una operación, pero si especifica la estrategia operación escribiendo “resta” puesto que esa será la operación que piensa utilizar para resolver el problema.
- Escriba los pasos para resolver el problema de forma correcta.	E1. 1. Leo, pongo los datos 2. Pongo los fraccionarios. 3. Higo la operación de resta de fraccionarios heterogéneos. 4. Verifico si me quedo mal E2. 1. Voy a multiplicar por 4 2. El otro en 3 3. Los resto E3. 1. Convertir los denominadores en el mismo.	Los estudiantes como pasos, proponen los pasos de Polya de resolución de problemas, en vez de escribir los pasos de la operación que pusieron como estrategia. Aún así se demuestra que reconocen el modelo de Polya en la resolución de problemas. Los estudiantes E3 y E6, si escriben detalladamente lo que realizaran para resolver

2. Restar los numeradores
3. Poner el mismo denominador

E4.

1. Tomo los datos
2. Hago un plan 3 4 |
3. Ago el plan multiplico por los numeros
4. Verifico

E5.

1. Averiguo numero igual
2. Multiplicar
3. Después restar
4. Guala la respuesta

E6.

1. leerlo, poner los datos y la incognita
2. hacer la estrategias, una operación.
3. resolver el problema es una resta de fraccionarios heterogéneos

el problema en su ejecución.

3. Ejecución: Ejecutar el plan- Controlar

Pregunta

- Resuelva el problema.

Respuesta

E1.

$$\frac{18}{12} - \frac{80}{12} = \frac{101}{12}$$

E1 a crecido $\frac{101}{12}$ cm

E2.

$$\frac{453}{34} - \frac{267}{43} =$$

$$\frac{1812}{12} - \frac{801}{12} = \frac{1011}{12}$$

E2 ha crecido $\frac{1011}{12}$

E3.

Solución

$$\frac{453}{34} - \frac{267}{43} =$$

$$\frac{1.812}{72} - \frac{801}{72} = \frac{1011}{72}$$

Interpretación

Todos realizaron un similar proceso en la ejecución que corresponde a la resta de fraccionarios heterogéneos, así que debían buscar el mismo denominador. El estudiante **E4** muestra la descomposición de los números 3 y 4 para hallar el mínimo común múltiplo y así saber cuál es el valor del denominador, los demás no ven necesario hacerlo porque por otros problemas ya reconocer el m.c.m de estos números.

Se observa en el estudiante **E5** que aunque sus procesos son correctos en la solución del problema, la respuesta no es adecuada ya que pone el valor del numerador como la respuesta, omitiendo el denominador, lo que permite

analizar que aún no identifica el fraccionario como un número compuesto por numerador y denominador que no se pueden separar, porque es un solo número.

E4.

Handwritten student work for E4. The student shows multiple attempts at solving the problem $\frac{453}{3} - \frac{267}{4}$. The work includes:

- A direct division: $\frac{453}{3} = 151$, then $151 - 66.75 = 84.25$ (though the final result is 72).
- A method using a common denominator of 12: $\frac{1812}{12} - \frac{801}{12} = \frac{1011}{12} = 84.25$.
- A vertical multiplication method: $453 \times 4 = 1812$, $267 \times 3 = 801$, then $1812 - 801 = 1011$, and finally $\frac{1011}{12} = 84.25$.
- A final result of 72, which is incorrect.

E5.

Handwritten student work for E5. The student shows the solution to $\frac{453}{3} - \frac{267}{4}$ using a common denominator of 12:

$$\frac{453}{3} - \frac{267}{4} = \frac{1812}{12} - \frac{801}{12} = \frac{1011}{12}$$

The student also shows a vertical multiplication method: $453 \times 4 = 1812$, $267 \times 3 = 801$, then $1812 - 801 = 1011$, and finally $\frac{1011}{12}$.

E6.

Handwritten student work for E6. The student shows the solution to $\frac{267}{4} - \frac{453}{3}$ using a common denominator of 12:

$$\frac{267}{4} - \frac{453}{3} = \frac{667.5}{12} - \frac{1812}{12} = \frac{-1144.5}{12}$$

The student also shows a vertical multiplication method: $267 \times 3 = 801$, $453 \times 4 = 1812$, then $801 - 1812 = -1011$, and finally $\frac{-1011}{12}$.

- ¿Lo que hizo para resolver el problema, fue lo mismo que pensó desde el principio o durante el proceso se le ocurrió otra manera?

E1. Hice lo mis que planteo al principio

E2. No fue lo mismo

E3. Si

E4. No

E5. siii

E6. Lo mismo

Los estudiantes realizaron lo mismo que plantearon desde el principio, aunque algunos no sepan redactar bien sus respuestas, en fin que hay dos preguntas en una con la idea que se generar una redacción explícita, pero

sólo responden si o no en la mayoría de los casos.

4. Evaluación: Visión retrospectiva- Evaluar

Pregunta	Respuesta	Interpretación
- Escriba la respuesta del problema.	E1. Crecio 1011/12 cm E2. $\frac{1011}{12}$ cm ha crecido cm E3. $\frac{1011}{12}$ E4. $\frac{1011}{12}$ E5. el árbol creció 1011 cm E6. Creció 1011/12 cm	Los estudiantes E1, E2, E3, E4 y E6 escribieron la respuesta correcta del problema. De los cuales E2 y E6 sabe que las unidades son importantes para expresar la respuesta correcta. El estudiantes E5 no tienen la respuesta correcta porque omitió el denominador pero entiende que al árbol se le está midiendo el crecimiento en cm.
- ¿Cómo verificaría que el resultado obtenido es correcto?	E1. Leyendo de nuevo y mirando que tenga coherencia. E2. Leer y mirar que tenga logico E3. Que el resultado tenga lógica E4. p E5. Ceer y ver que todo este bien E6. Haciendo una suma	Los estudiantes saben que el resultado debe verificarse leyendo de nuevo y observando coherencia. Para este caso no es tan fácil porque no se les hace aplicado a su contexto el crecimiento en fraccionarios como resultado. El estudiante E6 por ejercicios trabajados en las intervenciones sabe que la forma de comprobar una resta es con una suma.
- ¿Es correcta la respuesta obtenida de acuerdo al contexto del problema? Explique.	E1. Si. Porque tiene coherencia E2. Si. pues tiene lógica E3. Si. E4. si E5. Si. eston bien los datos. E6. Si. verificarlo	Todos los estudiantes pensaron que sus respuestas estaban acordes con los datos y la incógnita pedida, además se observó la revisión del proceso que realizaron en la solución.
- Como se sintió resolviendo el problema.	E1. Bien porque habia resueltos problemas iguales. E2. nerviosa E3. Bien, me pareció facil	Todos los estudiantes se sintieron bien resolviendo el problema

	E4. bien	
	E5. Nerviosa por que al principio se me olvido la operación a los 2 min me acorde	
	E6. bien	
- ¿Se puede resolver el problema de otra manera? Explique.	E1. Si. Con decimal E2. Si. decimales. E3. Si. con decimales E4. No E5. Si. Con decimales E6. No	Pasando los fraccionarios a decimales y haciendo la resta entre ellos debe dar el mismo resultado que al pasar el resultado a decimal también, para no trabajar con fracciones heterogeneas. Dos estudiantes E4 y E6 , no saben que pueden aplicar otra forma.
- Escriba las dificultades presentadas para resolver el problema.	E1. Ninguna E2. Resolverlo E3. Ninguna E4. Ninguna E5. Pocas E6. saber si tenia que hacer fraccion heterogenea de resta no	Los estudiantes piensan que no se les presentó dificultades al resolver el problema, aunque E6 manifiesta que no sabía cómo resolver la operación de fracciones heterogéneas

PROBLEMA 2. Juliana tiene \$200.000 y gastó $\frac{3}{5}$ en comprar zapatos y $\frac{2}{10}$ en comprar una camiseta ¿Cuánto dinero le quedó a Juliana?

1. Identificación: Comprender el problema.

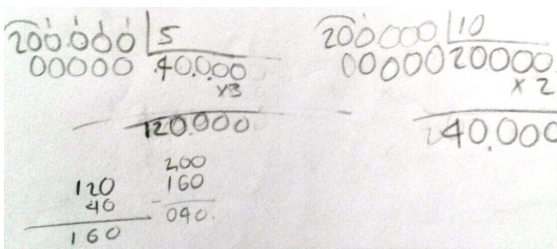
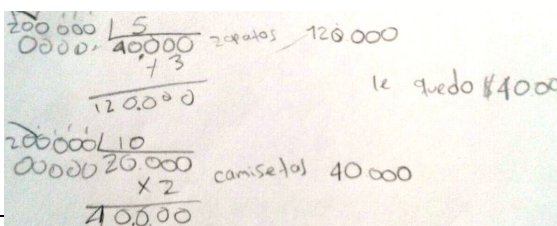
Pregunta	Respuesta	Interpretación
- ¿Ha entendió el problema?	E1. Si E2. Si E3. Si E4. Si E5. Si E6. Si	Todos los estudiantes manifiestan entender el problema planteado.
- Escriba los datos que se presenta en el problema.	E1. Tiene 200.000 Gastó $\frac{3}{5}$ comprar zapatos y $\frac{2}{10}$ una camisa E2. 200.000 tiene $\frac{3}{5}$ gasto $\frac{2}{10}$ zapatos E3. $\frac{3}{5}$ de 200.000 $\frac{2}{10}$ de 200.000 E4. Julia tiene 200000 gasto $\frac{3}{5}$ en zapatos y	Todos los estudiantes identifican los datos del problema planteado

	2/10 en camiseta	
	E5. Juliana tiene 200.000 gasto 3/5 zapatos	
	2/10 en camiseta	
	E6. Juliana tiene 200.000 y 3/5 con zapatos y	
	2/10 en camiseta	
- ¿Cuál es la incógnita?	E1. Cuanto dinero le quedo a Yulianal E2. Cuanto dinero le quedo Juliana E3. Cuanto dinero le queda a Juliana E4. Cuanto gasto Juliana E5. Cuanto le sobro a Juliana? E6. ¿Cuánto dinero le quedo a Juliana	Todos los estudiantes saben lo que tiene que responder, puesto que plantean adecuadamente la incógnita
- ¿Se parece a un problema que haya resuelto antes?	E1. Si, a un problema que hicimos un taller E2. Si y bastantes E3. si E4. si E5. Si muchos E6. Si	Todos los estudiantes recuerdan haber resuelto problemas similares antes.

2. Planeación: Concebir un plan- Planear

Pregunta	Respuesta	Interpretación
- Escriba la estrategia (gráfica, operaciones, razonamiento, ecuaciones,...) que piensa utilizar para resolver el problema.	E1. operaciones E2. divicion, operacion E3. operaciones E4. Fraccion de un numero E5. Fraccion de un numero E6. Fraccion de un número y suma	Los estudiantes E1, E3, E4, E6 proponen como estrategia la operación para resolver el problema, los estudiantes E2 y E5 , especifican la estrategia operación escribiendo “resta” puesto que esa será la operación que piensan utilizar para resolver el problema.
- Escriba los pasos para resolver el problema de forma correcta.	E1. 1. Leo, pongo la fracción 2. Hago la operación 3. Fraccion de un numero 3. Verifico si me queda mal E2. 1. Leer, planeación, ejecutar, resolver 2. dividir 200000 en el 5 3. multiplicar por el 3 4. dividir por el 200000 y 10 5. multiplicar en el 2 E3.	Los estudiantes E1, E2, E3, E5 y E6 , escribieron los pasos que llevaría a cabo para resolver el problema. El estudiante E4 escribió los pasos del Modelo de Polya de resolución de problemas. Según lo que escribieron en los pasos para resolver el problema da cuenta que tienen conocimiento de los pasos para resolver problemas que

1. Leer 2. Escribir la incognita y los datos 3. Plantee la estrategia 4. Voy a dividir el numero por el denominador y multiplique por el númerador. 5. Luego sumare los dos resultados y lo resto por \$200.000	fueron explicados en las intervenciones.
E4. 1. Tomar los datos 2. hacer un plan 3. ejecutar 4. vereficar	
E5. 1. dividir 200000 en 5 Despues mulplica 3 2. Dividir 200.000 en 10 Despues multiplica 2 3. sumar 4. Restar 5. Guala resultado	
E6. 1. leyendo 2. Poner los datos y la incognita 3. hacer la estrategia 4. resolver el problema 5. Divido y multiplico, sumo y resto. 3. Ejecución: Ejecutar el plan- Controlar	

Pregunta	Respuesta	Interpretación
- Resuelva el problema.	E1. 	El estudiante E4 no logró resolver el problema de manera adecuada, los demás realizaron su proceso de manera correcta.
	E2. 	

E3.

E4.

E5.

E6.

- Lo que hizo para resolver el problema,

E1. Si, hice lo mismo que planteé al principio
E2. Ya sabía que hacer

Todos los estudiantes utilizaron la misma

fue lo mismo que pensó desde el principio o durante el proceso se le ocurrió otra manera.	E3. si E4. No cambie nada E5. No se me ocurrió E6. lo mismo	estrategia planeada desde el principio sin hacer ningún cambio.
---	--	---

4. Evaluación: Visión retrospectiva- Evaluar

Pregunta	Respuesta	Análisis
- Escriba la respuesta del problema.	E1. le sobro 40.000 E2. 160.000 gasto y le quedo \$40.000 E3. ahorro \$40.000 E4. gasto 66.666 en zapatos y 199.991 en camiseta E5. Le sobro 40.000 E6. le quedaron 40000 a Juliana	Los estudiantes E1, E3, E5, E6 escriben la respuesta correcta a la pregunta propuesta. El estudiante E2 escribe el gasto primero antes de la respuesta correcta. Mientras que el estudiante E4 escribe mal su respuesta, porque además que no hizo bien el proceso, no le preguntaba cuanto gastó en cada cosa sino el total del gasto.
- ¿Cómo verificaría que el resultado obtenido es correcto?	E1. mirando que tenga coherencia E2. leyendo y que todo tenga logica E3. que tenga lógica E4. E5. Revisando E6. verificando	E4 no propuso nada para verificar el resultado, como no verificó no pudo determinar su error. Los demás estudiantes proponen leer nuevamente y revisar la lógica de la respuesta con el planteamiento del problema.
- ¿Es correcta la respuesta obtenida de acuerdo al contexto del problema? Explique.	E1. Si. porque la rectifique y no habia ningun problema. E2. Si. Porque tiene logica E3. Si. Que los valores sean coherentes con \$200.000 E4. E5. Si. todo concuerda E6. Si. verificarlo, 40.000 es menor que 200.000	Los estudiantes saben que la respuesta de lo que le sobra a Juliana debe ser menor que el valor inicial, porque los otros valores son gastos. Según las respuesta se infiere que todos los estudiantes verificaron sus resultados.
- Como se sintió resolviendo el problema.	E1. bien porque le resuelto problemas iguales E2. normal, ya lo entendi E3. Bien, estuvo fácil E4.	Los argumentos de los estudiantes es que se sintieron bien al resolver el problema, porque lo entendía, entonces se les

	E5. muy bien E6. bien	hizo fácil y ya lo habían resuelto problemas similares.
- ¿Se puede resolver el problema de otra manera? Explique.	E1. Si. sumar los fraccionarios, restar 200.000 E2. No E3. No. E4. E5. No E6. No	Los estudiantes no encuentran otra manera de resolver el problema planteado. A excepción del E1 , quien propone la suma de fraccionarios $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{10}$, luego se resta la unidad del resultado de la suma. El fraccionario resultante se multiplica por \$200.000 y este será el resultado de lo que le sobra a Juliana. Además se puede sumar los fraccionarios $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{10}$ el resultado es la fracción de 200.000 que es el gasto entre zapatos y camisa y después se le resta, para que dé el valor de lo que le sobra. E1 no hace la explicación que se requiere pero tiene la idea de lo que se podía hacer como otra forma de resolver el problema.
- Escriba las dificultades presentadas para resolver el problema.	E1. Ninguna E2. Nada E3. E4. E5. Ninguna E6. no nada	Los estudiantes manifiestan no tener dificultades en la solución del problema.

PROBLEMA 3. Alejandra compró $\frac{1}{2}$ m de tela azul a \$3500 el metro y $\frac{15}{4}$ m de telas de distintos

colores a \$4000 el metro. Pagó con dos billetes de \$10.000 ¿Cuánto costaron los dos pedazos de tela?

1. Identificación: Comprender el problema.

Pregunta	Respuesta	Interpretación
- ¿Ha entendió el problema?	E1. Si E2. Si E3. Si	Todos los estudiantes dicen entender el problema planteado.

	E4. Si E5. Si E6. Si	
- Escriba los datos que se presenta en el problema.	E1. 3500 de 1/2 tela azul 15/4 m de distintos colores a \$4000 Pago con dos billetes de \$10.000 E2. 1/2 de tela azul 15/4 4000 10.000 E3. 1/2 de 3.500, 15/4 de 4.000 de tela E4. 1/2 tela azul 3500 15/4 tela distintas a 4000 y pago con un billete de 10.000 E5. 1/2 m azul 3500 y 15/4 m distintos 4000 pago con dos billetes de E6. 1/2 m tela azul \$3500 y saco 15/4 de distintos colores a 4000	Los estudiantes reconocen los datos del problema. Aunque el estudiante E4 escribió que pagó con un billete de \$10.000 cuando el problema dice que dos de esta denominación. El estudiante E2 escribió los datos numéricos, pero no escribió a que corresponde cada uno.
- ¿Cuál es la incógnita?	E1. Cuanto a crecido E2. ¿Cuánto Ha crecido el arbol? E3. Cuanto a crecido el árbol E4. Cuanto crecio el árbol E5. Cuanto a crecido un árbol E6. ¿Cuánto ha crecido el árbol	Todos los estudiantes han identificado la incógnita del problema propuesto
- ¿Se parece a un problema que haya resuelto antes?	E1. Si, uno que hice en un taller E2. Si y bastante E3. si E4. si E5. Si taller E6. Si	Los estudiantes recuerdan haber resuelto problemas similares al presentado en este caso.

2. Planeación: Concebir un plan- Planear

Pregunta	Respuesta	Interpretación
- Escriba la estrategia (gráfica, operaciones, razonamiento, ecuaciones,...) que piensa utilizar para resolver el problema.	E1. operación E2. División, operacion E3. operaciones E4. operaciones E5. Fraccion de un numero E6. fracciones	Los estudiantes E1 , E2 , E3 , E4 proponen como estrategia la operación para resolver el problema. El estudiante E5 , especifican la estrategia operación escribiendo “Fraccion de un numero” porque esta es la operación que se debe realizar. Mientras que el estudiante E6 sólo escribe “fracciones” pero esto no es una estrategia, ni es una

- Escriba los pasos para resolver el problema de forma correcta.

E1.

1. leer, puse la fracción de un numero.
2. Hago la operación
3. Se divide en 2 y 4
4. se multiplica por 1 y 15
5. Verifico si me quedo mal

E2.

1. Leer
2. Planeacion
3. Ejecución
4. Resolver se divide 3500 por el 2 y 4000 por 4.
5. Se multiplica por el 4
6. suman los dos

E3.

1. Lerla
2. Escribir la incognita
3. Plantee la estrategia
4. voy a dividir el número por el denominador,
5. y mulplique por el numerador y luego sumare

E4.

1. Tomar dautos
2. hacer un plan
3. ejecutar
4. verificar

E5.

1. Dividir por 2 despues ariba
2. Despues suma

operación para hacer, es sólo el tipo de número que se da en el problema. El estudiante E2 a pesar que resuelve correctamente el problema no es claro al escribir que su estrategia será una “división, operación” si es cierto que tiene que dividir, pero después debe multiplicar es decir hallar la fracción de un número; en este caso es un error de forma y no de fondo, que se debe corregir.

Los estudiantes escriben los pasos paso para resolver el problema.

El estudiante E4, sólo plantea los pasos de Polya. Nuevamente se muestra que conocen los cuatro pasos a desarrollar, otros estudiantes también los nombran pero hacen, pero dicen lo que van a hacer en la ejecución, como el caso de E2, E3 y E6.

3. Despues Resta

E6.

1. leerlo
2. Poner los datos y sacar la incognita
3. hacer la estrategia
4. hacer el problema
5. hallar la fraccion de un numero y sumar

3. Ejecución: Ejecutar el plan- Controlar

Pregunta

- Resuelva el problema.

Respuesta

E1.

Handwritten calculations for E1:

- Problem 1:
$$\begin{array}{r} 3500 \overline{) 2} \\ 15 \quad 1750 \\ 10 \quad \times 1 \\ \hline 00 \quad 1750 \end{array}$$
- Problem 2:
$$\begin{array}{r} 4000 \overline{) 4} \\ 0000 \quad 1000 \\ \times 15 \\ \hline 5000 \\ 1000 \\ \hline 15000 \end{array}$$
- Problem 3:
$$\begin{array}{r} 15000 \\ 1750 \\ \hline 16750 \\ 20000 \\ 16750 \\ \hline 13250 \end{array}$$

E2.

Handwritten calculations for E2:

- Problem 1:
$$\begin{array}{r} 3500 \overline{) 2} \\ 15 \quad 1750 \\ 10 \quad \times 1 \\ \hline 00 \quad 1750 \\ 1 \end{array}$$
- Problem 2:
$$\begin{array}{r} 4000 \overline{) 4} \\ 0000 \quad 1000 \\ \times 15 \\ \hline 5000 \\ 10000 \\ \hline 15000 \\ + 17500 \\ \hline 167500 \\ 167500 \end{array}$$
- Problem 3:
$$\begin{array}{r} 15000 \\ 1750 \\ \hline 16750 \end{array}$$

E3.

Handwritten calculations for E3:

- Problem 1:
$$\begin{array}{r} 3500 \overline{) 2} \\ 15 \quad 1750 \\ 10 \quad \times 1 \\ \hline 00 \end{array}$$
- Problem 2:
$$\begin{array}{r} 4000 \overline{) 4} \\ 0000 \quad 1000 \\ \times 15 \\ \hline 15000 \end{array}$$

E4.

Solución

$$\begin{array}{r}
 3500 \overline{) 2} \\
 15 \quad 1750 \\
 10 \quad \times 1 \\
 00 \quad 1750 \\
 \hline
 15000 \\
 + 1750 \\
 \hline
 16750
 \end{array}$$

Al costo de un ordenador \$16.750

E5.

$$\begin{array}{r}
 3500 \overline{) 2} \\
 15 \quad 1750 \\
 10 \quad \times 1 \\
 00 \quad 1750 \\
 \hline
 20000 \\
 16750 \\
 \hline
 03240
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4000 \overline{) 4} \\
 0000 \quad 1000 \\
 \times 15 \\
 5000 \\
 1000 \\
 \hline
 15000
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 15000 \\
 1750 \\
 \hline
 16750
 \end{array}$$

E6.

$$\begin{array}{r}
 3500 \overline{) 2} \\
 15 \quad 1750 \\
 10 \quad \times 1 \\
 00 \quad 1750 \\
 \hline
 15000 \\
 1750 \\
 \hline
 16750
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4000 \overline{) 4} \\
 0000 \quad 1000 \\
 \times 15 \\
 5000 \\
 1000 \\
 \hline
 15000
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 15000 \\
 1750 \\
 \hline
 16750
 \end{array}$$

- Lo que hizo para resolver el problema, fue lo mismo que pensó desde el principio o durante el proceso se le ocurrió otra manera.

E1. Lo resolví como desde el principio

E2. no

E3. hice lo que pense al principio

E4.

E5. si

E6. Lo mismo

Los estudiantes hicieron lo que se propusieron desde el principio. **E4** no respondió nada a la pregunta, quizás en su sospecha de haberlo hecho mal.

4. Evaluación: Visión retrospectiva-Evaluación

Pregunta	Respuesta	Interpretación
- Escriba la respuesta del problema.	E1. 16.750 E2. 16.750 E3. 16.750 E4. E5. Costaron los pedazos 3240 E6. 16750	El estudiante E5 en su proceso muestra la operación correcta y el resultado correcto, pero con el ánimo de hacer la prueba confunde las respuesta y escribe en la respuesta del costo, lo que sobra cuando paga con \$20.000. El estudiante E4 no escribió nada.
- ¿Cómo verificaría que el resultado obtenido es correcto?	E1. mirande que tenga coherencia E2. Leyendo y qe tenga logica E3. que tenga coherencia E4. E5. Revisando leiendo E6. volver a verificarlo	E4 no verificó el resultado, por eso su respuesta siempre estuvo mal. E5 verificó el proceso y efectivamente estaba bien, pero la prueba la hizo revuelta con todo el proceso de solución, así que confundió los resultados. Nuevamente se evidencia la falta de concentración de E5 quien dice que todo concuerda y la falta de revisión de E4 quien prefiere no responder.
- ¿Es correcta la respuesta obtenida de acuerdo al contexto del problema? Explique.	E1. Si. Porque todo tiene coherencia. E2. Si. Leyendo y Teniendo logica E3. Si. Ley todo tiene sentido E4. E5. Si. todo concuerda E6. Si verificando	Nuevamente se evidencia la falta de concentración de E5 quien dice que todo concuerda y la falta de revisión de E4 quien prefiere no responder.
- Como se sintió resolviendo el problema.	E1. bien, porque ya habia resuelto problemas iguales E2. Normal E3. Bien, estaba fácil E4. E5. Normal E6. Bien	Todos se sintieron bien resolviendo el problema.
- ¿Se puede resolver el problema de otra manera? Explique.	E1. No E2. No. nose E3. No E4. E5. No E6. No	Realmente es un problema de costos diferentes así que la forma más apropiada para resolverlo era la que hicieron los estudiantes y por eso no encontraron otra

- Escriba las dificultades presentadas para resolver el problema.	E1. Ninguna E2. ninguno E3. Ninguna E4. E5. Ninguna E6. Me había quedado mal pero verifique y lo volvi a hacer y me quedo bien.	forma. E6 aprovechó la verificación para corregir el problema, puesto que le había quedado mal. E4 no opina nada. Los demás estudiantes no presentaron dificultad.
---	--	--

PROBLEMA 4. Yeimi compra una pizza y la reparte entre sus amigos. A Karen le dio $\frac{3}{12}$, a Felipe le dio $\frac{5}{12}$ y a José le dio $\frac{2}{12}$. ¿Cuántas porciones de pizza le quedan a Yeimi?

1. Identificación: Comprender el problema

Pregunta	Respuesta	Interpretación
- ¿Ha entendió el problema?	E1. Si E2. Si E3. Si E4. Si E5. Si E6. Si	Todos dicen entender el problema propuesto.
- Escriba los datos que se presenta en el problema.	E1. A Karen $\frac{3}{12}$ Felipe $\frac{5}{12}$ a Jose $\frac{2}{12}$ de pizza E2. Cuantas porciones de pizza le quedan a Yeimi, $\frac{3}{12}$ a Karen, $\frac{5}{12}$ Felipe y $\frac{2}{12}$ E3. $\frac{3}{12}$ de pizza, $\frac{2}{12}$ de pizza y $\frac{2}{12}$ de pizza E4. Karen $\frac{3}{12}$, Felipe $\frac{5}{12}$ y Jose $\frac{2}{12}$ E5. $\frac{3}{12}$ Karen $\frac{5}{12}$ Felipe $\frac{2}{12}$ Jose y 12 porciones de la pizza. E6.	Todos los estudiantes escriben bien los datos, excepto E2 , que pone la incógnita “cuántas porciones de pizza le quedan a Yeimi”. En cuanto a E5 recuerda poner las 12 porciones de pizza como dato del problema.
- ¿Cuál es la incógnita?	E1. cuantas porciones de pizza le quedan a Yeimi E2. ¿cuantas porciones de pizza le quedan a Yeimi? E3. Cuanta pizza le queda a Yeimi E4. cuantas porciones le quedan a Yeimi E5. ¿Cuántas porciones de pizza le queda a Yeimi? E6.	Todos los estudiantes identifican la incógnita.
- ¿Se parece a un problema que haya	E1. Similar E2. Igual	Los estudiantes recuerdan que han resuelto problemas

resuelto antes?	E3. Similar E4. Similar E5. Similar E6.	muy similares al propuesto y esto les ayuda a recordar, comparar.
- ¿Cree que puede resolverlo?	E1. Si E2. Si E3. Si E4. Si E5. Si E6. Si	Todos los estudiantes creen que pueden resolver el problema.

2. Planeación: Concebir un plan – Planear

Pregunta	Respuesta	Interpretación
- Escriba la estrategia (gráfica, operaciones, razonamiento, ecuaciones,...) que piensa utilizar para resolver el problema.	E1. grafica E2. grafica E3. operaciones E4. operacion E5. operaciones E6. grafica	Los estudiantes seleccionaron la mitad gráfica y la otra mitad operaciones. E1, E2, E6 de estrategia gráfica y E3, E4, E5 de estrategia operaciones.
- Escriba los pasos para resolver el problema de forma correcta.	E1. 1. Dibujar la pizza 2. Se divide en 12 partes iguales 3. Se colorean los pedazos Que se come cada uno 4. Se cuentan los que Quedaron sin colorear E2. 1. Dibujo un circulo 2. la reparto 3. las marco 4. y luego miro cuantas le queda E3. 1. sumar fraccionarios 2. y después restar E4. 1. hacer una suma 2. y el resultado la resto 12 E5. 1. suma de fracciones 2. el resultado se resta E6. 1. Hacer la pizza 2. Partirla en 12 pedasos 3. darles los pedasos a cada uno	Los estudiantes E1, E2 y E6 escriben todos los pasos que realizarán para resolver el problema de forma gráfica. E3, E4, E5 escribieron los pasos para resolver el problema por medio de operaciones de suma de fraccionarios homogéneos.

3. Ejecución: Ejecutar el plan- Controlar

Pregunta

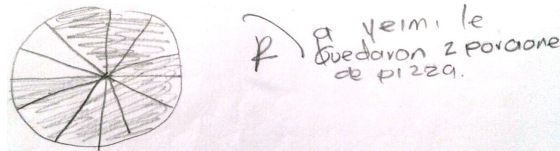
- Resuelva el problema.

Respuesta

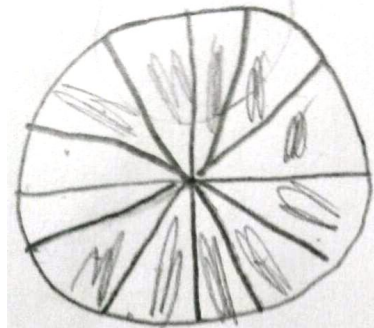
Interpretación

Como lo plantearon anteriormente los estudiantes **E1, E2 y E6** resolvieron el problema por medio de una gráfica. Y los estudiantes **E3, E4 y E5** resolvieron el problema por medio de operaciones, con suma de fraccionarios.

E1.



E2.



E3.

$$\frac{3}{12} + \frac{5}{12} + \frac{2}{12} = \frac{10}{12}$$

$$\frac{10}{12} - \frac{12}{12} = \frac{2}{12}$$

R/le quedan $\frac{2}{12}$ porciones de Pizza.

E4.

$$\frac{3}{12} + \frac{5}{12} + \frac{2}{12} = \frac{10}{12}$$

$$\frac{10}{12} - \frac{12}{12} = \frac{2}{12}$$

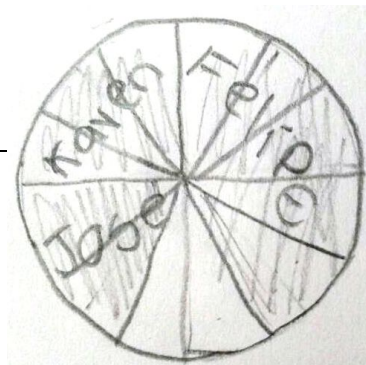
R/le queda ayer mi 2 porciones de pizza

E5.

$$\frac{3}{12} + \frac{5}{12} + \frac{2}{12} = \frac{10}{12}$$

$$\frac{10}{12} - \frac{12}{12} = \frac{2}{12}$$

E6.



- ¿Mientras resolvía el problema iba rectificando lo que hacía?	E1. Si E2. Si E3. Si E4. Si E5. Si E6. Si	Todos resolvieron el problema rectificando sus procesos.
- Durante la solución del problema: ¿Revisó nuevamente los datos y la incógnica?	E1. Si E2. Si E3. Si E4. Si E5. Si E6. Si	Como iban rectificando lo que hacían durante el proceso, era necesario estar revisando los datos y la incógnica.
- ¿Leyó nuevamente el problema?	E1. Si E2. No E3. No E4. Si E5. No E6. No	Para algunos no hubo necesidad de revisar el problema nuevamente porque ya estaban identificados los datos e incógnica.
- Lo que hizo para resolver el problema, fue lo mismo que pensó desde el principio o durante el proceso se le ocurrió otra manera.	E1. Si fue lo mismo E2. desde el principio sabia resolverlo. E3. Si porque eso fue lo que planteé. E4. Si porque primero era sumar y resta E5. Si lo que propuse lo hice igual E6. Primero pensé en suma pero después en la grafica y eso fue lo q' hice	Lo que pensaron desde el principio fue lo mismo que resolvieron. E6 pensó inicialmente en la suma de fraccionarios, pero después de decidió por la gráfica.

4. Evaluación: Visión retrospectiva-Evaluar

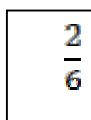
Pregunta	Respuesta	Interpretación
- Escriba la respuesta del problema.	E1. a Yeimi le quedaron 2 porciones de pizza. E2. A Yeimi le quedaron $\frac{2}{12}$ de la pizza E3. le quedaron 2 porciones de pizza. E4. 2 E5. A Yeimi le quedo 2 porciones	Los estudiantes saben que le quedaron 2 porciones de la pizza. E2 y E6 lo escriben en fraccionarios.

	E6. A Yeimi le quedaron 2/12 de la pizza.	
- ¿Cómo verificaría que el resultado obtenido es correcto?	E1. Volviendo a leer y mirando que la respuesta tenga coherencia E2. Por el dibujo y porque tiene logica E3. Porque la respuesta tiene lógica. E4. lo reste E5. Leyendo de nuevo si los datos están correctos E6. Porque volvi y lei los datos del problema	
- ¿Es correcta la respuesta obtenida de acuerdo al contexto del problema? Explique.	E1. Si. porque la respuesta tiene coherencia E2. Si. Se suman y dan las porciones divididas de la pizza. E3. Si. porque es un problema sencillo y tenía la respuesta. E4. Si. porque lo sume medo 10 y despues lo reste en 12 y dio 2 E5. Si. si porque lei y todo es logico E6. Si. Si porque habia 12 pedazos y se comieron 10/12	Todas las justificaciones dan cuenta que el problema fue bien resuelto y la reflexión acorde a la situación planteada.
- Como se sintió resolviendo el problema.	E1. Bien, porque ya habia hecho uno parecido. E2. Bien porque ya habia hecho uno parecido y nos habían enseñado a dividir el circulo. E3. Bien porque estaba fácil E4. bie E5. Norma ya que lo entendia E6. vien	Todos los estudiantes se sintieron bien resolviendo el problema.
- ¿Se puede resolver el problema de otra manera? Explique.	E1. Si. suma de fracciones heterogeneos E2. Si. Sumando los fraccionarios E3. Si. con grafica, se dibuja la pizza y se le saca 10 porciones E4. Si. grafica E5. Si. Grafica E6. Si. suma de fraccionarios	Los que resolvieron con suma propusieron realizar gráfica y lo que resolvieron con gráfica propusieron realizar la operación de suma de fraccionarios.
- Escriba las dificultades presentadas para resolver el problema.	E1. ninguna E2. ninguna E3. ninguna E4. no E5. Ninguna E6. ninguna	Ninguno presentó dificultades para resolver problemas.

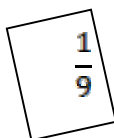
PROBLEMA 5. Un grupo de niños juega con cuatro fichas que tienen números fraccionarios, haciendo diferentes operaciones entre ellos. Al hacer la multiplicación entre dos de ellos, les dio como resultado $\frac{2}{45}$.



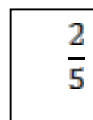
A



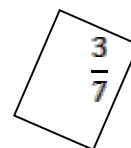
B



C



D



E

1. Identificación: Comprender el problema

Pregunta	Respuesta	Interpretación
- ¿Ha entendió el problema?	E1. Si E2. Si E3. Si E4. Si E5. Si E6. Si	Todos los estudiantes entendieron el problema.
- Escriba los datos que se presenta en el problema.	E1. $3/5$ $2/6$ $1/9$ $2/5$ $3/7$ se debe buscar una pareja. E2. $3/5$ $2/6$ $1/9$ $2/5$ $3/7$ E3. $3/5$ $2/6$ $1/9$ $2/5$ $3/7$ E4. $3/5$ $2/6$ $1/9$ $2/5$ $3/7$ E5. $3/5$ A $2/6$ B $1/9$ C $2/5$ D $3/7$ E E6. Un grupo de niños juegan con 5 fichas q' tienes números fraccionarios y al multiplicar les dan como resultado $2/45$.	Los datos que se presentan son cada uno de los fraccionarios que contienen las fichas que tienen como opción los niños que juegan. El estudiante E6 quiso poner lo que había entendido del problema que debía resolver.
- ¿Cuál es la incógnita?	E1. Cuales son los 2 fraccionarios que se deben multiplicar E2. cuales son las fichas que al multiplicarlas da $2/45$. E3. Cuales son las dos fichas que agarraran los niños E4. cuales son las 2 fichas que eligieron E5. cuales son las dos fichas que dan el resultado E6. ¿cuales son las 2 fichas q'	Cada uno con sus palabras fue capaz de escribir la incógnita del problema correctamente.

seleccionaron los niños?

- ¿Se parece a algún problema que haya resuelto antes?

E1. Un poco
E2. Similar
E3. Similar
E4. Similar
E5. Un poco
E6. Similar

Los estudiantes asemejan el problema a uno ya resuelto anteriormente.

- ¿Cree que puede resolverlo?

E1. Si
E2. Si
E3. Si
E4. Si
E5. Si
E6. Si

Todos los estudiantes creen que pueden resolver el problema, porque anteriormente dicen que han resuelto uno similar

2. Planeación: Concebir un plan – Planear

Pregunta	Respuesta	Interpretación
- Escriba la estrategia (gráfica, operaciones, razonamiento, ecuaciones, ensayo y error...) que piensa utilizar para resolver el problema.	E1. ensayo y error E2. ensayo y error E3. ensayo y error E4. operaciones, ensay y error E5. operaciones E6. ensayo y error	Todos los estudiantes proponen resolver el problema con la estrategia de ensayo y error y alguno escribió también que con operaciones y es correcto porque
- Escriba los pasos para resolver el problema de forma correcta.	E1. 1 empezar a tomar parejas 2 multiplicarlas 3 Y mirar Cual me da el resultado propuesto E2. 1 Verificar una por uno 2 haciendo las multiplicaciones E3. 1 ir multiplicando 1x1 hasta que me de la respuesta E4. 1 augarra 2 números 2 multiplicarlos 3 y verificar el resultado E5. 1 multiplicar cada uno catidades las demás 2 cuando de resultado ya sabemos la	Todos los estudiantes planifican lo van a hacer para resolver el problema.

respuesta

E6. ensayo y error

3. Ejecución: Ejecutar el plan- Controlar

Pregunta

- Resuelva el problema.

Respuesta

Interpretación

E1.

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{6}{30}$$
$$\frac{2}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{35}$$
$$\frac{1}{9} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{45}$$

Todos los estudiantes resolvieron correctamente el problema con la estrategia de ensayo y error haciendo las respectivas multiplicaciones entre cada pareja de fraccionarios hasta encontrar la respuesta correcta.

E3 y E5 a pesar de haber encontrado la pareja, siguieron haciendo multiplicaciones para comprobar más resultados.

E2.

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{6}{30}$$
$$\frac{3}{5} \times \frac{1}{9} = \frac{3}{45}$$
$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{9} = \frac{2}{45}$$
$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$$
$$\frac{2}{6} \times \frac{1}{9} = \frac{2}{54}$$
$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{9}{35}$$
$$\frac{2}{6} \times \frac{3}{7} = \frac{6}{42}$$

E3.

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{6}{30}$$
$$\frac{3}{5} \times \frac{1}{9} = \frac{3}{45}$$
$$\frac{2}{5} \times \frac{7}{9} = \frac{2}{45}$$

E4.

$$\frac{1}{9} \times \frac{2}{6} = \frac{2}{54}$$
$$\frac{1}{9} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{45}$$
$$\frac{1}{9} \times \frac{2}{7} = \frac{2}{63}$$
$$\frac{1}{9} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{45}$$

R las 2 fichas que eligieron los dos números son

E5.

Solución

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{6}{30} \quad \frac{3}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{9}{35}$$

$$\frac{1}{9} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{45} \quad \frac{2}{6} \times \frac{3}{7} = \frac{6}{43}$$

E6.

$$\frac{1}{9} \times \frac{2}{6} = \frac{2}{54} \Rightarrow \text{falsa}$$

$$\frac{1}{9} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{45} \Rightarrow \text{verdadera}$$

- ¿Mientras resolvía el problema iba rectificando lo que hacía?

- E1.** Si
- E2.** Si
- E3.** Si
- E4.** Si
- E5.** Si
- E6.** Si

Todos los estudiantes iban rectificando su procedimiento al resolver el problema.

- Durante la solución del problema: ¿Revisó nuevamente los datos y la incógnita?

- E1.** Si
- E2.** Si
- E3.** No
- E4.** Si
- E5.** Si
- E6.** Si

Sólo el estudiante **E3** no vio necesidad de revisar los datos y la incógnita, los demás consideraron hacer una revisión.

¿Leyó nuevamente el problema?

- E1.** Si
- E2.** No
- E3.** No
- E4.** Si
- E5.** No
- E6.** Si

No es necesario leer nuevamente el problema si ya están los datos y la incógnita durante el proceso, pero para la verificación es bueno leerlo para comparar el contexto con la respuesta obtenida.

Los estudiantes **E1**, **E5** y **E6** leyeron nuevamente el problema, los estudiantes **E2**, **E3**, **E5**, no volvieron a leerlo.

- Lo que hizo para resolver el problema, fue lo mismo que pensó desde el principio o durante el proceso se le ocurrió otra manera.	E1. hice lo mismo Q' pensé desde el comienzo E2. Si fue lo mismo E3. si porque eso fue lo que planteé E4. No se me ocurrió otra manera E5. Si lo que propuse lo hice igual E6. Lo que planie fue lo que hice	Todos los estudiantes resolvieron el problema como lo habían propuesto.
--	---	---

4. Evaluación: Visión retrospectiva-Evaluar

Pregunta	Respuesta	Interpretación
- Escriba la respuesta del problema.	E1. la ficha C y D E2. 2/5 y 1/9 E3. las dos fichas son 2/5 y 1/9 E4. $1/4 \times 2/5 = 2/45$ E5. la ficha del resultado son 1/9 y 2/5 E6. Las parejas que hicieron los niños fueron 1/9 y 2/5	Todos los estudiantes saben la respuesta del problema. El estudiante E1 escribió correctamente las letras de las fichas así como lo pedía la pregunta. E2, E3, E5 y E6 escribieron los fraccionarios que contienen las fichas. E4 escribió la multiplicación entre los dos fraccionarios y la respuesta creyendo hacer más está copiando la misma operación de la solución. Los estudiantes buscan diferentes formas para verificar sus resultados entre ellos volviendo a leer. Son consientes que es importante la verificación de la respuesta escrita anteriormente.
- ¿Cómo verificaría que el resultado obtenido es correcto?	E1. leyendo y mirando Q' la operación aya Quedado bien y tenga coherencia. E2. No es necesario porque es una multiplicación E3. Porque son la multiplicación me dio el resultado correcto E4. Mire el resultado de todas las operaciones y compare con el resultado los que le dio a los niños E5. lei y pues verifique que todo el resultado era coherente E6. que la multiplicación este correcta	
- ¿Es correcta la respuesta obtenida de acuerdo al contexto del problema? Explique.	E1. Si. porque la operación esta bien y tiene coherencia. E2. Si. Dio lo que necesitaba 2/45 E3. Si. Porque entendí el Problema perfectamente y sabia lo que hiba a hacer. E4. Si. lo verifique E5. Si. por que los niños dijeron resultados	E4 reconoce hacer la verificación y es por eso que sabe que su respuesta es correcta.

	2/45 y eso me dio.	
	E6. Si. Porque multiplique y me dio el resultado de los niños	
- Como se sintió resolviendo el problema.	E1. Bien porque lo entendi E2. Bien E3. Bien, estuvo fácil. E4. Bien porque entendí el problema E5. bien porque lo entendí bien el problema E6. vien	Todos los estudiantes manifiestan sentirse bien al resolver el problema.
- ¿Se puede resolver el problema de otra manera? Explique.	E1. No E2. No E3. No E4. No E5. No E6. No	Es muy complicado para este caso pensar en resolver el problema de otra manera, porque allí ya enfatizan que se hace una multiplicación entre dos de los fraccionarios propuesto, lo importante era analizar la forma como resolvían los estudiantes el problema planteado.
- Escriba las dificultades presentadas para resolver el problema.	E1. ninguna E2. Ninguna E3. Ninguna E4. ninguna E5. Ninguna E6. No habia visto la pregunta y me toco volver a leer	Los estudiantes no presentan dificultad, excepto E6 quien no había visto la pregunta que se encontraba debajo de la imagen y por eso no sabía que hacer, cuando se detuvo a leer nuevamente la encontró y pudo de esta manera continuar con el proceso. De allí la importancia de comprender el problema propuesto para lleva a cabo la solución.

Elaboración propia

