



LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN EL DESARROLLO PENSAMIENTO MÉTRICO

LADY LORENA BRICEÑO CARVAJAL

JAIME ANDRÉS BRICEÑO ZULUAGA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES

FACULTAD DE ESTUDIOS SOCIALES Y EMPRESARIALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

MANIZALES

2023

LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN EL DESARROLLO PENSAMIENTO
MÉTRICO

Autor

LADY LORENA BRICEÑO CARVAJAL

JAIME ANDRES BRICEÑO ZULUAGA

Tutor

MGR. ALFREDO JOSÉ GONZÁLEZ PATERNINA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES

FACULTAD DE ESTUDIOS SOCIALES Y EMPRESARIALES

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

MANIZALES

2024

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, agradecemos a Dios que nos ha conservado con vida y salud, nos regala la oportunidad para cada día ser mejores docentes. Y a ti Virgencita que nos acompañas y proteges en todo momento.

Igualmente, a todas las personas que intervinieron y ayudaron en nuestra formación, así mismo los que contribuyeron para la realización de esta investigación.

Al asesor Mgr. Alfredo José González Paternina por su conocimiento, paciencia y acompañamiento en cada una de las fases de esta investigación. A cada uno de los docentes de la maestría por sus valiosas enseñanzas.

A la Universidad Autónoma de Manizales UAM por su apoyo, empatía, eficacia y colaboración y al MEN porque anhelábamos poder realizar la maestría.

RESUMEN

En el siguiente trabajo de investigación se realizó un estudio cualitativo descriptivo, encaminado desde un ejercicio de enseñanza y orientación docente en el aula con ayuda de la modelación matemática, herramienta para que los estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Jorge Eliécer Gaitán de Yopal- Casanare, desarrollaran el pensamiento métrico para la comprensión y aplicación de la magnitud longitud. El proceso de la modelación contiene unas etapas y elementos que se deben tener claros para poder transformar las prácticas de aula que conlleve al mejoramiento de los aprendizajes derivados del pensamiento métrico de los estudiantes desde situaciones problémicas de la vida cotidiana.

Se diseñó e implementó una unidad didáctica en tres momentos: ubicación, desubicación y reenfoque. En el momento de ubicación se pudo constatar que los estudiantes presentan dificultades en la utilización de la unidad de medida de longitud más adecuada según el contexto, y todo lo relacionado a la magnitud longitud perteneciente a la categoría del pensamiento métrico. En el momento de desubicación se le orientó al educando a través de la modelación la construcción de los conceptos de la magnitud longitud; una comprensión amplia de los procesos de conservación de la magnitud; la estimación, la selección de unidades de medida adecuada, patrones, medición y el uso de instrumentos; en último lugar, en el momento de reenfoque se evidencia la forma en que algunos elementos de la modelación matemática favorece la solución de diferentes situaciones problema en los que se reflejaba el desarrollo del pensamiento métrico, ya que lograron razonar, estimar, medir, y aplicar conocimientos en contextos reales.

Palabras clave: Modelación matemática, pensamiento métrico.

ABSTRACT

In the following research work, a descriptive qualitative study was carried out, directed from a teaching exercise and teaching orientation in the classroom with the help of mathematical modeling, a tool for fifth grade students of the Jorge Eliécer Gaitán Educational Institution of Yopal- Casanare, will develop metric thinking for the understanding and application of magnitude length. The modeling process contains some stages and elements that must be clear in order to transform classroom practices that lead to the improvement of learning derived from students' metric thinking from problematic situations in everyday life.

A teaching unit was designed and implemented in three moments: location, dislocation and refocusing. At the time of placement, it was noted that the students present difficulties in using the most appropriate unit of length measurement according to the context, and everything related to the magnitude of length belonging to the category of metric thinking. At the moment of dislocation, the student was guided through modeling in the construction of the concepts of length magnitude; a broad understanding of magnitude conservation processes; estimation, selection of appropriate units of measurement, standards, measurement and use of instruments; Lastly, at the moment of refocusing, it is evident how some elements of mathematical modeling favor the solution of different problem situations in which the development of metric thinking was reflected, since they managed to reason, estimate, measure, and apply knowledge in real contexts.

Keywords: Mathematical modeling, metric thinking.

CONTENIDO

1	PRESENTACIÓN	11
2	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	13
3	JUSTIFICACIÓN	21
4	OBJETIVOS	24
4.1	OBJETIVO GENERAL:	24
4.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS:	24
5	REFERENTE TEÓRICO	25
5.1	EL PENSAMIENTO Y LOS SISTEMAS MÉTRICOS O DE MEDIDAS	25
5.1.1	Enseñanza de medición, magnitudes y cantidad	28
5.1.2	Construcción de la magnitud longitud	30
5.1.3	Orientaciones didácticas en el aprendizaje de la magnitud longitud	32
5.2	ACONTECIMIENTOS DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA	34
5.2.1	Modelo matemático	36
5.2.2	Proceso de modelamiento matemático	37
6	METODOLOGIA	40
6.1	ENFOQUE Y ALCANCE	40
6.2	POBLACIÓN Y CONTEXTO	40
6.3	UNIDAD DE TRABAJO	41
6.4	CONSIDERACIONES ÉTICAS	41
6.5	UNIDAD DE ANÁLISIS	42
6.6	TÉCNICAS Y FUENTES DE RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN	42
6.6.1	Actividad diagnóstica:	42
6.6.2	Observación	43

6.6.3	Entrevista Semi Estructurada.....	43
6.6.4	Prueba piloto.....	43
6.7	UNIDAD DIDÁCTICA	43
6.8	DISEÑO METODOLÓGICO	44
6.9	PLAN DE ANÁLISIS	47
7	ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS.....	50
7.1	MOMENTO DE UBICACIÓN	50
7.2	MOMENTO DE DESUBICACIÓN	60
7.3	MOMENTO DE REENFOQUE	72
8	CONCLUSIONES.....	78
9	RECOMENDACIONES	80
10	REFERENCIAS	81
11	ANEXOS.....	83

LISTA DE TABLAS

Tabla 1 Porcentaje de promedio de respuestas incorrectas en cada aprendizaje	14
Tabla 2 Ventajas y dificultades de la modelación	35
Tabla 3 Pasos del proceso de modelación	39
Tabla 4 Categorías, subcategorías y sus respectivos indicadores	42
Tabla 5 Matriz de clasificación y convergencia de las categorías para el análisis de la actividad diagnóstica	47
Tabla 6 Matriz para la triangulación y análisis de la información momento de ubicación y reenfoque	49
Tabla 7 Matriz para la triangulación y análisis de la información momento desubicación...	49

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Etapas para definir una magnitud.....	30
Figura 2 Diseño Metodológico	46
Figura 3 Ruta trazada por E1	53
Figura 4 Uso de patrones de medida	64
Figura 5 Medida de objetos expresada en unidades de longitud	65
Figura 6 Dibujo sobre las dimensiones largo, alto y ancho	67
Figura 7 Dibujo a escala 1:200 del polideportivo	68
Figura 8 Creación de un instrumento de medida (decámetro).....	69
Figura 9 Conversión de unidades	69
Figura 10 Medición, equivalencias y conversión	71
Figura 11Estrategia del E1.....	72
Figura 12Respuestas de los E1 y E5 respectivamente.....	73
Figura 13 Solución al planteamiento de la actividad 6.....	76
Figura 14 Respuestas de estudiantes actividad inicial.....	105
Figura 15 Respuestas de la segunda actividad.....	105
Figura 16 Midiendo dimensiones de la puerta del salón	106
Figura 17 Comparando alturas	106
Figura 18 Uso de instrumentos de medida	107
Figura 19 Midiendo superficie	107

LISTA DE ANEXOS

Anexo 1 Consentimiento informado	83
Anexo 2 Unidad didáctica	84
Anexo 3 Entrevista semiestructurada	104
Anexo 4 Evidencia momento de ubicación	105
Anexo 5 Fotos de evidencia momento desubicación.....	106

1 PRESENTACIÓN

La presente investigación está orientada a determinar el aporte de la modelación matemática en el desarrollo del pensamiento métrico en los estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Jorge Eliecer Gaitán del municipio de Yopal – Casanare, teniendo como referente las dificultades que los autores identificaron de la observación en el aula y en las pruebas externas de matemáticas y ciencias naturales.

Como referentes teóricos se tomaron en cuenta autores que se centran en las categorías de esta investigación, pero con una mirada desde la enseñanza y no solamente conceptual teniendo en cuenta los lineamientos del MEN resaltando los trabajos de Carrillo et al (2016) y Godino et al (2002) para la categoría de pensamiento métrico, Bienbengut y Hein (2004) y Villa (2006) para la modelación matemática. Estos autores fueron la base para la construcción del marco teórico y por ende para la triangulación en el análisis de resultados, lo que permitió respaldar la interpretación que los investigadores dieron a la información obtenida.

El estudio realizado tiene un enfoque cualitativo con un alcance descriptivo en el que se diseñó y aplicó una unidad didáctica basada en la modelación que presentó tres momentos: Momento de ubicación en el que se diagnosticaron los conocimientos previos de los estudiantes y que sirvió como insumo para enriquecer el contenido del momento de desubicación y que permitiera fortalecer el pensamiento métrico dándole sentido al uso y aplicabilidad de las matemáticas, de tal manera que en un tercer momento de reenfoque los estudiantes abordaron situaciones proponiendo la creación de modelos matemáticos para la comprensión y resolución de problemas en su ámbito escolar.

Para el análisis se tuvo en cuenta la información recolectada a través de la unidad didáctica y una entrevista semiestructurada al finalizar la intervención. Se sistematizó la información y se elaboró una matriz para encontrar la convergencia de las categorías, una para el momento de desubicación que permitiera interpretar y describir los datos aportados por los estudiantes y finalmente otra para el momento de ubicación y reenfoque que sirvió para contrastar estos dos momentos y triangular los datos con los teóricos de las categorías y de esta manera dar respuesta a la pregunta de investigación.

Gracias a los datos obtenidos se pudo evidenciar que la elaboración de unidades didácticas basadas en la modelación para la enseñanza de las matemáticas propicia el interés de los estudiantes y mejoran el aprendizaje porque permiten la interacción directa con el entorno y los direcciona a comprender y contextualizar fenómenos del mundo real. Igualmente se determinó que la modelación matemática facilitó la resolución de problemas relacionados con la magnitud longitud desarrollando pensamiento métrico de las unidades de trabajo a quien se les aplicó mostrando la comprensión de conceptos, habilidades de estimación, el uso correcto de instrumentos de medida y el entendimiento de las normas que regulan la actividad de medir.

2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Teniendo en cuenta que los lineamientos curriculares representan una guía fundamental para orientar el abordaje de todas las áreas, es relevante destacar el apartado dedicado a matemáticas y ciencias naturales. En este se abordan los objetivos esenciales de formación en estas disciplinas, centrándose particularmente en la comprensión del proceso de modelación y el desarrollo de habilidades de pensamiento métrico. No obstante, en la práctica educativa, en ocasiones estos aspectos cruciales no reciben la debida atención por parte de los docentes al planificar y llevar a cabo sus clases en el aula. Es esencial tomar conciencia de la importancia de estos lineamientos y fomentar su implementación para enriquecer la experiencia de aprendizaje de los estudiantes en dichas materias.

También es común encontrar en el aula estudiantes desmotivados y apáticos al aprendizaje de las Ciencias Naturales y Matemáticas, posiblemente porque los maestros utilizan metodologías de enseñanza tradicionales que no despiertan el deseo de aprender de los niños y tampoco fomentan la curiosidad para que sean ellos mismos los promotores en la construcción de su conocimiento. Existe deficiencia en torno a la forma de enseñar los sistemas de medida, los métodos de medición, estimación, conversión de unidades, y aún más en cómo utilizar en su entorno la apropiación estos conceptos.

Además, aunque al inicio del calendario escolar los docentes de las instituciones educativas del país realizan un diagnóstico sobre los aprendizajes y competencias que han adquirido los estudiantes y que van a alcanzar en la nueva temporada escolar; es importante revisarlos, ajustarlos y realizar un trabajo interdisciplinar, ya que se ha observado que el pensamiento métrico tiene implicaciones y dificultades en otras áreas, ejemplo de ello en la asignatura de artística deben realizar dibujos con medias exactas, en educación física realizar competencias de atletismo con distancias y tiempos determinados, en sociales líneas de tiempo, escalas con medida para graficar mapas, y así en cada una de las asignaturas. Por esto es importante que dentro de los cuestionamientos y reflexiones se tomen acciones para adaptar el currículo y contribuir al plan de mejoramiento institucional, sobre la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias.

Así mismo en el ejercicio de enseñanza y orientación docente en la Institución Educativa Jorge Eliecer Gaitán del municipio de Yopal, se observa que los estudiantes de básica primaria y media presentan vacíos en la comprensión y aplicación de magnitudes, medición y estimación de medidas, los cuales se hacen más complejos a medida que avanzan de un grado a otro, y que requieren de saberes previos para abarcar otros conceptos; como es el caso del desarrollo de procesos de medición usando patrones e instrumentos estandarizados en el grado quinto y que para séptimo van a aplicar estos conceptos en la comprensión de fenómenos naturales y las relaciones entre fuerza, energía, velocidad y movimiento.

Por otro lado, en el reporte de resultados del examen saber 11° por aplicación 2022 del establecimiento educativo, valida la observación realizada en el aula y muestra en la tabla 1 el porcentaje de promedio de respuestas incorrectas en cada aprendizaje evaluado en Matemáticas.

Tabla 1 Porcentaje de promedio de respuestas incorrectas en cada aprendizaje

Aprendizaje	Establecimiento Educativo	Colombia	Entidad territorial certificada
Valida procedimientos y estrategias matemáticas utilizadas para dar solución a problemas.	57%	60%	57%
Comprende y transforma la información cuantitativa y esquemática presentada en distintos formatos	40%	41%	37%
Frente a un problema que involucre información cuantitativa, plantea e implementa estrategias que lleven a soluciones adecuadas.	54%	54%	51%

Nota. Tomado del reporte de resultados por aplicación del Examen Saber 11° para establecimientos educativos. ICFES (2022, p.28). Si el porcentaje promedio de respuestas incorrectas es mayor o igual al 40% y menor al 70% se asigna el color naranja.

La tabla sirve como un indicador del desempeño en lo relacionado con habilidades de modelación de los estudiantes y de procesos de pensamiento articulados a esta actividad matemática; y al analizar la información, pese a que el porcentaje promedio de respuestas incorrectas es menor a la entidad territorial y a nivel nacional, se sigue con alto porcentaje de respuestas incorrectas y lo ideal sería estar en color verde o amarillo, que representa un bajo porcentaje de respuestas erróneas.

Igualmente, en el año 2022 los estudiantes de la Institución Educativa Jorge Eliécer Gaitán participaron en las Olimpiadas de Matemáticas a nivel municipal y se aplicaron las pruebas Evaluar para Avanzar, arrojando resultados poco alentadores, donde se reflejaron obstáculos en diferentes aprendizajes asociados al pensamiento métrico, se evidenció dificultades de los estudiantes en varias competencias de las ciencias entre ellas la conversión y el uso de las unidades de medida como también la comprensión y aplicación de sistemas de medidas.

A continuación, se exponen algunos resultados, metodologías e importancia de otras investigaciones, la relación que tienen con el tema planteado en este documento que sirvieron como apoyo y síntesis conceptual para llevar a cabo el proceso a seguir.

Los autores, Tuta et al. (2019), en su artículo de investigación denominado *Diagnóstico del Pensamiento Métrico con Estudiantes* evidencian que:

Los educandos presentan falencias en el desarrollo del pensamiento métrico; que, a su vez, se vinculan con los procesos de la actividad matemática, mostrando debilidades en la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos junto con la comunicación; es claro que, los estudiantes tienen dificultades para realizar estrategias, utilizar técnicas y dar uso a diversas aplicaciones, dejando ver que no utilizan un sistema para la conversión de unidades y las operaciones en unos cuantos contextos diferentes que contengan longitudes, áreas, volúmenes, etc. (p.110)

Este diagnóstico sirve como base de referencia y pone en manifiesto que las dificultades del pensamiento métrico se evidencian en estudiantes de diferentes niveles escolares, porque no asimilan conceptos básicos de medida como estimación, comparación, uso de instrumentos (el reloj, balanza, metro, escuadras, regla, termómetro, transportador, balanza, gramero) que son comunes en su vida cotidiana.

Sumado a esto, Taborda (2013) en su trabajo final de maestría titulado *Diseño e implementación de una unidad didáctica para la enseñanza y aprendizaje del tema Pensamiento Métrico y Sistemas de Medidas* presenta:

Cada módulo temático como un lugar geográfico virtual que el estudiante podrá visitar con el fin de aprender nuevos conocimientos. Durante su recorrido el alumno obtiene materiales u objetos que le permiten aprender el concepto de medida de una forma lúdica. La motivación que mostró la unidad didáctica aplicada se vio reflejada en un incremento significativo en el rendimiento académico de los estudiantes que desarrollaron la misma. (pp.37, 52)

La aplicación de una unidad didáctica es una herramienta eficiente en el trabajo docente, ya que facilita el alcance de los diferentes aprendizajes que se esperan en un grado, fomenta la motivación, creatividad, el trabajo en grupo, argumentación e interés por la asignatura. La investigación también permite ver una forma de evaluar los efectos de la implementación de una unidad didáctica, como se construye, la organización de los temas de forma secuencial, elementos cruciales para la realización del trabajo que se hizo.

Al igual que los referentes anteriores que aportan y fundamentan esta investigación, Gómez (2021) en su proyecto de grado *Fortalecimiento del pensamiento métrico, asociado al DBA #5 de grado primero de matemáticas* dice que las actividades de aprendizaje diseñadas en torno al fortalecimiento del pensamiento métrico parten del desarrollo de procesos asociados, tal y como lo orienta el MEN y las diferentes teorías pedagógicas actuales. Aunque el Ministerio de Educación proporciona orientaciones pedagógicas a través de algunos documentos, es importante saber articularlos y reconocer en ellos su utilidad para la planeación docente y la utilización en el aula de aquellas estrategias establecidas en los referentes de calidad nacionales; además “los docentes deben contar con una formación continua que logré impactar, en forma positiva, a sus estudiantes y comunidad educativa en general” (p.60). Tener en cuenta los lineamientos del MEN para fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje es conveniente y acertado porque son una guía que contienen los elementos generales y básicos que el docente debe apropiarse e incorporar en la planeación y ejecución de las clases para el desarrollo de los diferentes pensamientos.

Agudelo y García (2016) realizaron una investigación cuyo propósito era reconocer la modelación como metodología de enseñanza.

Asumen la perspectiva de Biembengut y Hein, a partir de modelos matemáticos que transversalicen otras áreas del conocimiento y proporciona pautas a los estudiantes para realizar un trabajo de modelaje. (p.141) También da un abordaje sobre la actuación de la modelación y menciona que “La modelación como metodología de enseñanza, parte de un tema y sobre él desarrolla cuestiones que se quieren comprender...es capaz de llevar al alumno a construir conocimientos que tienen significados o sentido para él”.

(Biembengut y Hein, 2004 citado por Agudelo, 2016, p.152)

Después de la intervención que realizaron, aplicando una secuencia didáctica llegaron a resultados favorables que muestran cómo los estudiantes mejoraron la habilidad de estimar magnitudes continuas en volumen. Es por esto que se implementó la modelación a través de una unidad didáctica para potenciar el desarrollo del pensamiento métrico y se alcanzó conclusiones similares.

Otros autores como Castrillón et al. (2017) en su artículo *Tipos de tareas de modelación para la clase de matemática* ofrecen a los profesores un panorama amplio sobre la diversidad de tareas de modelación, sus alcances y posibilidades de inclusión en el aula desde la cotidianidad escolar; ya que, a pesar de la relevancia de la modelación matemática, su integración en los planes de estudios y la vida escolar se convierte en un desafío en muchos países. Presentan un conjunto de posibilidades que la investigación internacional le atribuye a la modelación matemática, se requiere la conjunción de varias condiciones, entre ellas, el ambiente de aprendizaje y el tipo de tarea que se diseña para tal fin.

Para reconocer la manera en que la modelación matemática podría “cobrar forma” en la cotidianidad escolar la atención se enfocó en los enunciados, en la autenticidad de los contextos y prácticas que se involucran en las tareas, y en los alcances y limitaciones que ofrecen para el trabajo matemático en el aula. (p. 248)

La investigación deja ver la amplia literatura y sentido que le dan a la modelación y es de allí donde se le debe dar comprensión al término, se pudo realizar la unidad didáctica de acuerdo

con el proceso inmerso en la modelación, las tareas a realizar en el aula contribuyeron y apuntaron a los propósitos de esta investigación.

En la opinión de Pantoja et al. (2017) en su estudio *la modelación matemática en situaciones problema de la vida cotidiana*, mencionan que:

La modelación matemática es una de las opciones que dispone el profesor para provocar en el estudiante motivación por aprender matemáticas, porque además de construir el modelo matemático de una situación problema, propicia reflexión sobre el comportamiento de las variables que intervienen y su vínculo con el fenómeno. (p.441)

La modelación matemática como recurso didáctico en el aula de clases y fuera de ella, aplicado a cada situación de la vida cotidiana es una buena opción para que el alumno discuta y exponga sus ideas, perspectivas, conocimientos propios, con el que se propicia interés por el aprendizaje de las matemáticas mediante su relación con situaciones de su contexto, además de permitir involucrarse en forma activa y dinámica, fortalece sus aprendizajes y el docente obtiene insumos para tener en cuenta el ritmo, las necesidades y el diario vivir de los estudiantes.

Ahora bien, Hernández (2021) en su investigación *procesos de modelación matemática y modelación estadística* plantea diferentes conceptos.

La modelación matemática la presenta como un ciclo que requiere ciertas fases. Se observan posturas en la que apuntan al desarrollo de actividades escolares investigativas como herramientas didácticas bajo una perspectiva epistemológica cíclica de una representación mental conectada con el mundo real (matematizar) con el propósito de construir un modelo que le permite validar los resultados con la realidad para integrar las matemáticas con otras áreas. (p.352)

Es en este punto la didáctica entra en juego y nos orienta como hacerlo, para planear estrategias de enseñanza que mejoren los aprendizajes y también poder hacer una adecuada transposición didáctica sobre todo lo relacionado con el pensamiento métrico.

A pesar de las diversas perspectivas en el aprendizaje de las matemáticas, los modelos matemáticos son por lo general construcciones abstractas que describen características generalizadas de una estructura o patrón, sometido a un proceso de cuantificación,

búsqueda de patrones, interpretación algebraica de los datos, las ideas y las relaciones entre los conceptos matemáticos. El proceso de Modelación Matemática se mueve constantemente entre el mundo real del fenómeno no explorado y el mundo en el que se está explorando la representación matemática. (Hernández, 2021, p.352)

Este artículo da una diversidad bibliográfica sobre el concepto de modelización matemática para entender el objetivo y el proceso que se siguió para el trabajo realizado en la presente investigación.

Según Sarmiento et al. (2020) en relación con el proceso de modelación matemático incorporado como:

Contenido curricular (MEN, 1998; MEN, 2006), y con las sugerencias de su implementación en los DBA (MEN, 2016), se evidenció que su incorporación está orientada por el uso de la modelación matemática como vehículo para introducir o desarrollar conceptos, en Colombia ya existe un número considerable de investigaciones en esta vía que muestran las ventajas de la modelación, pero se debe fortalecer la formación de profesores de matemáticas en modelación matemática, tal vez como uno de los ejes del currículo. (p.352)

Es por esto por lo que se quiso profundizar en la modelación matemática como instrumento para el desarrollo del pensamiento métrico atendiendo los lineamientos curriculares del MEN.

Acevedo y Rodríguez (2020) en su artículo de investigación titulado *Diseño y validación de rúbrica para la evaluación de modelación matemática en alumnos de secundaria* mencionan que:

La modelación matemática ha ganado gran relevancia en el ámbito educativo desde hace más de 40 años. Esta es considerada como una opción para la enseñanza en la que se incorporan problemas de la realidad para relacionarlos con el mundo de las matemáticas, de tal manera que permite a los estudiantes ver el lado práctico de estas. La evaluación de las fases de modelación matemática se llevó a cabo con base en una rúbrica diseñada, un instrumento confiable y válido para evaluar fases de la modelación. Este instrumento

aporta una guía de evaluación para el docente interesado en promover el aprendizaje de las matemáticas a partir de la estrategia de la modelación. (p. 13)

Los autores de esta rúbrica muestran un camino y una herramienta para evaluar después que se ejecutó el proyecto de investigación.

Después de haber expuesto el problema y de hacer una revisión bibliográfica se ha planteado la siguiente pregunta:

¿Cuál es el aporte de la modelación matemática en el desarrollo del pensamiento métrico de los estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Jorge Eliecer Gaitán del municipio de Yopal – Casanare?

3 JUSTIFICACIÓN

A través del tiempo se ha evidenciado la importancia de las matemáticas como mecanismo de comunicación e interacción entre las personas y que permite el uso de un lenguaje universal para el desarrollo tecnológico y el mejoramiento de la calidad de vida en todos los rincones del planeta. Este proyecto de investigación busca fortalecer algunas habilidades de las matemáticas y en específico el pensamiento métrico, para que los estudiantes de grado quinto de la I.E Jorge Eliécer Gaitán de Yopal utilicen este lenguaje de manera interdisciplinar y aborden situaciones a partir de modelos matemáticos para la comprensión y resolución de problemas en su ámbito escolar. Así mismo es importante desarrollar el pensamiento métrico a través de la modelación, porque permite dar solución a diversos problemas que el estudiante afronta en la realización de sus quehaceres en la escuela y en la vida cotidiana; como por ejemplo estimar la distancia que hay desde su vivienda al colegio y el tiempo que puede tardar en llegar a ella, medir su estatura en diferentes unidades y compararla con sus compañeros, conocer las dimensiones de un objeto para poder dibujarlo en un trozo de papel, etc. Por lo tanto, este trabajo es conveniente porque contribuye a mejorar los desempeños de aprendizaje en los educandos.

En cuanto a los desempeños que el MEN proporciona para el desarrollo del pensamiento métrico en los lineamientos curriculares se espera la comprensión de conceptos como: magnitudes, procesos de medición, estimación, conversión de unidades, al igual que el uso y la aplicabilidad que debe darle el estudiante según su contexto. Esto conlleva a que los niños entiendan la relación entre área y perímetro, volumen y capacidad, e identifiquen unidades de medidas, unidades derivadas múltiplos y submúltiplos. Así mismo es fundamental dar la oportunidad a los estudiantes que utilicen instrumentos de medición, comparen, e identifiquen en su entorno diferentes medidas respecto a la longitud, masa, superficie. El aprendizaje de estos conceptos se verá reflejados en diferentes momentos cotidianos de los educandos; en la escuela, en la casa, en el parque y en otros lugares. Ejemplo de ello es que podrían realizar dibujos con medidas exactas, comparar el ancho y largo de los objetos, en los deportes y otros juegos establecer tiempos para recorrer distancias determinadas, armar y encajar bloques, conocer la hora, el día y los meses del año, encontrar formas similares, conocer las cantidades necesarias para preparar alimentos, resolver problemas matemáticos en clase, entre muchas actividades de la vida real que requieren habilidades del pensamiento métrico.

Por otro lado, desarrollar el pensamiento métrico a través de la modelación también permite la participación de todos los estudiantes en actividades didácticas, que dan cuenta de una situación en particular para construir un modelo de solución de la situación problemática que esté puesta en escena. Es aquí donde el docente a la hora de planear clases debe hacerlo acorde a la realidad de los contextos para que sean más interesantes y los estudiantes logren los aprendizajes; En ese orden de ideas se podría pensar en los tipos de tareas de modelación propuestos por Villa (et al. 2017), que pueden orientar al docente a ser más objetivo, claro, preciso y acertado de los tipos de tarea en las aulas de clase de matemáticas y ciencias. Cabe señalar que con la modelación se desarrollan diversas habilidades y convierte en actores activos a cada uno de los que intervienen en el aprendizaje y la enseñanza de las ciencias, además con el trabajo a realizar se puede establecer relaciones didácticas entre teoría y práctica teniendo en cuenta los intereses de los educandos.

Dado que dentro de la compleja gama de problemas que afecta la educación existe el miedo al cambio, a la innovación, a la transformación de las prácticas docentes; es por esto que este proyecto se convierte en una herramienta que beneficia a la comunidad educativa, con una serie de momentos y vivencias en la medida que el proceso de modelación permite a los estudiantes construir su conocimiento teniendo en cuenta la interpretación, el razonamiento y la representación de situaciones de su contexto y que el maestro pudo ejecutar fácilmente en aula de clase sin acudir a recursos tecnológicos avanzados con los que no cuenta la institución. Así mismo, el educador debe crear espacios para fortalecer las competencias de los estudiantes que den cuenta de una observación, experimentación, explicación de fenómenos y que a su vez desarrollen la comprensión, el análisis, la lógica, la creatividad y la imaginación.

Por ende, se pretende continuar con la reflexión docente y seguir las orientaciones dadas por el MEN sobre el aprendizaje de las ciencias, la apropiación de estrategias para que sean un puente entre lo conceptual y lo práctico en las competencias que deben adquirir los estudiantes. Al aplicar esta investigación en el aula se pudo desarrollar el pensamiento métrico en los estudiantes de grado quinto, para mejorar los resultados en pruebas externas e internas de la institución educativa y lograr evidenciar aprendizajes en todo lo relacionado a los sistemas de medida en la básica primaria. De igual manera sea aportó una estrategia didáctica a los docentes

para que contribuyan a fortalecer las prácticas pedagógicas desde el proceso de la modelación matemática.

En coherencia con lo anterior, se mostró a la comunidad educativa los resultados de esta investigación y la aplicabilidad de una unidad didáctica para que los docentes que orientan otras asignaturas se motiven a mejorar sus prácticas pedagógicas y contribuyan con el mejoramiento de la calidad de la educación del municipio.

4 OBJETIVOS

4.1 OBJETIVO GENERAL:

Determinar el aporte de la modelación matemática en el desarrollo del pensamiento métrico en los estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Jorge Eliecer Gaitán del municipio de Yopal – Casanare.

4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

-Reconocer las dificultades que presentan los estudiantes de grado quinto en el uso de las magnitudes fundamentales y los sistemas de medición.

-Diseñar y aplicar una unidad didáctica basada en la modelación matemática para desarrollar el pensamiento métrico.

-Describir el aporte de la unidad didáctica basada en la modelación matemática para el desarrollo del pensamiento métrico.

5 REFERENTE TEÓRICO

5.1 EL PENSAMIENTO Y LOS SISTEMAS MÉTRICOS O DE MEDIDAS

Para el MEN (2006) “los conceptos y procedimientos propios de este pensamiento hacen referencia a la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones” (p.63).

En lo que respecta al aprendizaje de sistemas de medida y, en particular del SI, es importante el reconocimiento del conjunto de unidades de medida que se utilizan para cada una de las diferentes magnitudes (la velocidad, la densidad, la temperatura, etc., y no sólo de las magnitudes más relacionadas con la geometría: la longitud, el área, el volumen y la amplitud angular). El estudio de esas primeras magnitudes muestra que el pensamiento métrico no se limita a las matemáticas, sino que se extiende también a las ciencias naturales y sociales. Igualmente, es necesario establecer diferencias conceptuales entre procedimientos e instrumentos de medición, entre unidades y patrones de medida, y entre la precisión y la exactitud de una medición. De especial importancia son aquellas magnitudes que tienen estrecha relación con aspectos claves de la vida social, como, por ejemplo, todo lo relacionado con los servicios públicos, sus procesos de medición y facturación y las unidades respectivas (litro, metro cúbico, voltio, amperio, vatio, kilovatio, kilovatio-hora). De esta manera, el pensamiento métrico está estrechamente relacionado con las disciplinas científicas naturales, sociales y con las competencias ciudadanas, en particular, con lo que al cuidado del medio ambiente se refiere, en tanto conviene tener elementos conceptuales. (MEN, 2006, p.64)

En concordancia con lo expuesto anteriormente, el ICFES (2020) en su marco de referencia de las pruebas saber 3°,5°,7°y 9°, expone que el pensamiento métrico y los sistemas de medida:

Alude, entre otros asuntos, al trabajo con la cantidad en su expresión no numérica (p. ej., referida al tamaño de las magnitudes, no exclusivamente geométricas), al tratamiento de la conmensurabilidad e inconmensurabilidad como relaciones posibles entre magnitudes, y a procesos matemáticos relacionados con la conservación y estimación del tamaño de la

magnitud, o con la realización de medidas a través de instrumentos y el cálculo de medidas a través de la construcción y uso de fórmulas. (p.12)

En torno a el interés por las magnitudes y su medida surge de la necesidad de cuantificar cualidades de los objetos o fenómenos de nuestro entorno. La magnitud tiempo está asociada a fenómenos cíclicos de la naturaleza, como los días, los meses y los años. Las magnitudes longitud y superficie están relacionadas con contextos en los que se quiere determinar la distancia entre dos puntos o la extensión de un cuerpo. La temperatura y el peso son magnitudes especialmente ligadas a nuestras percepciones corporales; a través del tacto percibimos si los objetos están fríos o calientes, de igual forma apreciamos su peso al sostenerlos o levantarlos.

Además, estas dos últimas magnitudes, a diferencia de la longitud o el área, no se perciben visualmente, lo que dificulta su apreciación. Uno de los objetivos en Educación Primaria es reconocer las diferentes magnitudes, comparar cantidades de magnitud, medirlas y establecer relaciones entre ellas. La enseñanza de la medida de magnitudes es un tema esencial en el que se sustentan otras áreas de las matemáticas. Está estrechamente ligada a la acción de cuantificar y, por lo tanto, a la aritmética. Asimismo, está relacionada con la geometría, ya que en muchas ocasiones se estudia la medida de objetos geométricos; por ejemplo, su área, volumen, perímetro o amplitud de ángulos. (Carrillo et al, 2016, p.135)

Ahora bien, la idea más simple de medida de una cantidad de magnitud para Carrillo et al, (2016) está relacionada con la comparación. La comparación se suele hacer a través de los sentidos, generalmente la vista por ejemplo en el caso de la longitud podemos comparar la altura de dos niños colocando a uno al lado del otro. La unidad de medida se define como la cantidad de magnitud que se toma como referencia o patrón de comparación reiterada. De esta forma, medir es asignar un número a una cantidad de magnitud referido a cuántas veces está contenida la unidad de medida, y dicho número es su medida. Las primeras unidades de medida surgen de forma natural, utilizando partes de nuestro cuerpo (ej., pie o mano) u objetos cotidianos (ej., lápiz o folio). La elección de una unidad de medida es arbitraria, aunque conviene que se ajuste al objeto que se quiere medir. Si la unidad seleccionada es muy pequeña, ha de reiterarse muchas

veces sobre el objeto que hay que medir, lo que puede resultar preciso, pero poco práctico. No es práctico, por ejemplo, medir el largo de una habitación usando clips. (p.137)

La comprensión de la medida de magnitudes, y por tanto la asimilación de la idea de cantidad de magnitud, es un proceso complejo, en el que están involucrados múltiples conceptos como:

La equipartición requiere la aceptación de que un objeto puede ser descompuesto, hecho que no es trivial para los alumnos. Cuando la comprensión del alumno avanza, y llega a comprender que el resultado de una participación puede volver a ser objeto de una equipartición (y de tantas como se quiera), puede inducir la continuidad de la medida.

La iteración de unidades debe ser exhaustiva, cubriendo toda la cantidad de magnitud del objeto, y realizada con un referente (unidad de medida) fijado y único. El ejemplo de las botellas medidas con bolígrafos y clips es un precursor del tratamiento de la medida usando unidades y subunidades, aunque en dicho ejemplo no tenga por qué existir una relación explícita entre ambas unidades.

La transitividad de la medida se puede entender si, por ejemplo, un lápiz cuesta la misma cantidad de euros que una goma de borrar y esta última cuesta lo mismo que un rotulador, se concluye que el lápiz cuesta lo mismo que el rotulador. (Carrillo et al,2016, p.140).

Cuando se conserva la medida los objetos pueden sufrir transformaciones de descomposición/ recomposición, posición y forma, transformaciones que se denominan "rígidas". Un ejemplo para la transformación descomposición / recomposición en la magnitud peso es el siguiente: el peso de media docena de manzanas es el mismo si las pesamos todas juntas que si pesamos cada una de ellas por separado y luego sumamos sus pesos. Un ejemplo para la transformación posición en la magnitud longitud es el siguiente: un lápiz conserva su longitud, aunque lo cambies de posición. (Carrillo et al, 2016, p.140).

En la vida real surgen situaciones donde no es necesario dar la medida exacta de un objeto. Por ejemplo, al hacer la comida, es habitual sazonarla con una pizca de sal, o calcular la cantidad de arroz de un plato a ojo, para lo que basta con una estimación aproximada de la

cantidad de tales ingredientes. Otro caso habitual es cuando queremos colocar un libro en una estantería con varios libros, en el que no se recurre a una regla para medir el grosor, sino que se estima la cantidad de longitud para ver si cabe. En otras ocasiones, la cantidad de medida que hay que calcular es muy difícil de medir con las herramientas que se tienen, como la altura de un árbol, con lo que se realiza una estimación.

La estimación suele basarse en la percepción de la cantidad de magnitud y el uso de referentes, lo que resulta en una asignación subjetiva de un valor numérico a la medida de dicha cantidad de magnitud. La estimación, en la mayoría de las situaciones cotidianas, está estrechamente ligada a nuestros sentidos, en particular al de la vista. Por ejemplo, estimamos la altura de una puerta o si en un hueco podemos aparcar el coche con un simple vistazo (sin que sea necesario en este segundo caso llegar a la medida de dicho hueco; se trataría de una comparación de cantidades de longitud por estimación). En estos dos ejemplos, existe una identificación de la magnitud longitud, y un resultado propuesto, la valoración. (Carrillo et al., 2016, p.143)

5.1.1 Enseñanza de medición, magnitudes y cantidad

En la reflexión docente sobre el desarrollo del pensamiento métrico se ve la necesidad de ofrecer experiencias que le permitan al estudiante medir y comprender que la cantidad hace referencia a la medida numérica de una magnitud. Aprender a medir les permitirá realizar cálculos precisos, interpretar datos, inferir y dar solución a un problema.

Se habla de medir (en sentido amplio) para designar la acción de asignar un código identificativo a las distintas modalidades o grados de una característica de un objeto o fenómeno perceptible, que puede variar de un objeto a otro, o ser coincidente en dos o más objetos. Con esta descripción tenemos en cuenta no sólo la medida habitual de características cuantitativas y continuas como longitud, peso, capacidad, etc., sino que también consideramos “medir” asignar una categoría a rasgos cualitativos como el color de los ojos, la región de nacimiento, el grado de placer que ocasiona un estímulo, etc. (Godino et al., 2002, p.616)

Godino et al (2002) también se refiere a:

La magnitud para los atributos o rasgos que varían de manera cuantitativa y continua (longitud, peso, densidad, etc.), o también de manera discreta “el número de personas”; las cantidades son los valores de dichas variables. En este caso, medir una cantidad consiste en determinar las veces que esa cantidad contiene a la cantidad (o cantidades) que se toman como referencia (unidades de medida). Por ejemplo, decimos que el largo de la mesa es 1 m 40 cm. Al hacer una medición asignamos un número y una unidad de medida, o varias, dependiendo de si la cantidad a medir es múltiplo de la cantidad tomada como referencia o no, y de la precisión deseada. (p.615)

El docente, así como lo da entender Godino debe trabajar en el aula actividades que conlleven a distinguir diferentes atributos o rasgos de objetos que se consideren pueden ser magnitudes.

Aunque en la educación primaria y en la vida cotidiana las magnitudes que se estudian y usan son cuantitativas, medibles mediante números, es importante tener en cuenta que otros rasgos de los objetos y fenómenos con los que entramos en contacto admiten también una codificación que refleja las clasificaciones y ordenaciones que se pueden hacer con ellos.

El primer punto de reflexión de la enseñanza de la medida debe ser clarificar los tipos de situaciones o tareas que han llevado, y continúan llevando, al hombre a realizar la actividad de medir ciertas características de los objetos perceptibles. Si queremos que los alumnos entiendan la razón de ser de la medida debemos enfrentarles a dichas situaciones, no tanto para que ellos reinventen por sí mismos las técnicas, sino para que puedan dominar los procedimientos de medida y atribuir un sentido práctico al lenguaje y normas que regulan la actividad de medir. (Godino et al., 2002, p.617)

En la educación primaria la enseñanza de la medida ha sido tomada como un ejercicio de dar datos numéricos de un objeto o figura, sin llevar al estudiante a realizar actividades que impliquen medir objetos reales donde logren comprender conceptos y busquen diferentes alternativas de medida. Así mismo, la medida de magnitudes nos obliga a reflexionar sobre el difícil problema de las relaciones entre las matemáticas y la realidad, las ideas de magnitud, cantidad y medida en diversos contextos varia su lenguaje y el uso de la medida.

Las magnitudes son utilizadas en la vida diaria y en las ciencias experimentales para hacer referencia a las propiedades de los objetos o fenómenos que pueden tener diferentes

valores numéricos. En las ciencias humanas y sociales magnitud y cantidad hace referencia a lo cualitativo (clase social, placer, etc.). En este caso, las “cantidades” vienen a ser las distintas modalidades o valores que puede tomar el rasgo o característica del objeto o fenómeno en cuestión. · En la matemática con la palabra magnitud se designa un conjunto de objetos abstractos (cantidades) dotado de una cierta estructura algebraica, y medida es un isomorfismo entre dicha estructura y un subconjunto apropiado de números reales. El profesor, además de conocer estos usos debe saber cómo y por qué enseñarlos en los diferentes niveles educativos, o sea, seleccionar las tareas a proponer, papeles del profesor y de los alumnos, patrones de interacción, tipos de situaciones didácticas a implementar, instrumentos de evaluación, etc. (Godino et al.,2002, pp. 615-617)

Es tarea del docente buscar las estrategias oportunas para la transposición didáctica del concepto de magnitud y cantidad, y fortalecer el aprendizaje de los estudiantes para que desarrollen competencias en el pensamiento métrico y sistemas de medidas.

5.1.2 Construcción de la magnitud longitud

Esta investigación se enfocará en una magnitud fundamental, la longitud y su unidad de medida básica el metro, sus múltiplos y divisores, para que desde la práctica docente los estudiantes desarrollen el pensamiento métrico y utilicen instrumentos de medida.

Según Godino et al (2002) en el proceso de definición de la magnitud longitud se recorren unos pasos o etapas que son características en la construcción de cualquier magnitud:

Figura 1 Etapas para definir una magnitud



Nota: elaboración propia adaptado de Godino (2002)

Desde temprana edad es importante introducir a los niños en el mundo de las medidas ya que es una habilidad matemática que se utilizará en su vida cotidiana, aunque es complejo para ellos se debe afianzar en primaria hasta secundaria.

Es un tema que guarda, además, una estrecha relación con la construcción de los sistemas numéricos y con las formas y figuras geométricas (longitud, superficie, volumen de figuras y cuerpos geométricos), tanto en las técnicas de medida directa (contar el número de unidades) como indirecta (determinación del "tamaño" de las colecciones, o las dimensiones de los cuerpos y figuras mediante operaciones aritméticas y algebraicas). (pp.630,635)

De igual manera Godino et al. (2002) nos acerca a ciertos procedimientos claves para la construcción de la magnitud longitud:

1. Mediciones con unidades convencionales y no convencionales.
 - Utilización de instrumentos de medida.
 - Utilización de distintas estrategias para medir.
2. Construcción de instrumentos sencillos para efectuar mediciones directas.
3. Elaboración y utilización de estrategias personales para llevar a cabo mediciones de perímetros, áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, de manera exacta y aproximada.
4. Elaboración y utilización de estrategias personales para llevar a cabo estimaciones.
5. Toma de decisiones sobre las unidades de medida más adecuadas.
6. Transformación, comparación y equivalencias de las unidades de medida utilizando los algoritmos de cálculo correspondientes.
7. Utilización de los algoritmos para calcular áreas de rectángulos y triángulos.
8. Explicación oral del proceso seguido y de la estrategia utilizada en la medición. (p.636)

En el aula de clase es de gran prioridad tener en cuenta los anteriores procedimientos para la construcción de la magnitud longitud para que los estudiantes a medida que van avanzando de grado logren obtener mediciones precisas, comparables y buen uso de instrumentos de medida. Del mismo modo a continuación se quiere dar conocer algunas sugerencias para tener en cuenta a la hora de enfrentar el aprendizaje y la enseñanza de la magnitud longitud.

5.1.3 Orientaciones didácticas en el aprendizaje de la magnitud longitud

Siguiendo la terminología de Piaget citado por (Godino et al, 2002), hay varias etapas en lo que se refiere a la adquisición del principio de conservación de la longitud por parte del niño:

- En un primer estadio la longitud de una línea (ya sea recta, curva o poligonal) va a depender solo de los extremos.
- En un segundo estadio dos segmentos que en un principio reconoce de la misma longitud, dejan de tenerla al desplazar uno de ellos pues el niño se fija solo en el punto final de cada segmento y no en los puntos iniciales; según el punto o puntos en que el niño fije su atención le llevará a resultados diversos que, incluso, van a depender de la longitud de los segmentos utilizados.
- En el tercer estadio es cuando el niño percibe como iguales longitudes que realmente lo son, independientemente de consideraciones ajenas, y es entonces, alrededor de los 7 años, cuando adquiere el principio de conservación de la longitud. (p.638)

La longitud se relaciona con las dimensiones de los objetos y la distancia entre dos puntos, en los niños influye la percepción por lo tanto una comprensión de esta magnitud se debe dar a través de su experiencia cotidiana y su aprendizaje en la escuela.

Godino et al. (2002) menciona que a edades tempranas el niño suele pensar que la distancia entre dos objetos cambia si se interpone un tercer objeto entre ellos y es la percepción correcta de las distancias uno de los aspectos que le llevarán a la adquisición del principio de conservación de la longitud y hará que el niño esté en condiciones de abordar el estudio de la medida de longitudes y su aplicación posterior al cálculo de perímetros. (p.638)

Godino explica que un niño aprende a medir con sustanciales habilidades sensoriales y perceptivas con aspectos de geometría y aritmética. “El proceso procede desde la percepción a la comparación y después a la aplicación de un estándar de medida (o referente)”. (p.639)

De acuerdo con Godino et al. (2002) un docente debe hacer “experimentar a los niños muchos estímulos y características de los objetos que eventualmente deben medir. Estas actividades son un comienzo fundamental para adquirir destreza en la medición” (p.639).

“Habiendo percibido alguna propiedad de algún objeto, nosotros, de un modo natural, lo comparamos con otros objetos que tienen la misma propiedad”. Al medir su altura, algunos niños pueden desear compararla con la de otros niños de la clase” (p.639-640)

La comparación de atributos de objetos conduce de un modo bastante lógico a la necesidad de un estándar que podamos aplicar sucesivamente. Podemos ahora ver la medida como la búsqueda de un estándar o referente. La comparación de dos cosas es adecuada cuando deseamos hacer enunciados de equivalencia o no equivalencia "Tu eres más alta que yo", "Yo soy más alto que mi hermana pequeña". Esto sirve bien para comparaciones iniciales. Sin embargo, esta aproximación a la comparación pronto resulta bastante inefectiva. Realmente necesitamos algún estándar de medida, un referente que pueda ser usado sucesivamente y al que podamos acudir en cualquier momento. El referente inicial que usemos no tiene que ser un referente estándar o que sea usado en todo el mundo. Por ejemplo, las partes del cuerpo son referentes fácilmente disponibles para medir longitudes. (Godino et al., 2002.p.640)

Con base a los estándares de medida Godino et al. (2002) indican primero que: Permiten a una persona comunicar una medida a otra de un modo abreviado y directo. Segundo, permiten medidas precisas y consistentes en diferentes áreas geográficas. Cuando nos trasladamos de un país a otro, podemos estar seguros de que las medidas que son estándares en nuestro país son estándares en otro también. Una extensión lógica de esta idea será adoptar estándares de medida utilizables para comunicar los mismos mensajes en todas las partes del mundo. Esto conduce naturalmente al Sistema Internacional de Unidades (SI), que ahora cumple esta función prácticamente en todo el mundo. (p.640)

El aula de clase debe evidenciar una motivación constante en el aprendizaje de las medidas y a todo lo que se refiere la magnitud longitud, por ende, involucrar a los niños en situaciones reales les brinda la oportunidad de medir objetos de su alrededor, como la altura de un salón, la longitud de una mesa, o la distancia entre dos puntos de su contexto inmediato. Esto les ayudará a obtener un aprendizaje profundo de forma práctica y emocionante para ellos.

Godino et al (2002) afirma que para trabajar las diferentes magnitudes se le debe permitir al estudiante comparar, ordenar, estimar, usar instrumentos, elegir la unidad más adecuada,

medir, comprobar, hacer una comparación entre la medición y la estimación realizada y por último evaluar el error. (p.642)

Como plantea Godino et al. (2002):

La enseñanza de la medición debe apoyarse en las ideas intuitivas de los alumnos y en sus experiencias informales de medición para ayudarles a comprender los atributos que se miden y lo que significa medir. El estudio de la medida en la escuela elemental requiere el uso de materiales concretos para que los niños comprendan los rasgos de los objetos que se miden y dominen los instrumentos correspondientes. (p.642)

Además de lo que Godino expone el estudiante debe contar con espacios propicios y momentos en los cuales exponga sus ideas, perspectivas, conocimientos propios, esto va a permitir que se motive e involucre activamente en su aprendizaje, y por supuesto proporcionarle los materiales necesarios con adecuada intervención en el aula.

Un atributo medible es una característica de un objeto que se puede cuantificar. Los segmentos de recta tienen longitud, las regiones planas tienen área, los objetos físicos tienen masa. A medida que los alumnos progresan en el currículo desde preescolar a secundaria, el conjunto de atributos que pueden medir se amplía. El primer paso en el estudio de la medida será reconocer que los objetos tienen atributos que son medibles. (p.642)

5.2 ACONTECIMIENTOS DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA

La modelación matemática es un proceso que viene siendo implementado por varios investigadores. Como toda propuesta, tiene ventajas buenas y legítimas, pero también tiene algunas dificultades que pueden ser subsanadas. Se ha aplicado la modelación matemática desde 1986 con alumnos de todos los niveles (primaria hasta licenciatura), directa e indirectamente, con profesores simpatizantes de la propuesta. (Biembengut y Hein, 2004.p.118)

También se ha desarrollado trabajos con profesores mediante cursos de formación continua y disciplinas de cursos de posgrado en Educación Matemática. Diversos tipos de investigación con la modelación, analizando, por ejemplo: aprendizaje, creatividad, motivación, evaluación, etc.

En la otra orilla, se encuentran los autores que defienden la modelación como un proceso ideal para enseñar matemática, debido a que; "...trabajar con modelaje matemático en la enseñanza no es sólo una cuestión de ampliar el conocimiento matemático, sino, sobre todo, de estructurar la manera de pensar y actuar". Bassanezi, citado por (Biembengut- Hein, 1997, p.214). En este aspecto es importante destacar que las posiciones sobre el uso de modelos para enseñar matemáticas y el uso de modelos para enseñar ciencia en las escuelas tienen en común procesos de tipo metodológico, que apuntan a facilitar el aprendizaje de construcciones conceptuales complejas y llevar a la comprensión de estos. Por último, es importante decir que la modelización en matemáticas depende de varios factores, entre ellos; el grado de escolaridad, el tiempo disponible y los objetivos del curso (Biembengut- Hein, 1997, p. 214) estos factores permiten delimitar, ampliar y aplicar los conceptos a cualquier realidad o nivel, lo cual se convierte en un pilar fundamental en la enseñanza de las matemáticas.

Uno de los estudios que han realizado de la Modelación matemática para saber las principales dificultades de los profesores y sus alumnos con el método de la modelación, arroja la siguiente síntesis:

Tabla 2 Ventajas y dificultades de la modelación

Las principales ventajas	Las principales dificultades
-Propicia en el alumno una mejor comprensión de los contenidos desarrollados y mejora el grado de interés del alumno por las matemáticas, debido a la aproximación con el área afín y la aplicación.	-La dificultad principal está centrada en la formación de los profesores y en la falta de vivencia del alumno en un trabajo de esta naturaleza. En la formación de profesores de matemáticas, por ejemplo, rara vez se da una orientación de modelación ni cómo utilizar este procedimiento en la enseñanza formal. Eso viene ocurriendo más a menudo en esta última década, en cursos de formación continua o disciplinas de posgrado en Educación Matemática.
-Permite una mayor seguridad en el profesor para la conducción de la clase, pues puede determinar un tiempo para enseñar el contenido matemático, presentar ejemplos análogos y retornar al modelo director, resolviéndolo y evaluándolo.	-Para los alumnos que tuvieron una vivencia de enseñanza en los moldes tradicionales, la resistencia a la modelación es significativa, ya que este método requiere más empeño en los estudios, la investigación y la interpretación del contexto.
-Favorece que el alumno: actúe/haga y no sólo reciba sin comprender el significado de lo que está estudiando; que investigue, lo que es una actividad poco común a pesar de ser parte del currículo; que cree conocimiento y	

sentido crítico, principalmente en la formulación y validación del modelo; que interactúe y se entere de los trabajos de los demás grupos.

-Permite al profesor: estar más atento a las dificultades del alumno, tomar conocimiento de los trabajos de manera gradual, en especial en el momento en el que orienta a los alumnos, y modificar sus criterios e instrumentos de evaluación.

Nota: Elaboración propia adaptado de Biembengut (2004)

5.2.1 Modelo matemático

La construcción de un modelo se da a partir de una posible solución de un problema planteado y que pueden dar la oportunidad de resolver otros; estos modelos llevan un proceso de seguimiento y valoración para su aceptación.

Algunas de las definiciones tomadas son las de Biembengut (2004) y Rutherford (1978) que coinciden en su afirmación, un modelo consiste en la combinación de varios símbolos o ecuaciones matemáticas que representan la situación y/o solución del problema. “Un Modelo Matemático de un fenómeno o situación problema es un conjunto de símbolos y de relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno en cuestión” (Biembengut, M., Hein, N., 2004, pág. 106). Se define como “Modelo Matemático de un sistema prototipo S (físico, biológico, social, químico, etc.) a un completo y consistente sistema de ecuaciones matemáticas Σ , que es formulado para expresar las leyes de S y su solución intenta representar algún aspecto de su comportamiento” (Rutherford, 1978, p.5 como se citó en González y Flórez, 2018, pág. 52).

El MEN menciona que:

Un modelo puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible. Un modelo se produce para poder operar transformaciones o procedimientos experimentales sobre un conjunto de situaciones o un cierto número de objetos reales o imaginados, sin necesidad de manipularlos o dañarlos, para apoyar la

formulación de conjeturas y razonamientos y dar pistas para avanzar hacia las demostraciones”. (MEN, 2006, p. 52)

En este sentido todo modelo es una representación, pero hay que pensar cuales son los modelos que crean los estudiantes según sus intereses, contextos y necesidades; en ocasiones puede ser un modelo sencillo, exacto y comparable con datos reales.

5.2.2 Proceso de modelamiento matemático

Ahora es importante identificar los elementos básicos en la construcción de modelos matemáticos dentro del aula de clase desde la modelación matemática para el desarrollo del pensamiento métrico en el aula. La habilidad de modelamiento implica “traducir” una situación del mundo real a la matemática (Blum, 2012) citado por Ministerio de Educación de Chile (2016), “es decir, expresar acciones o situaciones cotidianas con lenguaje matemático, aplicar-seleccionar-evaluar modelos que involucren operatoria, identificar regularidades en expresiones numéricas y geométricas y generalizar utilizando lenguaje matemático, traducir expresiones en lenguaje cotidiano a lenguaje matemático y viceversa” (p. 12).

Según el Ministerio de Educación de Chile (2016) el modelamiento matemático busca que las y los estudiantes tengan la oportunidad de analizar, razonar y transmitir ideas matemáticas de un modo efectivo al plantear, resolver e interpretar problemas matemáticos en diferentes situaciones cotidianas. Este tipo de resolución de problemas exige a las y los estudiantes cinco etapas que se describen a continuación:

- Se inicia con un problema enmarcado en la realidad.
- Se organiza de acuerdo con conceptos matemáticos
- Gradualmente se va reduciendo la realidad mediante procedimientos tales como la formulación de hipótesis, la generalización y la formalización. Ello revela los rasgos matemáticos de la situación cotidiana y transforma el problema real en un problema matemático.
- Se resuelve el problema matemático.
- Se da sentido a la solución matemática en términos de la situación real, a la vez que se identifican las limitaciones de la solución. (p. 15)

El Ministerio de Educación de Chile (2016) señala que: “La idea principal del modelamiento es la creación de un modelo, que representa en forma simplificada la realidad. En este proceso se toman en cuenta solamente aspectos relevantes que ayudan a responder una pregunta hecha con respecto al problema real” (p.14). “Se puede observar, también, que modelar se relaciona con representar, resolver y argumentar. En efecto las habilidades matemáticas que ponemos en juego en una situación dada pueden ser predominantemente de una naturaleza, pero las utilizamos en forma integrada” (p.51).

Para Villa (2007) la construcción de un modelo no se hace de manera automática ni inmediata, por el contrario, requiere de cierto periodo de tiempo en el cual el modelador pone en juego sus conocimientos matemáticos, el conocimiento del contexto y de la situación y sus habilidades para describir, establecer y representar las relaciones existentes entre las “cantidades”, de tal manera que se pueda construir un nuevo objeto matemático. Al proceso de obtención de un modelo matemático a partir de un fenómeno real es a lo que se llama: modelización matemática. (p.67)

La modelización matemática se considera como un ciclo que tiene unos pasos, éste comienza con la determinación de un fenómeno o problema del mundo real, el cual es observado y sometido a un proceso de experimentación intentando profundizar en su comprensión y en la búsqueda de datos para con ello construir un modelo que representa el fenómeno.

Construido el modelo, se generan todos los análisis posibles y se utilizan las herramientas matemáticas para construir una solución matemática y sacar de ella conclusiones del modelo, las cuales deben ser interpretadas a la luz del fenómeno. En la búsqueda de la coherencia entre las conclusiones del modelo y el fenómeno mismo se plantean estrategias de evaluación y validación. Si después de la validación, el modelo está acorde con el fenómeno problema, finaliza el ciclo; en caso contrario, comienza de nuevo partiendo de la evaluación del fenómeno enriquecido con los análisis, se hace una observación, se ajustan los datos, las variables y se continúa la reforma del modelo y así sucesivamente. (Villa, 2007, p.68)

Algunos pasos que propone Villa et al. (2022) para que se dé el proceso de modelación en la clase de matemáticas se resumen en la siguiente tabla:

Tabla 3 Pasos del proceso de modelación

Etapas	Descripción
Simplificación o delimitación.	Quienes modelan deben focalizarse en las variables de interés según la situación a resolver delimitando el problema matemático de tal manera que el modelo sea lo más preciso posible modificándolo de ser necesario.
Construcción del modelo.	Esta etapa incluye el uso de razonamientos, técnicas y representaciones por parte de quien modela. En la perspectiva de Villa-Ochoa (2016), se reconoce que un modelo es la conjunción de tres elementos; ellos son: una representación, un objeto representado y un usuario.
Validación del modelo y de los resultados.	En esta etapa puede intervenir el docente como especialista en la clase de matemáticas, evaluando los criterios de lógica, procedimientos, gráficos y algoritmos que usaron los estudiantes para definir el modelo y dar solución a un problema confrontando con la situación que dio origen al proceso de modelación.

Nota: elaboración propia adaptado de Villa et al, (2022)

6 METODOLOGIA

6.1 ENFOQUE Y ALCANCE

La intención de este proyecto reside en determinar el aporte de la modelación matemática en el desarrollo del pensamiento métrico los estudiantes de grado quinto de la I.E. Jorge Eliécer Gaitán de Yopal, para lograrlo fue indispensable conocer su entorno y la cotidianidad de los estudiantes de tal manera que se trabajó desde las realidades de su contexto natural y las particularidades y experiencias de cada uno. En esta medida esta investigación tiene un enfoque cualitativo en donde su fundamentación epistemológica tiende a ser de orden “descriptivo, se caracteriza por la utilización de un diseño flexible para enfrentar la realidad y las poblaciones objeto de estudio como: comunidades, escuelas, salones de clase etc." (Tamayo & Tamayo,2003, p. 57).

En esta investigación cualitativa se identificó claramente el problema que llevo a plantear la pregunta de investigación, y cada uno de los apartados de este trabajo que durante su desarrollo permitió avances en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, comprendiendo y resolviendo problemas planteados en la unidad didáctica y como resultado desarrollaron habilidades cognitivas y metacognitivas. Las investigaciones cualitativas están al servicio del hombre en toda su magnitud. La transformación y el cambio deben ocurrir dentro del proceso de la investigación, al igual que la interacción entre teoría y práctica. Proceso por el cual la investigación se extiende como proceso formativo y no como producto sumativo. Desarrolla instrumentos de recolección de información y análisis de los datos. (Tamayo & Tamayo,2003, p. 59)

6.2 POBLACIÓN Y CONTEXTO

Esta investigación se llevó a cabo en la Institución Educativa Jorge Eliécer Gaitán del municipio de Yopal-Casanare, ubicada en la zona urbana, en el barrio la Esperanza. Cuenta aproximadamente con 1500 estudiantes, distribuidos en la jornada mañana y tarde, en los grados de secundaria, media y básica primaria en jornada única. Consta de dos sedes la principal de sexto a once y la sede la esperanza para los estudiantes de primaria y preescolar. El grado quinto A con quienes se ejecutó esta investigación, estaba conformado por 36 estudiantes, niños cuyas edades oscilan entre los 10 y 12 años, en su mayoría procedentes de barrios cercanos a la

institución, de estratos uno, dos y tres. Algunos de ellos muestran apatía por el aprendizaje de las matemáticas por lo que sus intereses suelen ser relacionados con deportes.

El horizonte institucional de la institución educativa adopta el aprendizaje significativo, como corriente principal, se apoya en el constructivismo, trabajando desde la cotidianidad de los estudiantes, del contexto y el entorno. El currículo está orientado hacia la formación de seres humanos competentes e integrales, ejecución de proyectos transversales como educación para la democracia y la paz, educación sexual, tiempo libre, medio ambiente y escuela de padres. Muestra una idea de maestro como la persona encargada de planear, motivar, ejecutar y evaluar las actividades de enseñanza y aprendizaje.

6.3 UNIDAD DE TRABAJO

Para el presente estudio se diseñó una unidad didáctica, que fue implementada con estudiantes del grado quinto A de la I. E. Jorge Eliécer Gaitán de Yopal, este grupo estaba conformado por 36 estudiantes, se contó con la disposición del grupo para realizar el trabajo como se planteó.

La unidad didáctica y las demás actividades que se requirieron en el transcurso de la investigación se ejecutaron a todos los estudiantes, pero la unidad de trabajo para el análisis y la recolección de datos fue de seis estudiantes (estos estudiantes se identificaron como E1, E2, E3, E4, E5, E6) para realizar el muestreo de casos y un análisis profundo de manera realista que permitió entender los fenómenos y dar respuesta a la pregunta de investigación y se tuvo en cuenta los siguientes criterios para su selección:

1. Dentro los estudiantes escogidos tres hombres y tres mujeres
2. Disposición y actitud positiva frente a las actividades
3. Estudiantes con asistencia puntual y constante a clases
4. Escogidos de forma aleatoria de la lista

6.4 CONSIDERACIONES ÉTICAS

Debido a que la población con la que se trabajó niños menores de edad requiere tratamiento de uso especial para datos, por esto se diseñó para su correcto diligenciamiento un consentimiento informado como lo muestra el anexo 1, que fue debidamente firmado por los

padres o acudientes donde se describieron los objetivos claros del trabajo a realizar, de esta manera se procedió a aplicar la investigación.

6.5 UNIDAD DE ANÁLISIS

A continuación, se presenta una tabla con las categorías principales pensamiento métrico y modelación matemática, muestra los indicadores que se trazan con la aplicación de la unidad didáctica.

Tabla 4 Categorías, subcategorías y sus respectivos indicadores

Categoría	Subcategorías	Indicadores
Pensamiento métrico	-Magnitud longitud	Comprende y aplica la magnitud de longitud.
	-Estimación de medidas	Estima medidas de diferentes objetos o distancias
	-Medición	Realiza mediciones de longitudes de objetos tangibles de su entorno, utilizando la unidad de medida más adecuada.
	-Conversión de unidades	Realiza conversiones utilizando diferentes estrategias.
Modelación matemática	-Comprensión del problema o fenómeno.	-Comprende y contextualiza un fenómeno en el mundo real.
	-Matematización	-Formula un modelo matemático.
	-Interpretación y validación.	-Determina las soluciones al problema y justifica su validez.

nota: elaboración propia

6.6 TÉCNICAS Y FUENTES DE RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

Para la recolección de información fue necesario aplicar algunos instrumentos que permitieron analizar e interpretar los datos necesarios para conocer cuál es la incidencia de la modelación en el desarrollo del pensamiento métrico, por esto se planteó aplicar:

6.6.1 Actividad diagnóstica:

Dentro del primer momento(ubicación) de la unidad didáctica se encuentra una actividad para recoger los datos o concepciones que tienen los estudiantes frente a las dificultades del

pensamiento métrico especialmente a la comprensión y aplicación de magnitud de medida de longitud.

6.6.2 Observación

La observación dentro de esta investigación fue importante porque permitió recopilar datos e información directamente del entorno escolar y el comportamiento de los estudiantes durante el desarrollo de la Unidad Didáctica. Además, la observación cuidadosa y sistemática fue esencial para confirmar y respaldar la veracidad de los resultados obtenidos por los otros métodos de recolección de información, respaldando así la confiabilidad del aporte que pudo tener la modelación frente al desarrollo del pensamiento métrico, “la observación implica adentrarnos profundamente en situaciones sociales y mantener un papel activo, así como una reflexión permanente. Estar atento a los detalles, sucesos, eventos e interacciones” (Hernández et al. 2014, p.432).

6.6.3 Entrevista Semi Estructurada

Antes de aplicar la Unidad didáctica y al finalizar su ejecución se realizó una entrevista que permitió un acercamiento a los sujetos de estudio y un análisis a los propósitos particulares de la investigación desde la mirada de las actividades realizadas en los tres momentos de la unidad didáctica, a fin de establecer con ayuda de los estudiantes la incidencia del proceso de modelación matemática en el desarrollo del pensamiento métrico. La entrevista semiestructurada consta de unas preguntas iniciales, que en algunos casos fue necesario modificar y ajustar acorde a las respuestas que dieron los estudiantes y la conversación resultante.

6.6.4 Prueba piloto

Para validar la actividad diagnóstica se realizó una prueba piloto con estudiantes de grado quinto distintos a los participantes y se efectuaron las correcciones pertinentes que fueron notorias en la prueba, así mismo la unidad didáctica fue revisada por pares académicos quienes aportaron sugerencias que la enriquecieron para dar cumplimiento a los objetivos.

6.7 UNIDAD DIDÁCTICA

La unidad didáctica está compuesta por tres momentos que son: ubicación, desubicación y reenfoque y que forman parte importante del camino para alcanzar el objetivo del trabajo que

se realizó. El momento de ubicación tuvo como intención principal conocer los saberes previos que tienen los estudiantes frente a los conceptos relacionados a la aplicación del pensamiento métrico. Así mismo en el primer momento se realizó una actividad inicial para recoger la información que permitió diseñar la segunda actividad del momento de ubicación y los otros dos momentos.

El segundo momento de desubicación tuvo como finalidad presentar los diferentes temas mediante explicaciones sencillas y con recursos de apoyo audiovisuales para el desarrollo conceptual, con actividades a realizar para la construcción de modelos que permitieron desarrollar el pensamiento métrico. Por último, el momento de reenfoque que integro los momentos anteriores, en el cual los estudiantes demostraron sus saberes, valoran sus aprendizajes y dificultades, incorporan nuevos saberes, dan aplicabilidad a los mismos y realizan una autorregulación de sus aprendizajes.

La Unidad Didáctica fue aplicada durante 8 semanas, con una intensidad de 6 horas semanales; para cada una de las actividades planteadas se tiene un registro fotográfico como parte de las evidencias que fueron de ayuda en el análisis de datos.

6.8 DISEÑO METODOLÓGICO

La ruta metodológica establecida estuvo programada en tres fases: en la primera fase definida como diagnóstico es una etapa de identificación del problema, a partir de la observación directa en el aula en estudiantes de grado quinto de primaria y séptimo de básica secundaria en las clases de matemáticas y ciencias naturales. Luego de identificado el problema se procede a realizar la descripción y plantear los objetivos que permiten la intervención en el aula para dar una posible solución al problema; fue necesario acudir a unas bases y fundamentación teórica donde se revisaron conceptos como procesos generales de la actividad matemática, conceptos de pensamiento métrico, modelación y modelo, elementos y etapas de la modelación matemática, en el marco del aprendizaje y la contribución de las prácticas de aula, teniendo como referentes las miradas de diferentes autores.

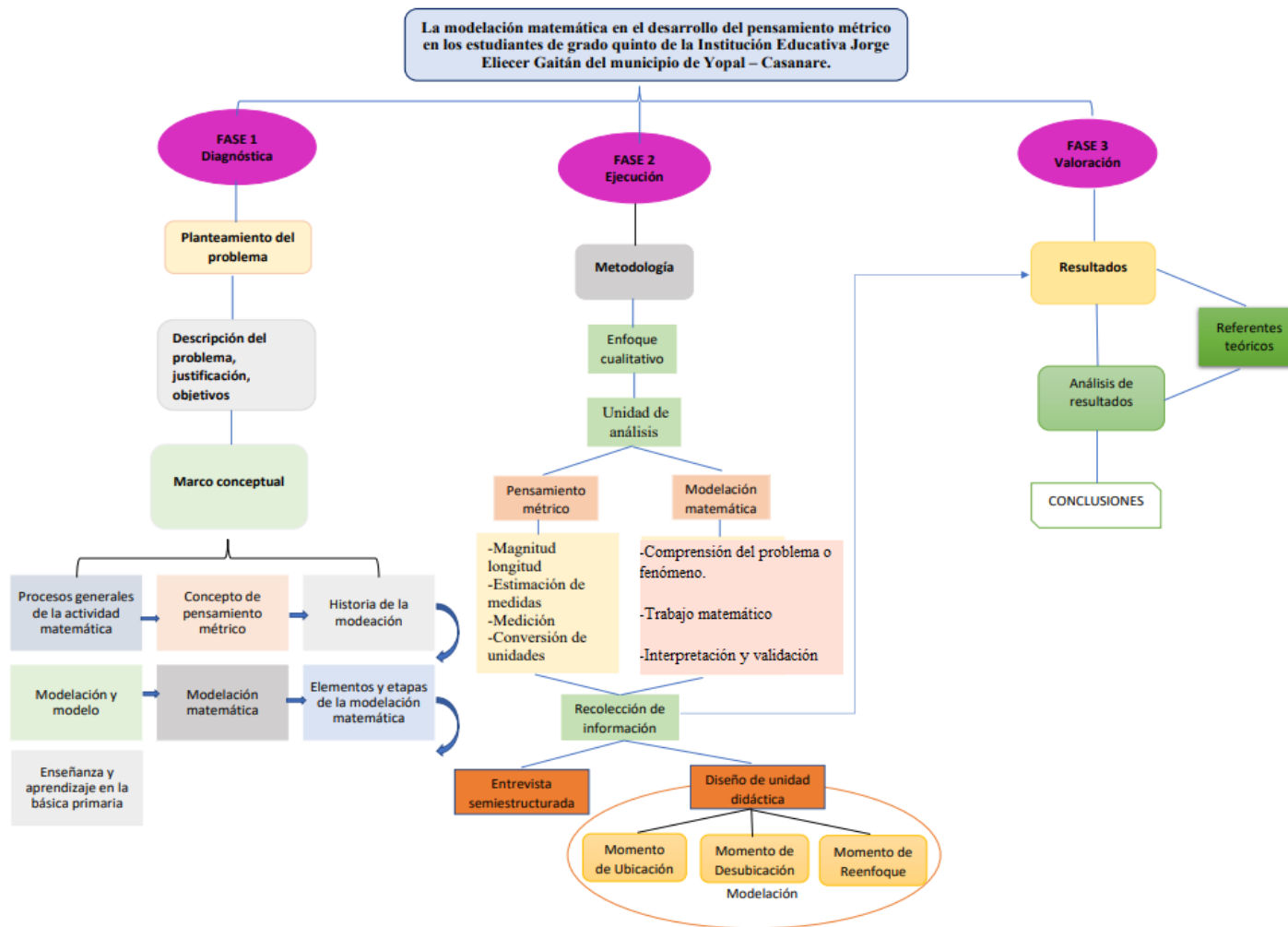
La segunda fase denominada ejecución: es aquí donde se organizó la estructura del proyecto de investigación, se diseñó y aplicó la herramienta principal con una adecuada transposición didáctica para la construcción de modelos matemáticos por parte de los

estudiantes, relacionados a los conceptos y procedimientos que intervienen en el desarrollo del pensamiento métrico. En este sentido, durante la ejecución de la unidad didáctica organizada en tres momentos se realizaron actividades que posibilitaron alcanzar los objetivos, y trabajar cada uno de los indicadores de las categorías como: magnitud longitud, estimación de medidas, medición, elementos básicos del proceso de modelación entre otros.

Tercera fase o de valoración: en este momento se hizo la sistematización de los datos para el análisis de resultados, se evaluó haciendo seguimiento a los avances y retrocesos de los estudiantes después de aplicar la unidad didáctica con respecto a las categorías, las implicaciones de la investigación, si se cumplieron o no los objetivos, además se matizó la importancia del trabajo realizado y se valoró cada una de las etapas del proceso para llegar a las conclusiones y recomendaciones.

Con respecto a lo anterior una vez finalizada la recolección de información se procedió a seleccionarla teniendo en cuenta la pertinencia y la relevancia, para establecer relaciones de comparación mediante la triangulación entre la información recolectada en la actividad diagnóstica prevista en el momento de ubicación, la unidad didáctica, entrevistas semiestructuradas a los estudiantes, con una reflexión profunda del investigador con la revisión bibliográfica sobre las categorías indagadas.

Figura 2 Diseño Metodológico



Nota: elaboración propia

6.9 PLAN DE ANÁLISIS

De acuerdo con la metodología planteada en la presente investigación, una vez recogidos los datos se consolidó y sistematizó la información, posterior a esto se realizó una triangulación entre los resultados obtenidos de los estudiantes, los referentes teóricos propuestos para la investigación y el análisis de los docentes investigadores; de esta manera se validó la pregunta y se evaluó el alcance de los objetivos de la investigación.

Así mismo ya que la investigación es de carácter cualitativa una vez implementada la unidad didáctica se analizó la información a través de la confrontación de las respuestas dadas por los estudiantes a través de los instrumentos diseñados y adaptados para tal fin, esto llevó a establecer conclusiones sobre los obstáculos superados o persistentes en cuanto a la construcción de la magnitud de longitud y de igual manera determinar el aporte de la modelación en el desarrollo del pensamiento métrico.

Como primer paso importante en la organización, análisis y procesamiento de la información, se creó una matriz para clasificar las preguntas realizadas en la actividad diagnóstica, las categorías de análisis contrastando las respuestas comunes y distintivas encontrando algunos puntos de convergencia entre el pensamiento métrico y la modelación; esta actividad pretendía indagar los saberes previos de los estudiantes en cuanto a la construcción de conceptos de la magnitud longitud, la estimación de medidas, selección de unidades de medida, y de instrumentos para medición.

Tabla 5 Matriz de clasificación y convergencia de las categorías para el análisis de la actividad diagnóstica

Pregunta	Respuestas Comunes	Respuestas Distintivas	Pensamiento Métrico	Modelación
1		Medir la cuadra y contar	Comprensión de la magnitud	Comprensión del fenómeno
	Medir y calcular la distancia			
	Medir el tiempo			
2	Entre 8 y 55 metros		Estimación	
		Entre 1,5 y 2,5 km		

	Entre 4 y 30 km			
	20 minutos			
3	sí, cada cuadra tiene 100 metros	Medición		
	sí, yo medí las calles y calculé en el mapa			
	no, no sé cuánto miden las calles			
	no, no sé cómo hacerlo			
4	Sumando	Conversión de unidades	Trabajo matemático	
	midiendo con la regla			
	use los dedos			
	ninguno			
5	es la ruta más corta		Interpretación y validación	
	no voy en contravía			
	no tiene tantas curvas			
	menos tráfico			
6	el sentido de las calles y carreras		Comprensión del fenómeno	
	estimar la distancia			
	trancos y semáforos en rojo			
	ninguna			

Nota: elaboración propia

De igual modo para interpretar y analizar la demás información de cada uno de los momentos de la unidad didáctica, una vez aplicada se procedió a realizar una matriz de relación entre las categorías de modelación matemática y pensamiento métrico que permitió dar significado real a cada uno de los datos recolectados. Al finalizar los momentos de la unidad didáctica se realizó la entrevista semiestructurada (ver anexo 3) a los sujetos en estudio, posteriormente se transcribieron las respuestas y se recabaron los datos relevantes en una tabla que fue objeto de análisis en la investigación.

Tabla 6 Matriz para la triangulación y análisis de la información momento de ubicación y reenfoque

Ítem	Preguntas	Categorías	Subcategorías	Indicadores	Respuestas	Análisis/Autores
1						
2						
3						
4						
...						

Nota: elaboración propia

Tabla 7 Matriz para la triangulación y análisis de la información momento de desubicación

Actividad	Categorías	Subcategorías	Indicador	Aspectos Observados					Autores
				E1	E2	E3	E4	E5, E6	

Nota: elaboración propia

7 ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

7.1 MOMENTO DE UBICACIÓN

En la unidad didáctica para el momento de ubicación, se aplicó el instrumento inicial denominado “Una visita inesperada” allí los estudiantes de grado quinto les correspondía trazar una ruta sobre un mapa del municipio de Yopal que les permitiera responder algunas preguntas, que daban cuenta de sus conocimientos en cuanto a procesos de medición para indagar los saberes previos y dificultades que presentan los estudiantes en la magnitud longitud.

El momento de ubicación tenía dos actividades, la actividad 1 nombrada en el párrafo anterior y la actividad 2 “Un modelo de ruta” que pretendía indagar si los estudiantes interpretan medidas de longitud expresadas en metros, en sus múltiplos y submúltiplos, además como involucraba la modelación matemática en la resolución de las situaciones planteadas. Por medio de una imagen el estudiante debía analizar e interpretar las tres rutas posibles por las que llevaría a Mario desde el terminal de transporte hasta la Institución Educativa y por último responder las preguntas. Al implementar cada una de ellas se logró identificar las ideas o representaciones que posee los estudiantes sobre medidas de longitud. A continuación, se muestra las respuestas detalladas:

Después de que los estudiantes observaran la imagen proyectada y trazaran la ruta sobre el mapa del municipio de Yopal, se les pregunta: ¿Cómo podríamos saber la distancia que tú y Mario deben transitar para llegar desde el punto de partida hasta punto de llegada? Estas fueron las repuestas: **E1:** sabiendo cuanto mide una cuadra y multiplicándola por la cantidad necesaria. **E2.** calculando la distancia de la longitud. **E3:** podría decir que 25km de distancia depende de la velocidad. **E4:** 34km. **E5:** 20 minutos del terminal hasta el colegio. **E6:** tomando el tiempo. En esta pregunta se pretendía conocer si el estudiante comprendía la magnitud longitud después de trazar la ruta en el mapa, el E1 y el E2 evidencian el reconocimiento de la magnitud y lo asocian al concepto de distancia y cuantificación de la misma en el contexto de su municipio. Para Godino (2002):

magnitud es cualquier aspecto de las cosas que puede expresarse cuantitativamente como la longitud, es un semigrupo conmutativo y ordenado, formado por clases de

equivalencia que son sus cantidades; en el caso de la longitud normalmente es asociada con las dimensiones de los objetos y la distancia. (p.615)

E4 realiza una estimación de la medida al igual que E3, pero se puede interpretar de la respuesta de E3, que asocia la distancia a la magnitud derivada de velocidad posiblemente porque en su estrategia para determinarla relaciona la cantidad de tiempo que puede emplear haciendo un trayecto. Para E5 y el E6 la manera de conocer la distancia es tomando el tiempo del recorrido, aunque el mapa no muestra otra variable.

Godino (2002) menciona que si queremos que los alumnos entiendan la razón de ser de la medida debemos enfrentarles a dichas situaciones, no tanto para que ellos reinventen por sí mismos las técnicas, sino para que puedan dominar los procedimientos de medida y atribuir un sentido práctico al lenguaje y normas que regulan la actividad de medir (p.617)

En este sentido se condujo a que los estudiantes pudieran estimar la distancia de la ruta trazada planteando la siguiente pregunta: ¿Cuánto crees que es la distancia que debes recorrer con Mario desde el terminal hasta el colegio? **E1:** 28 km². **E2:** por ahí la distancia es de 10 a 20 m. **E3:** unos 24km con velocidad de 40. **E4:** 34km. **E5:** 15 km caminando. **E6:** 25km.

“La estimación suele basarse en la percepción de la cantidad de magnitud y el uso de referentes, lo que resulta en una asignación subjetiva de un valor numérico a la medida de dicha cantidad de magnitud” (Carrillo et al.,2016, p.143). Resulta curioso observar que el E1 cuantifica la cantidad de la longitud, pero la asocia con la unidad de medida del área, posiblemente porque la estrategia que utilizó para estimar fue medir la cantidad de cuadrados en el mapa para conocer la distancia y presenta dificultades para diferenciar entre magnitudes escalares y vectoriales. Por otro lado, el E2 cuantifica la longitud en metros, probablemente porque no conozca las equivalencias de las cantidades en múltiplos y submúltiplos, o tal vez percibe que un metro es una gran distancia por recorrer o las escalas del gráfico, inducen a pensar en unidades más pequeñas. Para Carrillo et al. (2016) “La estimación, en la mayoría de las situaciones cotidianas, está estrechamente ligada a nuestros sentidos, en particular al de la vista” (p. 143). E3 y E5 estiman la distancia recorrida tomando como referencia la vivencia en su contexto del día a día y el medio de transporte

que utilizan para llegar al colegio relacionado con el tiempo, lo que hace que presenten confusión frente a la magnitud longitud. Para el MEN (2006) “en lo que respecta al aprendizaje de sistemas de medida y, en particular del SI, es importante el reconocimiento del conjunto de unidades de medida que se utilizan para cada una de las diferentes magnitudes” (p. 63). Con respecto a el E4 y el E6 cuantifican la longitud de manera errónea, pero utilizan la unidad adecuada para el contexto. Al cuestionar a los niños sobre si creían que las medidas que pensaron fueron exactas y por qué; los estudiantes E1, E2 y E6 reflexionaron sobre cómo tomaron las medidas para poder generar la estimación del recorrido y establecer la validación de su cantidad, lo que evidencia la importancia que tiene para ellos el poder establecer un instrumento adecuado para poder tomar la medida y dar un valor "exacto" o más aproximado a la realidad. Para Godino et al. (2002) “medir una cantidad consiste en determinar las veces que esa cantidad contiene a la cantidad (o cantidades) que se toman como referencia (unidades de medida)” (p.215). Para el E3, por el contrario, pone en evidencia la necesidad que tienen los niños de introducirlos al concepto de medida con sus respectivas unidades. "La enseñanza de la medición debe apoyarse en las ideas intuitivas de los alumnos y en sus experiencias informales de medición para ayudarles a comprender los atributos que se miden y lo que significa medir." (Godino, 2002, p. 642). Por otro lado, el E4 responde que no sabe las coordenadas en el mapa, presuntamente relacionando el concepto de exactitud a un punto geográfico teniendo en cuenta la latitud y la longitud en el plano. E5 estima la longitud con respecto al tiempo y asocia la medida con la inmediatez del recorrido (si se demora menos es más corto), es posible que como habitualmente los desplazamientos se realizan en vehículos, el estudiante escucha que las personas establecen distancias por medio de la velocidad (que depende del tiempo), por eso su referente para medir longitudes está asociado al tiempo.

No obstante, y con aras de conocer los instrumentos de medición o patrones que han utilizado o identifican los estudiantes se les realizó la pregunta ¿Utilizaste algún método para calcular la distancia recorrida? ¿cuál? A lo que manifestaron: **E1:** medí el trayecto con una regla y cada centímetro era un km². **E2:** si, para calcular utilicé la logaritmicación, radicación y potenciación, pero al no saber la base y el exponente, no sé. **E3:** si, en la vida real depende de la velocidad y el tiempo lo calculé imaginándolo y logré lo que creí. **E4:** no, pero utilicé en mi mente los cálculos. **E5:** las curvas y me fui en contravía. **E6:** no.

Para la pregunta se esperaba que el estudiante pudiera realizar algún trabajo matemático que le permitiera sustentar el dato entregado en la distancia del recorrido, para que pudiese ser validado y comprobado en el proceso. E1 presenta un acercamiento a un planteamiento matemático utilizando un instrumento para tomar medidas de longitud, no profundiza en la operacionalización realizada, pero en el mapa deja ver los trazos para realizar un conteo sumativo y poder explicar la medida de la distancia de su recorrido. “La habilidad de modelamiento implica “traducir” una situación del mundo real a la matemática” (Blum, 2012) citado por Ministerio de Educación de Chile (2016).

Figura 3 Ruta trazada por E1



Nota: Elaborado por estudiantes

E2, menciona el proceso de logaritmicación posiblemente por ser la última temática abordada antes de la aplicación de la UD; los estudiantes E3, E4, E5, E6, presentan dificultades para mostrar un modelo matemático que les permita soportar su estimación de la medida y por el contrario justifican de manera arbitraria el dato aportado. Se menciona que “matematizar, es describir las relaciones matemáticas que interpretan el proceso, aplicando métodos matemáticos como propiedades, algoritmos que resuelven el problema en términos matemáticos, hasta obtener una solución matemática del problema” (Anchart et al., 2018; Gómez, 2007citado por Pérez, 2021, p.163).

Al convertir un problema o situación en términos matemáticos, se pueden aplicar diferentes instrumentos para solucionarlo, además matematizar un problema potencia los diferentes pensamientos, habilidades y ayuda a los estudiantes a desarrollar su pensamiento métrico como la capacidad para identificar patrones, estimación, medición, toma de decisión en cuanto a unidades de medida acertadas y se llega a justificar de manera

profunda la validez de la solución a un problema. como quería reflejarse a la luz del siguiente interrogante. ¿Por qué crees que la ruta trazaste fue la mejor para que tú y Mario llegaran al colegio? los participantes dieron sus razonamientos de la siguiente manera: **E1:** porque no tienen tanta dificultad de tráfico que tome tanto tiempo para llegar. **E2:** porque pensé que esa ruta sería la más rápida y sin ir en contravía. **E3:** es la más rápida y no es contravía. **E4:** porque no tiene tantas curvas. **E5:** calle 21, tiendas D1. **E6:** porque para mí se ve cerca.

Para Villa (2022), la etapa de validación del modelo y de los resultados involucra el uso de criterios para dar cuenta de que la construcción matemática satisfaga la situación (por ejemplo, criterios de la lógica, procedimientos, consistencia en los gráficos y pruebas matemáticas y estadísticas), de confrontación y coherencia de los resultados arrojados por el modelo con las necesidades, problemas o situaciones que dieron origen al proceso de modelación. (p. 70)

Si bien, el E1 se acercó a plantear un modelo matemático, considera otras variables del contexto real para justificar la validez de su respuesta. Los estudiantes que no consideraron la matematización del problema para justificar la validez identificaron que el trazar una ruta corta en el mapa era la mejor solución a la pregunta teniendo en cuenta factores como el sentido de las vías, lo que permite concluir que, al no existir un trabajo matemático para la solución del problema, las respuestas de los estudiantes pueden ser azarosas y basadas en la percepción de su entorno.

Al finalizar se quería llevar al estudiante a un punto reflexivo de su pensamiento y la toma de decisiones en el escenario trazado, para esto se planteó la pregunta ¿Qué dificultades encontraste para llevar a Mario por la ruta escogida? En este sentido sus respuestas permitieron identificar la capacidad de los estudiantes para contextualizar el problema planteado a partir del mapa del municipio de Yopal. Los estudiantes E1 y E3 reconocieron las flechas de orientación de las calles y carreras comprendiendo que la ruta que debían trazar tenía que ser acorde al tránsito que se presenta en la vida real. Así mismo el E4 y E5 dimensionaron otros elementos que se presentan en las vías como las señales de tránsito y el tráfico que a diario hay en la ciudad.

Para Villa (2007) la modelización matemática se considera como un ciclo que tiene unos pasos, éste comienza con la determinación de un fenómeno o problema del mundo real, el cual es observado y sometido a un proceso de experimentación intentando profundizar en su comprensión y en la búsqueda de datos para con ello construir un modelo que representa el fenómeno. (p.68)

Por otro lado, el E2 no logró extrapolar el hecho desde el mapa en papel al mundo real lo que evidencia la necesidad de la intervención didáctica del maestro en el aula. E6 no permitió identificar sus dificultades o la comprensión del problema descrito.

A partir del análisis de las respuestas de la actividad diagnóstica se planteó una segunda actividad del momento de ubicación y también fue referente para cada uno de los momentos desubicación y reenfoque, teniendo en cuenta algunos elementos del proceso de modelación matemática como estrategia para desarrollar el pensamiento métrico.

Ya que el desarrollo de pensamiento métrico requiere un arduo trabajo en el aula y desde temprana edad se le debe posibilitar experiencias a los niños que les facilite construir y comprender el concepto de magnitud, es así como desde el preescolar ellos comparan, clasifican, perciben atributos de los objetos a través de los sentidos o instrumentos para tal fin. El proceso de medición lleva tiempo y es una acción que se aprende con la experiencia a través del trabajo y las tareas que se realicen que puede resultar un poco difícil para los pequeños, por esto, fue necesario diseñar actividades de medición y estimación. Las dificultades presentadas en la comprensión de la magnitud longitud, estimación de una medida, equivalencias y conversiones, en algunos casos se debe a su desarrollo cognitivo o los “estadios” que Piaget ha llamado (cuando un niño es capaz de pasar de una etapa a otra y ha alcanzado los aprendizajes necesarios) y en otros se debe a que no existe la práctica, tal vez porque en la escuela todavía se considera que los estudiantes solo deben realizar conversiones de forma memorística en cuanto a el trabajo de magnitud longitud y no se plantean actividades que les permita medir, estimar, comparar, validar, etc. con material concreto en su mundo real.

Con referencia a la actividad 2 “Un modelo de ruta” de acuerdo con la pregunta: ¿Por cuál de las tres rutas llevarías a Mario desde el terminal de transporte de Yopal hasta la IEJEG? ¿Porqué? se muestran a continuación las respuestas de los estudiantes:

E1: Por la "C" porque es la más corta. **E2:** por la "C" porque es la más rápida y corta. **E3:** por la "C" porque me parece que es más fácil y hay que ir más tiempo derecho. **E4:** 3ra porque decímetros es más corto que metros. **E5:** ruta "C" porque es más rápida y la más fácil. **E6:** "B" porque es más cerca y no hay que recorrer mucho y es más rápida de llegar.

Después de mostrar las tres opciones de ruta por las que podían optar los estudiantes, se pretendía indagar algunas afectaciones externas que pudiesen influir en la toma de decisiones de los estudiantes, como puntos de referencia, sentidos de las vías, la inmediatez de llegar a un sitio etc. Así mismo se quería analizar la justificación de los estudiantes asociada a la magnitud de la longitud encontrando en común, que para todos los estudiantes la mejor ruta está asociada a una distancia corta con poco tiempo de recorrido.

Para Godino et al. (2002) el proceso de medición se trata de una mezcla de importantes destrezas sensoriales y perceptivas con aspectos de geometría y aritmética que implica al área afectiva y proporciona al niño la oportunidad de alcanzar un sentido de realización, así como apreciar la utilidad básica de nuestro sistema de medición. (p. 639)

Ahora veremos sus razonamientos de porque consideran ¿Cuál es la ruta más corta para llevar a Mario? **E1:** Es la ruta "C" porque no tiene que dar tantas vueltas. **E2:** Es la "C", porque mide 20000 dm y el resto mide más. (Este recorrido es de 7min). **E3:** La ruta "C" es de decímetros (dm), así es más corto, aunque todas demoran 7 minutos. **E4:** 3ra porque "dm" es más corto que "m" y que "km" **E5:** Es la "C" para llevar a Mario al colegio. **E6:** Para mí es la ruta "C" porque sólo hay que pasar 3 cuadras.

Esta pregunta se realizó a los estudiantes, proyectando en el mapa la medida de la distancia real por tres rutas diferentes con unidades de longitud usando múltiplos y submúltiplos del metro, con la intención que el estudiante no sólo comprendiera el fenómeno, si no indagar la capacidad que tenía para realizar conversión de unidades de medida. A partir de la información recolectada se evidencia que los estudiantes poseen la habilidad de modelamiento que implica “traducir” una situación del mundo real a la matemática (Blum, 2012) citado por Ministerio de Educación de Chile (2016), es decir, comprenden la situación del contexto real con lenguaje matemático. Por otro lado, optaron

por la opción "C" que efectivamente es la más corta, pero al momento de justificar, los E1, E3, E4, E5 y E6 muestran que no existe claridad en criterios de equivalencia de unidades de medida de longitud y presuntamente se dejaron llevar por su percepción sensorial sin mostrar una relación de equivalencias entre unidades o el desarrollo de un trabajo matemático, igualmente dejan ver que hacen un proceso de comparación de las rutas y a pesar de que las tres marcan un tiempo de recorrido de 7 minutos eligen la que tiene menos vueltas como lo manifiesta el E1. “La percepción es el comienzo de la medición, y la comparación sigue a la percepción. Habiendo percibido alguna propiedad de algún objeto, nosotros, de un modo natural, lo comparamos con otros objetos que tienen la misma propiedad” (Godino 2002, p. 639). La E2 evidencia una comparación entre las diferentes unidades manifestando que una medida es menor que las otras, pero al igual que los demás compañeros, no es posible indagar sobre la capacidad de convertir la unidad de medida de longitud.

Ciertamente el uso de unidades de medida es muy frecuente en el diario vivir, ya que las utilizamos en diferentes lugares como las carreteras para medir distancias, para saber el largo y ancho de un objeto, la estatura de una persona etc. Por ende, se quería saber si en el ámbito escolar y cotidiano el estudiante asignaba la unidad de medida más adecuada y se les pregunto ¿Cuál de las señales que se muestran a continuación es la más adecuada para expresar la unidad de medida de la distancia que recorriste con Mario?, realizaron la siguiente explicación: **E1:** "km" porque es la que se utiliza siempre en las carreteras. **E2:** La más adecuada es "dm" porque puede ser más corto. **E3.** "dm" es más rápido, pero es más corto. **E4:**"dm" es más corta que "m" y "km" **E5:** "m" porque sería la más corta. **E6:** "km" porque es más rápido.

Para carrillo et al. (2016), la elección de una unidad de medida es arbitraria, aunque conviene que se ajuste al objeto que se quiere medir. Si la unidad seleccionada es muy pequeña, ha de reiterarse muchas veces sobre el objeto que hay que medir, lo que puede resultar preciso, pero poco práctico. (p.137)

Al verificar las respuestas, el E1 muestra un acercamiento a la comprensión del sistema de medición usando la unidad de medida adecuada, además de justificar muy bien su elección. Si bien el E6 identificó la unidad de medida adecuada, explica su elección

mostrando confusión entre una unidad fundamental de longitud y el concepto de rapidez que es la relación entre la distancia recorrida y el tiempo empleado en completarla. Por otro lado, los estudiantes E2, E3, E4 eligieron la respuesta correspondiente a "dm", que es una unidad menor o submúltiplo del metro y posiblemente la relacionan con una distancia corta. En cambio, E5 prefiere la señal del metro (m) ya que es la unidad fundamental y la más utilizada en su entorno para medir largas longitudes evitando el uso de los múltiplos y submúltiplos. Godino et al (2002) afirma que "el esquema de trabajo en el aula debe ser similar para todas las magnitudes entre ello considerar la unidad más adecuada a la magnitud que hay que medir, eligiendo entre los múltiplos y divisores que forman el sistema de medidas" (p.642). De igual manera Godino et al (2002) nos acerca a ciertos procedimientos claves para la construcción de la magnitud longitud entre ellos la toma de decisiones sobre las unidades de medida más adecuadas en cada caso atendiendo al objetivo de la medición (p.636).

Por otro lado, la noción de distancia que va posterior a la de una línea recta es un aspecto relevante en la comprensión de la medida de longitudes, por esto tras leer la afirmación que realiza el personaje Luigi en la actividad dos de la UD se planteó el interrogante ¿Qué piensas de la afirmación de Luigi sobre la distancia entre dos puntos? sus respuestas fueron: **E1:** Que no es cierto porque sería muy raro, pero si es la distancia más corta. **E2.** Me parece un poco loca, pero podemos coger a un champicomptero o un Yoshi para llegar allá **E3:** Es algo tonto y peligroso. **E4:** Está muy loca a menos que vaya en helicóptero. **E:6** A mí me parece bien.

Al plantear este ítem se confronta la métrica del taxista contra la distancia euclidiana, el E1 responde y justifica correctamente su respuesta, comprende que la afirmación "la distancia más corta entre dos puntos es una línea recta" es relativamente cierta si es una superficie plana, pero al tratarse de una ciudad no puede ser una ruta alternativa por haber edificaciones de por medio. Para Godino et al (2002) la llamada "geometría del taxi" los vértices de una rejilla cuadrangular representan en el plano los "bloques de la ciudad" (p.489) al sumar la distancia entre los vértices debería dar como resultado la distancia absoluta entre un punto A y un punto B, esto quiere decir que los E3, E4 comprenden la realidad del municipio, pero vagamente plantean una solución. E2 desvía

un poco la atención de la situación para enfocarse más en el contexto del juego, citando un artefacto y un personaje de una versión de un juego al que pertenecen los personajes; esta respuesta permite retroalimentar el hecho de que, para resolver situaciones de manera más ágil, los estudiantes deben seleccionar información relevante para evitar divagar. En cuanto al E5 y E6 no razonan sobre el interrogante.

Por último, se llevó a los estudiantes a pensar si era válido tomar la ruta enviada por “Luigi”, para que validaran, justificaran la ruta y crearan un modelo que permitiera no sólo la solución de la cuestión en particular, sino también encontrar otras soluciones o efectuar previsiones, y de esta manera comprobar y comparar sus respuestas, etapa importante en la modelación ya que como menciona Villa et al. (2022)

la validación del modelo y de los resultados es uno de los criterios para dar cuenta de que la construcción matemática satisfaga la situación (por ejemplo, criterios de la lógica, procedimientos, consistencia en los gráficos y pruebas matemáticas y estadísticas), de confrontación y coherencia de los resultados arrojados por el modelo con las necesidades, problemas o situaciones que dieron origen al proceso de modelación (p. 70).

Los E1, E3, E4, contestan de manera asertiva, justifican y proponen algunas soluciones creativas, pero poco realistas. E2 y E5 se alejan del fenómeno que se pretende estudiar o no comprenden el problema. E6 justifica con la corta distancia que hay entre los dos puntos en el mapa, pero no tiene presente los bloques de edificaciones que son obstáculo para el recorrido.

Para concluir se puede decir que los docentes tienen una labor compleja a la hora de enseñar y ayudar a desarrollar el pensamiento métrico pero al mismo tiempo tienen un aliado como estrategia que es la modelación matemática que permite que cada estudiante empiece a adquirir nociones, descubrir, adquirir, asimilar y modelar conceptos básicos para la construcción de la magnitud longitud; en definitiva, utilizar la modelación potencia otras habilidades como la exploración, la creatividad, la imaginación que los niños poseen. De igual manera los interrogantes de este primer momento permitieron que los niños respondan preguntas, equivocadas o no y retornen la búsqueda de las soluciones con gran motivación y entusiasmo, se espera lograr que los niños más adelante expresen sus respuestas de manera

más fluida, con frases más largas y fundamentándolas con los saberes que han construido de manera natural y desde su curiosidad por el mundo que lo rodea.

Del mismo modo, al representar gráficamente el planteamiento, trazar las rutas, dibujar e imaginar y comprender la situación (aunque no todos lograron hacerlo) desde su contexto real, los estudiantes modelaron y validaron sus respuestas lo que fomenta la construcción de aprendizajes, elementos que la modelación proporciona para el trabajo en aula como investigar, explorar, manipular y experimentar, facilitando el desarrollo del pensamiento métrico de manera más agradable y fácil, además la modelación matemática es un puente para que los estudiantes comprendan la magnitud longitud al proporcionar representaciones visuales y prácticas de los fenómenos expuestos, también puede llegar a ser una estrategia eficaz y fundamental en el día a día de la labor docente.

7.2 MOMENTO DE DESUBICACIÓN

Para el momento de desubicación cuyos objetivos pretendían que los estudiantes comprendieran fenómenos que les permitiera identificar las unidades de medida de longitud y expresarlas de manera adecuada según el contexto vinculando el proceso de modelación en la solución de situaciones reales que desarrollan el pensamiento métrico, se plantearon dos actividades (actividad tres y cuatro de la UD) teórico-prácticas denominadas: “Estimando y calculando medidas” y “Rally Bros” en las que se analizaron los siguientes aspectos:

Durante la actividad “estimando y calculando medidas” hubo participación de los estudiantes en el diálogo sobre las medidas no convencionales y los patrones de medida, se escucharon comentarios como "antes había otras formas de medir, los abuelos usaban partes del cuerpo", ejemplificaron y tomaron la medida de la mesa con palmos, crearon patrones de medida para la medición del salón. Se identificaron algunas dificultades para diferenciar las dimensiones alto, largo y ancho en cuerpos sólidos, cómo se miden y cómo se aplican en diferentes posiciones de los objetos. Para ayudar a superarlas, fue necesario proyectar algunos videos explicativos, ubicar una caja horizontalmente en la mesa y, por ejemplo, el E5 tuvo que acercarse al objeto para que con ayuda del docente pudiera definir cada una de las dimensiones para diligenciar una de las tareas de la actividad. Por otro lado, el E3 decía “un árbol puede ser largo y alto porque si el árbol está acostado en el piso le

mido el largo, pero si está de pie es su altura”, es decir que identifiqué las dimensiones de la magnitud longitud y colaboré con sus compañeros para la apropiación de los conceptos.

Para Godino et al. (2002) la medida de magnitudes guarda una estrecha relación con la construcción de los sistemas numéricos y con las formas y figuras geométricas (longitud, superficie, volumen de figuras y cuerpos geométricos), tanto en las técnicas de medida directa (contar el número de unidades) como indirecta (determinación del “tamaño” de las colecciones), o las dimensiones de los cuerpos y figuras mediante operaciones aritméticas y algebraicas. (p.635)

A medida que se iba avanzando en la fundamentación teórica de este momento, los estudiantes fueron entendiendo que las medidas de longitud no solo son un tema matemático, también se encuentran implícitas otras áreas, es así que E2 manifestaba que “mi hermano de secundaria está viendo en física lo que estamos haciendo en la clase”, aludían que de la medición de longitudes era para conocer distancias, ponían algunos ejemplos del uso de las medidas de longitud en la vida cotidiana, como la medición de un trayecto al correr o conducir un auto. Los niños disfrutaron las actividades donde debían medir algunos objetos con sus partes del cuerpo y utilizaron codos, manos y pies; algo curioso de mencionar es que el E4 afirmó que en la tarea de la medición de la mesa no tenía los mismos palmos para todos porque no todos sus compañeros tenían el mismo tamaño de la mano.

Los estudiantes solicitaban seguir trabajando el uso de medidas no convencionales, mediante la repetición de patrones que ellos definían con los recursos del aula de clase, para los E2, E3, E5 y E6 hasta ahora vivenciaban medir con sus partes del cuerpo o tomando como patrón algún objeto.

Para Godino et al. (2002) medición sin acción es meramente un tipo de rutina memorística o ejercicio intelectual. Los niños pueden memorizar el Sistema Métrico Decimal sin mucho esfuerzo. Sin embargo, queremos algo más que la habilidad para responder a unos test estandarizados. Queremos que los niños tengan experiencias en todas las áreas básicas de la medición y que sean capaces de medir precisa y consistentemente. Tales experiencias deben ser sistemáticamente planeadas por el profesor y convertirse en parte integral del currículum. (p. 646)

Se propuso estimar tres objetos que los estudiantes tuvieran al alcance para saber si escogían la unidad adecuada, si había relación entre la cantidad y la unidad, y validar la estimación con la medida real para que ellos mismos reflexionaran y discutieran sobre los resultados obtenidos en las estimaciones y mediciones. Al realizar esta tarea el E1, sin utilizar ningún instrumento de medición dio un valor aproximado de la medida de tres útiles escolares que eligió utilizando como unidad de medida el centímetro. Por otro lado el E2 a pesar de que eligió la unidad de medida adecuada, muestra errores significativos a la hora de estimar la medida de sus objetos, quizá porque en la escuela la estimación no es habitual en la enseñanza de las matemáticas y los docentes por lo general enseñan mediciones directas con la regla como instrumento de medición o por medio de cálculos a partir de estrategias o algoritmos, sin darle al estudiante la posibilidad de vivenciar la estimación de manera práctica y significativa haciendo uso de sus sentidos.

Las actividades de estimación de medias permiten centrar la atención de los alumnos en los atributos que se miden, el proceso de medición, el tamaño de las unidades y el valor de los referentes. De esta manera, la estimación de medidas contribuye al desarrollo del sentido espacial, así como conceptos y destrezas numéricas. Los estudiantes se darán cuenta que con frecuencia es suficiente con dar una estimación de una medida y que no es necesario usar instrumentos de medida en ciertas circunstancias. (Godino et al., 2002, p.640, 641)

Para estimar, el E3 midió un borrador y lo tomaba como referente para completar las otras estimaciones tratando de comparar cuantas veces cabía en el objeto a medir, al hacer la comprobación se encontraba que la diferencia que tenía en la cantidad dada era muy pequeña con respecto a la medida real. Carrillo (2016) afirma que “la estimación suele basarse en la percepción de la cantidad de magnitud y el uso de referentes, lo que resulta en una asignación subjetiva de un valor numérico a la medida de dicha cantidad de magnitud” (p. 143). De este modo podemos decir que E3 fortaleció la estimación y el uso de patrones de medida, al socializar mencionó que “es más fácil y útil hacer estimación que tomar la medida directa de los objetos”, afirmación que de cierto modo puede ser cierta desde un punto de vista práctico en el quehacer cotidiano.

Aunque en la educación primaria y en la vida cotidiana las magnitudes que se estudian y usan son cuantitativas, y, por tanto, medibles mediante números, es importante tener en cuenta que otros rasgos de los objetos y fenómenos con los que entramos en contacto admiten también una codificación que refleja las clasificaciones y ordenaciones que se pueden hacer con ellos. (Godino et al., 2002, p.616)

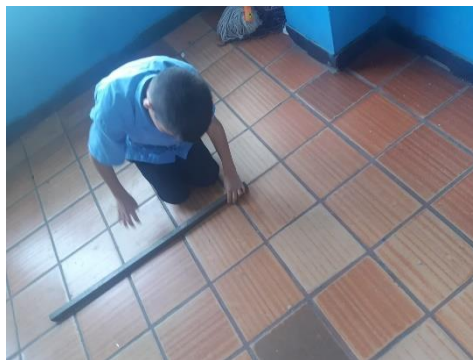
Al iniciar con la exploración de varios instrumentos de medida de longitud detallando sus especificaciones para un adecuado uso y así obtener medidas con mayor exactitud, se da conocer a profundidad los submúltiplos del metro. Se encontró que los E1, E2, E3 y E4 comprenden la importancia de la precisión de una medida y que medir la longitud desempeña un papel indispensable en diversas actividades o tareas cotidianas. Así mismo evidenciaron una buena capacidad de medir la longitud arrojando datos confiables y progresando en el desarrollo del pensamiento métrico.

Godino et al. (2002) menciona que en el proceso de medir es necesario, por tanto, estimar el error que se comete al tomar ese valor. La precisión de un instrumento de medida es la mínima variación de magnitud que se puede determinar sin error. Un instrumento será tanto más preciso cuanto mayor sea el número de cifras significativas que puedan obtenerse con él. (p. 619)

Para realizar medición el estudiante ha de realizar previamente diferentes experiencias de medición en contextos cotidianos y con objetos o distancias reales con distintos tipos de unidades, que fue lo que pretendió algunos de los apartados de la actividad tres, en el que los estudiantes mostraron dedicación y entusiasmo por medir sus útiles escolares, objetos de su contexto y distancias entre dos puntos dentro del salón de clases. Es aquí donde se corrobora lo que Godino et al. (2002) afirma que “para la construcción de la magnitud longitud partimos del mundo de los objetos y fenómenos perceptibles” (p.625). Así mismo el gusto por el uso de patrones de medida fue bastante evidente ya que los crearon con diversos materiales que tenían a mano como palos, cartulinas, lanas, pupitres, botellas, entre otros como lo muestra la (figura 4). Su estrategia fue marcar con un lápiz o con la punta del dedo hasta dónde llegaba su patrón tantas veces como fuera necesario para medir cuántas veces le cabía en el objeto de estudio.

En palabras de Godino et al. (2002) si analizamos el proceso, encontramos que medir se trata de una mezcla de importantes destrezas sensoriales y perceptivas con aspectos de geometría y aritmética. También implica al área afectiva y proporciona al niño la oportunidad de alcanzar un sentido de realización, así como apreciar la utilidad básica de nuestro sistema de medición. El proceso procede secuencialmente desde la percepción a la comparación y después a la aplicación de un estándar de medida (o referente) (Godino et al., 2002, p.639)

Figura 4 Uso de patrones de medida



Nota: fuente propia

A su vez para el E3 el descubrimiento de los instrumentos de medida y las otras unidades existentes aparte de la que él conocía "el metro" fue motivante para ir construyendo el aprendizaje articulando sus saberes previos, con eso nuevo que además lo tomaba como algo de su preferencia al encontrar en su guía de trabajo uno de sus personajes favoritos y que además estaba en pleno furor. Según Godino et al. (2002) dice que "Nuestro trabajo con los niños en la medición producirá dos resultados: los niños apreciarán el papel que la medición juega en sus vidas y en la sociedad, y los niños disfrutarán siendo capaces de medir por sí mismos" (p. 641). En el ejercicio de medición realizado por el estudiante demostró el progreso en algunos aspectos relevantes para la construcción de la magnitud longitud como son la conservación, la transitividad y la unidad de medida.

Dentro de las tareas propuestas los estudiantes debían tomar la medida de un objeto y expresarla en dos unidades de medida de longitud evidenciado en la figura 5, realizando

una comparación entre ellas permitiéndole establecer equivalencias y al mismo tiempo una conversión de unidades al pasar de unidad de longitud a otra. Godino et al. (2002) afirma que:

La enseñanza de la medición debe apoyarse en las ideas intuitivas de los alumnos y en sus experiencias informales de medición para ayudarles a comprender los atributos que se miden y lo que significa medir. El estudio de la medida en la escuela elemental requiere el uso de materiales concretos para que los niños comprendan los rasgos de los objetos que se miden y dominen los instrumentos correspondientes. (p.642)

Figura 5 Medida de objetos expresada en unidades de longitud

Mario ha decidido enseñarle a su amigo Luigi a medir con la regla por eso quiere practicar aún más. ¿La ayudas por favor! Mide tus útiles escolares que muestra la tabla y completa.

Objeto	¿Cuánto mide? mm	¿Cuánto mide? cm
1. 	80	6.5
2. 	40	4.0
3. 	45	4.5

Nota: Respuestas de estudiantes

La E1 al desarrollar la actividad tres concluyó que, aunque la unidad de longitud en el Sistema Internacional (SI) es el metro, existen otras unidades para expresar una medida, a lo que ella menciona que “esto depende del tamaño del objeto o la distancia que quiero medir”. “Para determinar una cantidad de una magnitud no es suficiente dar su medida, es necesario expresar la unidad a la cual se refiere”. (Godino et al., 2002, p.632). De igual manera evidenció avances en el uso de equivalencias entre diferentes medidas de longitud, pero expresa que en su vida real ha visto o utiliza casi siempre los centímetros y el metro.

Al finalizar la actividad se esperaba que utilizaran unidades convencionales del Sistema Métrico Decimal (SMD), establecieran equivalencias entre unidades e identificaran y utilizaran instrumentos o técnicas que se usan para medir la magnitud longitud. Es así como los niños descubrieron la habilidad para medir primero con el cuerpo, luego con patrones y finalmente con unidades convencionales del SMD. Para ellos era común medir con la regla, pero fue satisfactorio realizar su propia cinta métrica para realizar mediciones aprendiendo

su buen uso, ya que inicialmente el E4 mencionaba que “yo creía que la regla del profesor por ser más grande, los centímetros también lo eran” y que el flexómetro de su papá al que llamaba metro era lo único con que podía medir en su entorno. “Los niños son conducidos desde una primera experiencia perceptual al punto en el que relacionan estas experiencias a otras propiedades y las conectan de un modo sistemático. En este punto final podemos decir que un niño ha aprendido a medir” (Godino et al., 2002, p. 641)

Al relacionar el proceso de modelación se involucró a los estudiantes en la comprensión e interpretación de diferentes fenómenos reales de medición con objetos y ambientes de su entorno escolar, al desarrollar cada tarea planteada en la actividad tres los niños demostraban un aprendizaje profundo referente a cada uno de los conceptos que se abordaron en torno de la magnitud longitud y establecieron una conexión con cada pregunta que se generó y con los ejemplos dados. Para Stillman (2019) la modelación:

Desde el punto de vista matemático, puede ser el vínculo para enseñar conceptos y procedimientos matemáticos; enseñar modelos matemáticos y maneras de aplicar las matemáticas como contenido matemático y promoverlas como una actividad humana que responda a problemas de diferente naturaleza que den lugar a la aparición de conceptos, nociones y procedimientos. (citada por Villa et al, 2022, p.69)

La modelación tomó un papel importante ya que les otorgó a los estudiantes habilidades dentro del proceso de construcción de modelos, como lo evidenció la E1 creando su propio patrón de medida (su cartuchera de colores) cuantificando el número de veces que cabía en el largo y ancho del salón o en la oportunidad en la que debían completar el esquema del mundo del personaje “Mario” (figura 6) teniendo en cuenta las instrucciones que le permitían modelar un problema haciendo uso del pensamiento métrico.

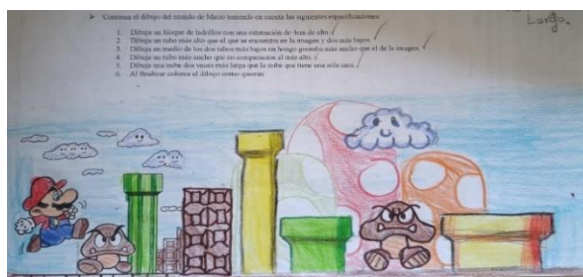
Los estudiantes se centraron en las variables de interés para poder resolver cada una de las situaciones planteadas, mostraban sus modelos por medio de representaciones en las que intervenía la matematización y confrontaban sus respuestas haciendo uso del SMD.

Los E1, E2, y E3 demostraron un buen razonamiento para enfrentar cada situación planteada en la actividad, interpretaron y contestaron las preguntas con la ayuda de la

matemática como se evidencia en la cuantificación para dar una medida con un patrón utilizado o medir para dar la cantidad y unidad apropiada. Lograron completar el dibujo con las nociones matemáticas adquiridas sobre las dimensiones largo, alto y ancho; de forma lógica y ordenada como lo muestra la (figura 6). Se desarrollaron actividades en las que intervienen la representación, el uso de instrumentos, la manipulación de diferentes objetos y formas de medición que permitieron ver las implicaciones de comprender la magnitud longitud y los problemas o dificultades a la hora de medir; El válido sus respuestas comparando con sus compañeros y midiendo de forma acertada y coherente cumpliendo los objetivos planteados en la actividad. La etapa de validación es importante porque según Villa et al. (2022):

involucra el uso de criterios para dar cuenta de que la construcción matemática satisfaga la situación (por ejemplo, criterios de la lógica, procedimientos, consistencia en los gráficos y pruebas matemáticas y estadísticas), de confrontación y coherencia de los resultados arrojados por el modelo con las necesidades, problemas o situaciones que dieron origen al proceso de modelación. (p. 70)

Figura 6 Dibujo sobre las dimensiones largo, alto y ancho

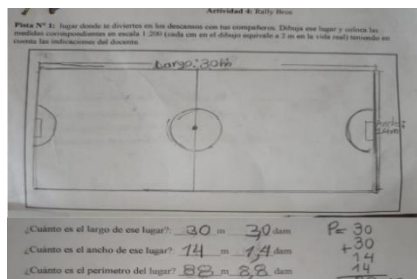


Nota: Elaborado por estudiantes

En la segunda situación planteada de este momento, al explicar y solicitar a los estudiantes que realizaran el dibujo a escala después de medir el largo y el ancho del lugar donde se divertían en los descansos, permitió que representaran con precisión e identificaran las medidas del sitio real, los E1, E2, E3 y E4 reconocieron la medida del perímetro de la figura plana que representaron, teniendo en cuenta que era la cancha de fútbol del colegio, ellos la asociaron y determinaron que tenía forma de un polígono rectangular, debido a que los estudiantes ya tienen una noción de perímetro y de polígonos.

Los estudiantes definieron que tipo de operación matemática deben realizar para hallar el perímetro en este caso una suma como se muestra en la siguiente figura.

Figura 7 Dibujo a escala 1:200 del polideportivo



Nota: Elaborado por estudiantes

Además, según Godino (2002) el proceso de búsqueda de las expresiones correspondientes es una actividad matemática de gran valor en sí misma al requerir relacionar distintos conceptos y técnicas. Por este motivo la obtención y uso de fórmulas para la medida de longitudes, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos se incluye en las propuestas curriculares, incluso desde el nivel de primaria. (p.671)

También se empezó a trabajar longitudes mayores como el decámetro hectómetro y kilómetro, unidades que los estudiantes reconocieron como múltiplos del metro, entendiendo que hay situaciones en las que se hace necesario utilizarlos igualmente hay objetos que tienen dimensiones más pequeñas, por lo cual para ser medidos con exactitud se necesitan unidades menores que metro (submúltiplos). En esta pista los estudiantes dejaron volar su imaginación y crearon un decámetro como instrumento de medida uniendo diez cintas métricas de cien centímetros de algunos de sus compañeros, lo que facilitó la medida del largo y el ancho ya que después sumaron los decámetros para saber cuántos metros estaban inmersos en las dimensiones de la cancha.

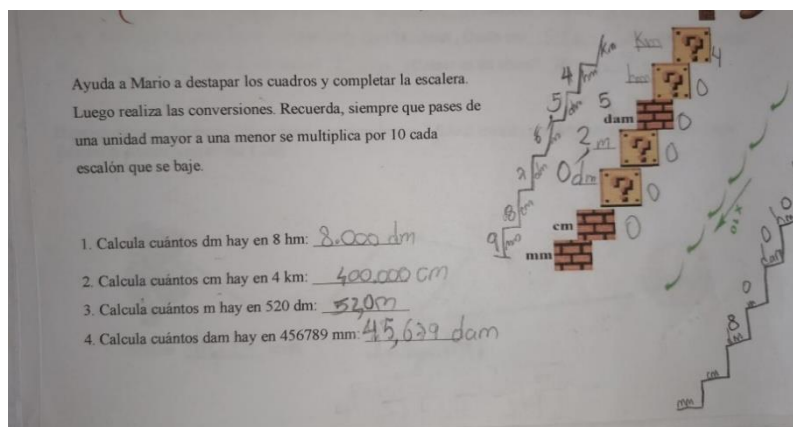
Figura 8 Creación de un instrumento de medida (decámetro)



Nota: fuente propia

En el trabajo con magnitudes es necesario comparar distintas cantidades. La comparación se ve facilitada si se toma una cierta cantidad [u] como referente o término de comparación y se determina cuantas veces contiene una cantidad dada [a] a [u]. Este número de veces, si existe, es lo que se llama “medida” de la cantidad [a] con la unidad [u]. Medir cantidades es esencial en el proceso de cuantificación de la realidad, proceso que se ve facilitado por la reducción de las cantidades a números, con los cuales podemos tratar como si se tratara con las cantidades originales. Para ello será necesario definir una operación de sumar cantidades, y que esta suma tenga propiedades deseables de asociatividad y conmutatividad, para que se pueda hablar de magnitud. (Godino et al., 2002, p.626)

Figura 9 Conversión de unidades



Nota: Elaborado por estudiantes

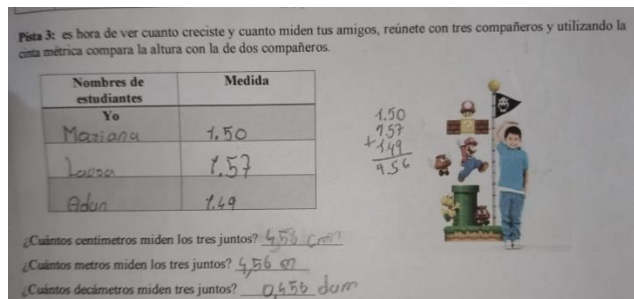
En los E1, E2, E3, E4, E5 se identificó que establecieron las relaciones entre cada uno de los múltiplos y submúltiplos del metro lo que facilitó la conversión de unidades. Con la ejemplificación existente en la pista dos de la actividad cuatro se explica la forma de utilizar la escalera de conversión y muestra como ejemplo una de ellas, los estudiantes realizaron diversas conversiones pasaron de una unidad menor a una unidad mayor y viceversa. Los E5 y E6 primero matematizaron el problema ubicándose sobre la unidad que se les indicaba en la escalera, luego se movieron hacia la unidad que les pedía, es decir, utilizó la escalera agregando tantos ceros fuera necesario como se evidencia en la (figura 9). En cambio, los E1, E2, E3, E4 definieron la multiplicación como estrategia de conversión de unidades mayores a menores y la división de unidades menores a mayores. De esta manera Godino (2002) afirma que:

Es recomendable que los niños no usen nunca las fórmulas sin que hayan participado en el desarrollo de dichas fórmulas. El desarrollo de las fórmulas por los propios niños es una actividad mucho más importante y significativa que la introducción de números en tales fórmulas. Pero en cualquier caso los alumnos deben comprender previamente el rasgo o característica de los objetos cuyo tamaño se mide mediante las fórmulas (longitudes, perímetros, áreas y volúmenes). (p.671)

En la pista tres los estudiantes midieron su estatura y la compararon entre sus compañeros, durante este ítem manifestaron que sentían que no se encontraban en clase, ya que solo se podían medir cuando iban al médico o en las atracciones dónde se requiere una estatura mínima. Según Godino et al., 2002. “esta actividad se hace sin ninguna habilidad numérica previa. La comparación de atributos de objetos conduce de un modo bastante lógico a la necesidad de un estándar que podamos aplicar sucesivamente” (p.640).

Inicialmente los estudiantes indicaban su medida en metros, sumaban las estaturas y el resultado lo convertían a centímetros y decímetros, en este punto se puede evidenciar que, si bien los estudiantes E3, E4 y E6 escribieron sus conversiones, no tuvieron en cuenta la estrategia de conversión de multiplicación y división si no que las realizaron directamente teniendo en cuenta las equivalencias, transformando la unidad con el uso de la coma decimal (figura 10), por lo contrario los E1 y E2 realizaron las operaciones para obtener el cálculo.

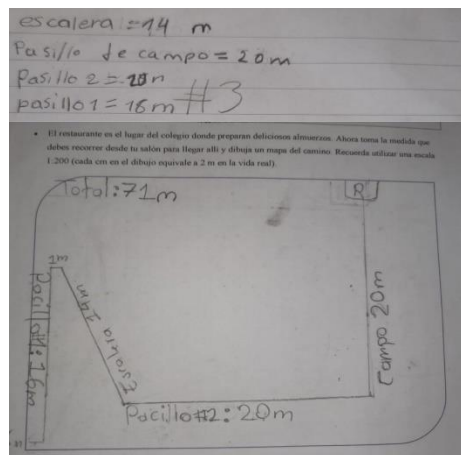
Figura 10 Medición, equivalencias y conversión



Nota: respuesta de estudiantes

Pasando a la pista cuatro que consistía en medir el camino que debían recorrer del salón de clase al restaurante escolar, los niños estaban animados para usar la cinta métrica porque ya conocían su uso apropiado, indispensable para realizar correctamente la medida del recorrido. Cada estudiante con su equipo de trabajo utilizaron alguna estrategia de medición, por ejemplo: el E1 fue tomando nota de cuantos metros contenía el recorrido desde la puerta del salón hasta el punto final, así mismo representó el camino en la guía con un dibujo a escala 1:200, asimilando la comprensión y la capacidad de plasmar un plano de la vida real (figura 11), el E2 realizó el bosquejo del recorrido para ir recolectando los datos de las medidas, el E3 y E5 con su grupo correspondiente comenzaron a medir con una cinta métrica de ciento cincuenta centímetros, e iban registrando el valor cada vez que terminaban en un extremo e iniciaba otro, al final realizaron la sumatoria de los datos que tenían y el resultado lo dividieron para dar la respuesta en metros. El E6 prefirió dejar a un lado su instrumento de medición para utilizar como patrón una varilla que medía 100 cm ya que manifestó que lo podía manipular más fácil, lo tomo como referencia para saber la cantidad de veces que se interponía entre el salón de clases y el restaurante escolar, así obtener la medida del recorrido para luego plasmarlo en el papel según las indicaciones. Para el E4 su estrategia específica fue ir registrando en su cuaderno por cada metro un palito luego los conto y realizo el esquema a escala.

Figura 11 Estrategia del E1



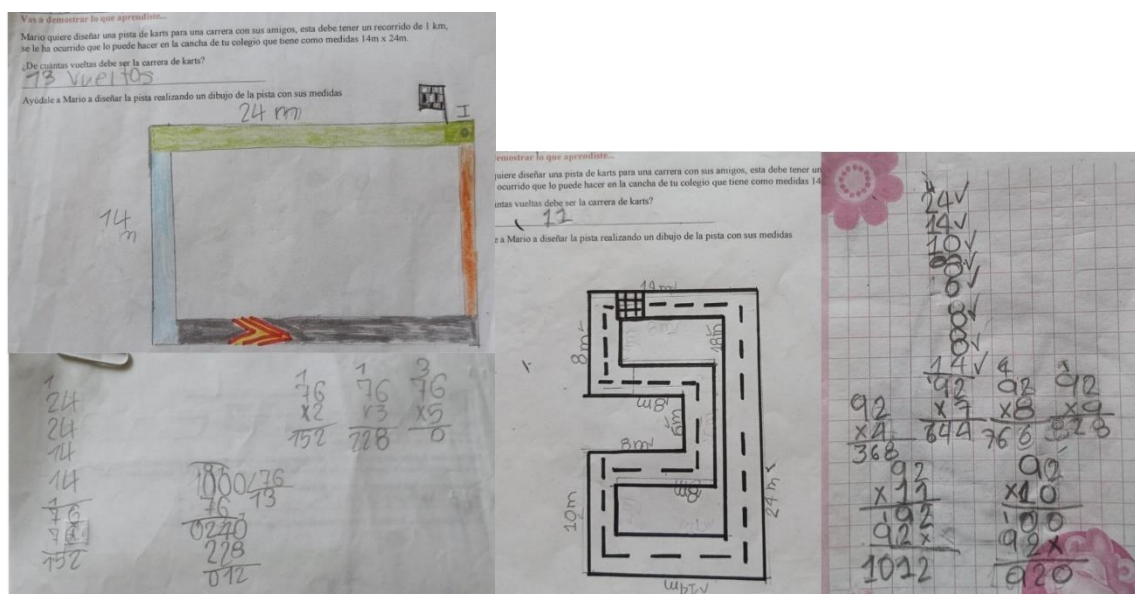
Nota: elaborado por estudiantes

En definitiva “la modelación se convierte, entre otras cosas en una oportunidad para aplicar matemática y mostrar su utilidad a los estudiantes” (Villa et al., 2002, p. 68) se les ofreció actividades para representar, manipular y aplicar los conceptos de la magnitud longitud en contextos reales. “Un aspecto importante de un ambiente de modelación es el uso de técnicas y procedimientos acordes con las necesidades que surgen de acuerdo con el proceso y el contexto” (Villa et al., 2002, p. 79)

7.3 MOMENTO DE REENFOQUE

Para el momento de reenfoque se propuso la actividad 5 en la que se esperaba que los estudiantes haciendo uso del proceso de modelación matemática pusieran en juego objetos (perceptibles y abstractos) y acciones (reales y mentales) que según Godino (2002) permiten dar significado a la medida de la magnitud longitud y poder dar solución al siguiente problema: Mario quiere diseñar una pista de karts para una carrera con sus amigos, esta debe tener un recorrido de 1 km, se le ha ocurrido que lo puede hacer en la cancha de tu colegio que tiene como medidas 14m x 24m. Ayúdale a Mario a diseñar la pista realizando un dibujo de la pista con sus medidas.

Figura 12 Respuestas de los E1 y E5 respectivamente



En los resultados se pudieron evidenciar dos tipos de respuestas comunes; la primera que los E1, E3, E4 y E6 diseñaron un polígono irregular identificando las medidas de cada lado de la figura con sus respectivas unidades teniendo en cuenta el problema planteado. Es de resaltar que E1, E3, y E4 utilizaron una escala de 1:200 al realizar el gráfico en papel, esto porque en la pista 1 de la actividad práctica número cuatro del momento de desubicación dibujaron este espacio físico teniendo como referente esa característica. Por otro lado, los E2 y E5 diseñaron un circuito con sus respectivas medidas cumpliendo con los parámetros del enunciado, lo que permitió que compararan con los demás compañeros y validaran diferentes maneras de llegar a la solución del problema.

Al realizar una observación detallada de las gráficas realizadas por los estudiantes y contrastarlos con las categorías que esta investigación pretende analizar, se pone de manifiesto que todas las unidades de trabajo mostraron gran interés y la capacidad para comprender y delimitar el problema antes enunciado, contextualizándolo desde el mundo real para formular un modelo matemático. "Para delimitar o simplificar se requiere que, quienes modelan, se focalicen en las variables y relaciones de interés acorde con el problema situación a resolver" (Villa et al. 2022, p. 69). Esto permitió que los estudiantes mostraran una correcta percepción de las distancias, sensación clave que conduce a la comprensión del principio de conservación de la longitud para la elaboración de polígonos

y el cálculo de perímetros. Además, podemos afirmar que los niños realizan procedimientos claves para la construcción de la magnitud longitud porque como lo menciona Godino (2002) utilizan instrumentos de medida, diversas estrategias para medir y toman decisiones sobre las unidades de medida más adecuadas atendiendo al objetivo de cada medición (p.636), asignan una cantidad dando un valor numérico a la magnitud, entre otras.

El proceso de modelización conlleva a que el estudiante formule modelos matemáticos que permitan dar solución a problemas que den cuenta del desarrollo del pensamiento métrico donde exista un razonamiento haciendo uso de las matemáticas, etapa a la que llamamos matematización (o trabajo matemático). En este sentido para esta actividad se planteó la pregunta: ¿De cuantas vueltas debe ser la carrera de karts?

Al realizar la lectura de los resultados se encontraron respuestas comunes en los estudiantes E1, E3, E4 y E6 que permitieron deducir que realizaron un buen trabajo matemático. Por ejemplo, E1 Realizo una suma de las longitudes del perímetro de su gráfico (figura 12) para determinar la longitud total de la pista de karts, luego trató de definir la operación más adecuada que le permitiera solucionar el problema, por eso se evidencia que inicialmente toma la multiplicación para encontrar el número de vueltas, luego razona que la mejor operación que le permite llegar a la respuesta es la división.

Según Godino (2002) medir cantidades es esencial en el proceso de cuantificación de la realidad, proceso que se ve facilitado por la reducción de las cantidades a números, con los cuales podemos tratar como si se tratara con las cantidades originales. Para ello será necesario definir una operación de sumar cantidades, y que esta suma tenga propiedades deseables de asociatividad y conmutatividad, para que se pueda hablar de magnitud. (p. 626)

Por otro lado, E6 realizó otro proceso de matematización en la que decidió realizar una adición de los segmentos del perímetro para hallar la longitud total de su pista de karts y luego sumar repetidamente el resultado hasta llegar a la solución del problema. En ese sentido Godino (2002) explica que:

En el conjunto de los segmentos generales, que representaremos por L , podemos definir una operación o ley de composición interna: “suma de segmentos generales”.

Para ello extendemos la suma de segmentos consecutivos al caso de segmentos generales y al de cantidades de longitud. Dados dos segmentos generales $[a]$ y $[b]$ (caracterizados cada uno de ellos por una longitud), siempre es posible encontrar dos representantes consecutivos y que, por tanto, se pueden sumar. Este nuevo segmento suma pertenece a una nueva clase de equivalencia, que por definición se considerará el segmento general (cantidad de longitud) suma de $[a]$ y $[b]$. O sea,

$$[c] = [a] + [b]$$

Como L es el conjunto de las cantidades de longitud (o conjunto de longitudes) se acaba de definir la suma de longitudes. (p. 626)

Para el caso de E5 que graficó un circuito, identifica la medida de las longitudes de cada segmento comparando la cuantificación de la magnitud, las ordena de tal manera que al hacer la sumatoria encuentra el resultado de la longitud total de cada vuelta del recorrido, luego multiplica de manera asertiva por cada número de vueltas en un trabajo de ensayo y error hasta encontrar su resultado.

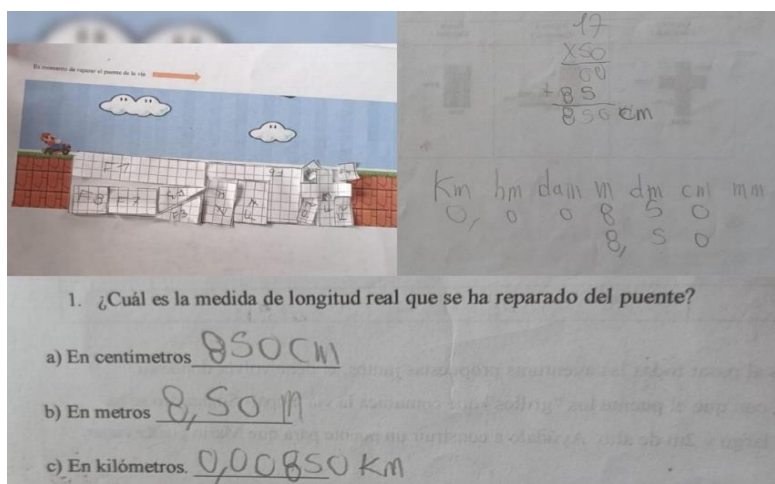
Las distintas cantidades de longitud se pueden comparar entre sí. Cuando dos segmentos fijos se superponen y sus extremos no coinciden decimos que uno es mayor o menor que el otro. En este caso, siempre es posible encontrar un segmento fijo DF , que sumado al CD permite completar lo que le falta hasta “cubrir” al AB .

$$\begin{array}{c} C \quad D \quad F \\ \hline A \quad \quad B \end{array}$$
 Por tanto, $CD \leq AB$, pues existe DF tal que $CD + DF = AB$ (1).
 (Godino 2002, p. 627)

Para la actividad 6 se propuso a los estudiantes reparar un tramo de un puente proponiéndole usar figuras con distintas dimensiones y formas con la finalidad de observar cómo hacían uso de la modelación para dar solución al problema planteado, verificar como usaban instrumentos de medida y determinar la manera como utilizaban las unidades de la magnitud longitud frente al escenario planteado. Para esto fue necesario contextualizar al estudiante con una problemática real que se presentaba para la fecha como lo fue la caída del puente que comunica el municipio de Yopal con Sogamoso. También se mantuvo en el planteamiento el personaje "Mario Bros" que permitió mantener motivados a los

estudiantes demostrando gran interés por la construcción del conocimiento en pensamiento métrico. La enseñanza de la medida de magnitudes es un tema esencial en el que se sustentan otras áreas de las matemáticas. Está estrechamente ligada a la acción de cuantificar y, por lo tanto, a la aritmética. Asimismo, está relacionada con la geometría, ya que en muchas ocasiones se estudia la medida de objetos geométricos; por ejemplo, su área, volumen, perímetro o amplitud de ángulos. (Carrillo et al, 2016, p.135)

Figura 13 Solución al planteamiento de la actividad 6



Nota: elaborado por estudiantes

Como resultado en esta actividad se pudo observar que una de las estrategias utilizadas por los estudiantes fue estimar la medida de las figuras para poder encajarlas en el espacio que debían reparar del puente; E1, E2 y E3 decidieron dibujar las figuras en una hoja aparte con las medidas indicadas y recortar para utilizarlas a modo de rompecabezas encajando correctamente las fichas para poder darle solución al problema evidenciando que comprendieron la magnitud longitud en objetos y figuras de distintas formas y tamaños teniendo en cuenta sus dimensiones, por otro lado del E4 se observó que fue midiendo y dibujando las figuras en el recuadro propuesto para la solución, intentando tantas veces como fueron necesarias hasta completar el tramo. E6 midió el tramo que debía reparar y lo plasmó en una hoja cuadriculada para tomar como referente de medida los cuadritos del cuaderno. También se pudo identificar que los estudiantes desarrollaron la capacidad de plantear diversas soluciones que pudieron comparar y finalmente comprobar su validez mediante los instrumentos de medida o el uso de patrones.

Esto deja como evidencia que no existe un solo modelo matemático para dar solución a un problema que involucre el pensamiento métrico, también que la modelación permite que los estudiantes se involucren y se interesen por su propio aprendizaje y le den sentido al uso de las matemáticas como lo menciona Biembengut y Hein (2003) es “ una manera altamente placentera de investigar el tema y es capaz de llevar al alumno a construir conocimientos que tienen significados o sentido para él, ya sea en forma de conceptos matemáticos, ya sea sobre el tema que se estudia" (p. 42) (citado por Biembengut y Hein, 2004, p. 108)

Para identificar las estrategias de conversión de unidades que utilizaban los estudiantes frente a la magnitud longitud se les propuso medir el tramo que repararon del puente, pero que utilizaran una escala de medida para abstraer al mundo real la situación planteada. se pudo evidenciar que en su mayoría los estudiantes utilizan una tabla de conversión que les permite moverse entre los múltiplos y submúltiplos de la medida, lo que permite inferir que los estudiantes desarrollaron en el momento de desubicación la habilidad para convertir unidades, habilidad clave para que más adelante puedan hacer uso de factores de conversión.

Finalmente se destaca que cada unidad de trabajo comparaba y comprobaba la validez de sus respuestas con ayuda del docente. Una etapa importante en el proceso de la modelación y que permite que los niños se mantengan motivados frente a la resolución de problemas con respecto a la magnitud longitud. Esto permite que los estudiantes realicen toma de conciencia frente a las fortalezas adquiridas durante el proceso de aprendizaje e identifiquen las dificultades para afrontarlas y superarlas propiciando un mejor desempeño en la vida escolar.

El análisis sobre las respuestas a las preguntas de la entrevista semiestructurada revela cómo los niños entienden y conceptualizan conceptos relacionados con el pensamiento métrico, la importancia que le dan, su relación con las matemáticas y situaciones cotidianas, así como si existe un conocimiento sobre unidades de medida y las diferentes magnitudes.

8 CONCLUSIONES

La modelación matemática facilitó el desarrollo del pensamiento métrico en los estudiantes de grado quinto de la institución educativa JEG del municipio de Yopal, ya que lograron contextualizar las situaciones planteadas en la UD pudiendo comprender conceptos de la magnitud longitud, la relación entre las unidades de medida y establecieron estrategias de conversión que les permitieron dar solución a las actividades dándole sentido y aplicabilidad a las matemáticas dentro y fuera del aula de clase.

En el momento inicial, se pudo corroborar que los estudiantes tenían dificultades cuando se enfrentaban a situaciones de pensamiento métrico, como la estimación, porque no encontraban métodos o herramientas apropiados para medir longitudes y no utilizaban unidades de medida apropiadas que se ajustaran al contexto. Los estudiantes no desarrollaron un plan claro para resolver cada situación y dieron respuestas que carecían de justificación.

Diseñar una unidad didáctica basada en la modelación permitió que los estudiantes se familiarizaran fácilmente con cada situación planteada, estuvieron motivados involucrándose en el desarrollo de las actividades teórico-prácticas que les permitía plantear modelos matemáticos para la resolución de problemas asociados a la magnitud longitud teniendo la posibilidad de comparar y comprobar la validez de sus respuestas.

La estimación permitió al estudiante proponer respuestas aproximadas, predecir situaciones probables, verificar la asertividad de los resultados, así mismo indicar la unidad de medida más conveniente lo que conlleva a tomar decisiones y buscar el instrumento o método efectivo para medir con precisión. La modelación fue un puente para desarrollar esas habilidades que requiere la estimación para aproximar las dimensiones de un objeto o la distancia entre dos puntos.

Es importante desarrollar el pensamiento métrico en los estudiantes ya que se utiliza en diferentes actividades necesarias en el diario vivir, en este estudio se hizo énfasis en la magnitud longitud permitiendo que los estudiantes comprendieran la relación entre las medidas de una superficie con respecto a las dimensiones de una figura y un cuerpo sólido, eligiendo instrumentos y unidades de medida adecuadas según el contexto por medio de la modelación resultando una experiencia enriquecedora y agradable para los niños.

La modelación matemática tiene un alto grado de incidencia positiva en el quehacer docente porque permite el aprendizaje de los estudiantes y desarrolla habilidades tales como: argumentar, razonar, interpretar, analizar, comunicar y modelar, competencias fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas. Una vez implementada la unidad didáctica se evidencia la capacidad de los estudiantes para comprender situaciones reales que pueden ser modeladas matemáticamente, seleccionando herramientas apropiadas para interpretar y analizar un problema de tal manera que lograron la construcción de un modelo matemático y comunicaron las posibles soluciones o situaciones cambiantes.

Los estudiantes al modelar situaciones consiguen reconocer patrones de referencia y percibir las características de los objetos o situaciones que experimentaron para luego aplicar los conocimientos adquiridos en el diario vivir. En síntesis, la modelación en el desarrollo del pensamiento métrico es la oportunidad para que los estudiantes tengan un aprendizaje profundo sobre todo lo relacionado con magnitudes, estimación, medición, cantidades, unidades, equivalencias, instrumentos de medida y conversión, para el docente es una estrategia metodológica para realizar una adecuada transposición didáctica.

9 RECOMENDACIONES

Finalizado el presente proyecto se recomienda a futuros investigadores realizar estudios que permitan fortalecer habilidades de pensamiento métrico teniendo en cuenta otras magnitudes como masa, tiempo y capacidad, que permita contrastar los resultados con esta investigación.

Se recomienda hacer uso de la modelación en el aula como estrategia de enseñanza de las matemáticas porque propicia en el estudiante una mejor comprensión de los contenidos desarrollados, mejora el grado de interés y motivación por la asignatura, así mismo permite al profesor tomar conciencia del avance en el aprendizaje y las debilidades de los estudiantes para replantear la práctica pedagógica tradicional.

Se recomienda buscar estrategias que le permitan a los estudiantes desarrollar habilidades para la modelación de situaciones cotidianas que los lleven a comprender diferentes fenómenos y adquirir destrezas del pensamiento crítico como tomar decisiones, analizar, sintetizar y validar resultados.

A juicio de los autores de esta investigación se evidencia una clara motivación por parte de los estudiantes, ya que cada una de las actividades fueron diseñadas pensando en despertarles el interés y las ganas de aprender, por esto se recomienda conectar cada tarea con temas de su preferencia para aumentar la atracción, esfuerzo y compromiso de manera que se refleje una participación con objetivos claros por parte de ellos. Además, al tener en cuenta sus gustos se mantiene la atención y se muestran divertidas las actividades de aprendizaje.

10 REFERENCIAS

- Acebo, C.y Rodríguez, R. (2021). *Diseño y validación de rúbrica para la evaluación de modelación matemática en alumnos de secundaria. Revista Científica*, 40(1),13-29.
<https://doi.org/10.14483/23448350.16068>
- Agudelo y García. (2016). Desarrollo de la estimación de cantidades continuas en la magnitud volumen a través de la implementación de la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 139-158.
- Biembengut, M. S., & Hein, N. (1997). *Modelo, modelación y modelaje: métodos de enseñanza-aprendizaje de matemáticas*. Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática" Thales", (38), 209-222.
- Biembengut y Hein. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16. p.118
- Castrillón, Sánchez y Villa (2017) Tipos de Tareas de Modelación para la Clase de Matemática. *Espacio Plural*. 221- 248. [fecha de Consulta 17 de septiembre de 2022]. ISSN: 1518-4196. Disponible en:
<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=445955647011>
- Carrillo., Contreras, L., Climent, N., Montes, M., Escudero, D., & Flores, E. (2016) *Didáctica de las Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. p.137,143.
- Godino, J. Batanero, C. (2002). *Medida de magnitudes y su didáctica para maestros. Artículo sin referencia*. 615,640
- Gómez, F. (2021). Fortalecimiento del pensamiento métrico, asociado al DBA #5 de grado primero de matemáticas, a través de recursos educativos digitales. (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia. Manizales.
- González y Flórez. (2018). *La Modelación Matemática y la Construcción de la Covariación Lineal*. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Javeriana

- Hernández, R. (2021). *Procesos de Modelación Matemática y Modelación Estadística En Tiempos Contemporáneos: Similitudes y Diferencias*, Revista Boletín Redipe, 10 (7),334-356.
- Hernández, Fernández y Baptista (2014) Metodología de la investigación. McGraw-Hill, Sexta Edición. p.432
- ICFES, (2020). Marco de referencia para la evaluación, prueba saber de matemáticas 3°,5°7°Y9°,12.
- ICFES, (2022). Reporte de resultados por aplicación del Examen Saber 11° para establecimientos educativos.
- Marmolejo, G. Álvarez, H. Y Mosquera, E (2016). Introducción al Desarrollo de Pensamiento Métrico y los Sistemas de Medida en la Educación Básica Primaria. (F. S. Children, Ed.) San Juan de Pasto.
- MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.46,70
- https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-116042_archivo_pdf.pdf
- Mineduc de Chile. (2016). Desarrollo de habilidades: Aprender a pensar matemáticamente.
- Pérez (2021) caracterización de una gestión argumentativa que promueve articuladamente argumentación y modelación en el aula matemática de primaria, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, p, 163.
- Villa, Sánchez y Parra (2022). Modelación matemática en la perspectiva de la educación matemática, Universidad de Antioquia, 70

11 ANEXOS

Anexo 1 Consentimiento informado

**Señores
PADRES DE FAMILIA
Yopal-Casanare**

Cordial saludo.

Por medio de la presente me dirijo a ustedes para solicitar su autorización y consentimiento para la participación de su hijo _____ del grado quinto A, en el proyecto de investigación “*La modelación matemática en el desarrollo pensamiento métrico*”, a cargo de los docentes Lady Lorena Briceño y Jaime Andres Briceño de la Institución educativa Jorge Eliécer Gaitán, cuyo objetivo del proyecto es determinar el aporte de la modelación matemática en el desarrollo del pensamiento métrico.

Luego de la previa autorización de la institución y consentimiento informado por parte de los padres y los estudiantes, debidamente firmado, se procederá a aplicar los instrumentos para la recolección de datos y la ejecución del proyecto.

Manifiestan que comprenden en su totalidad la información sobre esta actividad y autorizan el uso de los videos, imágenes, sonidos y datos personales, usados para temas investigativos y/o académicos propios de la investigación conforme a este consentimiento informado de forma consciente y voluntaria:

_____ SI AUTORIZO _____ NO AUTORIZO

Firma de acudiente: _____
C.C

**Agradeciendo su atención y colaboración,
Cordialmente, Docentes Lady Briceño y Andres Briceño**

Anexo 2 Unidad didáctica

Institución Educativa Jorge Eliécer Gaitán

Grado: Quinto

DBA No 4: Justifica relaciones entre superficie y volumen, respecto a dimensiones de figuras y sólidos, y elige las unidades apropiadas según el tipo de medición (directa e indirecta), los instrumentos y los procedimientos.

Evidencias de Aprendizaje:

- Determina las medidas reales de una figura a partir de un registro gráfico (un plano).
- Mide superficies y longitudes utilizando diferentes estrategias (composición, recubrimiento, bordeado, cálculo).
- Construye y descompone figuras planas y sólidos a partir de medidas establecidas.
- Realiza estimaciones y mediciones con unidades apropiadas según sea longitud, área o volumen.

Momento 1: Ubicación

Objetivo: Explorar las ideas o representaciones que posee los estudiantes sobre medidas de longitud.

Indagar si los estudiantes interpretan medidas de longitud expresadas en metros y en sus múltiplos y submúltiplos.

Actividad 1: Una visita inesperada

Recursos

Guía impresa de la actividad para cada uno de los estudiantes, colores, video beam.

Descripción de la actividad: Los estudiantes definen una ruta en la imagen proyectada a través del video beam para llevar a Mario hasta la institución educativa JEG. Luego deben señalar con color, la ruta en el mapa entregado y por último responder cada una de las preguntas. Se pretende que puedan poner en práctica sus conocimientos en cuanto a

procesos de medición e indagar las dificultades que presentan los estudiantes principalmente de la magnitud longitud.

Introducción: Mis queridos estudiantes, es un agrado compartir con ustedes este espacio. Para esta jornada de trabajo estaremos utilizando este material, recuerden desarrollar las actividades satisfactoriamente y en completo orden.

¡Te invito a divertirme como nunca!

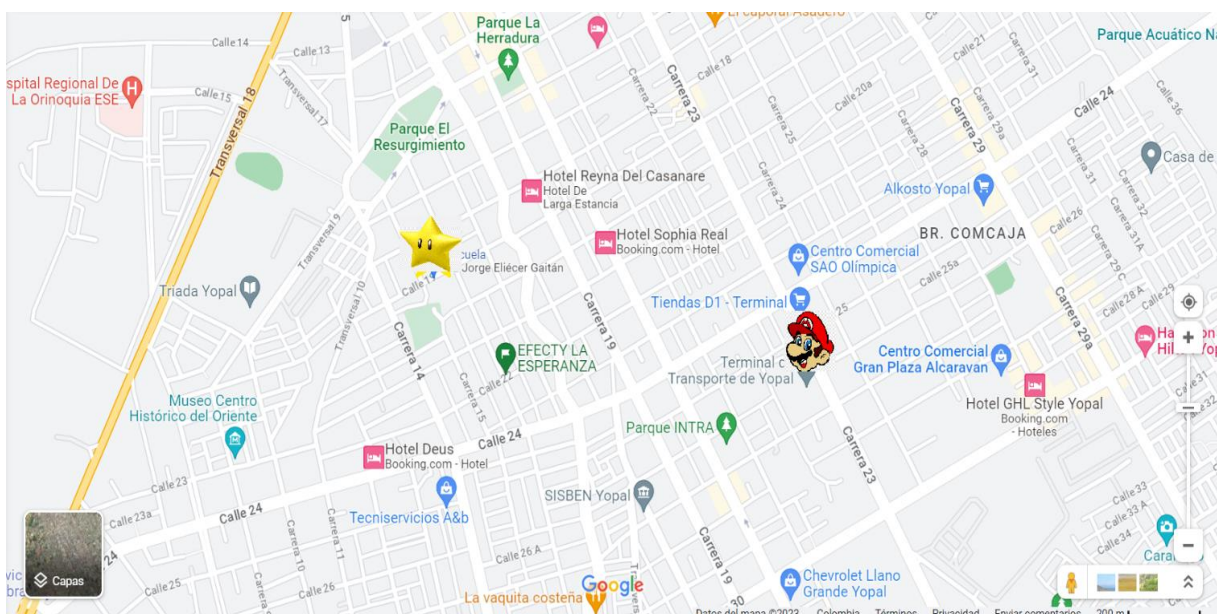
será genial...

Un súper personaje llamado Mario, que seguro ya conoces, ha llegado a la ciudad de Yopal y se encuentra en el terminal de transporte, quiere vivir una super aventura y para eso desea que lo acompañes, ya que en esta ocasión su hermano Luigi no puede hacerlo. ¿Deseas aceptar el reto? ...Vamos será una oportunidad para conocer que no siempre se ha tenido una unidad exacta para comparar las cosas, y de aprender muchas cosas más.



¡Atención!

Debes recogerlo y buscar la ruta más adecuada para llegar al colegio Jorge Eliécer Gaitán donde tendrá magníficos episodios. Observa la imagen proyectada, traza la ruta sobre el mapa y luego responde las preguntas:



¿Cómo podríamos saber la distancia que tú y Mario deben recorrer para llegar desde el punto de partida hasta punto de llegada?

- ¿Cuánto crees que es la distancia que debes recorrer con Mario desde el terminal hasta el colegio?

- ¿Crees que las medidas que pensaste fueron exactas? ¿por qué?

- ¿Utilizaste algún método para calcular la distancia recorrida? ¿cuál?

- ¿Por qué crees que la ruta que trazaste fue la mejor para que tú y Mario llegaran al colegio?

- ¿Qué dificultades encontraste para llevar a Mario por la ruta escogida?

Actividad 2: Un modelo de ruta

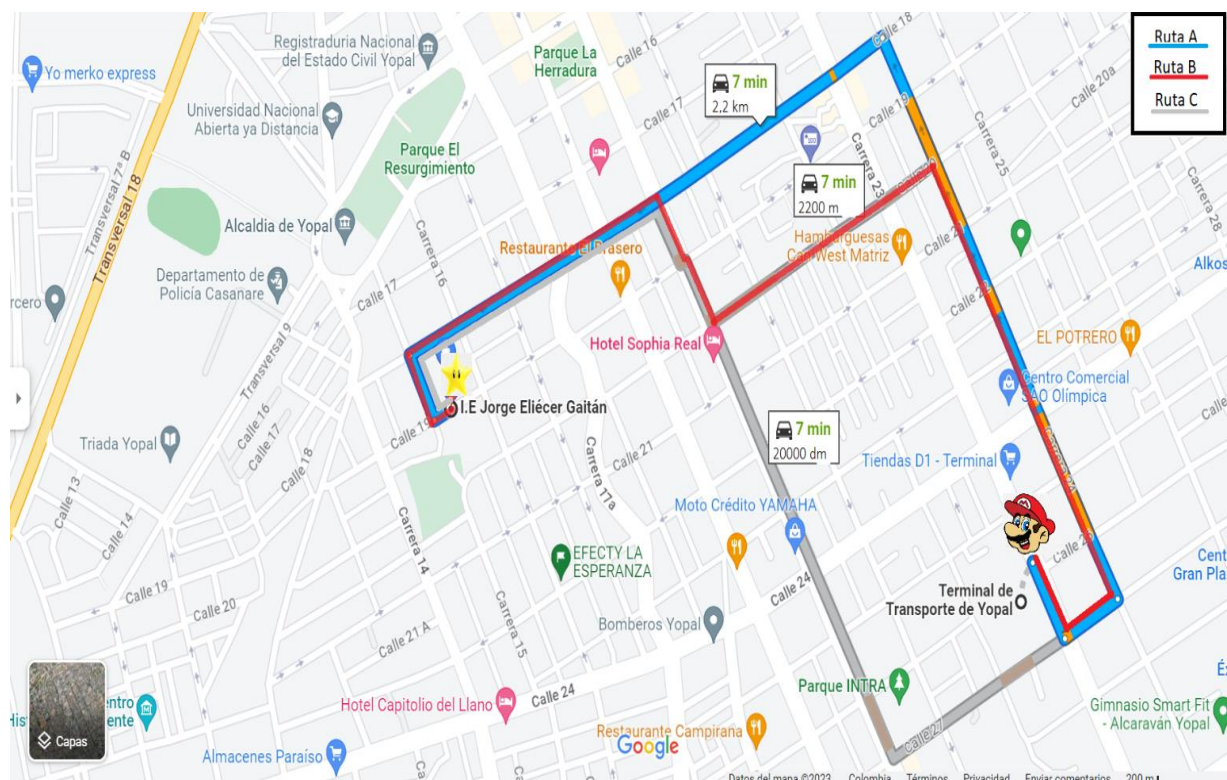
Recursos

Guía impresa de la actividad para cada uno de los estudiantes, video beam, computador.

Descripción de la actividad: realice la lectura de la imagen que el docente proyectará en la pared de tal manera que le permita una excelente observación y comparación, relacione las figuras, letras y símbolos que pueda encontrar y que le permiten juzgar, analizar e interpretar las tres rutas posibles por las que llevarían a Mario desde el terminal de transporte de Yopal hasta la Institución Educativa Jorge Eliécer Gaitán. Posteriormente lea y responda cada una de las preguntas.

«Mamma mia» Continuamos con la diversión ➡

Dentro de las posibles rutas que puedes utilizar para llevar a Mario hasta la institución educativa Jorge Eliécer Gaitán encontramos tres con las siguientes distancias:



- ❖ ¿Por cuál de las tres rutas llevarías a Mario desde el terminal de transporte de Yopal hasta la Institución Educativa Jorge Eliécer Gaitán? ¿Por qué?

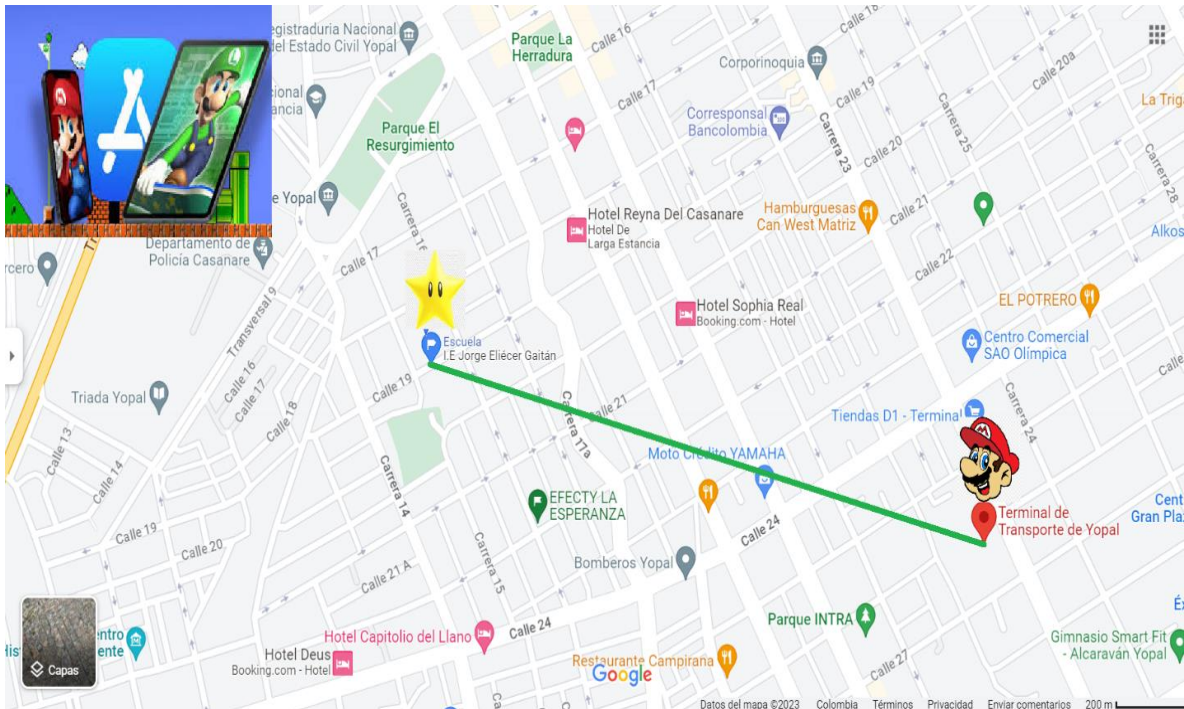
- ❖ ¿Cuál es la ruta más corta para llevar a Mario? ¿Por qué?

- ❖ ¿Cuál de las señales que se muestran a continuación es la más adecuada para expresar la unidad de medida de la distancia que recorriste con Mario? Explica





Luigi se ha comunicado con Mario para indicarle que la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta y le envía a través de WhatsApp un mapa con la ruta alternativa que lo pueda llevar a la institución educativa JEG.



❖ ¿Qué piensas de la afirmación de Luigi sobre la distancia entre dos puntos?

❖ ¿Mario y tu podrán tomar la ruta enviada por Luigi? sí o no ¿Por qué?

Momento 2: Desubicación

Objetivos:

- Identificar el metro como unidad patrón, sus múltiplos y submúltiplos para expresar medidas de longitud como el ancho, el largo, la altura, y distancias.
- Asocia la multiplicación como estrategia de conversión de unidades mayores a menores y la división de unidades menores a mayores.
- Utiliza la unidad de medida de longitud más adecuada según un contexto.
- Comprende fenómenos a través del uso de recursos matemáticos.
- Vincular el proceso de modelación en la solución de situaciones reales que desarrollan el pensamiento métrico.

Recursos: guía impresa de la actividad para cada uno de los estudiantes, un lápiz, colores, cartulina, borrador.

Actividad 3: Estimando y calculando medidas

Descripción de la actividad: Deben leer con atención la información que se presenta y realizar diferentes actividades como:

1. Seleccionar tres útiles escolares pequeños en el aula de clases
2. Dibujarlos en la guía en el espacio correspondiente
3. Estimar la medida de los útiles escogidos
4. Completar la tabla con la estimación realizada y la medida exacta
5. Trabajarán algunos patrones de medida no convencionales, medirán algunos objetos con un patrón de medida creado por los estudiantes.
6. Luego medir objetos pequeños como útiles escolares donde utilicen las unidades menores que el metro y con ayuda de la regla.
7. Por último, elaboran una cinta métrica para medir objetos del salón de clases.

Introducción: Querido estudiante espero la estes pasando muy bien. Si no entiendes algo puedes preguntar a tu docente y recuerda estar pendiente de las explicaciones.

Por fin has llegado con Mario a tu hermoso colegio, al bajarse del carro a él le llama la atención un letrero informativo en la cartelera que se encuentra en la entrada del colegio:



Mario quiere conocer todas las instalaciones, para esto realizarán un recorrido en donde aprenderán a conocer una magnitud llamada longitud con sus unidades e instrumentos de medida. Deben realizar las actividades y leer detenidamente.

Selecciona 3 útiles escolares pequeños que encuentres en el aula de clases, dibújalos en la columna de los objetos, estima la medida, y completa la tabla que aparece a continuación, sin diligenciar la columna sombreada:

Objeto	Largo		Ancho	
	Estimación	Medida	Estimación	Medida
				

¡Anímate!!! Que genial saber que con mi cuerpo puedo medir, practiquemos un poco.



Mide con palmos el largo de tu mesa.

¿Cuántos palmos mide? _____

¿Que otras partes del cuerpo puedes utilizar para medir la mesa?

Ahora probemos con objetos:

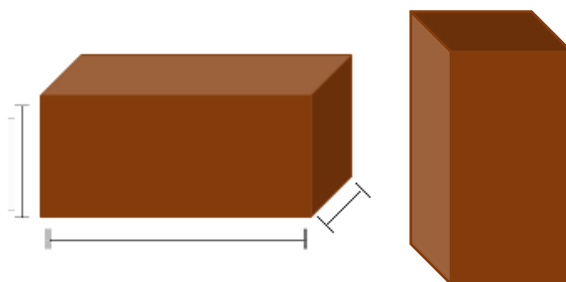
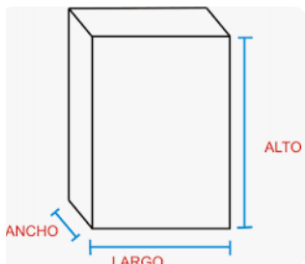


Mide el largo y ancho de tu cuaderno teniendo como patrón de medida tu borrador.

Largo: _____ Ancho: _____

¿Cuál es la diferencia entre el largo y el ancho de un objeto?

Después del diálogo con tu docente, de ver el video que ejemplifica y da claridad del largo y el ancho, que corresponden a la dimensión horizontal de un objeto o cuerpo. En cambio, el alto alude a la dimensión vertical y en ocasiones puede ser sustituido por la palabra profundo. Señala y escribe el largo, el ancho y el alto de los cuerpos geométricos.



- Continúa el dibujo del mundo de Mario teniendo en cuenta las siguientes especificaciones:

1. Dibuja un tubo más alto que el que se encuentra en la imagen y dos más bajos.
2. Dibuja en medio de los dos tubos más bajos un hongo más ancho que el de la imagen.
3. Dibuja un bloque de ladrillos con una estimación de 4cm de alto.
4. Dibuja un tubo más ancho que en comparación al más alto.
5. Dibuja un tubo dos veces más largo que la nube que tiene una sola cara.
6. Al finalizar colorea el dibujo como quieras.

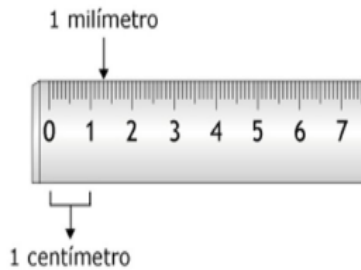


- Mario desea más aventuras para aprender todo sobre la magnitud longitud, para esto te propongo lo siguiente:

- Crea un patrón de medición
- ¿Cuál es tu patrón de medición? _____
- Con la unidad patrón elegida realiza las siguientes mediciones:
 - Mide el largo y el ancho de tu salón de clases.
 - _____
 - Mide el largo, el ancho y alto de tu maleta.
 - _____

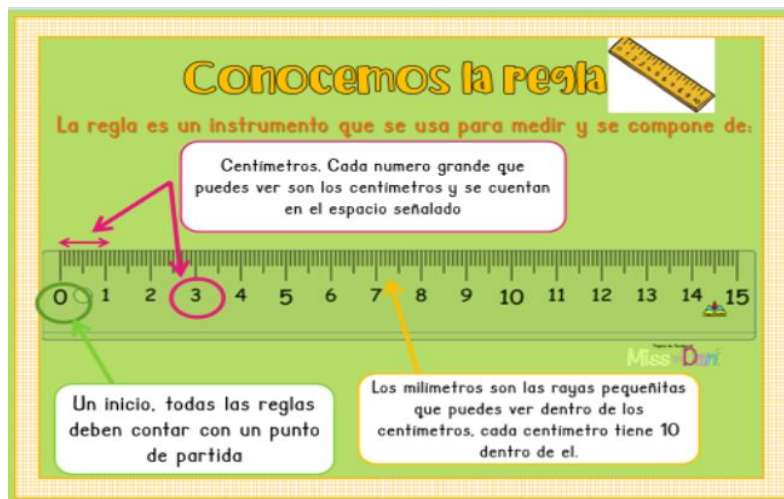
- Socializa y compara tus medidas con las de tus compañeros.

Hasta el momento ha sido divertido estimar medidas, que consiste en dar una aproximación del valor verdadero del objeto de medida. Pero hay mucho más, puedes tomar un receso de 3 minutos con Mario.



Muchos de los objetos que encontramos en el salón de clases tienen dimensiones menores que el metro (que es la unidad básica de medida de longitud); para que puedan ser medidas con exactitud utilizamos unidades más pequeñas que el metro, como el centímetro y el milímetro.

¿Has visto el centímetro y el milímetro en algún lado? ¿Donde? _____



Mario recuerda que en su bolsillo lleva una regla con centímetros y milímetros para su trabajo de plomería. Entonces será divertido medir con regla, también puedes tomar como unidad de medida el decímetro que equivale a 10cm.

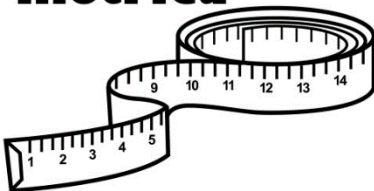


Ahora si completa la parte sombreada de la tabla anterior con las medidas exactas, utilizando la regla como instrumento de medida.

Mario ha decidido enseñarle a su amigo Luigi a medir con la regla por eso quiere practicar aún más. **¡Lo ayudas por favor!** Mide tus útiles escolares que muestra la tabla y completa.

Objeto	¿Cuánto mide?	¿Cuánto mide?
1. 	<u> </u> mm	<u> </u> cm
2. 	<u> </u> mm	<u> </u> cm
3. 	<u> </u> mm	<u> </u> cm

Cinta métrica



Seguramente al igual que Mario haz visto en varios lugares la cinta métrica, que es otro instrumento de medida, para conocerlo mejor elaboraremos una donde se diferencie los milímetros, centímetros y decímetros, y de esta manera utilizar la unidad de medida básica de longitud el **metro**. Necesitaras cartulina u otros materiales, y seguir las instrucciones de tu docente, manos a la obra.

¡Te felicito lo has hecho muy bien!

- Es hora de probar tu cinta métrica, mide y completa la tabla. Debes hacer coincidir el cero en la cinta métrica con uno de los extremos del objeto a medir

Objeto	Alto			Ancho		
	M	dm	cm	M	dm	cm
Tablero de tu salón						
Salón de clases						
Ventana del salón						
Puerta						

Después de utilizar la regla y la cinta métrica Mario desea enviarle a Luigi una información correcta y acertada, para esto debes responder las siguientes preguntas:



¿Cuántos dm puedes contar en un metro? _____

En un dm, ¿cuántos cm puedes contar? _____

En un cm ¿cuántos mm puedes contar? _____

Actividad 4: Rally Bros

Recursos: Guía impresa de la actividad para cada uno de los estudiantes, un lápiz y un borrador.

Descripción de la actividad: consta de un rally con cuatro pistas que los estudiantes deben realizar donde se presentan diferentes situaciones en las que se debe medir en diferentes unidades, conversión de unidades etc.

Introducción: Eres muy inteligente has llegado a este punto para seguir la diversión y aprender más sobre la magnitud longitud y sus unidades de medida. Es hora de que Mario conozca más lugares de tu colegio. Utiliza las pistas y lee detenidamente.



Así como existen longitudes menores que el metro como el decímetro, centímetro, milímetro, también encontramos longitudes mayores como el decámetro hectómetro y kilómetro, que son múltiplos del metro.

Pista N° 1: lugar donde te diviertes en los descansos con tus compañeros. Dibuja ese lugar y coloca las medidas correspondientes en escala 1:200 (cada cm en el dibujo equivale a 2 m en la vida real) teniendo en cuenta las indicaciones del docente.

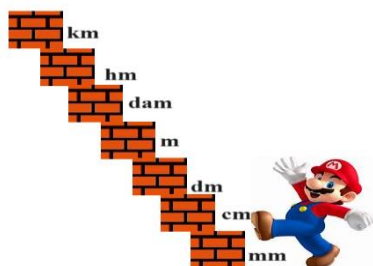
A large, empty rectangular box with a dark blue border, intended for a student to draw a place where they have fun during breaks.

¿Cuánto es el largo de ese lugar?: _____ m _____ dam

¿Cuánto es el ancho de ese lugar?: _____ m _____ dam

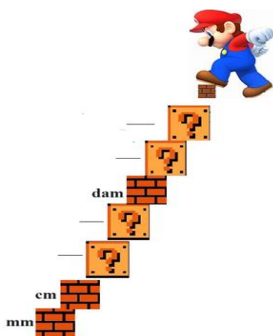
¿Cuánto es el perímetro del lugar? _____ m _____ dam

Pista N° 2: en esta pista debes tener en cuenta la siguiente información y lo trabajado con el docente. Siempre que se convierta una unidad menor a una unidad mayor, el número a convertir se debe dividir entre 10 por cada escalón que se ascienda en la escalera.



Atención, mira el ejemplo: Para encontrar cuántos m hay en 5637mm, primero debemos ubicarnos sobre la unidad de la que se conoce la magnitud, ahora tenemos que movernos hacia la unidad que nos piden, es decir, hacia arriba hasta llegar a m, por cada escalón que subamos se divide por 10 la magnitud conocida. En total subimos 3 escalones, por tanto, tenemos que: $5637 / (10 \div 10 \div 10) = 5,637$ al número obtenido se le colocan las unidades del escalón en que quedo ubicado, en este caso sería 5,637m.

Ayuda a Mario a destapar los cuadros y completar la escalera. Luego realiza las conversiones. Recuerda, siempre que pases de una unidad mayor a una menor se multiplica por 10 cada escalón que se baje.



1. Calcula cuántos dm hay en 8hm: _____
2. Calcula cuántos cm hay en 4km: _____
3. Calcula cuántos m hay en 520 dm: _____
4. Calcula cuántos dam hay en 456789 mm: _____



Pista 3: es hora de ver cuanto creciste y cuanto miden tus amigos, reúnete con tres compañeros y utilizando la cinta métrica compara la altura con la de dos compañeros.

Nombres de estudiantes	Medida
Yo	

¿Cuántos centímetros miden los tres juntos? _____

¿Cuántos metros miden los tres juntos? _____

¿Cuántos decímetros miden tres juntos? _____

Pista 4: adivina adivinador ¿?

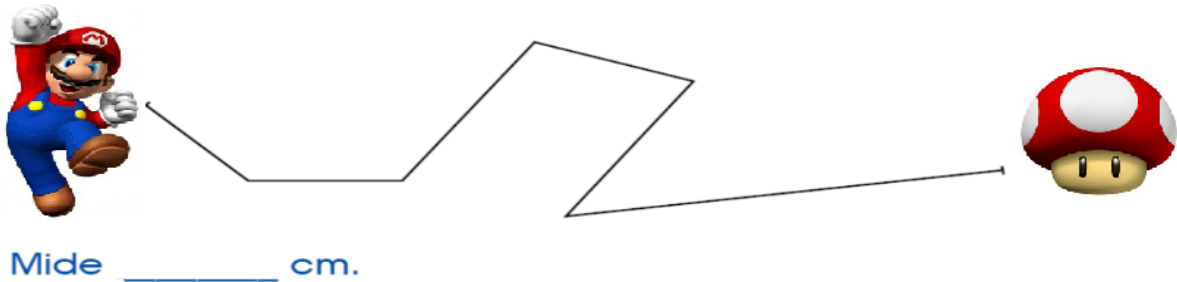
- Voy contigo todo el tiempo cuando vamos a estudiar, me abres, me cierras, te presto muchos palitos de colores ¿Quién soy? _____ ¿Cuánto es mi largo? _____ ¿Cuánto es mi ancho? _____
- Soy un objeto, mi contenido puede ser agua o cualquier otro líquido, mis ojos brillan al verlo en los días calurosos y después de jugar. ¿Quién soy? _____ ¿Cuánto es mi altura? _____
- Sobre mí te puedes sentar y poner atención a las clases ¿Quién soy? _____ ¿Cuánto es mi largo? _____ ¿Cuánto es mi ancho? _____ ¿Cuánto es mi altura? _____

- _____ Lugar del colegio donde preparan deliciosos almuerzos. Muy bien adivinaste, ahora toma la medida que debes recorrer desde tu salón para llegar allí y dibuja un mapa del camino. Recuerda utilizar una escala 1:200



Vas muy bien ... te felicito

Después de dibujar el restaurante de tu colegio y después de tanta diversión Mario desea comer un hongo. Mide el camino que debe recorrer. Utiliza tú regla.



Hasta este momento hemos aprendido bastante por eso es hora de una pausa activa, levanta los brazos y cuenta hasta 10 para que retomes tus aprendizajes.

Momento 3: Reenfoque

Objetivo:

- Construye modelos en la solución de problemas a los que normalmente se enfrentan en la vida cotidiana.
- Interpreta datos de medidas de longitud expresados con unidades mayores o menores realizando procesos de conversión.
- Realiza mediciones de longitudes de objetos tangibles de su entorno
- Identifica una estrategia de conversión de unidades menores a mayores.

Actividad 5: Pista de karts

Recursos: Guía impresa de la actividad para cada uno de los estudiantes, un lápiz y un borrador.

Descripción de la actividad: el estudiante debe leer y comprender el problema planteado para dar una debida solución. Luego responder la pregunta y dibujar la pista diseñada con las medidas adecuadas.

Introducción: Querido estudiante espero te encuentres muy bien y las aventuras con Mario te estén divirtiendo. Recuerden siempre estar atentos y concentrados al realizar las diferentes actividades expuestas.

Vas a demostrar lo que aprendiste...

Mario quiere diseñar una pista de karts para una carrera con sus amigos, esta debe tener un recorrido de 1 km, se le ha ocurrido que lo puede hacer en la cancha de tu colegio que tiene como medidas 14m x 24m.

¿De cuántas vueltas debe ser la carrera de karts?

Ayúdale a Mario a diseñar la pista realizando un dibujo de la pista con sus medidas

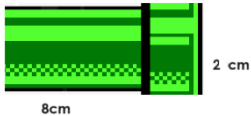
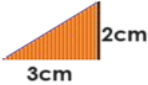
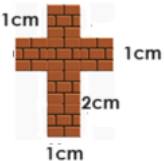
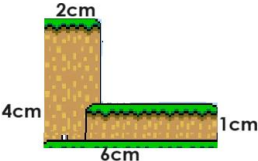
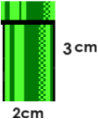
Actividad 6: Mi modelo final

Recursos: Guía impresa de la actividad para cada uno de los estudiantes, un lápiz y un borrador.

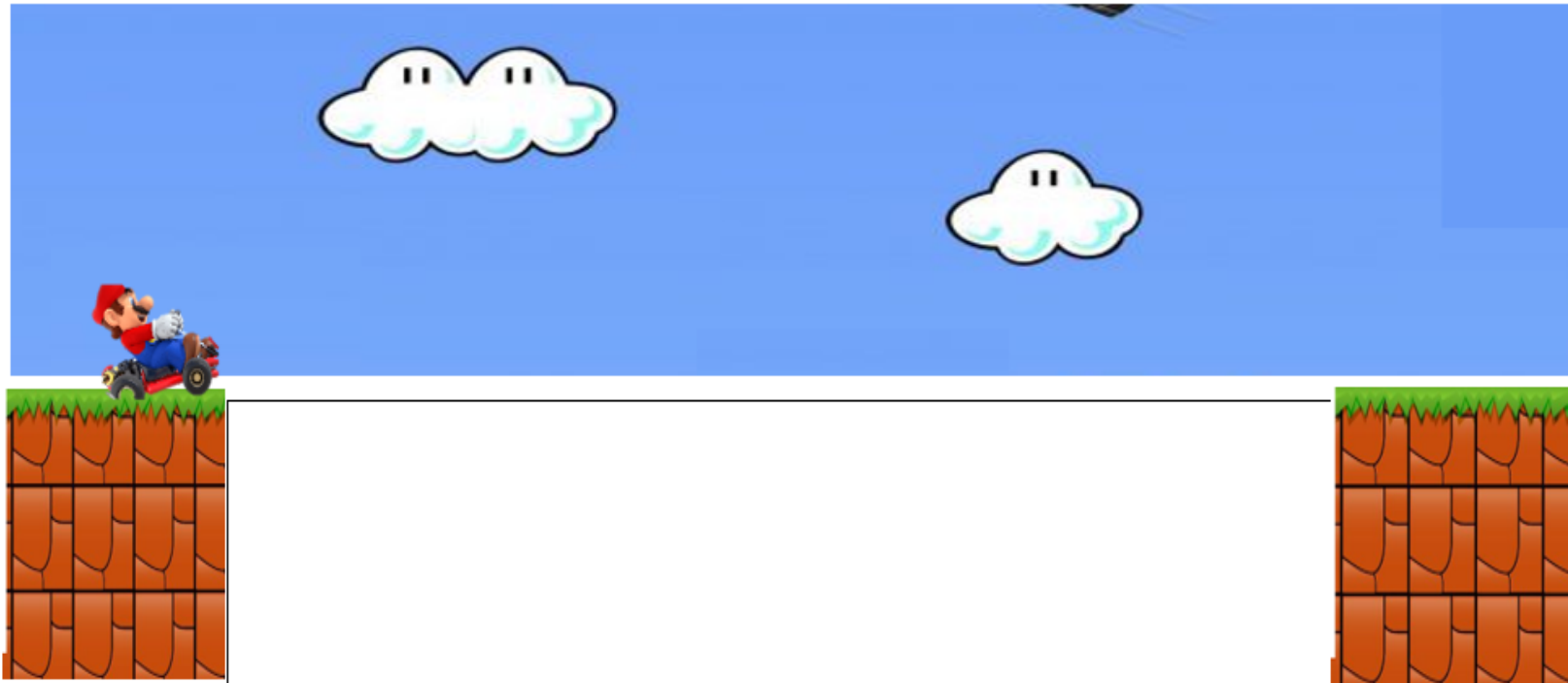
Descripción de la actividad: Los estudiantes deben leer atentamente el enunciado, identificar qué se está preguntando o solicitando. Pensar en modelo de solución comparar las respuestas con sus compañeros y comprobar si se puede resolver la situación de otra manera y/o verificar si llegan a la misma solución.

Introducción:

Utiliza las siguientes figuras, ten en cuenta las medidas para que todo encaje muy bien en la estructura del puente. Además, recuerda la cantidad disponible. En esta oportunidad tengan en cuenta que 1 cm en el plano representa 50 cm reales.

Figura 1 Cantidad 1	Figura 2 Cantidad 2	Figura 3 Cantidad 2	Figura 4 Cantidad 2
			
Figura 5 Cantidad 1	Figura 6 Cantidad 1	Figura 7 Cantidad 3	Figura 8 Cantidad 1
			

Es momento de reparar el puente de la vía



Responde:

1. ¿Cuál es la medida de longitud real que se ha reparado del puente?
 - a) En centímetros _____
 - b) En metros _____
 - c) En kilómetros. _____
2. ¿Qué combinación usarías para reparar el puente usando la cantidad menos posible de figuras

Anexo 3 Entrevista semiestructurada

Fecha: 4 de diciembre 2023 **Hora:** 9.35am

Lugar: IE Jorge Eliecer Gaitán

Entrevistador: Lady Lorena Briceño

Entrevistado: 6 estudiantes de grado quinto A

Introducción: Se pretende que los estudiantes puedan mostrar abiertamente sus conocimientos en cuanto a procesos de medición y todo lo relacionado sobre magnitud longitud.

Duración aproximada: 1 hora

1. ¿Qué entiendes por pensamiento métrico?
2. ¿Para ti qué es medir?
3. ¿Puedes darme un ejemplo de una medida que conozcas?
4. ¿Qué herramientas o instrumentos utilizamos para medir diferentes objetos?
5. ¿Cómo se utiliza una regla o una cinta métrica?
6. ¿Sabes cuál es la unidad básica en el SI de medida para la longitud?
7. ¿Por qué crees que es importante tener un buen entendimiento del pensamiento métrico?
8. ¿Cuál es la relación entre el sistema métrico y las matemáticas?
9. ¿Puedes pensar en situaciones cotidianas en las que necesitemos utilizar el pensamiento métrico?
10. ¿Cuál es la medida más grande que conoces? ¿Y la más pequeña?

Anexo 4 Evidencia momento de ubicación

Figura 14 Respuestas de estudiantes actividad inicial

➤ ¿Cómo podríamos saber la distancia que tú y Mario deben recorrer para llegar desde el punto de partida hasta punto de llegada?

podría decir que 2.5km de distancia depende de la velocidad

➤ ¿Cuánto crees que es la distancia que debes recorrer con Mario desde el terminal hasta el colegio?

unos 2.5km con velocidad de 40

➤ ¿Crees que las medidas que pensaste fueron exactas? ¿por qué?

si cuando vi el mapa calcule mas o menos

➤ ¿Utilizaste algún método para calcular la distancia recorrida? ¿cuál?

Si, En la vida real es depende de la velocidad y el tiempo lo calcule imaginandolo y lo logre lo que cree

➤ ¿Por qué crees que la ruta que trazaste fue la mejor para que tú y Mario llegaran al colegio?

Es la más rapido y no es contraria

➤ ¿Qué dificultades encontraste para llevar a Mario por la ruta escogida?

A ratos que son contrarias y es difícil por el camino

Figura 15 Respuestas de la segunda

❖ ¿Por cuál de las tres rutas llevarías a Mario desde el terminal de transporte de Yopal hasta la Institución Educativa Jorge Eliecer Gaitán? ¿Por qué?

Por la que sea que me parezca que es más fácil y hay que ir más tiempo derecho

❖ ¿Cuál es la ruta más corta para llevar a Mario? ¿Por qué?

la ruta es de decímetros (dm) es más corto porque todas demoran 7 minutos

❖ ¿Cuál de las señales que se muestran a continuación es la más adecuada para expresar la unidad de medida de la distancia que recorriste con Mario? Explica



km
kilómetro

☐



m
metros

☐



dm
decímetros

☒



cm
centímetros

☐

es más rapido pero es más corto

❖ ¿Qué piensas de la afirmación de Luigi sobre la distancia entre dos puntos?

Es algo corto y peligroso, pero si es un helicoptero si

❖ ¿Mario y tu podrán tomar la ruta enviada por Luigi? si o no ¿Por qué?

No, Nos podrian lastimar o lastimar a alguien pero si es en helicoptero si

Anexo 5 Fotos de evidencia momento desubicación

Figura 16 Midiendo dimensiones de la puerta del salón



Figura 17 Comparando alturas



Figura 18 Uso de instrumentos de medida



Figura 19 Midiendo superficie

