REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN LA RESOLUCIÓN DE SITUACIONES PROBLEMA QUE INVOLUCRAN LA MAGNITUD VOLUMEN DEL PARALELEPÍPEDO RECTO EN ESTUDIANTES DE GRADO SEXTO

JOHN HADMINTON DIAZ AVENDAÑO

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES
FACULTAD DE ESTUDIOS SOCIALES Y EMPRESARIALES
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
MANIZALES
2018

REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN LA RESOLUCIÓN DE SITUACIONES PROBLEMA QUE INVOLUCRAN LA MAGNITUD VOLUMEN DEL PARALELEPÍPEDO RECTO EN ESTUDIANTES DE GRADO SEXTO

JOHN HADMINTON DIAZ AVENDAÑO

PROYECTO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

TUTOR
Mg. YANETH MILENA AGUDELO MARÍN

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES
FACULTAD DE ESTUDIOS SOCIALES Y EMPRESARIALES
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
MANIZALES
2018

DEDICATORIA

A tres componentes especiales en mi vida. Primero mi Dios, quien hace posible cumplir esta y todas mis metas. Segundo mi familia, quienes siempre están ahí y son el soporte en mis propósitos, y tercero mi colegio, donde he crecido como persona y como profesional. A ellos dedico este trabajo de investigación.

AGRADECIMIENTOS

- A Dios, por permitirme seguir formándome en esta bonita vocación de docente, a favor de la educación de nuestro país.
- A cada uno de los docentes y compañeros de la primera cohorte de la Maestría en Enseñanza de las ciencias, ya que con sus aportes hicieron que este trabajo mejorará notablemente.
- A la profesora, la doctoranda en educación Yaneth Milena Agudelo Marín, por su acompañamiento constante en la construcción de este trabajo y sus significativos aportes.
- A mi familia, especialmente mi Padre, mi Madre, mi Hermana y mi Hermano por todo el apoyo en este proceso. Sin su comprensión no habría sido posible culminar este programa de formación.
- A los estudiantes del grado 6-2 del colegio Champagnat de Ibagué, quienes participaron con disposición en el presente estudio, llevando a buen término este trabajo.

RESUMEN

Objetivo

Reconocer los sistemas de representación semiótica que más utilizan los estudiantes de grado sexto al resolver situaciones problema que involucran la magnitud volumen del paralelepípedo recto.

Metodología

El trabajo se desarrolla de manera descriptiva y analítica, basado en los lineamientos legales y soportados bajo la teoría de las representaciones semióticas de Raymond Duval, con enfoque en los registros definidos (lenguaje común, algebraico, geométrico e icónico) y en la representación del concepto de volumen de un paralelepípedo recto en situaciones problema. Este trabajo analiza la apropiación y el aprendizaje, representados en algunos aspectos históricos, la contextualización y el reconocimiento de las representaciones semióticas que tienen los estudiantes.

Resultados:

- Análisis de la prueba diagnóstica, con resultados de vacíos y dificultades de algunos estudiantes en el reconocimiento de figuras planas y cuerpos geométricos.
- Análisis de cada actividad, donde sobresale la apropiación de la mayoría de estudiantes, de los conceptos de área, perímetro y volumen, representado en situaciones problemas y evidenciado en los medios que usan para llegar a la solución de los mismos.
- Categorización y nivel de desempeño de los estudiantes en cada una de las actividades de la unidad didáctica.

Conclusiones:

- Mayor desempeño hacia situaciones donde involucre actividades de tratamiento.
- La actividad de conversión de los registros geométrico a icónico, son de mayor comprensión y utilidad.
- Los registros lenguaje común y el algebraico, poseen dificultad en la apropiación.
- La categorización permite un análisis riguroso.

Palabras Claves: Semiótica, representación, registro, volumen y paralelepípedo.

ABSTRACT

Objective

To recognize the systems of semiotic representation used the most in sixth grade students when solving problematic situations that involve the magnitude of the straight parallelepiped volume.

Methodology

This work is developed in a descriptive and analytical manner based on the legal guidelines and supported under the theory of semiotic representations by Raymond Duval with focus on defined registers (common language, algebraic, geometric and iconic) and the representation of the concept of volume of a straight parallelepiped in problematic situations. This thesis analyzes the appropriation and learning represented in some historical aspects, the contextualization and the recognition of the semiotic representations that students have.

Results:

- Analysis of the diagnostic test having results of gaps and difficulties of some students in the recognition of plane figures and geometric bodies.
- Analysis of each activity which highlights the appropriation of most students about the concepts of area, perimeter and volume, represented in problematic situations and evidenced in the means used to reach the solution.
- Categorization and level of performance of students in each of the activities of the teaching unit.

Conclusions:

- Greater performance towards situations where treatment activities are involved.
- The conversion activity from geometric to iconic registers are of greater understanding and usefulness.
- The common language and algebraic registers have difficulty for its appropriation.
- Categorization allows a rigorous analysis.

Key words: Semiotics, representation, registration, volume and parallelepiped.

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ANEXOS

1 PRESENTACIÓN

Este trabajo titulado “Representaciones semióticas en la resolución de situaciones problema que involucran la magnitud volumen del paralelepípedo recto en estudiantes de grado sexto”, se inscribe en el programa de Maestría en Enseñanza de las Ciencias de la Universidad Autónoma de Manizales, en la línea de investigación Didáctica de las Matemáticas y en el macro proyecto, solución de problemas auténticos en matemáticas.

Desde la experiencia docente en el área de matemáticas en este nivel de escolaridad, se hace necesario abordar las representaciones semióticas en el aprendizaje del volumen, en este caso específico del paralelepípedo recto, donde involucre elementos históricos y aspectos analíticos sobre este concepto, que apoye la relación entre Historia de la Matemática - Educación Matemática, como propuesta para el aprendizaje al margen de representación e interpretación en el entorno cotidiano y en el propiamente matemático.

La intención de este trabajo también se orienta en el aporte que puede hacer al profesor de matemáticas de educación básica, el análisis de los resultados de actividades de intervención en el aprendizaje del concepto de la magnitud volumen del paralelepípedo recto y sus representaciones semióticas de lenguaje común, algebraico, geométrico e icónico en los estudiantes de grado sexto.

Además, proponer al docente de matemáticas conciencia y reflexión por su práctica, que indague desde la investigación en el aula, el aprendizaje y la apropiación del conocimiento por parte de los estudiantes, como también implementando nuevos métodos para orientar un área, ya que como lo menciona De Guzmán (2007), “la actividad matemática no puede ser de abordaje sencillo” (p.21), y quizás esto pueda evidenciarse por las maneras como se ha enseñado y la convierte en un conocimiento difícil de comprensión y de aprender. Por esta razón se definen derroteros en torno a la necesidad que el docente aborde aspectos históricos en la enseñanza de la ciencia, la cual muestre al estudiante elementos de los orígenes de dicho conocimiento que permita constatar las necesidades que en las diferentes épocas de la humanidad el ser humano solucionó problemas o generó conocimiento útil para avanzar matemáticamente.

Este trabajo se realiza bajo el modelo teórico de las representaciones semióticas de Raymond Duval, abordando las representaciones de lenguaje común, algebraico, geométrico e icónico del volumen del paralelepípedo recto, desde algunos elementos históricos del concepto de volumen y de las aplicaciones del mismo en el contexto, donde se plantea una secuencia de actividades que es aplicada a una muestra de estudiantes de grado sexto del colegio Champagnat de la ciudad de Ibagué Tolima.

En ese orden de ideas, un trabajo como el que aquí se expone, busca aportar a una comunidad científica y que este sea apoyo para indagaciones e incluso juzgamientos que logren fortalecerlo o fijar otras posturas encaminadas a avanzar en el mejoramiento de la educación, específicamente matemática en el país.

2 ANTECEDENTES

En el campo de estudio de la relación Historia de las Matemáticas – Educación Matemática, son pocas las investigaciones que abordan específicamente estrategias didácticas que integren aspectos históricos en el aprendizaje de algunos objetos matemáticos. Sin embargo, a nivel nacional e internacional algunos investigadores y grupos de investigación se han dedicado a buscar maneras de abordar la historia de las matemáticas y las representaciones semióticas como parte de la formación inicial y constante de docentes.

En este sentido, se presentan algunas descripciones de trabajos que se relacionan con el interés investigativo a desarrollar en la Maestría en Enseñanza de las Ciencias, y los cuales, para este trabajo se clasificaron en tres ámbitos: el primero, correspondiente a dos estudios (1 y 2) que abordan la necesidad de elementos de la historia y origen de las matemáticas tanto en la enseñanza del maestro como en el aprendizaje del estudiante, y como esos aspectos permiten humanizar la ciencia y fortalecer una comprensión más significativa de la misma. En el segundo, corresponde a dos trabajos de investigación (3 y 4), que giran alrededor del estudio de la magnitud volumen. Y el tercer ámbito, son tres estudios (5, 6 y 7), que se indaga sobre la teoría de las representaciones semióticas de tres objetos matemáticas: teorema de Pitágoras, función lineal y solido geométrico respectivamente y que presentan elementos tanto metodológicos como analíticos de los estudios realizados y que aportan a la ejecución de este trabajo de investigación.

A continuación, se describen de manera general los referentes que anteceden el presente estudio:

1. Gómez (2014), indaga en torno a la historia de las matemáticas en la formación de profesores, haciendo énfasis en el ¿Qué?, ¿Cómo?, ¿Por qué? y ¿Para qué? debe existir la historia en los conocimientos del profesor de matemáticas; como antecedente, aporta a la investigación porque muestra diferentes aspectos que argumentan la necesidad de incluir elementos históricos o epistemológicos a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Además, aporta al desarrollo de este, puesto que su estructura argumentativa y justificada alrededor de las cuatro preguntas planteadas, ya que en su metodología acudió a estudiar literatura científica tanto de educación matemática como de historia de las matemáticas y la relación entre sí. De igual manera, una de las conclusiones del trabajo que capta la atención,

es la invitación a que los docentes incluyan la historia de las matemáticas a la educación matemática, reflejados en al menos 16 beneficios al conocimiento del profesor. Desde luego, esto nos permite reflexionar y tomar iniciativa para conocer un poco más allá de los conceptos matemáticos y nos invita a profundizar en los mismos.

2. Zapico (2006), hace una profundización en torno a la humanización de las matemáticas, con el propósito de lograr un proceso de contextualización de la ciencia, presentando a los estudiantes el resultado de una actividad humana llevada a cabo durante milenios de civilización. A través del siguiente cuestionamiento, ¿cuál es el propósito de enseñar matemáticas con un enfoque histórico?, permite generar en el docente reflexión de su desempeño. En ese sentido, este artículo permite ampliar los argumentos que enfatizan en la necesidad de que los elementos históricos se aborden en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

3. Agudelo (2013), presenta su investigación en la incidencia de la modelación como metodología de enseñanza y aprendizaje en el desarrollo de la estimación de cantidades continuas en la magnitud volumen, y los cambios que se generan a partir de la implementación de esta metodología y la cual aporta de manera conceptual y metodológica al trabajo. Aunque la intervención de este trabajo es en grado noveno, la coincidencia en el estudio del concepto matemático volumen, permite dar elementos al docente de tal manera que desarrolle en los estudiantes habilidades en el análisis de ideas, de mecanismos y procedimientos matemáticos en la solución de problemas. Es importante destacar que, aunque el trabajo mencionado aborda la modelación, esta competencia especifica no es tenida en cuenta para el presente trabajo, sin embargo, tomando la teoría de las representaciones semióticas y además del estudio de aspectos históricos del concepto matemático, se logre concretar un trabajo de investigación soportado.

4. Saiz (2002), enfatiza en el pensamiento del maestro de primaria acerca del concepto matemático de volumen y su enseñanza desde dos enfoques: el primero, la concepción de los profesores y la influencia en el aprendizaje de los estudiantes, y el segundo sobre los procesos de aprendizaje y de enseñanza de este concepto matemático, lo cual es fundamental para el planteamiento y ejecución de este trabajo.

5. Osorio (2011), enfoca su investigación en las representaciones semióticas en el aprendizaje del teorema de Pitágoras bajo la teoría de Raymond Duval, donde concluye en que la comprensión de las actividades de tratamiento y conversión que los estudiantes realizan en el aprendizaje de los objetos matemáticos permite visualizar el proceso de aprendizaje que realizaron los mismos y también identificar las dificultades que se presentaron. Esto evidencia que desde otro objeto matemático como es el teorema de Pitágoras, ya se ha tenido antecedentes de estudio, lo que brinda opciones e ideas para la construcción de las actividades a aplicar en este trabajo, y aspectos de análisis, teniendo en cuenta que el trabajo aquí desarrollado, agrega algunos elementos históricos, lo cual da una característica e identidad al mismo.

6. Ospina (2012), enfoca su trabajo en la comprensión las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas que realizan los estudiantes cuando se enfrentan a la solución de situaciones propias del concepto de función lineal. Desde luego, aunque el estudio es en un concepto matemático diferente al abordado en este trabajo, este antecedente es fundamental, porque coincide en la teoría específicamente en las actividades, las cuales van a ser empleadas en el presente trabajo.

7. Buenaventura (2015), presenta un trabajo donde reconoce el concepto de solido geométrico que poseen los estudiantes de educación media a partir de las representaciones semióticas. Este trabajo permite tener una claridad en cuanto a que las situaciones contextuales influyen en los registros de representación y en las transformaciones que usan los estudiantes para resolverlas. Desde luego, este soporte es fundamental, ya que la secuencia didáctica para este trabajo de investigación está compuesta por situaciones contextuales, que permite acercar al estudiante a la realidad desde las diferentes representaciones.

Si bien los trabajos presentados han abordado ya sea la magnitud volumen o la teoría de las representaciones semióticas de algunos objetos matemáticos, no hay un trabajo que indague sobre las representaciones semióticas de la magnitud del paralelepípedo recto, que este plantea aquí desarrollar, lo cual aporta al campo del aprendizaje de las matemáticas y a la comunidad en general relacionada con el acto educativo.

3 ÁREA PROBLEMÁTICA Y PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Desde la práctica docente que constantemente se desarrolla en el aula de clase de matemáticas, se observa que en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se hace necesario que el docente indague otras estrategias que permitan potenciar estos dos procesos, de tal manera que sean más significativos en los estudiantes y permita fortalecer habilidades y competencias propias en la solución de problemas matemáticos. Esta necesidad, no sólo se genera desde la posición del docente, sino también de algunos estudiantes, quienes manifiestan temores, inseguridades o vacíos conceptuales y algorítmicos a la hora de enfrentar una situación problema que esté orientada al desarrollo de capacidades del pensamiento métrico y geométrico.

Abordar un conocimiento matemático en contexto para los estudiantes no siempre es fácil para el docente, ya que en ocasiones las matemáticas en el interior del aula de clase son presentadas como un área de conocimiento con un nivel de dificultad de comprensión alto para algunos educandos, donde estos manifiestan poca relación con el contexto, sin una fundamentación de origen y del qué, el cómo y el para qué aprender lo que se está estudiando en el aula de clase, y como consecuencia, en algunos casos generar algún tipo de manifestaciones de repudio o indisposición frente al área, como lo complementa Serrano (2011): “En el desarrollo de una actividad matemática los estudiantes viven varias reacciones emocionales (frustración, ira, miedo, ansiedad, entre otros)” (p.7). Además, Gómez (2003) explicar que el estilo de aprendizaje matemático está relacionado con las emociones y lo que el estudiante hace es esforzar su mente a memorizar procedimientos y algoritmos sin un significado que aporte a la solución de problemas en su cotidianidad.

Sin embargo, esto no es intensión propia del docente de matemáticas, ya que como lo presenta Guacaneme, E., & Torres, L. (2010), uno de los motivos que se observa es la falta de preparación en los programas de formación profesional de profesores de matemáticas en las instituciones de educación superior, específicamente en aspectos alrededor del origen, las necesidades de la matemática, su desarrollo y métodos de resolución de problemas contextuales con una formación profundizada en torno a diferentes representaciones de conceptos u objetos matemáticos, que permitan mostrar un conocimiento con fundamento y significado.

Desde este punto de vista, los obstáculos emocionales de los estudiantes en educación básica y la formación básica de los docentes en los elementos antes mencionados que influyen en la enseñanza de un objeto matemático, impiden un aprendizaje concreto por parte de los estudiantes.

De esta forma, se evidencia que un primer problema que se presenta en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es la desmotivación y el desinterés de los estudiantes hacia el conocimiento específico aquí abordado, por la poca relación y significado con la realidad del estudiante, por ello se hace necesario buscar estrategias como lo sostiene Agudelo (2013):

> En el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es necesario desarrollar habilidades y capacidades para interactuar de manera efectiva en diversos contextos, trabajar en equipo, capacidad de observar y reflexionar matemáticamente, analizar, tomar decisiones, planificar estrategias para resolver una situación, comunicarse efectivamente usando lenguaje matemático, estimar la utilidad de las soluciones potenciales a los retos planteados que contribuyan a su comprensión. (p.11)

En este sentido, el docente desde su formación pedagógica y didáctica debe buscar formas o maneras de lograr contextualizar y representar un conocimiento que en la mayoría de los casos es abstracto, y llevarlo a la realidad. De esto se deriva otro problema que consiste en una formación básica del docente desde los programas de formación profesional de profesores de matemáticas en el interior de las instituciones de educación superior, ya que no se profundizan conceptos u objetos matemáticos desde una perspectiva, en este caso de interés genérico, con problemas de contexto, aun teniendo en cuenta que conocer epistemología de la ciencia es igual de importante que conocer la misma área científica como D´Amore, (2007) lo manifiesta: “para un profesor de Matemática conocer la epistemología es tan importante como conocer la misma Matemática” (p.2). El sentido de esta afirmación tiene sentido en el hecho que conocer sólo la Matemática no es suficiente si no se tiene el conocimiento estructurado de la evolución del pensamiento matemático. Con este planteamiento, se hace necesario generar estrategias para estudiar algunos objetos matemáticos inmersos en problemas cotidianos con un enfoque desde las diferentes representaciones que se definan.

Desde luego, como lo complementa Mazario et al (2009), las Matemáticas conforman un área de estudio que intenta comprender los modelos que impregnan el mundo que nos rodea y cuya actividad se podría resumir mediante la expresión “resolución de problemas” (p.4). Por otra parte, Anaconda (2003) manifiesta que, “las matemáticas son una construcción humana, y, por tanto, están ligadas al ámbito social y cultural que las produce” (p.36). Desde allí, se deduce que las matemáticas no son solamente una construcción abstracta y formalizada por un grupo de personas que se dedican a su estudio. De hecho, en campos como la arquitectura, las ciencias financieras, la economía, la ingeniería e incluso la medicina, la matemática juega un papel protagónico ya que permite relacionar e interpretar datos, describir situaciones, entre otros aspectos. Y todo esto se propone integrarlo tanto la resolución de problemas como algunos hechos históricos inmersos en los mismos, y así lograr trasmitir, comprender y lograr un aprendizaje de las matemáticas desde una construcción hecha por individuos para el mismo desarrollo humano.

Cabe desatacar que dentro de los recursos bibliográficos que existen en Colombia no hay una completa integración de la historia de las matemáticas al aula de clase mediada por la resolución de problemas, por ese hecho se hace necesario investigar, y generar propuestas de representación que aporten aún más a la calidad de la educación de nuestro país en el ámbito matemático.

Por tales motivos, se propone la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuáles son las representaciones semióticas que más utilizan los estudiantes de grado sexto al resolver situaciones problema que involucran la magnitud volumen del paralelepípedo recto?

4 JUSTIFICACIÓN

Es importante desarrollar este proyecto en el ámbito de la educación matemática, ya que integra varios aspectos importantes a tener en cuenta en la actualidad, específicamente en el aprendizaje de la magnitud volumen del paralelepípedo en estudiantes de grado sexto del colegio Champagnat de Ibagué y como propuesta de consulta y análisis por los profesores de matemáticas.

Uno de estos aspectos se refiere al abordaje del volumen del paralelepípedo recto y sus representaciones, que aporta a un aprendizaje más significativos, donde muestra variedad en la forma de comprensión en estos niveles de escolaridad.

Esto es, se tiende a motivar en la enseñanza del profesor, teniendo en cuenta que el interés es el aprendizaje por parte de los estudiantes, pero se presentan recursos al docente consignados en actividades que giran alrededor del concepto matemático, facilitando la manera como se presenta y se asimila en forma más clara el conocimiento, en términos de justificar la presencia de este, teniendo presente que está en el plan de estudios de este nivel de escolaridad y además aporta a la formación del profesor de matemáticas, en la apropiación de elementos de las representaciones y aspectos de la historia de las matemáticas que median su quehacer y desempeño docente, logrando un aprendizaje más significativo. Se observa que la mayoría de docentes no tienen una formación amplia en este tipo de historia, principalmente porque en la formación inicial no se profundiza sobre este aspecto, como anteriormente lo han especificado Guacaneme & Torres (2013).

Además, hay que reconocer que un profesor de matemáticas requiere apropiarse, aunque sea de manera básica de la epistemología, porque se convierte en igual de importante que el conocimiento de la misma área de conocimiento, como lo manifiesta también D´Amore (2007); el sentido de esta afirmación está en el hecho de conocer solo la matemática no es suficiente, si no se tiene el sentido mismo de la evolución del pensamiento matemático" (p.2), pues estas se han caracterizado por ser construidas por el ser humano y están relacionadas al desarrollo en el ámbito social y cultural que las produce.

Según el Ministerio de Educación Nacional, a través de los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (LCM), enfatiza:

Aceptar que el conocimiento matemático es resultado de una evolución histórica, de un proceso cultural, cuyo estado actual no es, en muchos casos, la culminación definitiva del conocimiento y cuyos aspectos formales constituye sólo una faceta de este conocimiento. (LCM, 1998, p.14)

De esta manera, se tiende a motivar en el aprendizaje al estudiante, mostrando un concepto matemático en particular con algunos elementos históricos y representaciones, entre los cuales pueden ser, las necesidades que dieron al origen al concepto, los problemas que solucionaron durante su desarrollo o su formación teórica, y en general dando respuesta a las preguntas porqué y para qué existe y debe ser enseñado en este nivel de escolaridad, desde el ámbito de formación haciendo un énfasis en las representaciones en el contexto cotidiano o en el específicamente matemático.

Del mismo modo, el docente debe mostrar un conocimiento científico en el aula de clase, que sea accesible y obtenga la atención del estudiante, con un discurso que justifique la existencia de lo que está enseñando y lo vincule con la realidad o con un contexto apropiado, mediado por recursos didácticos que pueden ser manipulables o proyectados a través de herramientas tecnológicas.

Así mismo, este proyecto aporta al mejoramiento de los resultados interno de evaluación en matemática y externo de los resultados de la prueba saber, ya que, en grado quinto del colegio Champagnat de Ibagué, en lo que concierne al componente geométrico – métrico del informe del índice sintético de calidad del año 2017 (ISC), establece que el 40% no compara ni clasifica objetos tridimensionales o figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes y propiedades. Del mismo modo, el 34% de los estudiantes no describe ni argumenta acerca del perímetro y el área de un conjunto de figuras planas cuando una de sus magnitudes es fija. Ahora, en la práctica educativa en el aula, se evidencia desde las diferentes estrategias del sistema institucional de evaluación de estudiantes (SIEE) que se llevan a cabo en los estudiantes de grado sexto, datos similares en cuanto al informe del ISC de los estudiantes de grado quinto. Esto quiere decir que, tanto los resultados de los informes académicos de grado sexto del presente año, son casi iguales a los resultados del ISC del año 2017 aplicados en su momento a los estudiantes de grado quinto.

Al centrarse este estudio en el abordaje del concepto de volumen del paralelepípedo recto, es pertinente la representación y modelación en situaciones cercanas a la realidad, teniendo claro objetos o conceptos matemáticos previos como área, perímetro, vértice, longitud, entre otros, puesto que se evidencia la necesidad de abordar más a profundidad en el componente geométrico, y lo importante, es que permite llevar al estudiante a una aplicabilidad, donde se observe el mismo concepto, a través de diferentes representaciones.

5 REFERENTE TEÓRICO

5.1 REFERENTE CONCEPTUAL

En este apartado, se presenta la teoría de las representaciones semióticas de Raymond Duval, en la cual esta soportado el trabajo de investigación científicamente, el referente normativo, que muestra los componentes legislativos que son alineados y coherentes en la intervención y, el referente contextual, que describe el espacio donde se hace el estudio.

5.1.1 Teoría de las representaciones semióticas Raymond Duval

Este trabajo genera una propuesta, que muestra la representación de un objeto matemático mediado por algunos aspectos históricos. Para ello, se elige estudiar a partir de las representaciones de Raymond Duval (2004), donde reconoce la importancia de estas en tanto que no solo son indispensables para fines de la comunicación, sino que también son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática en términos de actividades de tratamiento y conversión. Además, desde se extensa investigación en diferentes maneras como los objetos matemáticos se muestran y se acomodan al entendimiento de las personas. La intención es clarificar lo que se entiende por representación, haciendo énfasis en las representaciones semióticas de un objeto matemático durante algunos momentos de la historia de las matemáticas, en beneficio para la comprensión y modelación en el contexto de los estudiantes.

Desde luego, las representaciones juegan un papel fundamental en la comprensión, que se entiende como integración y estructuración de representaciones mentales, como lo explica Duval (2004):

> La actividad matemática es un tipo de actividad que, a pesar de su universalidad cultural, a pesar de su carácter puramente intelectual, supone una manera de pensar que no es nada espontánea para la gran mayoría de alumnos y de adultos. Necesita modos de funcionamiento cognitivos que requieren la movilización de sistemas específicos de representación. Estos sistemas constituyen registros de representación semiótica. Su integración a la arquitectura cognitiva de los sujetos es

> la condición absolutamente necesaria para poder comprender en matemáticas. (p.24)

En esa medida, se requiere establecer una relación directa entre la representación semiótica y sus diferentes registros dado que estos son pieza fundamental para la enseñanza de las diferentes disciplinas de las matemáticas, y que permiten el acceso al conocimiento que en la mayoría es abstracto y muy poco representado en el contexto.

Es necesario indicar que las matemáticas son una ciencia formada por un conjunto de conocimientos agrupados en diferentes unidades que están considerablemente conectadas, los cuales son acumulativos en la medida de su estudio. Lograr distinguir un concepto y cómo se construye es poco factible, puesto que, este se encuentra constantemente en fase de construcción. El concepto no es solo la consideración de los científicos que han dedicado su vida a su estudio, sino cada individuo tiene su apreciación y esto es lo es significativo al momento del aprendizaje, como lo manifiesta D'Amore (2004), "en la construcción de un concepto participarían tanto la parte institucional (el Saber) como la parte personal (de cualquiera que tenga acceso a tal Saber, por tanto, no solo el científico)". (p.2). se puede decir que tal construcción de conceptos es lo que se considera conceptualización.

Según Duval (1993), el aprendizaje de los objetos matemáticos, no puede ser solo un aprendizaje conceptual, por medio de representaciones semióticas es posible una actividad sobre estos. La adquisición conceptual de un objeto, pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas. Desde luego, se requiere hacer la relación entre noética y semiótica, sabiendo que la primera corresponde a la adquisición conceptual de un objeto y la segunda es la adquisición de una representación semiótica, y por tanto obligan su existencia y su correspondencia entre sí.

En esta medida, la construcción de los conceptos matemáticos depende estrechamente de la capacidad de usar más registros de representaciones semióticas de los mismos, representándolos en un registro dado, tratando tales representaciones al interior de un mismo registro y convirtiendo estas representaciones de un registro dado a otro.

A continuación, se abordarán algunos aspectos relacionados con los conceptos semiótica, registros semióticos, sistema semiótico, representaciones semióticas y las actividades de tratamiento y conversión.

Semiótica

Hacer referencia a la generalidad de esta teoría cobra importancia, en tanto que permite definir la semiótica en relación como el medio donde a través de los signos se permite la comunicación, sus formas de producir y aportar, los modos de recepción y de funcionamiento entre individuos en un espacio, como lo soporta Rojas (2014): "La semiótica hace referencia a la disciplina que estudia los signos en general o mejor que estudia los sistemas de signos y que están ligados a una intención comunicativa" (p.32).

Sistema semiótico

Un sistema semiótico puede ser un registro de representación si permite tres actividades cognitivas relacionadas a la semiosis y que corresponden a: presenciar una representación identificable, el tratamiento y la conversión de una representación, como lo manifiesta Duval (1998). En los sistemas semióticos se pueden efectuar operaciones, asociaciones, combinaciones, que dependen de las restricciones propias del sistema y no del objeto. Así, las representaciones constituyen el elemento indispensable para acceder a los objetos matemáticos ya que no se dispone de objetos reales (o cosas) para exhibir en su lugar.
Cada sistema semiótico está definido por reglas de conformidad que permiten la formación y combinación de las unidades elementales del sistema. De esta forma las reglas de conformidad del sistema algebraico y del lenguaje natural son diferentes y propias de cada uno. También existen reglas de expansión que permiten obtener otras representaciones en el mismo registro de partida.

Registros semióticos

Es relevante definir los elementos que están inmersos en esta teoría, como son los registros semióticos, que según Rojas (2014): "son aquellos sistemas de reglas que permiten combinar signos y efectuar a su interior transformaciones de expresión o de representación" (p.44). Es decir, son todos aquellos sistemas que posibilitan transformar cualquier representación en otra.

Representaciones semióticas

Según Duval (2004), las representaciones semióticas son un conjunto de signos que son el medio de expresión de las representaciones mentales para hacerlas visibles a otros individuos. En el mismo sentido, Duval (2006), manifiesta que la actividad matemática se hace en un contexto de representación, donde los estudiantes son capaces de reconocer el mismo objeto matemático de conocimiento en otros contextos de representación y usarlos. Duval (1999) clasifica las representaciones semióticas dentro de las representaciones conscientes y externas e indica que son inherentes a un sistema particular de signos (el lenguaje, la escritura algebraica o los gráficos cartesianos). Tienen la particularidad de ser convertidas en representaciones "equivalentes" en otro sistema semiótico, en el que pueden adoptar otras significaciones para el individuo. Duval (2004) considera que los polos constitutivos de toda representación son el contenido de la representación, el objeto representado y la forma de la representación, estos elementos estructurales son importantes en los procesos de transformación de las representaciones. A continuación, se muestra un ejemplo de los tipos de registro y representación de un mismo concepto, tomando este como el de área, teniendo en cuenta que se hacen las siguientes designaciones:

An: registro semiótico n-ésimo, con $n = 1,2,3, \ldots$

$Anam$: representación semiótica m-ésima, con $m = 1,2,3, \ldots$ de un objeto en el registro semiótico An. Se debe tener en cuenta que si se produce un cambio de registro semiótico también se modifica la representación semiótica, mientras, si se produce un cambio de representación semiótica no necesariamente cambian el registro, como se presenta en la siguiente tabla:

Tabla 1: Definición de concepto, registro, códigos y representaciones semióticas

CONCEPTO	REGISTRO	CÓDIGOS	REPRESENTACIONES
Volumen del paralelepípedo recto	Lenguaje común	A1	A1a1, A1a2, A1a3, …..
	Algebraico	A2	A2a1, A2a2, A2a3, …..
	Geométrico	A3	A3a1, A3a2, A3a3, …..
	Icónico	A4	A4a1, A4a2, A4a3, …..

Fuente: elaboración propia

En la siguiente tabla se muestra de manera detallada un ejemplo:

Tabla 2: Tipos de registro y representación del concepto de área de un rectángulo

Concepto	**Área del rectángulo**
Registro semiótico $A2$	Algebraico
Representación semiótica $A2a1$	$\acute{A}rea = base * altura$
Representación semiótica: $A2a2$	$A = Unidades\ cuadradas$
Registro semiótico $A3$	Geométrico
Representación semiótica $A3a1$	
Registro semiótico $A1$	Lenguaje común
Representación semiótica $A1a1$	Una parcela de forma rectangular de 6 metros de largos con 2 metros de ancho.
Representación semiótica $A1a2$	La superficie de un terreno rectangular.
Representación semiótica $A1a3$	El largo del terreno es el triple que el ancho.

Fuente: elaboración propia

En manera de síntesis, las representaciones semióticas son elaboraciones formadas por el uso de signos que corresponden a un sistema de representación, el cual tiene sus propios niveles de significado y de funcionamiento, por ejemplo, hay objetos matemáticos que tienen múltiples representaciones definidos en los tipos de registro definidos, como es el caso del concepto de área de un rectángulo, donde se definen los registros de lenguaje común, algebraico, geométrico e icónico, que favorecen el aprendizaje del concepto de volumen en estudiantes de grado sexto del colegio Champagnat de Ibagué.

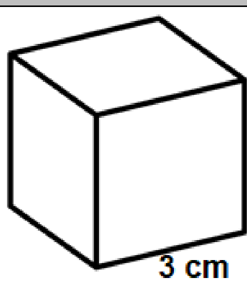
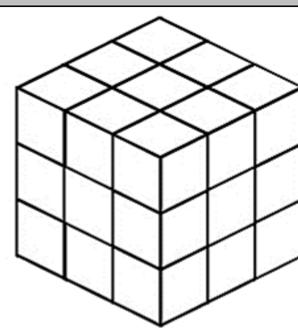
Formación, tratamiento y conversión

Hay tres actividades cognitivas de representación inherentes a la semiosis, que se conocen como formación, tratamiento y conversión. La formación implica una selección en el conjunto de caracteres y de las determinaciones que constituyen lo que se quiere representar, bien sea para evocar un objeto real o para expresar una representación mental.

El tratamiento y la conversión están relacionadas directamente con la propiedad fundamental de las representaciones semióticas, de la transformación en otras representaciones que conservan, ya sea todo el contenido de la representación inicial o solo una parte de ese contenido. Ahora, tanto el tratamiento como la conversión se explican de una manera más amplia, ya que son abordadas en el desarrollo de este trabajo.

El tratamiento es la transformación de una representación inicial en una representación terminal, respecto a una cuestión, a un problema o una necesidad, que proporcionan el criterio de interrupción. En síntesis, el tratamiento en una trasformación interna en un registro. Por ejemplo, como se muestra en la siguiente tabla, la escritura del concepto de volumen de una manera algebraica, es encontrar que la forma en ese registro icónico puede dar solución a un problema, teniendo en cuenta el análisis de dicha expresión, como manipulación de la misma representación, división en cubos iguales y demás elementos que permitan transformarla en otro signo.

Tabla 3: Tratamiento de representación del volumen de un cubo.

Tratamiento de una representación		
	**Registro**: Icónico Es posible encontrar el volumen del cubo, dividiendo los lados en tres partes iguales, y formando cubos. Desde luego, al contar la cantidad de cubos, se da cuenta que son 27 cubos de 1 centímetro cubico, que está conformado el cubo total. Por tanto, el volumen es $27\ cm^3$.	 En esta representación icónica se pueden contar las cantidades de cubos de 1 centímetro cubico, con que está conformado el cubo total.

Fuente: elaboración propia

La conversión es la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada en un registro, en una representación del mismo objeto, esta misma situación o de la información en otro registro. En otras palabras, la conversión es cuando la transformación produce una representación en un registro distinto al de la representación inicial. Un ejemplo adecuado a la investigación a realizar es la transformación de la representación del área total de un cubo desde el registro lenguaje común al registro algebraico, como se muestra a continuación:

Tabla 4: Conversión de representaciones de área de un cubo

Conversión de una representación		
Santiago va a ir a una fiesta de cumpleaños de su mejor amiga. Para el regalo, compra una caja de forma cubica, donde depositará un detalle. Debe envolver la caja que mide 38 cm de lado, y requiere saber cuántos pliegos de papel regalo como mínimo debe comprar, sabiendo que los pliegos de papel son de forma rectangular que miden 100*70 cm.  Imagen tomada de: https://www.lightinthebox.com/es/p/cajas-de-regalos-cajas-de-regalos-gris-papel-de-tarjeta-tema-clasico-quinceanera-y-dulces-dieciseis-cumpleanos-matrimonio_p5329140.html	Como registro lenguaje común es posible encontrar elementos como la longitud del lado de la caja cubica y las dimensiones de los lados de los pliegos de papel regalo, que permiten la transformación a otro registro,	Para encontrar la solución a esta situación problema, resulta en una representación algebraica. Esto se debe a que, se requiere conocer el área de cada cara y luego multiplicarlo por 6, correspondiente al total de caras del cubo. Algebraicamente se puede determinar de la siguiente manera: $Área\ Total: 6\ a^2$, donde a es la longitud del lado de la caja cubica. Ahora, $Área\ Total: 6\ (38\ cm)^2$ $Área\ Total: 6\ (1444\ cm^2)$

	alrededor de la solución del problema planteado.	$\acute{A}rea\ Total: 8664\ cm^2$ De igual manera, es importante tener en cuenta que el área de cada pliego de papel regalo es: $\acute{A}rea: 100\ cm * 70\ com$ $\acute{A}rea: 7000\ cm^2$ Desde luego, es pertinente afirmar que Santiago requiere como mínimo 2 pliegos de papel regalo para envolver la caja. En este ejemplo se observa la transformación desde el registro lenguaje común al registro algebraico.

Fuente: elaboración propia

Concepto de magnitud

Se define como la propiedad de los cuerpos que puede ser medida y se puede representar por un número. Entre las magnitudes están la longitud, la masa, el tiempo, volumen, la temperatura, entre otras. Desde luego, la magnitud estudiada en este trabajo corresponde al volumen de un sólido geométrico denominado como paralelepípedo recto.

Concepto de volumen

El concepto de volumen hace parte de uno de los más abordados en las matemáticas, específicamente en los componentes geométrico – métrico. Hay que destacar que, en la dinámica normal en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación básica, el volumen hace parte de los planes de estudios, inclusive en los primeros años de escolaridad, lo que se puede decir que es uno de los conceptos más enseñados. Desde luego en este apartado, se describen algunos elementos históricos y conceptuales del concepto de volumen.

Historia del concepto de volumen

Al revisar trabajos de investigación que aborda elementos históricos del concepto de volumen, específicamente Saiz (2002), muestra que hay dos maneras de rastrear la historia de este concepto: Una de ellas es a través de la historia del cálculo, la otra tiene que ver con el desarrollo de la geometría. Estos dos caminos se entrelazan en ocasiones y es difícil separarlos de forma que la exposición incluye ambos y el orden en el cual se estructura es más bien cronológico. En la historia se puede conocer elementos antes del siglo XVII específicamente antes del nacimiento de dos grandes matemáticos como Newton (1642) y Leibniz (1646). Resultaría muy complicado intentar explicar la historia del concepto volumen sin recurrir a la historia del cálculo. Puede decirse que el cálculo se desarrolló en el siglo XVII d.C. Sin embargo, los problemas que le dieron origen surgieron 18 siglos antes de nuestra era en el campo de la geometría.

De aquella época, las matemáticas que hoy se conocen son las que se conservan en las tablas babilónicas y los papiros egipcios. Respecto al volumen, en las primeras se encuentran varios problemas prácticos en los que se requiere calcular el volumen de sólidos geométricos sencillos. En cuanto a los egipcios, la fórmula para obtener el volumen de una pirámide truncada aparece en el papiro de Moscú (1890 a.C.) y el cálculo del volumen de un cilindro como el producto del área de la base por la altura se encuentra en el papiro de Rhind (Gillings, 1982, pág. 146).

Los historiadores coinciden al señalar que los conocimientos geométricos de los babilonios aparecen siempre ligados con problemas cotidianos; también los egipcios muestran la obtención del volumen de un cilindro como la solución de un problema real con la necesidad de calcular la capacidad de un contenedor de granos. Sin embargo, la fórmula de la pirámide truncada aparece sin contexto alguno. Como las pirámides de Egipto tenían esta forma, puede pensarse que el hecho de conocer dicha fórmula podría inferirse a partir de problemas de la construcción de tales monumentos. Sin embargo, “no se trata de pensar que los arquitectos o constructores de las pirámides de Egipto tuvieran necesidad de conocer su volumen, más bien se trata de sugerir que la arquitectura, la tecnología y el arte en general pueden haber estimulado el pensamiento matemático al tratar de obtener algún entendimiento de las características abstractas involucradas en su desarrollo (Pottage, 1983, pág. 219).

Existe aún controversia acerca de si los egipcios conocían la fórmula para obtener el volumen de una pirámide truncada, o sólo conocían un procedimiento para realizar este cálculo en un caso particular. La única evidencia al respecto es un problema que aparece en el papiro de Moscú: obtener el volumen de una pirámide cuadrangular truncada con arista de base inferior igual a 4, arista de base superior igual a 2, y altura igual a 6. En el papiro el escriba explica los cálculos:

I. Se eleva 4 al cuadrado.
II. Se duplica este 4.
III. Se eleva 2 al cuadrado.
IV. Se suman estos resultados y resulta 28.
V. Se obtiene un tercio de 6 resulta 2
VI. 2 se multiplica por la suma anteriormente obtenida
VII. El resultado final es 56

Los cálculos anteriores corresponden a la aplicación de la fórmula que se usa hasta la fecha:

$$\boldsymbol{V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)}$$

¿Estaban los egipcios aplicando una fórmula general que ellos conocían de antemano? Algunos especialistas dudan que la respuesta sea afirmativa, no creen que los métodos de análisis de los egipcios pudieran llevarlos a deducir tal resultado.

Van der Waerden (1983) especula acerca de cómo los egipcios pudieron inferirla, aunque no deja de sorprenderse pues considera que ellos aparentemente no contaban con las habilidades necesarias para trabajar con cantidades abstractas.

Gillings (1982) imagina algunas maneras mediante las cuales los egipcios podrían haber llegado a este resultado. Él afirma que, generalmente, se acepta que los egipcios conocían la fórmula $\mathbf{V=1/3a^2h}$ para calcular el volumen de una pirámide cuadrangular y opina que de aquí podrían haber deducido la del volumen de la pirámide truncada. Sin embargo, no deja de sorprenderse, pues tal proceso de inferencia no es inmediato si no se tienen ciertas habilidades para operar algebraicamente.

Antes de seguir este recorrido histórico, existen dos puntos en los que vale la pena detenerse respecto a los cálculos encontrados en las tablas babilónicas y los papiros egipcios: el primero es el comentado por Boyer (1989), en el sentido de que estos pueblos no distinguieron entre sus cálculos y fórmulas exactas y los que eran sólo una aproximación.

El segundo tiene que ver con el uso de unidades. De acuerdo a Gillings (1982), el cálculo del volumen de un cilindro en los papiros egipcios se hacía de dos maneras distintas, a veces, ellos calculaban el volumen con una fórmula que permitía obtener el resultado directamente en unidades de volumen de granos. En otras, calculaban el volumen usando la fórmula del área de la base por la altura y al final hacían la transformación de las unidades obtenidas a las de capacidad.

Este cambio de perspectiva entre procedimientos de cálculo de volúmenes en lo que el proceso involucrado consiste en un conteo eficiente de unidades de la misma naturaleza de aquello que se pretende medir y otros procedimientos, en los cuales los cálculos involucran comparaciones entre unidades de distinta naturaleza a la que se está midiendo, como son longitudes y áreas en el caso del volumen, acarrea dificultades cognitivas en el proceso de aprendizaje.

Al primer tipo de los procedimientos mencionados en el párrafo anterior, se les denomina unidimensionales, ya que el cálculo radica en un conteo de unidades de volumen. Mientras al segundo se le llama bidimensionales, ya que se hacen mediciones o comparaciones de magnitudes de naturaleza diferente, tales como áreas de bases y longitudes de alturas.

En algún período, la historia del concepto matemático volumen corrió en paralelo a la de los poliedros. Malkevitch (1988), al estudiar los orígenes de estos objetos geométricos, señala lo que él llama piedras angulares en este camino. Entre ellas menciona tres relacionadas con el cálculo del volumen: una es la fórmula del volumen de una pirámide truncada que aparece en el Papiro de Moscú; otra es el conocimiento de Demócrito (500 a.C.) de que el volumen de una pirámide es un tercio del área de la base por la altura y la demostración de este hecho realizada por Eudoxo (409-356 a.C.); la tercera se refiere a las discusiones de Euclides acerca del volumen de los prismas y pirámides en el Libro XII de los Elementos.

Eudoxo demuestra la fórmula de Demócrito por un método que él llamaba de exhaución, a grosso modo puede decirse que tal método consistía en calcular exhaustivamente áreas y volúmenes, descomponiendo las figuras o cuerpos en regiones o partes más sencillas de áreas o volúmenes conocidos. Euclides (323-285 a.C.) describe dicho método de manera más rigurosa en el Libro X de Los Elementos, donde lo demuestra y lo llama lema de exhaución. En el Libro XII lo usa para demostrar fórmulas con las cuales obtiene el volumen de prismas y pirámides. El método de Eudoxo puede considerarse un antecedente del cálculo, aunque no usa explícitamente una teoría de los límites (Kline, 1990, pág. 50).

La mayor parte de las fórmulas contenidas en el Libro XII de Los Elementos era conocida por los geómetras de los valles del Eufrates y el Tigris, la importancia del trabajo de Euclides respecto al concepto volumen, estriba en la organización, formalización y demostración de estos resultados.

Más adelante, Arquímedes (250 a.C.) demuestra, usando también el método de exhaución, muchos resultados nuevos, los cuales descubre a través de lo que él denomina El Método. Éste procedimiento aparece explicado y ejemplificado en un manuscrito hallado en el siglo XIX. Una de las razones que hacen tan interesante este hallazgo es que en ese documento se muestra cómo obtenía Arquímedes sus resultados, mientras que, en general, los griegos acostumbraban exponer sus productos pulidos y terminados, demostrando su validez, pero sin revelar sus procesos de análisis y pensamiento para descubrirlos.

El método de Arquímedes no puede explicarse en unos renglones, se trata de un método mecánico que involucra pesos y centros de gravedad. En el caso del cálculo del volumen de, por ejemplo, un cuerpo ***X***, se utilizan otros dos cuerpos ***B*** y ***C*** tales que se conocen sus volúmenes, además de ***B*** se conoce también su centro de gravedad. Como se desprende de esta breve descripción, Arquímedes calcula un volumen desconocido en términos del volumen de otros cuerpos conocidos.

Estas técnicas sofisticadas permiten a Arquímedes encontrar áreas y volúmenes de figuras y cuerpos más complicados que los considerados por Eudoxo. Para demostrar sus resultados, Arquímedes utiliza también el método de exhaución. Un ejemplo de los resultados obtenidos por Arquímedes, que pone de manifiesto la potencia de su sistema es el siguiente: el volumen de una esfera es cuatro veces el del cono que tiene como base un gran círculo de la esfera y altura igual al radio.

Pero no sólo en el mundo occidental se encuentran evidencias relativas a la resolución de problemas de volúmenes. Se sabe que en el siglo III d.C., los chinos ya conocían la fórmula para calcular el volumen de una pirámide truncada y la habían demostrado por un método puramente geométrico que consistía en dividir la pirámide en un paralelepípedo central, cuatro pirámides cuadrangulares rectas y cuatro prismas triangulares. Para esta demostración usaban la fórmula de la pirámide cuadrangular:

$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} a^2 h}$ que también habían demostrado (ver van der Waerden, 1983).

A partir de este punto no se encuentran resultados relacionados con este concepto, sino hasta la época de Tartaglia (1499-1557), quien calcula el volumen de un tetraedro a partir de la longitud de sus aristas.

Alrededor de 1544, los escritos de Arquímedes se popularizan gracias a su edición en griego con una traducción al latín e inspiran a autores de la época como Kepler y Galileo. A pesar de esa popularidad ellos desarrollan sus propios métodos de integración y rechazan el rigor matemático de la demostración Arquimediana que se basaba en una *reductio ad absurdum***.** Según Boyer (1989) durante el Medioevo y aún en el Renacimiento, se despreciaba un poco el método de exhaución. No había tanto interés en el rigor de las demostraciones como en la búsqueda de un método de descubrimiento que condujera a nuevos resultados.

Historia del volumen después de Newton y Leibniz

La historia del concepto volumen desde esta época, toma mayor rigor puramente matemático, y se presenta de manera general en este trabajo puesto que brinda un nivel de credibilidad de estudio respecto al mismo objeto de estudio. Se toman algunos elementos, que sirven de ilustración, puesto que elementos que se han mencionado anteriormente y que aquí se mencionan, no se usan ni se profundizaran en el desarrollo de este trabajo.

De aquí en adelante el volumen se encuentra enredado con la del concepto integral que llega en este punto a la época de Newton (1642–1727) y de Leibniz (1646–1716) quienes son considerados los inventores del cálculo, aunque no será sino hasta el siglo XIX que sus resultados adquieran el rigor matemático con el que ahora se conocen. Si bien no fueron los primeros en resolver los problemas clásicos del cálculo, como obtener la cuadratura de curvas y encontrar tangentes, ni en darse cuenta que ambos procesos son inversos, sí fueron los primeros en reconocer la importancia de este hecho. La contribución principal de Newton y Leibniz es la de extender estos resultados y hacerlos universales (ver Boyer, 1989 y Kline, 1990).

El cálculo se fundamenta en dos conceptos inversos: la derivada y la integral. Este último estaba ligado con varios problemas, algunos de los cuales se refieren a la obtención de longitudes de arco, áreas de regiones en superficies y volúmenes de cuerpos.

Por medio de la integración es posible calcular el volumen de un cuerpo acotado por dos superficies y obtener el volumen de sólidos de revolución. En estos procedimientos, la integración se lleva a cabo sobre diferentes tipos de conjuntos.

Es pertinente tener en cuenta algunos conceptos claros, relativo a algunas magnitudes como volumen-capacidad, volumen-masa y masa-peso, basado en Saiz (2002).

Tres problemas clásicos griegos

En este apartado se describe de manera general dos de los tres problemas clásicos de la matemática griega, y luego se hace una descripción más detallada del tercero, basado en Muñoz 2004.

Para el filósofo Platón los entes geométricos ideales eran la recta y la circunferencia. Por lo anterior, la geometría habría que limitarla a las construcciones con regla y compás. Hay que aclarar que la regla sólo se utiliza para trazar rectas y por tanto no es una regla metrizada.

Este tipo de problemas se resolvieron después utilizando otros instrumentos y permitieron encontrar respuestas adecuadas a los tres problemas clásicos.

Los tres problemas clásicos de la Matemática Griega fueron: La Cuadratura del Círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo.

Trisección del ángulo.

El problema se enuncia del siguiente modo: Dividir un ángulo dado en tres ángulos parciales iguales, usando solo regla y compás.

Cuadratura del Círculo.
El problema de la cuadratura del círculo es aún más profundo, ya que implica una irracionalidad de naturaleza enteramente diferente a la de las anteriores. La solución del problema de la cuadratura conduce a la ecuación que tiene como variable la medida del lado del cuadrado de área equivalente al área del círculo de radio unidad.
El problema se enuncia así: Determine, utilizando solamente regla y compás, el lado de un cuadrado de área equivalente al área de un círculo de radio dado.
Hay que hacer notar que estos tres problemas fueron resueltos haciendo caso omiso de la restricción del uso exclusivo de la regla y el compás.

Duplicación del Cubo

Se trata de resolver el siguiente problema: Construir, utilizando solamente regla y compás, la arista de un cubo que duplique el volumen de un cubo conocido.
El origen del problema de la duplicación del cubo se creé que comenzó en el oráculo de Delos. Fuera del mito, la historia nos enseña que el primer templo de Delfos data de fines del II milenio antes de nuestra era. Construido en la ladera sur del monte Parnaso, está enmarcado por el acantilado rosado de Rhodini y el florido acantilado de Phlemboucos, entre los cuales brota la fuente sagrada de Castalia.
Los peregrinos llegan al lugar ya sea por mar, desembarcando en el pequeño puerto de Kirrha, o por tierra, franqueando el paso de Arachova. A partir del siglo VI, la cercana ciudad de Delfos comienza a obtener ganancias del paso de los peregrinos. En el 548, un incendio destruye el templo: es reconstruido, esta vez más grande y más hermoso, gracias a una suscripción panhelénica. Al comienzo, el oráculo se presenta una vez al año. Debido al éxito cada vez mayor, los sacerdotes adoptan un ritmo mensual y emplean dos, luego tres pitonisas. A pesar de todo, los que vienen a consultar esperan muchas veces varios días antes de que llegue su turno. Estas jornadas son consagradas a las ofrendas, a los sacrificios y a las purificaciones. La gente se refresca en la fuente de Castalia.
El oráculo cobra caro; la persona que consulta debe comprar un pastel muy costoso que ofrece sobre un altar, frente al santuario; luego, sobre otro altar, sacrifica una oveja o una cabra.

Se envió una delegación al oráculo de Apolo en Delfos para preguntar cómo podría conjurarse la peste, que azotó Grecia en torno al año 433 a.C. y mató a un cuarto de la población, a lo que el oráculo contestó que era necesario duplicar el altar cúbico dedicado a Apolo para ofrecerle mayor ofrenda. Al parecer, los atenienses duplicaron diligentemente las dimensiones del altar, pero esto no sirvió de nada para detener la peste; Sus artesanos cayeron en gran perplejidad en sus esfuerzos para descubrir como el altar había aumentado ocho veces su tamaño cuando se dobla el tamaño de su arista.

La plaga seguramente era un suceso importante en la historia de Grecia y muchos de sus intelectuales se dispusieron a descubrir el misterio que rodeaba aquel bloque de piedra. Este enigma ha seguido interesando a multitud de pensadores en el curso de la historia formándose así uno de los más importantes problemas.

La historia sobre la resolución del problema de la duplicación del cubo está llena de anécdotas, pero lo cierto es que como consecuencia de ello surgió:

- Sección de cónicas.
- Descubrimiento de los inconmensurables. Números irracionales
- Método de exhaución. Cálculo aproximado del número pi.

Aspectos disciplinares

En el estudio del concepto de volumen, es pertinente revisar las propiedades y características de manera general de algunos sólidos, específicamente de paralelepípedo recto, ya que es en base a este se estima el volumen. A continuación, a partir se abordará el concepto de volumen, partiendo de algunos objetos matemáticas que giran alrededor del mismo.

Sólidos geométricos

Un sólido o cuerpo geométrico es una figura geométrica de tres dimensiones (largo, ancho y alto), que ocupa un lugar en el espacio y, en consecuencia, tienen un volumen. A continuación, se definen algunos objetos geométricos que están alrededor del concepto que este trabajo aborda.

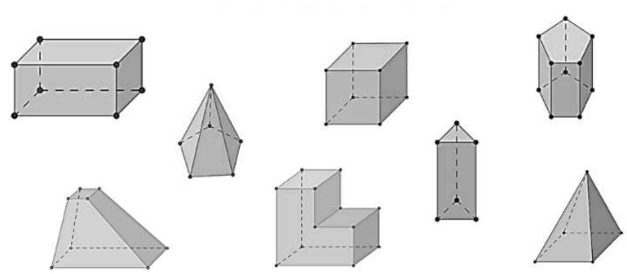
Los cuerpos geométricos pueden ser: Poliedros y Cuerpos Redondos.

Poliedros

Son sólidos geométricos de muchas caras, que contienen los siguientes elementos: caras, aristas, vértices.

Algunos pueden ser, tetraedros, hexaedros, prismas, pirámides, entre otros, como se muestra en la figura 1.

Figura 1: Poliedros



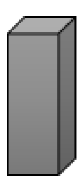
Fuente: Tomado de: https://mx.depositphotos.com/165264210/stock-illustration-set-of-basic-3d-geometric.html

Los sólidos geométricos se clasifican en convexos y cóncavo

Sólido convexo

Es un conjunto de puntos K, no todos pertenecientes al mismo plano, tales que al elegir dos puntos cualesquiera A y B pertenezcan a K, de la misma forma que todos los puntos entre A y B. En otras palabras, un sólido es convexo si todas sus caras son polígonos convexos. Por ejemplo:

Figura 2: Sólido convexo

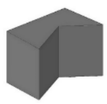


Fuente: elaboración propia

Sólido cóncavo

Un sólido es cóncavo, si al menos una de sus caras es cóncava. Por ejemplo:

Figura 3: Sólido cóncavo

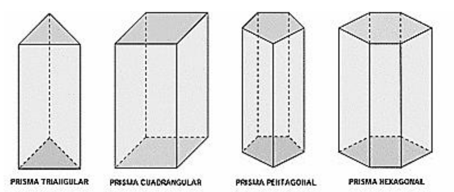


Fuente: elaboración propia

Prisma

Es el poliedro cuyas caras laterales son tres o más paralelogramos y cuyas bases son polígonos congruentes y paralelos. Ejemplos:

Figura 4: Prismas

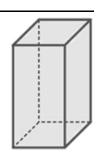
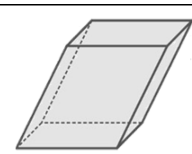


Fuente: Tomado de: https://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/tipos-prisma/

Paralelepípedo

Es el prisma regular cuyas bases son paralelogramos.se clasifica en oblicuo y en recto.

Figura 5: Paralelepípedos

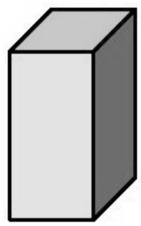
	
Paralelepípedo recto	Paralelepípedo oblicuo

Fuente: Tomado de: https://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/tipos-prisma/

Paralelepípedo Recto

Es el prisma cuyas bases son rectángulos y sus aristas son perpendiculares a las bases. También es conocido como paralelepípedo rectangular, y si sus caras son cuadrados es definido como ortoedro:

Figura 6: Paralelepípedo recto.



Fuente: elaboración propia

Volumen y capacidad

La capacidad es una propiedad que tienen ciertos cuerpos. Como en el caso del volumen o cualquier otra magnitud, se requiere de un conjunto de objetos susceptibles de ser medidos respecto de esa magnitud. En relación con la capacidad, tales objetos son los recipientes o contenedores; usando un lenguaje común, la capacidad de estos objetos puede definirse como: “lo que les cabe”, o bien, “lo que contienen”.

De forma un poco más precisa, la capacidad de un recipiente es igual al volumen del objeto moldeable (cuerpo o unión de cuerpos, líquido o gas) que llena al recipiente.

El estudio del concepto volumen en la educación básica, se inicia con actividades de llenado de cajas. Los alumnos construyen en el interior de una caja un objeto “con la misma forma” que el interior del recipiente con cubos que representan unidades de medida del volumen (tratamiento unidimensional). Por medio de este tipo de actividades y el conteo de las unidades de medida se sustenta el cálculo del volumen de los paralelepípedos como el producto de las longitudes: largo, ancho y alto (tratamiento tridimensional).

Volumen y masa

Considerar al volumen como la cantidad de unidades que forman un cuerpo, puede llevar a definirlo como la cantidad de materia que lo forma. “¿Podríamos afirmar que la masa de un cuerpo es la cantidad de materia que esta posee?" (Felix et al.1985, pág. 101). Como se observa no hay manera de concluir que el volumen interno de un cuerpo, entendido como la cantidad de unidades de material que lo forman, sea equivalente a la masa, ni a la materia. Y de existir una relación entre el volumen de un cuerpo y su masa tal vez ésta se encuentre vinculada con otras propiedades de los cuerpos.

Masa y peso

La masa es una característica de los cuerpos que le permite atraer otros cuerpos con mayor o menor intensidad. Como los cuerpos están formados por partículas, la masa del cuerpo es la masa total de las partículas que lo forman. La unidad de masa es el kilogramo.

El peso de un cuerpo es la fuerza con la que es atraído por la Tierra y su unidad de medida es el Newton, que corresponde a la fuerza gravitatoria que a un kilogramo de masa le produce una aceleración de un metro por segundo cada segundo. Sin embargo, al pesar un objeto, en la báscula se observa una escala en kilogramos, ya que, el peso de un cuerpo en la Tierra es igual a su masa por la aceleración de la gravedad, pero como ésta es una constante se desprecia, considerando solamente la masa y sabiendo de manera implícita que el peso correspondería al producto de la masa por la constante de atracción gravitacional: 9.81 m/s

5.1.2 Referente normativo

Desarrollar un proceso de indagación en un contexto educativo en Colombia, requiere que esté fundamentado y orientado hacia los fines que legislan la educación del país.

En este caso, la investigación se enmarca en conformidad a la Constitución Política de Colombia (1991), que define la educación como un derecho de la persona y un servicio público en función social. En el mismo sentido, en lo que se refiere a la legislación propiamente educativa, expuesta en la Ley General de Educación (1994), establece en el capítulo 1, artículo 11, literal c, que la educación en sus distintos niveles tiene por objeto desarrollar en el educando conocimientos, habilidades, aptitudes y valores, mediante los cuales las personas puedan fundamentar su desarrollo en forma permanente. Del mismo modo en los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (1998), posibilitan, promueven y orientan los procesos curriculares en matemáticas de las instituciones educativas relacionando procesos, conocimientos básicos y contexto bajo los componentes matemáticos o cinco pensamientos y sistemas matemáticos.

Con este fundamento desde la norma educativa colombiana, se describen aspectos que explican el estudio del concepto de volumen en el grado sexto, haciendo una breve descripción de algunos estándares en grados anteriores a este, que permite reconocer que los estudiantes poseen preconceptos, que se convierten en insumos para desarrollar el proceso de indagación en este nivel. Además, hay que tener en cuenta que el grado sexto, hace parte de la educación básica, y que según los Estándares Básicos en Competencias Matemáticas (2006), previamente evidencia que, desde el grado primero, segundo y tercero, en el pensamiento métrico y sistemas de medidas, plantea: “Reconozco en los objetos propiedades y atributos que se puedan medir (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa), y en los eventos, su duración. De igual manera en grado cuarto y quinto expone: “utilizo diferentes procedimientos de cálculo para hallar el área de la superficie exterior y el volumen de algunos cuerpos sólidos y justifico relaciones de dependencia del área y volumen, respecto a las dimensiones de figuras y sólidos y reconozco el uso de algunas magnitudes (longitud, área y volumen, capacidad, peso y masa, duración, rapidez, temperatura) y de algunas de las unidades que se usan para medir cantidades de la magnitud respectiva en situaciones aditivas y multiplicativas”. Y en los grados sexto y séptimo, presenta el cálculo de áreas y volúmenes a través de descomposición de figuras y cuerpos, dando un nivel de importancia al cálculo de los volúmenes de los cilindros, conos y esferas y las áreas de los exteriores de los mismos.

Ahora, en los Derechos Básicos de Aprendizaje versión 2 (2016), presenta los componentes más claros, respecto a los mínimos que un estudiante en ese nivel de escolaridad debe abordar. En el derecho tres de grado tercero, plantea: “realiza estimaciones y mediciones de volumen, capacidad, longitud, área, peso de objetos o la duración de eventos como parte del proceso para resolver diferentes problemas”. En el derecho cinco del grado cuarto, describe: “elige instrumentos y unidades estandarizadas y no estandarizadas para estimar y medir longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa, duración, rapidez, temperatura y a partir de ellos hace los cálculos necesarios para resolver problemas.”. En el derecho de aprendizaje cuatro del grado quinto, expone: “justifica relaciones entre superficie y volumen, respecto a dimensiones de figuras y sólidos y elige las unidades apropiadas según el tipo de medición (directa e indirecta), los instrumentos y procedimientos”. Y el en derecho cinco del grado sexto indica: “propone y desarrolla estrategias de estimación, medición, y cálculo de diferentes cantidades (ángulos, longitudes, áreas, volúmenes, etc.) para resolver problemas”.

Cada uno de las anteriores directrices legales, fundamenta el desarrollo del proyecto de investigación, el cual está orientado a aportar al docente una propuesta de enseñanza que le permita a los estudiantes solucionar de problemas que involucren el concepto de volumen del paralelepípedo recto en un nivel de escolaridad específico.

5.1.3 Referente contextual

Este trabajo se realiza en el colegio Champagnat de la ciudad de Ibagué. Esta es la actual capital del departamento del Tolima, está ubicada en el centro occidente de Colombia, aproximadamente a tres horas por vía terrestre de la ciudad de Bogotá, distrito capital del país. Tiene una población aproximada de 560000 habitantes tanto en el sector rural como en el urbano. Es una ciudad donde el promedio de la población es de estrato socioeconómico medio.

Según el Ministerio de Educación Nacional (2015), la ciudad de Ibagué en términos de educación, tiene un promedio del 54,87 en las pruebas saber, que es superior a la media nacional, debido a que en los últimos años tanto en el sector oficial como en el privado han implementado estrategias para mejorar en estos resultados.

El colegio Champagnat de Ibagué, es una institución de carácter privado, hace parte de la comunidad de los Hermanos Maristas de la Enseñanza de la provincia Norandina. Según las pruebas saber 11 del año 2017, es el cuarto mejor colegio de la ciudad y del departamento, la población estudiantil oscila entre los estratos 3 y 6.

El grado de escolaridad elegido para realizar el estudio de investigación es el curso 6-1, que se caracteriza por la dinámica activa de la mayoría de los estudiantes y donde el docente investigador aplica la prueba diagnóstica, teniendo en cuenta que es el profesor titular del curso, lo cual facilita las intervenciones y el análisis de los resultados.

6 OBJETIVOS

6.1 OBJETIVO GENERAL

Reconocer los sistemas de representación semiótica que más utilizan los estudiantes de grado sexto al resolver situaciones problema que involucran la magnitud volumen del paralelepípedo recto.

6.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Reconocer el papel que cumplen para los estudiantes de grado sexto, el tratamiento y la conversión de representaciones semióticas al resolver situaciones problema que involucran la magnitud volumen del paralelepípedo recto.
- Consolidar categorías alrededor de tratamientos, conversiones y aplicaciones, para analizar los resultados obtenidos de la secuencia didáctica.
- Identificar las estrategias y actividades propias de las representaciones semióticas que más utilizan los estudiantes de grado sexto al resolver situaciones problema que involucran la magnitud volumen del paralelepípedo recto.

7 METODOLOGÍA

Este trabajo se desarrolla teniendo en cuenta los estándares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional para el área de matemáticas y se soporta en la teoría de las representaciones semióticas de Raymond Duval (2006), enfocándose en aspectos como: representación de situaciones, formular y responder preguntas que den respuesta a la aprehensión del concepto de volumen de un paralelepípedo recto.

El trabajo planteado propicia el aprendizaje del concepto de volumen del paralelepípedo recto con algunos elementos históricos a partir de la contextualización de situaciones que involucren representaciones del objeto matemático abordado.

La intervención se da a través de una unidad didáctica, desde el descubrimiento de ideas previas que se ha definido como la prueba diagnóstica, con la finalidad de identificar los conocimientos que poseen los estudiantes frente a la comprensión y modelación de conceptos como área, espacio, elementos del volumen, entre otros. Posteriormente se proponen una seria de actividades que apuntan al cumplimiento de los objetivos planteados en el trabajo.

7.1 TIPO DE ESTUDIO

El tipo de estudio con el cual se desarrolla este trabajo es de manera descriptiva y analítica. Descriptiva porque especifica características de los estudiantes intervenidos respecto al objeto matemático, es decir, recoge información tanto individual como grupal en el ambiente de aula; y analítica porque examina la relación entre el concepto de volumen de paralelepípedo recto y los tipos de representación.

Desde luego, esta investigación se realiza bajo un enfoque cualitativo, ya que basados en Rodríguez, Gil y García (1996) indican que esta, “estudia la realidad en su contexto natural, tal y como sucede, intentando sacar sentido de, o de interpretar los fenómenos de acuerdo con los significados que tienen para las personas implicadas” (p.1). Del mismo modo, Taylor y Bogdan (1986), manifiestan que este tipo de investigación, “produce datos descriptivos, tanto las propias palabras de las personas habladas o escritas y la conducta observable” (p.20). Estos fundamentos teóricos, respaldan la intención de abordar esta propuesta desde dicha perspectiva cualitativa ya que genera un proceso donde los actores involucrados como el docente y los estudiantes tienen momentos de experimentar matemáticamente la realidad del contexto buscando dar solución a problemáticas planteadas alrededor del objeto matemático. Además, permite identificar el tratamiento que dan los estudiantes a las representaciones semióticas del volumen del paralelepípedo recto a través de procesos descriptivos, análisis de datos, comportamientos y actitudes.

En el desarrollo de este trabajo se pueden identificar variables como: la incidencia del discurso histórico en las prácticas pedagógicas como motivación al grupo y la eficacia de las prácticas pedagógicas en el aprendizaje del grupo, las cuales son factores importantes en la recolección de la información.

7.2 TIPO DE POBLACIÓN

La población donde se desarrolla la intervención y el estudio es en grado 6-1 del colegio Champagnat, en la ciudad de Ibagué, capital del departamento del Tolima, ubicada en el centro occidente de Colombia. El trabajo se realiza con una muestra de 6 estudiantes, apoyándose en el análisis del desempeño de algunos de estos, donde se evidencie un acercamiento en sus manifestaciones a los aspectos expuestos en los objetivos, a quienes se les ha asignado los nombres ficticios de Fernando, Luis, Sandra, Leonardo, Laura y Santiago, quienes representan y se identifican con el curso. A continuación, se realiza una breve descripción de cada uno: Fernando, es un estudiante inquieto, sobresale en el grupo de clase por su insistente participación. Sin embargo, discute con el docente sobre definiciones que a su criterio están correctas, pero al final reconoce en lo que anteriormente estaba equivocado. Se ha caracterizado por su buen desempeño académico, lo cual lo ubica entre los mejores estudiantes del salón. Luis, se caracteriza por su dinámica activa en la clase y su habilidad mental en la solución de operaciones aritméticas, en la mayoría de veces acierta en los cálculos que realiza mentalmente. Siempre está presente en la discusión y muestra de manera clara y respetuosa su posición, y reconoce cuando se equivoca. Sandra es una estudiante tímida, muy poco participa en clase, sin embargo, su razonamiento matemático es satisfactorio. Pregunta de manera personal al docente las dudas. Leonardo se caracteriza por su seguridad frente a los procedimientos matemáticos, aunque en ocasiones se equivoca, y no le cuesta reconocer públicamente su error. Laura, es una estudiante dispuesta a las indicaciones del docente. Es callada en el salón y solo se limita a responder lo que se le solicita. Y Santiago es un estudiante muy activo comportamentalmente, pero se observa que es inteligente y su desempeño en matemáticas siempre es superior. Siempre termina primero las actividades planteadas, lo cual hace que el profesor tenga una actividad extra para que desarrolle o si su comportamiento en el momento es adecuado, se le asigna acompañar y orientar a compañeros que presentan dudas en la realización de las mismas.

7.3 DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

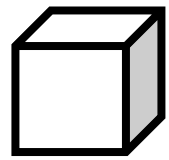
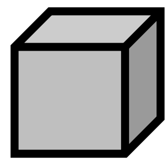
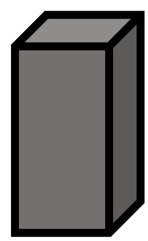
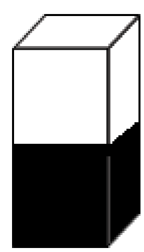
En el diseño de la investigación se involucra la teoría de las representaciones semióticas de Raymon Duval, incluyendo un abordaje conceptual alrededor de la magnitud volumen de cuerpo geométrico, específicamente del paralelepípedo recto y sus representaciones. Se genera una consolidación de categorías de análisis, teniendo en cuenta que Duval (1998) manifestó que un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis:

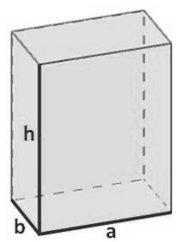
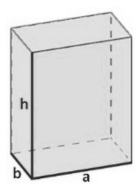
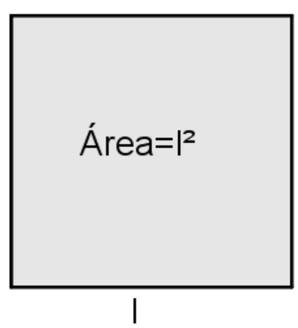
1. La presencia de una representación identificable.
2. El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formulada. (Cambia la representación, pero no el tipo de registro).
3. La conversión de una representación es la transformación en otra forma de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado inicial...". Es decir, con dos tipos de registros disímiles, con diferentes representaciones. (Cambia el tipo de registro y por tanto la representación).

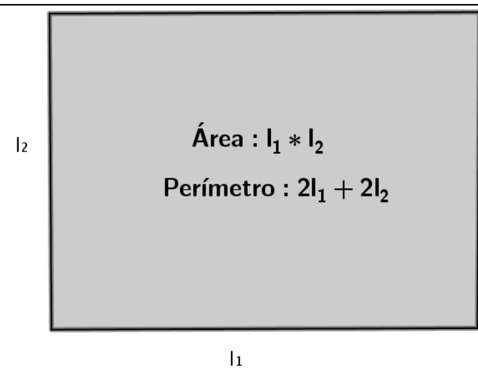
Para el caso de este trabajo se tendría:

Tabla 5: Tipos de registro y representaciones del concepto de volumen del paralelepípedo recto.

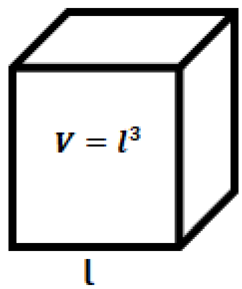
Tipo de registro	**Representaciones**
Registro 1: Lenguaje común (A1)	**A1a1:** Comprensión de elementos de la historia de las matemáticas relacionadas con la magnitud de volumen del paralelepípedo recto.

	A1a2: Contextos donde esté involucrado el área y perímetro del cuadrado y rectángulo. **A1a3:** área de la cara de un recipiente de forma de paralelepípedo recto.  **A1a4:** área total de un recipiente de forma de paralelepípedo recto.  **A1a5:** volumen de un recipiente de forma de paralelepípedo recto.  **A1a6:** volumen de la mitad de un recipiente de forma de paralelepípedo recto. 
Registro 2: Registro algebraico (A2)	**A2a1:** Ecuación del área de un cuadrado (A_c). $\boldsymbol{A_c = l^2}, donde\ l\ es\ el\ lado.$ **A2a2:** Ecuación del área de un rectángulo (A_r). $\boldsymbol{A_c = b * h}, donde\ b\ es\ la\ base\ \ y\ h\ es\ la\ altura.$ **A2a3:** Ecuación del área total de un cubo o hexaedro (A_{cubo}). $\boldsymbol{A_{cubo} = 6l^2}, donde\ l\ es\ el\ la\ longitud\ de\ la\ arista$

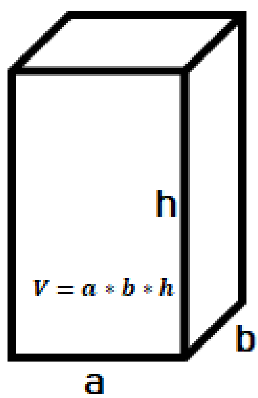
	A2a4: Ecuación del área total de un paralelepípedo recto (A_T). $\boldsymbol{A_T = 2(a * b + a * h + b * h)}$, según la definición de las variables según la siguiente representación.  **A2a5:** Ecuación del volumen del paralelepípedo recto. $\boldsymbol{V = a * b * h}$, según la definición de las variables según la siguiente representación. 
Registro 3: Registro Geométrico (A3)	**A3a1:** Área de un cuadrado.  **A3a2:** Área de un rectángulo en términos del perímetro y la longitud de la base.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


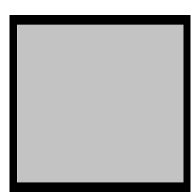
A3a3: Volumen de un cubo.

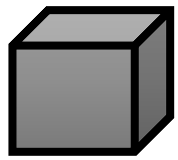
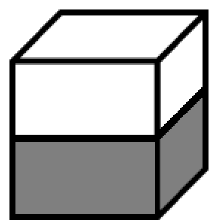
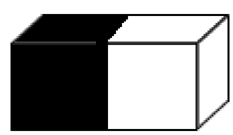


A3a4: Volumen de un paralelepípedo recto.



</td>
</tr>
<tr>
<td>Registro 4: Registro icónico (A4)</td>
<td>
A4a1: Icono del cuadrado


</td>
</tr>
</table>

	A4a2: Icono del rectángulo  **A4a3:** Icono de un cubo.  **A4a4:** Icono de la mitad de un cubo.  **A4a5:** Icono de un paralelepípedo recto.  **A4a6:** Icono de la mitad de un paralelepípedo recto. 

Fuente: elaboración propia

Es pertinente tener en cuenta que definimos tres categorías para análisis desde Duval, con sus respectivos descriptores, los cuales en el proceso de investigación buscan un análisis más acertado de los resultados de la misma. Las categorías se definen como categoría 1 (tratamientos para el volumen del paralelepípedo recto), categoría 2 (para el volumen del paralelepípedo recto) y categoría 3 (aplicación de conceptos del volumen del paralelepípedo recto en contextos), y sus respectivos descriptores (D1, D2, D3, …).

Categoría 1: Tratamientos para el volumen del paralelepípedo recto.

Tabla 6: Categoría 1 - tratamientos para el volumen del paralelepípedo recto.

Tipos de registro/Niveles	**Desempeño Bajo**	**Desempeño Básico**	**Desempeño Superior**
Lenguaje común	D1: Presenta dificultades para identificar elementos abordados de la historia de las matemáticas que giran alrededor de la magnitud volumen del paralelepípedo recto.	D1: Identifica algunos elementos abordados de la historia de las matemáticas que giran alrededor de la magnitud volumen del paralelepípedo recto.	D1: Identifica los elementos abordados de la historia de las matemáticas que giran alrededor de la magnitud volumen del paralelepípedo recto, manifestando posiciones de análisis al respecto.
	D2: Presenta dificultades para identificar cuando un enunciado está relacionado con una situación que puede ser modelada a través del volumen del paralelepípedo recto.	D2: Identifica la representación de modelos simples a partir de enunciados sencillos en los cuales solo se establece una relación con el volumen del paralelepípedo recto.	D2: Identifica la representación de diversas situaciones a partir de diferentes tipos de enunciados.

	D3: Dada una representación del volumen del paralelepípedo recto, presenta dificultades para dar una descripción verbal, tanto de los elementos del objeto matemático, como de sus características.	D3: Dada una representación del volumen del paralelepípedo recto, presenta algunas dificultades para dar una descripción verbal de sus características generales o de las características particulares de cada uno de sus elementos.	D3: Dada una descripción verbal completa de las características generales de una representación del volumen del paralelepípedo recto y de las características particulares de cada uno de los elementos que lo componen.
Registro algebraico	D1: Presenta dificultades para identificar la forma algebraica de una representación de área y volumen del paralelepípedo recto.	D1: Identifica la representación algebraica de una representación del área y volumen del paralelepípedo recto desde la definición de forma algebraica.	D1: Identifica la representación algebraica representación del área y volumen del paralelepípedo recto, de diversas maneras como se representa en este registro.
	D2: Dada la forma algebraica de representación del volumen del paralelepípedo recto,	D2: Dada la forma algebraica de una representación del volumen del paralelepípedo	D2: Muestra de diferentes maneras las representaciones del volumen del paralelepípedo recto

	tiene dificultades en determinar el valor en unidades cubicas.	recto, identifica algunos registros algebraicos relacionados con el objeto matemático.	algebraicamente usando procesos de aritméticos y algebraicos.
Registro geométrico	D1: Presenta dificultades para identificar la representación del volumen del paralelepípedo recto en un contexto determinado.	D1: Identifica en un problema geométrico que la representación corresponde a abordar el concepto de volumen.	D1: Determina el volumen del paralelepípedo recto en diferentes contextos.
	D2: Presenta dificultades para identificar cuando un problema relacionado al cálculo de volúmenes en trozos acumuladas en un paralelepípedo recto representa una representación del volumen total del mismo.	D2: Presenta algunas dificultades para identificar cuando un problema relacionado al cálculo de volúmenes en trozos acumuladas en un paralelepípedo recto representa una representación del volumen total del mismo.	D2: Presenta un análisis profundo donde interviene el comportamiento respecto al cálculo de volúmenes en trozos acumuladas en un paralelepípedo recto representa una representación del volumen total del mismo.

Registro icónico	D1: Presenta dificultades para identificar la representación icónica del volumen en un paralelepípedo recto.	D1: Identifica la representación icónica del volumen en un paralelepípedo recto.	D1: Representa de manera icónica el volumen de un paralelepípedo recto. y hace inferencias en la comparación con otros paralelepípedos rectos.
	D2. Presenta dificultades al identificar los elementos de la representación icónica del volumen en un paralelepípedo recto como largo, ancho y altura, entre otros.	D2. Identifica los elementos del paralelepípedo recto como largo, ancho y altura, entre otros.	D2: Reconoce y analiza a profundidad los elementos del paralelepípedo recto en la representación icónica.

Fuente: elaboración propia

Categoría 2: Conversiones para el volumen del paralelepípedo recto.

Tabla 7: Categoría 2 - conversiones para el volumen del paralelepípedo recto.

Tipos de registro/Niveles	**Desempeño Bajo**	**Desempeño Básico**	**Desempeño Superior**
Lenguaje común a otros registros	D1: (Lenguaje común a algebraico)	D1: (Lenguaje común a algebraico)	D1: (Lenguaje común a algebraico)

	Presenta dificultades para representar de manera ecuación una situación expresada como un enunciado.	En algunas ocasiones representa de manera ecuación una situación expresada como un enunciado.	Representa de manera ecuación una situación expresada como un enunciado.
Registro algebraico a otros registros	D1: (Registro algebraico al lenguaje común) Presenta dificultades para representar de manera textual una ecuación (volumen o área total) y para describir interpretar sus elementos. a: largo. b: ancho. c: altura.	D1: (Registro algebraico al lenguaje común) En algunas ocasiones representa de manera textual una ecuación (volumen o área total) y para describir interpretar sus elementos. a: largo. b: ancho. c: altura.	D1: (Registro algebraico al lenguaje común) Representa de manera textual una ecuación (volumen o área total) y para describir interpretar sus elementos. a: largo. b: ancho. c: altura.
	D2: (Registro algebraico al registro icónico) Presenta dificultades para representar de manera icónica los elementos de las ecuaciones de volumen y área de un paralelepípedo recto.	D2: (Registro algebraico al registro icónico) En algunas ocasiones representa de manera icónica los elementos de las ecuaciones de volumen y área de	D2: (Registro algebraico al registro icónico) Representa de manera icónica los elementos de las ecuaciones de volumen y área de un paralelepípedo recto.

		un paralelepípedo recto.	
	D3: (Registro algebraico al registro geométrico). Presenta dificultades para representar de manera geométrica una situación dada de manera algebraica del volumen del paralelepípedo recto.	D3: (Registro algebraico al registro geométrico). En algunas ocasiones representa de manera geométrica una situación dada de manera algebraica del volumen del paralelepípedo recto.	D3: (Registro algebraico al registro geométrico). Representa de manera geométrica una situación dada de manera geométrica una situación dada de manera algebraica del volumen del paralelepípedo recto.
Registro geométrico a otros registros	D1: (Registro geométrico al lenguaje común) Presenta dificultades para representar en lenguaje común una situación dada de manera geométrica del volumen del paralelepípedo recto.	D1: (Registro geométrico al lenguaje común) En ocasiones representa en lenguaje verbal una situación dada de manera geométrica del volumen del paralelepípedo recto.	D1: (Registro geométrico al lenguaje común) Representa en lenguaje verbal una situación dada de manera geométrica del volumen del paralelepípedo recto.
	D2: (Registro geométrico al algebraico) Presenta dificultades para representar en lenguaje algebraico una situación	D2: (Registro geométrico al algebraico) En algunas ocasiones representa en lenguaje	D2: (Registro geométrico al algebraico) Representa en lenguaje algebraico una situación dada de

	dada de manera geométrica del volumen del paralelepípedo recto.	algebraico una situación dada de manera geométrica del volumen del paralelepípedo recto.	manera geométrica del volumen del paralelepípedo recto.
	D3: (Registro geométrico al icónico) Presenta dificultades para representar icónicamente una situación dada de manera geométrica relacionada con el área o volumen del paralelepípedo recto.	D3: (Registro geométrico al icónico) En algunas ocasiones representa icónicamente una situación dada de manera geométrica relacionada con el área o volumen del paralelepípedo recto.	D3: (Registro geométrico al icónico) Representa icónicamente una situación dada de manera geométrica relacionada con el área o volumen del paralelepípedo recto.
Registro icónico a otros registros	D1: (Registro icónico al lenguaje común) Presenta dificultades para representar en lenguaje común una situación dada icónicamente relacionada con el área o volumen del paralelepípedo recto.	D1: (Registro icónico al lenguaje común) En algunas ocasiones representa en lenguaje común una situación dada icónicamente relacionada con el área o volumen del paralelepípedo recto.	D1: (Registro icónico al lenguaje común) Representa en lenguaje común una situación dada icónicamente relacionada con el área o volumen del paralelepípedo recto.
	D1:	D2:	D2:

	(Registro icónico al algebraico) Presenta dificultades para representar algebraicamente una situación dada de forma icónica relacionada con el área o volumen del paralelepípedo recto.	(Registro icónico al algebraico) En algunas ocasiones representa algebraicamente una situación dada de forma icónica relacionada con el área o volumen del paralelepípedo recto.	(Registro icónico al algebraico) Representa algebraicamente una situación dada de forma icónica relacionada con el área o volumen del paralelepípedo recto.
	D3: (Registro icónico al geométrico) Presenta dificultades para representar geométricamente una situación dada de forma icónica relacionada con el área o volumen del paralelepípedo recto.	D3: (Registro icónico al geométrico) En algunas ocasiones representa geométricamente una situación dada de forma icónica relacionada con el área o volumen del paralelepípedo recto.	D3: (Registro icónico al geométrico) Representa geométricamente una situación dada de forma icónica relacionada con el área o volumen del paralelepípedo recto.

Fuente: elaboración propia

Categoría 3: Aplicación del volumen del paralelepípedo recto en contextos.

Tabla 8: Categoría 3 - aplicación del volumen en contextos.

Tipos de registro/Niveles	Desempeño Bajo	Desempeño Básico	Desempeño Superior

Aplicación del concepto de volumen del paralelepípedo recto como registro en lenguaje común	D1: Presenta dificultades en el uso lenguaje común del volumen del paralelepípedo recto para resolver situaciones problema.	D1: En ocasiones usa lenguaje común del volumen del paralelepípedo recto para resolver situaciones problema.	D1: Usa lenguaje común del volumen del paralelepípedo recto para resolver situaciones problema.
Aplicación del concepto del volumen del paralelepípedo recto como registro algebraico.	D1: Presenta dificultades en la interpretación algebraica del área del paralelepípedo recto en una situación problema.	D1: En algunas ocasiones interpreta algebraicamente del área del paralelepípedo recto en una situación problema.	D1: Interpreta algebraicamente del área del paralelepípedo recto en una situación problema.
	D2: Presenta dificultades en la representación algebraica del volumen del paralelepípedo recto en una situación problema.	D2: En algunas ocasiones representa algebraicamente del volumen del paralelepípedo recto en una situación problema.	D2: Representa algebraicamente el volumen del paralelepípedo recto en una situación problema.
Aplicación del concepto volumen del paralelepípedo recto como	D1: Presenta dificultades representando geométricamente la modelación del volumen	D1: En algunas ocasiones representa geométricamente la modelación del	D1: Representa geométricamente la modelación del volumen del

registro geométrico.	del paralelepípedo recto en una situación problema.	volumen del paralelepípedo recto en una situación problema.	paralelepípedo recto en una situación problema.
Aplicación del concepto de volumen del paralelepípedo recto como registro icónico.	D1: Presenta dificultades representando icónicamente del volumen del paralelepípedo recto en una situación problema.	D1: En algunas ocasiones representa icónicamente el volumen del paralelepípedo recto en una situación problema.	D1: Representa icónicamente el volumen del paralelepípedo recto en una situación problema.

Fuente: elaboración propia

7.4 INSTRUMENTOS Y TÉCNICAS DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

Los instrumentos que se usan para la recolección de la información, son: en primer lugar, la observación, que cumple un papel fundamental para el investigador, ya que esta permite analizar según su criterio sobre la población a quien se aplica la intervención, aspectos como la necesidad de efectuar una propuesta de intervención que favorezca el aprendizaje del objeto matemático definido, la actitud de los estudiantes frente a la propuesta, la dinámica en los espacios donde se da el proceso de enseñanza y aprendizaje, el análisis de la información recolectada, la coherencia teórica respecto a la intención del mismo trabajo, entre otros.

También, una unidad didáctica compuesta por una prueba diagnóstica que permite analizar las ideas previas con que los estudiantes cuentan y que giran alrededor del concepto matemático a abordar. Luego de los resultados de esta prueba diagnóstica, se aplica una serie de actividades que se plantean con el propósito de reconocer las diferentes representaciones del concepto volumen del paralelepípedo recto, las cuales están diseñadas en forma de cuestionario, que permite acceder a la recolección de información sobre los registros de los estudiantes en las actividades, como también un análisis más exacto y claro de lo que se espera obtener con la intervención.

Unidad didáctica (UD)

Según Tamayo et al. (2010), manifiestan que: “El concepto de unidad didáctica se entiende como un proceso flexible de planificación de la enseñanza de los contenidos relacionados con un dominio de saber específico” (p. 107). Esto con el fin de generar procesos de aprendizaje en una comunidad determinada, teniendo en cuenta que en este caso saber especifico, un objeto matemático, está alineado a la experiencia del docente y los direccionamientos legales que legislan la educación en el territorio nacional.

Desde el este punto de vista, es pertinente tener en cuenta el rol del docente que ya no es trasmisioncita, sino que tiene la labor de generar espacios que le permita al estudiante construir conocimiento significativo, y donde el estudiante a través de sus ideas previas que se han construido a través de su experiencia se pueden fortalecerlas o reestructurarlas. Así estos dos actores adoptan una postura constructivista a favor de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

La UD para este proyecto se resume en la planificación que el docente debe hacer del proceso de enseñanza y aprendizaje de un objeto científico el cual debe de ejecutar en el aula de clase. Peralez & Cañal de León (2000), afirma que:

> Diseñar una unidad didáctica, se deben detallar los propósitos, los contenidos con su respectiva secuencia, la selección de las actividades y su respectiva secuencia, selección y secuenciación de las actividades de evaluación y la organización y gestión en el aula de clase (p.1)

Esta UD tiene la intencionalidad abordar algunos aspectos epistemológicos e históricos del concepto de volumen, desde problemas y sucesos históricos los cuales pueden ampliar la comprensión del mismo. Uno de los aspectos de los cuales desde la historia de las matemáticas se tendrá mayor énfasis corresponde a uno los tres problemas de la antigua Grecia, conocido como la duplicación del cubo, haciendo un acercamiento desde un enfoque conceptual, de las maneras como se concebía el concepto de volumen, y desde allí haciendo un recorrido hasta el concepto actual.

Para desarrollar esta UD, el docente debe de realizar un estudio riguroso de los aspectos a estudiar, las planeaciones de las diferentes actividades y las transposiciones didácticas para aplicarlas en el aula, teniendo en cuenta que diseñarla es decidir qué y cómo se enseña, donde esta refleja las teorías implícitas del docente, explicitando la importancia que tiene determinados contenidos y reflejando las concepciones que él tiene sobre ciencia, la enseñanza y el aprendizaje.

Las actividades están compuestas por problemas contextuales y otros propiamente matemáticos que buscan generar amplia gama de relaciones entre los conocimientos previos en los estudiantes, puesto que como lo manifiesta Tamayo et. Al (2010), "se considera aprendizajes de las ciencias implica una evolución de los conceptos que los estudiantes van formado" (p.105), y lo que está en proceso de conocerse, para intentar lograr dinamizar en mayor grado la estructura conceptual en los mismos, buscando así mayor significatividad de los conocimientos que se van construyendo como producto de esta interacción.

Diseño de la unidad didáctica

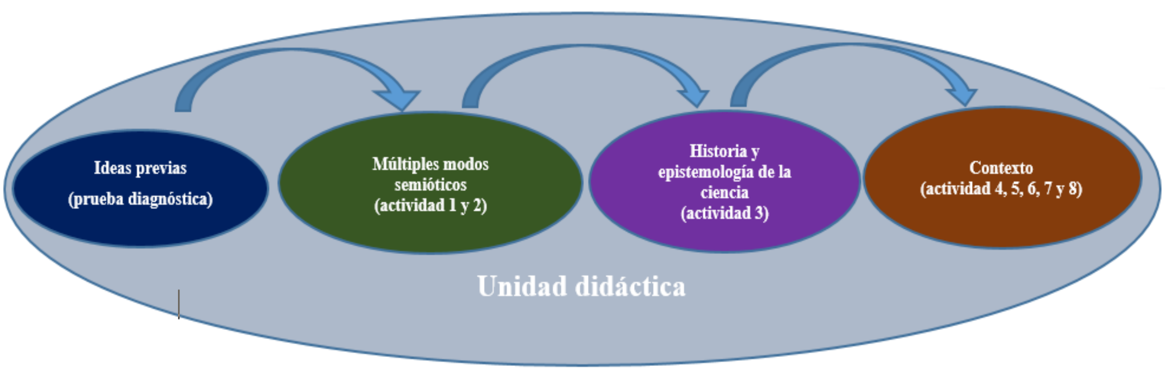
Para el diseño de la unidad didáctica, se tienen en cuenta elementos que, según Tamayo, et al. (2010), plantearon en su trabajo de investigación, específicamente en lo que tiene que ver con la planificación, los conocimientos previos de los estudiantes, ejecución y evaluación de los procesos enseñanza y aprendizaje, donde el aula se convierte en un espacio de trabajo científico, denominado ciencia escolar, donde se propician y se analizan situaciones problema tanto internas como externas al contexto que fortalecen los conocimientos a través de las vivencias o experiencias desde estudiante con la misma ciencia, donde el docente adopta una postura constructivista y no transmisionista ni conductista. Estos elementos son primordiales al momento de construir la UD, basado en la siguiente figura del modelo propuesto por Tamayo (2001) y que será referente fundamental y adaptado para este trabajo:

Figura 7: Modelo Unidad Didáctica

Fuente: Tamayo (2001)

Desde algunos elementos de este modelo de unidad didáctica, se genera el siguiente planteamiento ordenado y adaptado para el desarrollo de este trabajo.

Figura 8: Unidad didáctica.



Fuente: elaboración propia

A continuación, se describen cada uno de aspectos planteados en el modelo de unidad didáctico a aplicar.

Ideas previas

Teniendo en cuenta que las ideas previas son aprendizajes o experiencias que los estudiantes tienen acerca de un concepto a estudiar, antes de abordar de manera científica el mismo, es importante mencionar que estas son elementos fundamentales para crear espacios de discusión de manera colectiva en el aula de clase con los estudiantes, eliminando así un trabajo individual, sin dejar a un lado la importancia de los aportes que los estudiantes comparten, por pocos formales que los expresen y generando una construcción conjunta de aprendizajes, donde el docente hace parte del mismo en rol de guía.

En esta parte, los estudiantes luego de la presentación de una prueba diagnóstica que tiene acerca del concepto de volumen y algunos relacionados como área, longitud, perímetro, entre otros, se propone construir de manera formal, sin alejarse del conocimiento común, los respectivos conceptos.

Múltiples modos semióticos

En vista que este trabajo es desarrollado con referencia a la teoría de las representaciones semióticas de Raymond Duval, estas son trascendentales en el cuerpo del mismo. Si bien es cierto, el mundo se presenta a través de diferentes lenguajes o símbolos, que para cada individuo son imágenes mentales, que permite una comunicación con el mundo de alrededor, es eficaz abordar diferentes representaciones, para que los estudiantes se apropien a partir de las actividades de tratamiento y conversión facilitando su aprendizaje de un concepto científico, en este caso del volumen.

Desde luego se hace una aproximación a cuatro representaciones semióticas definidas: lenguaje común, representación algebraica, representación geométrica y representación icónica, las cuales permiten a través de las actividades de tratamientos o conversiones mostrar un conocimiento científico más significativo y cercano al contexto de los estudiantes.

Historia y epistemología de la ciencia

Este componente es fundamental para este trabajo, ya que algunos elementos de la historia alrededor del concepto de volumen, son tomados para presentar este concepto en un contexto temporal desde las necesidades, obstáculos en la construcción del mismo o situaciones que se presentaron en algún momento de la historia, y que ha evolucionado hasta la actualidad.

Del mismo modo, este trabajo permite que, a través de un conocimiento formalizado por una comunidad científica, enseñarlo en el aula de clase, a través de algunas representaciones semióticas, desde aprendizajes comunes que los estudiantes tienen apropiados, que giran alrededor del mundo actual y que responden a la integración de la epistemología al proceso educativo.

Desde el planteamiento, algunas actividades se abordan elementos históricos como le duplicación del cubo como un acercamiento a las diferentes culturas antiguas, como la babilónica, egipcia, china, griega y la edad moderna.

Contexto

El trabajo está inmerso en la solución o análisis de situaciones contextuales, donde involucre representaciones de la magnitud volumen del paralelepípedo, para su respectivo estudio. En tanto que se presentan cinco escenarios cercanos al contexto de los estudiantes, permiten abordar de manera practica el uso de la magnitud matemática que está en estudio.

7.4.1 Prueba diagnostica

Esta actividad es realizada por medio de un cuestionario, con la intención de identificar los saberes previos, las habilidades y las destrezas de los estudiantes de grado sexto respecto a los conceptos de longitud, área y volumen. Esto teniendo en cuenta, que paralelo al desarrollo histórico del volumen, las representaciones ocuparon un primer lugar en su construcción conceptual, indicando así que los estudiantes deben tener claros los elementos que giran alrededor de estas, donde se espera que los resultados que esta actividad arroje, sean insumos importantes para la aplicación de las actividades de intervención de esta propuesta. La experiencia docente en este nivel de escolaridad, permite que se construya esta actividad y que sus resultados generen la necesidad de aplicar la propuesta de este trabajo. Este cuestionario está construido a partir de preguntas abiertas, que permiten analizas las ideas que los estudiantes tienen alrededor de los conceptos de longitud, perímetro, área y volumen. Del mismo modo, identificar figuras geométricas donde exista la posibilidad de encontrar área y el volumen. Indagar sobre apreciaciones que los estudiantes tienen, con respecto a la necesidad del concepto de volumen. Además, conocer cómo podrían con los conocimientos que tienen, duplicar un cubo, usando las herramientas de regla y compas.

Cabe destacar, que la prueba diagnóstica aborda las cuatro representaciones definidas: lenguaje común, geométrico, algebraico e icónico. Desde luego, en su análisis se revisa la apropiación que los estudiantes tiene de cada una.

Esta prueba se analiza bajo una tabla donde se presentan las respuestas de algunos de los estudiantes y la interpretación por parte del docente. Esta interpretación la realiza el docente basado en la respuesta que el estudiante da a la pregunta analizada, describiéndola y haciendo énfasis en los errores o los aciertos conceptuales del mismo.

Tabla 9: Análisis resultados prueba diagnóstica

Respuestas del estudiante	Registro semiótico	Interpretación

Fuente: elaboración propia

7.4.2 Actividades

Se plantean ocho actividades, que tienen la intensión de identificar las representaciones semióticas de la magnitud volumen del paralelepípedo recto en situaciones problema de los estudiantes de grado sexto. Para el análisis de cada actividad, se realiza bajo el siguiente modelo de tabla:

Tabla 10:Análisis de resultados actividades

Categoría	Tipos de registro/ tipos de cambio de registro/aplicación	Descriptor	Desempeño de los estudiantes

Fuente: elaboración propia

Actividad 1: Área y perímetro del cuadrado y rectángulo

A través de varios ejercicios identificar los procedimientos alrededor del área y perímetro del cuadrado y del rectángulo. Si bien es cierto, son conceptos previos que los estudiantes deben tener adaptados, esta actividad permite conocer dichas nociones, como preámbulo al estudio de la magnitud volumen. Está compuesta por 5 puntos, donde se indagan sobre la comprensión de los conceptos de área y perímetro del cuadrado y del rectángulo y un cuestionamiento de las apreciaciones de los estudiantes en cuanto a lo que se les facilito y lo que se les dificulto. Del mismo modo se pretende identificar para su análisis el registro definido como lenguaje común (A1a2) y geométrico (A3a1 y A3a2).

Tabla 11: Registros análisis actividad 1

Registro	Codificación	Tipos de registro/ tipos de cambio de registro/aplicación
Lenguaje común	A1a2	Registro geométrico a registro algebraico Registro icónico a registro algebraico
Geométrico	A3a1, A3a2	

Fuente: elaboración propia

Actividad 2: Área lateral, área total y volumen

Es una actividad compuesta por 3 incisos, que desde problemas de desarrollo y análisis de ejercicios que están relacionados con el área lateral, área total y volumen del paralelepípedo recto, y las apreciaciones de los estudiantes de facilidad o dificultad presentada en el desarrollo de la misma. Se identifican para su análisis los registros de lenguaje común

(A1a3, A1a4, A1a5 y A1a6), algebraico (A2a1, A2a2, A2a3, A2a4, A2a5), geométrico (A3a3, A3a4) e icónico (A4a1).

Tabla 12: Registros análisis actividad 2

Registro	Codificación	Tipos de registro/ tipos de cambio de registro/aplicación
Lenguaje común	A1a3, A1a4, A1a5 y A1a6	Registro algebraico Registro geométrico Registro icónico Registro geométrico a algebraico Registro icónico a algebraico
Algebraico	A2a1, A2a2, A2a3, A2a4, A2a5	
Geométrico	A3a3, A3a4	
Icónico	A4a3	

Fuente: elaboración propia

Actividad 3: Duplicación del cubo

Está compuesta por 3 puntos, donde a través de una lectura que contextualiza y aborda una síntesis de uno de los tres problemas griegos "la duplicación del cubo", permite reconocer elementos que la historia de las matemáticas muestra en cuanto al estudio del concepto implícito como es la magnitud volumen y la importancia que tuvo lugar el mismo en el contexto histórico y las apreciaciones de los estudiantes de la facilidad o dificultad que se presentó en el desarrollo de la misma. Esta lectura describe de manera general la historia de la duplicación del cubo y se pretende identificar los registros definidos como lenguaje común (A1a1) que el estudiante de grado sexto reconoce desde la comprensión de un hecho histórico alrededor del concepto de volumen del paralelepípedo recto y el registro icónico (A4a1), de la manera que el estudiante reconoce esta representación desde la lectura del hecho histórico.

Tabla 13: Registros análisis actividad 3

Registro	Codificación	Tipos de registro/ tipos de cambio de registro/aplicación
Lenguaje común	A1a1	Registro lenguaje común Registro icónico Lenguaje común a algebraico
Icónico	A4a3	

Fuente: elaboración propia

Actividad 4: Situación problema 1 (huerta escolar).

Está compuesta por una situación contextual, que presenta un espacio del colegio Champagnat de Ibagué, denominado parcela que es destinado para la huerta escolar y donde se requiere medir y encontrar la cantidad de alambre para encerrar la misma, el área y la subdivisión de mini-parcelas. Se identifican para su análisis los registros de lenguaje común (A1a2), algebraico (A2a1, A2a2), geométrico (A3a1, A3a2) e icónico (A4a1, A4a2).

Tabla 14: Registros análisis actividad 4

Registro	Codificación	Tipos de registro/ tipos de cambio de registro/aplicación
Lenguaje común	A1a2	Lenguaje común a algebraico
Algebraico	A2a1, A2a2	
Geométrico	A3a1, A3a2	
Icónico	A4a1, A4a2	

Fuente: elaboración propia

Actividad 5: Situación problema 2 (Cubo de cubos).

Esta actividad es práctica, puesto que se cuenta con el objeto físico que es un cubo de 4*4, como se muestra en la imagen de la actividad. Se identifican para su análisis los registros de lenguaje común (A1a5, A1a6), algebraico (A2a3), geométrico (A3a3) e icónico (A4a3, A4a4).

Tabla 15: Registros análisis actividad 5

Registro	Codificación	Tipos de registro/ tipos de cambio de registro/aplicación
Lenguaje común	A1a5, A1a6	Lenguaje común Registro icónico Registro geométrico Lenguaje común a algebraico Registro icónico al lenguaje común Registro icónico al algebraico Registro icónico al geométrico Aplicación del concepto de volumen del paralelepípedo recto como registro icónico.
Algebraico	A2a3	
Geométrico	A3a3,	
Icónico	A4a3, A4a4,A4a5, A4a6	

Fuente: elaboración propia

Actividad 6: Situación problema 3 (Empaque).

A través de una situación contextual de empaque de una caja, se aborda la magnitud volumen y el área lateral y total de la misma. Se identifican para su análisis los registros de lenguaje común (A1a4, A1a5), geométrico (A3a4) e icónico (A4a5).

Tabla 16: Registros análisis actividad 6

Registro	Codificación	Tipos de registro/ tipos de cambio de registro/aplicación
Lenguaje común	A1a4, A1a5	Lenguaje común Registro algebraico Lenguaje común a algebraico Registro geométrico al algebraico Registro icónico al geométrico
Algebraico	A2a3, A2a5	
Geométrico	A3a4	
Icónico	A4a5	

		Aplicación del concepto volumen del paralelepípedo recto como registro geométrico.

Fuente: elaboración propia

Actividad 7: Situación problema 4 (Transporte).

Desde una situación de transporte de un electrodoméstico de forma paralelepípedo recto, se reconoce elementos alrededor del objeto matemático abordado. Se identifican para su análisis los registros de lenguaje común (A1a5), algebraico (A2a5), geométrico (A3a4) e icónico (A4a5).

Tabla 17: Registros análisis actividad 7

Registro	Codificación	Tipos de registro/ tipos de cambio de registro/aplicación
Lenguaje común	A1a5	Lenguaje común Registro geométrico Registro icónico Lenguaje común a algebraico Registro geométrico al algebraico Registro icónico al geométrico Aplicación del concepto volumen del paralelepípedo recto como registro algebraico.
Algebraico	A2a5	
Geométrico	A3a4	
Icónico	A4a5	

Fuente: elaboración propia

Actividad 8: Situación problema 5 (Empaque de celular).

Tomando como referencia la moda y la abundancia de elementos electrónicos como celulares, se plantea una situación de empaque de estos en cajas de forma paralelepípedo recto. Se identifican para su análisis los registros de lenguaje común (A1a5), algebraico (A2a5), geométrico (A3a4) e icónico (A4a5).

Tabla 18: Registros análisis actividad 8

Registro	**Codificación**	**Tipos de registro/ tipos de cambio de registro/aplicación**
Lenguaje común	A1a5	Lenguaje común Registro geométrico Registro icónico Lenguaje común a algebraico Registro geométrico al algebraico Registro icónico al geométrico Aplicación del concepto volumen del paralelepípedo recto como registro icónico.
Algebraico	A2a5	
Geométrico	A3a4	
Icónico	A4a5	

Fuente: elaboración propia

8 RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este apartado, se analizan los resultados de las actividades tanto la diagnostica, como las actividades de la unidad didáctica planteadas bajo las categorías definidas y sus respectivos descriptores. Es importante tener en cuenta que los instrumentos de investigación empleados para la recolección de la información fueron el cuestionario y la observación. Desde luego, el investigador desde una posición neutra, registra lo que los estudiantes manifiestan y el ambiente que se evidencia en el aula de clase.

8.1 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA PRUEBA DIAGNOSTICA

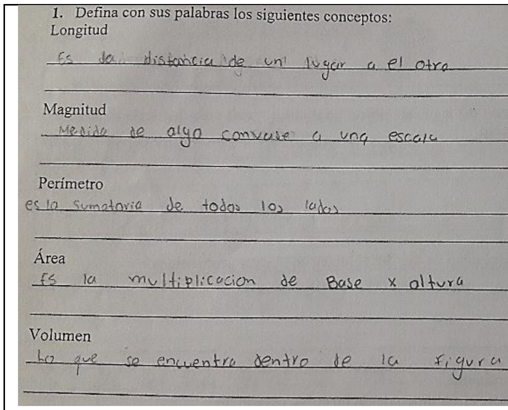
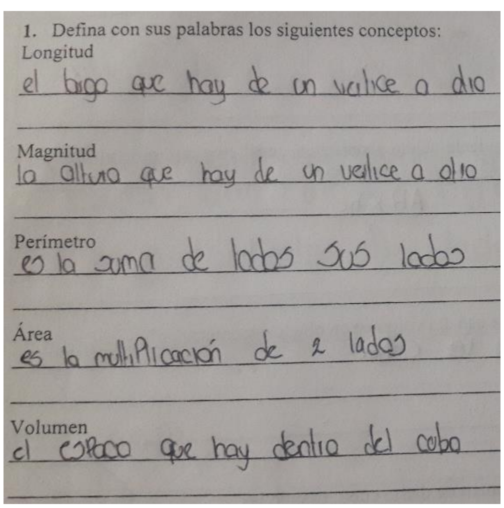
La prueba aplicada de manera individual se destacan algunos aspectos que se amplían en este apartado. Al observar los estudiantes se muestran en expectativa al leer cada uno de los cuestionamientos de la prueba, con expresiones corporales de asombro y manifestaciones verbales de no conocer lo que se está preguntando. El docente hace sensibilización alrededor de responder conscientemente cada pregunta y no responde las preguntas de los estudiantes.

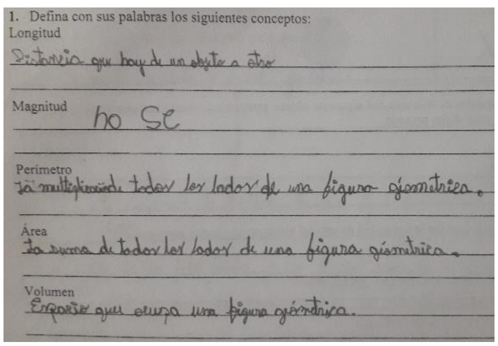
Como se ha mencionado anteriormente en la descripción de la actividad de ideas previas, se hace el análisis de lo representativo en los resultados.

En lo correspondiente al análisis de las ideas relacionado con los conceptos de longitud, perímetro, área y volumen, se puede interpretar las respuestas de tres estudiantes. Sandra, Leonardo y Laura desarrollaron respectivamente la primera pregunta con estas respuestas:

Tabla 19: Análisis prueba diagnóstica – parte 1

Respuestas del estudiante	Registro semiótico	Interpretación
	Lenguaje común	La estudiante muestra con sus palabras el reconocimiento del concepto de longitud, magnitud, perímetro. El concepto de área, la define de la forma de

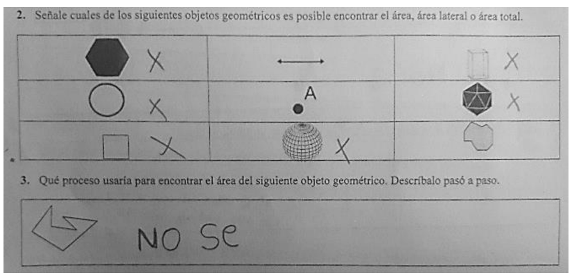
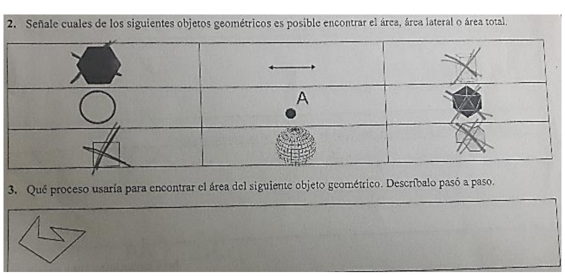
 1. Defina con sus palabras los siguientes conceptos: Longitud Es la distancia de un lugar a el otro Magnitud Medida de algo convase a una escala Perímetro es la sumatoria de todos los lados Área Es la multiplicacion de Base x altura Volumen Lo que se encuentra dentro de la figura Longitud: “Es la distancia de un lugar a otro”. Magnitud: “Medida de algo con base en una escala”. Perímetro: “Es la sumatoria de todos los lados”. Área: “Es la multiplicación de base x altura” Volumen: “Lo que se encuentra dentro de la figura”		encontrarla específicamente del rectángulo, sin embargo, se esperaba indagar el concepto de manera general. Con respecto al concepto de volumen, no es claro en lo que manifiesta la estudiante, ya que el volumen se halla en sólidos y no figuras, interpretadas en este caso como planas.
 1. Defina con sus palabras los siguientes conceptos: Longitud el largo que hay de un vertice a otro Magnitud la altura que hay de un vertice a otro Perímetro es la suma de todos sus lados Área es la multiplicación de 2 lados Volumen el espacio que hay dentro del cubo Longitud: “El largo que hay de un vértice a otro”.	Lenguaje común	El estudiante muestra con sus palabras ejemplos particulares en los conceptos de longitud y magnitud, área y volumen, pero no hay una definición que muestre el manejo de los mismos. Se evidencia apropiación del concepto perímetro, con los

Magnitud: “La altura que hay de un vértice a otro”. Perímetro: “Es la suma de todos sus lados”. Área: “Es la multiplicación de 2 de sus lados” Volumen: “El espacio que hay dentro del cubo ”		términos que usa en su definición.
 Longitud: “Distancia que hay de un objeto a otro”. Magnitud: “No sé”. Perímetro: “La multiplicación de todos los lados de una figura geométrica”. Área: “La suma de todos los lados de una figura geométrica” Volumen: “Espacio que ocupa una figura geométrica”	Lenguaje común	La estudiante muestra que con sus palabras comprende el concepto de longitud. No tiene conocimiento del concepto de magnitud. No hay claridad en los conceptos de perímetro y área. De igual manera el volumen lo define en una figura geométrica, debe hacer claridad que es en un cuerpo, ya que puede haber confusión en esos términos “figura y cuerpo”.

Fuente: elaboración propia

Del mismo modo, se analizan las figuras geométricas donde se encuentra área y el volumen. En lo que corresponde a objetos geométricos que es posible encontrar área, área lateral y total, Fernando y Santiago respondieron respectivamente lo siguiente para su respectivo análisis:

Tabla 20: Análisis prueba diagnóstica – parte 2

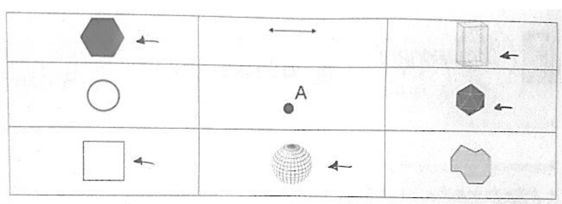
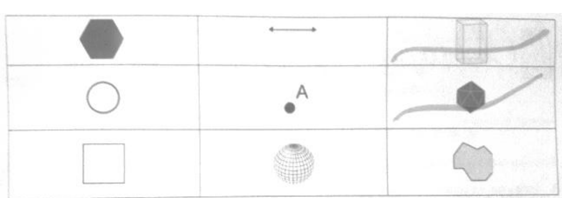
Respuestas del estudiante	Registro semiótico	Interpretación
	Icónico	Se observa que el estudiante a pesar que no elige la figura irregular, identifica las demás figuras y sólidos en los cuales es posible encontrar el área, área lateral o total. Del mismo modo no sabe el proceso para encontrar el área del polígono cóncavo del punto 3.
	Icónico	El estudiante no conocer que en el círculo es posible encontrar área. Sin embargo, señala las demás figuras. No conoce el proceso

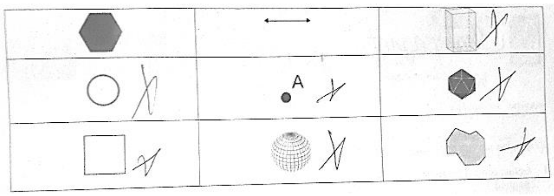
		para encontrar el área del polígono cóncavo del punto 3.

Fuente: elaboración propia

En lo que corresponde a objetos geométricos que es posible encontrar el volumen, Luis, Leonardo y Laura respondieron respectivamente para su análisis:

Tabla 21: Análisis prueba diagnóstica – parte 3

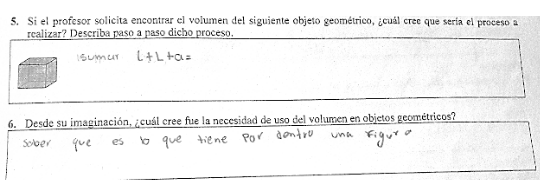
Respuestas del estudiante	Registro semiótico	Interpretación
	Icónico	Se observa que el estudiante no reconoce que objetos como el hexágono, cuadrado, no es posible encontrar el volumen.
	Icónico	El estudiante reconoce que, a los sólidos paralelepípedo e icosaedro, es posible encontrar el volumen. Sin embargo, no identifica que la esfera también es posible.

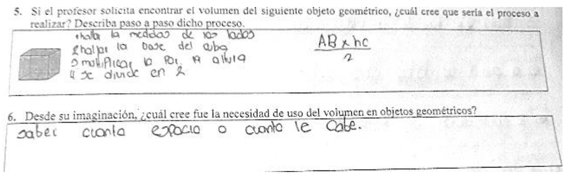
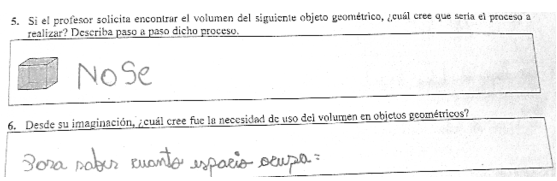
	Icónico	La estudiante muestra dificultades al reconocer los objetos donde es posible encontrar el volumen, puesto que elige el circulo, el punto, el cuadrado y el polígono cóncavo.

Fuente: elaboración propia

Ahora, se presenta un análisis de las respuestas de los estudiantes Luis, Sandra y Santiago, alrededor de las apreciaciones que tienen, con respecto a la necesidad del concepto de volumen.

Tabla 22: Análisis prueba diagnóstica – parte 4

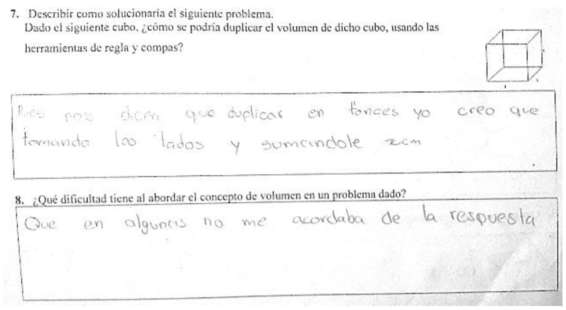
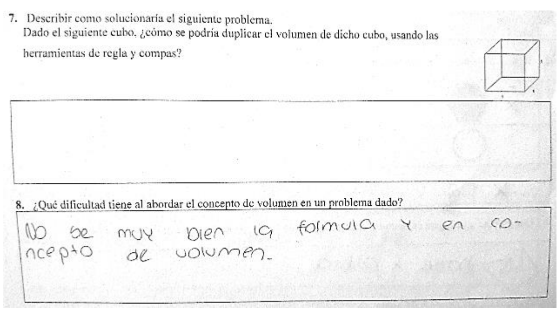
Respuestas del estudiante	Registro semiótico	Interpretación
 5. Si el profesor solicita encontrar el volumen del siguiente objeto geométrico, ¿cuál cree que sería el proceso a realizar? Describa paso a paso dicho proceso. sumar L+L+a= 6. Desde su imaginación, ¿cuál cree fue la necesidad de uso del volumen en objetos geométricos? saber que es lo que tiene por dentro una figura “sumar L + L + a = ”	Geométrico y algebraico	El estudiante no conoce el proceso para encontrar el volumen del objeto geométrico. Del mismo modo no tiene claro el concepto del volumen, se puede presumir que lo confunde con el

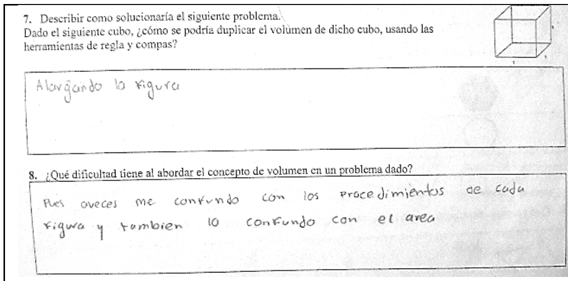
		concepto de capacidad.
 5. Si el profesor solicita encontrar el volumen del siguiente objeto geométrico, ¿cuál cree que sería el proceso a realizar? Describa paso a paso dicho proceso. 6. Desde su imaginación, ¿cuál cree fue la necesidad de uso del volumen en objetos geométricos? saber cuanto espacio o cuanto le cabe. “1 hallar medidas de los lados 2 hallar la base del cubo 3 multiplicarlo por la altura 4 se divide en dos”	Geométrico y algebraico	La estudiante describe una serie de procesos, que no son correctos, y manejo de términos tampoco es claro. De otro lado, reconoce la necesidad del concepto volumen en objetos geométricos.
 5. Si el profesor solicita encontrar el volumen del siguiente objeto geométrico, ¿cuál cree que sería el proceso a realizar? Describa paso a paso dicho proceso. No Se 6. Desde su imaginación, ¿cuál cree fue la necesidad de uso del volumen en objetos geométricos? “No se” “Para saber cuanto espacio ocupa?	Geométrico y algebraico	El estudiante no conoce el proceso de encontrar el volumen del sólido. Sin embargo, reconoce la necesidad del volumen de objetos geométricos.

Fuente: elaboración propia

Y para finalizar, el análisis de lo que manifiestan Fernando, Leonardo y Laura, respecto a cómo podrían con los conocimientos que tienen, duplicar un cubo, usando las herramientas de regla y compas.

Tabla 23: Análisis prueba diagnóstica – parte 5

Respuestas del estudiante	Registro semiótico	Interpretación
 7. Describir como solucionaría el siguiente problema. Dado el siguiente cubo, ¿cómo se podría duplicar el volumen de dicho cubo, usando las herramientas de regla y compas? Pues nos dicen que duplicar en tonces yo creo que tomando los lados y sumandole 2cm 8. ¿Qué dificultad tiene al abordar el concepto de volumen en un problema dado? Que en algunas no me acordaba de la respuesta “pues nos dicen que duplicar entonces yo creo que tomando los lados y sumándole 2 cm” “Que en algunas no me acordaba de la respuesta”	Lenguaje común y geométrico	El estudiante presenta una apreciación desde lo que conoce y reconoce la dificultad en los vacíos conceptuales que se encuentran al manifestar el no recordar las respuestas.
 7. Describir como solucionaría el siguiente problema. Dado el siguiente cubo, ¿cómo se podría duplicar el volumen de dicho cubo, usando las herramientas de regla y compas? 8. ¿Qué dificultad tiene al abordar el concepto de volumen en un problema dado? No se muy bien la formula y en concepto de volumen. “No se muy bien la formula y el concepto de volumen”	Lenguaje común y geométrico	El estudiante desconoce los procesos que puede plantear respecto a la duplicación del cubo y los aspectos que lleva a comprender el concepto de volumen.
	Lenguaje común y geométrico	La estudiante manifiesta lo que desde su apreciación considera en cuanto a la duplicación del cubo. Además,

 7. Describir como solucionaría el siguiente problema. Dado el siguiente cubo, ¿cómo se podría duplicar el volumen de dicho cubo, usando las herramientas de regla y compas? Alargando la figura 8. ¿Qué dificultad tiene al abordar el concepto de volumen en un problema dado? Pues aveces me confundo con los procedimientos de cada figura y tambien lo confundo con el area "Alargando la figura" "Pues aveces me confundo con los procedimientos de cada figura y tambien la confundo con el área"		reconoce no tened claro los procedimientos para abordar el concepto de volumen, puesto hay confusión con el concepto de área.

Fuente: elaboración propia

Luego del análisis de los resultados de la prueba diagnóstica, se lograr concluir que la mayoría de los estudiantes tienen dificultades conceptuales en elementos como el reconocimiento de figuras planas, y cuerpos geométricos. Desde luego, se puede identificar los saberes y destrezas que los estudiantes tienen en las representaciones de objetos y los vacíos conceptuales alrededor de la magnitud volumen del paralelepípedo recto.

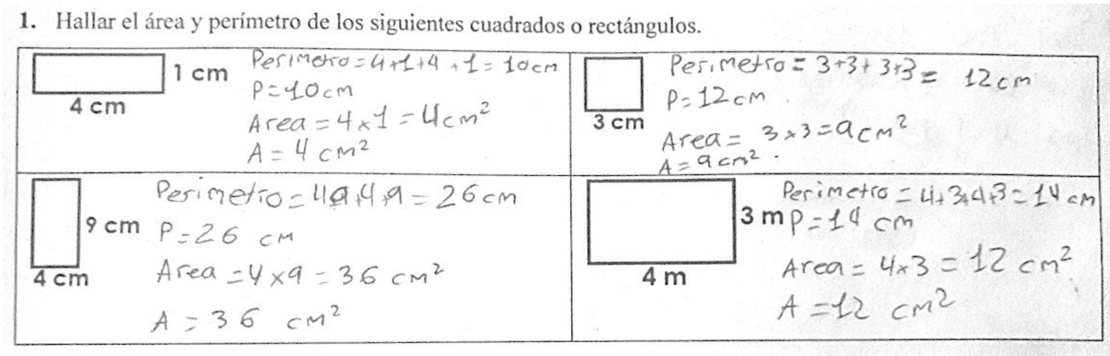
8.2 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LAS ACTIVIDADES

A continuación, se realiza el análisis de los registros de cada una de las actividades de los seis estudiantes.

Área y perímetro del cuadrado y rectángulo

El numeral 1, permite reconocer las representaciones y los procedimientos algebraicos que se desarrollas para la solución del mismo.

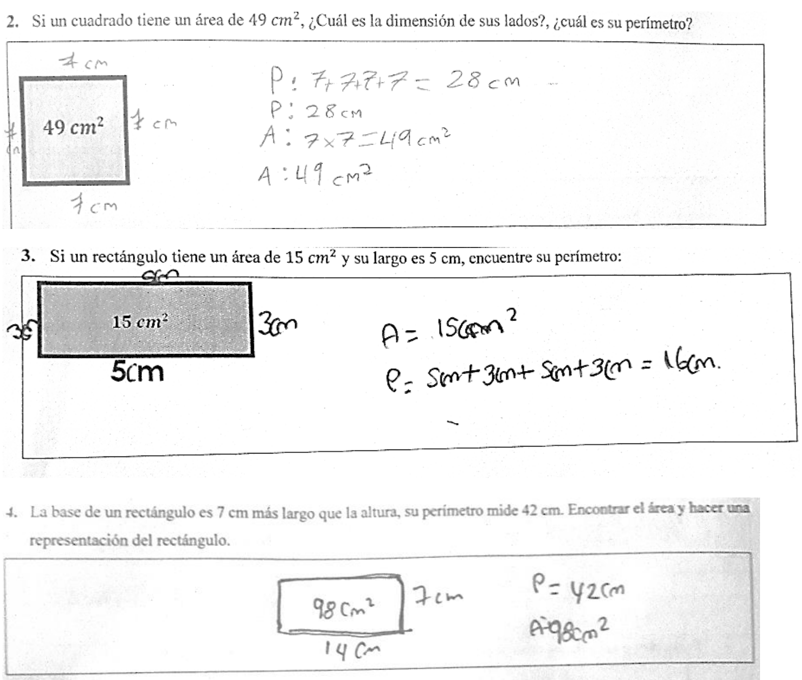
Ilustración 1: Registro actividad 1 - parte 1



Fuente: elaboración propia

Se evidencia en la mayoría de los estudiantes la apropiación de los conceptos de perímetro y área de regiones rectangulares, como se evidencia en la imagen soporte. El numeral 2,3 y 4, permiten conocer los procedimientos que los estudiantes realizan para solucionar un problema geométrico.

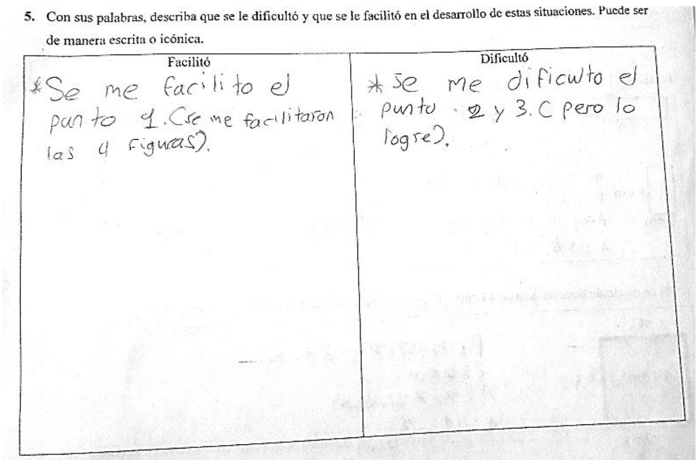
Ilustración 2: Registro actividad 1 - parte 2



Fuente: elaboración propia

Se evidencia en la mayoría de los estudiantes usar diferentes medios para llegar a la solución de cada problema geométrico, como se evidencian en las imágenes de soporte. El numeral 5, aborda las apreciaciones de los estudiantes respecto a las facilidades o dificultades que se presentaron al desarrollar la actividad.

Ilustración 3: Registro actividad 1 - parte 3



Fuente: elaboración propia

Se presentan manifestaciones comunes en el análisis de este numeral, y se puede evidenciar en que es más practico cuando los ejercicios contienen información para usar de manera técnica, y dificultad cuando se debe deducir procesos para llegar a la solución de los mismos. A continuación, se muestra la categorización y el nivel de desempeño de los estudiantes en esta actividad.

Tabla 24: Categorización actividad 1

Categoría	Tipos de registro/ tipos de cambio de registro/aplicación	Descriptor	Desempeño de los estudiantes
2	Registro geométrico a registro algebraico	D1	Fernando: Superior Luis: Básico
2	Registro icónico a registro algebraico	D1	Sandra: Superior Leonardo: Básico

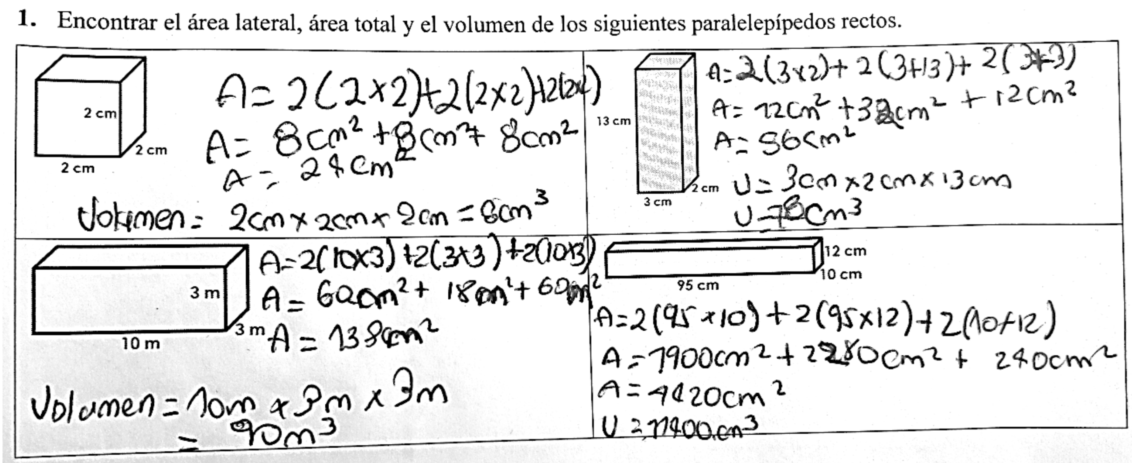
			Laura: Básico Santiago: Superior

Fuente: elaboración propia

Área lateral, área total y volumen

El numeral 1, permite reconocer las representaciones y los procedimientos algebraicos que se desarrollas para la solución del mismo.

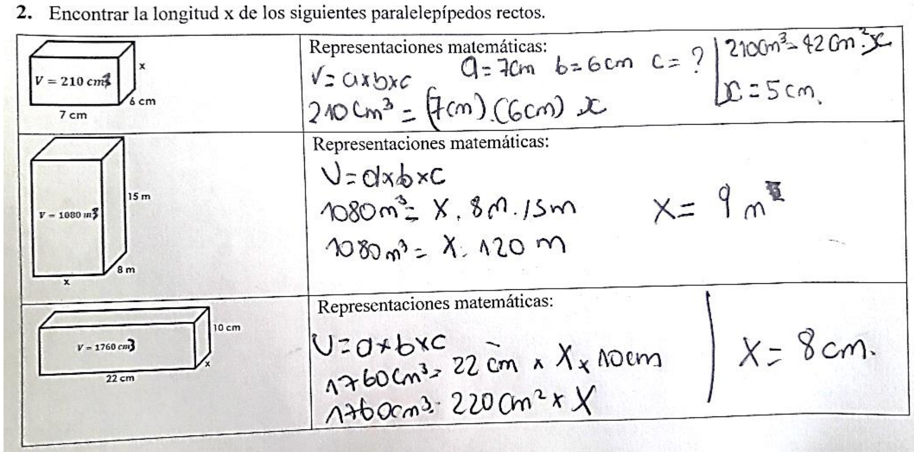
Ilustración 4: Registro actividad 2 - parte 1



Fuente: elaboración propia

Se observa que, aunque la mayoría de estudiantes aplican los procedimientos hay algunas dificultades en el desarrollo algorítmico de los mismos. Del mismo modo se presentan errores en algunos procesos aritméticos, puesto que en estos no se tienen en cuenta la jerarquía de las operaciones básica. En el numeral 2, se abordan tres representaciones de paralelepípedos rectos, con su volumen, donde se exploran los acercamientos que tienen los estudiantes a este tipo de representaciones.

Ilustración 5: Registro actividad 2 - parte 2

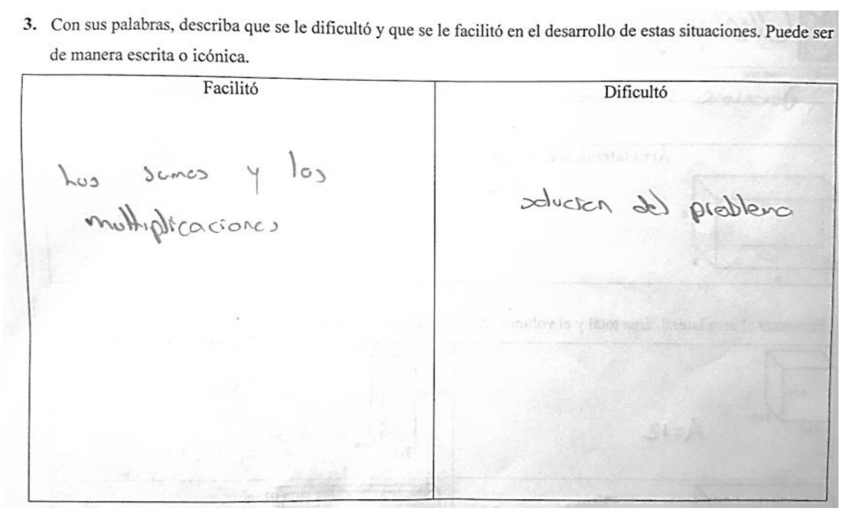

2. Encontrar la longitud x de los siguientes paralelepípedos rectos.

$V = 210\ cm^3$; x; 6 cm; 7 cm	Representaciones matemáticas: $V = a \times b \times c$ $a = 7cm$ $b = 6cm$ $c = ?$ $210\ cm^3 = (7cm)(6cm)\ x$ $210\ cm^3 = 42\ cm^2\ x$ $x = 5\ cm$
$V = 1080\ m^3$; 15 m; 8 m; x	Representaciones matemáticas: $V = a \times b \times c$ $1080\ m^3 = X \cdot 8m \cdot 15m$ $1080\ m^3 = X \cdot 120\ m$ $X = 9\ m^3$
$V = 1760\ cm^3$; 10 cm; x; 22 cm	Representaciones matemáticas: $V = a \times b \times c$ $1760\ cm^3 = 22\ cm \times X \times 10cm$ $1760\ cm^3 = 220\ cm^2 \times X$ $X = 8\ cm.$

Fuente: elaboración propia

Al desarrollar los ejercicios los estudiantes presentan obstáculos en cuanto a la deducción de la incógnita, y por las expresiones que manifiestan algunos estudiantes, puede inferirse que es coherente, puesto que a este nivel de escolaridad los estudiantes no tienen apropiadas el uso de variables "letras" en su conocimiento. En el numeral 3, aborda las apreciaciones de los estudiantes respecto a las facilidades o dificultades que se presentaron al desarrollar la actividad.

Ilustración 6: Registro actividad 2 - parte 3


3. Con sus palabras, describa que se le dificultó y que se le facilitó en el desarrollo de estas situaciones. Puede ser de manera escrita o icónica.

Facilitó	Dificultó
los sumas y los multiplicaciones	solucion del problema

Fuente: elaboración propia

Como se ha descrito anteriormente, hay manifestaciones tanto escritos como verbales al uso de operaciones básicas en los procedimientos. Sin embargo, la solución de problemas hay dificultad por el tipo de representaciones que se usan. A continuación, se muestra la categorización y el nivel de desempeño de los estudiantes en esta actividad.

Tabla 25: Categorización actividad 2

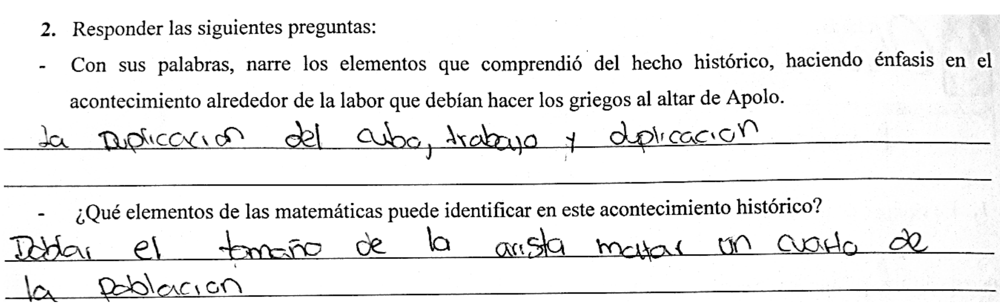
Categoría	Tipos de registro/ tipos de cambio de registro/aplicación	Descriptor	Desempeño de los estudiantes
1	Registro algebraico	D1, D2	Fernando: Básico
1	Registro geométrico	D1, D2	Luis: Básico
2	Registro icónico	D1	Sandra: Básico
2	Registro geométrico a algebraico	D2	Leonardo: Básico
	Registro icónico a algebraico	D2	Laura: Básico
			Santiago: Superior

Fuente: elaboración propia

Duplicación del cubo

El numeral 1 de la actividad que presenta una lectura de un hecho histórico, permite a través de la comprensión de los estudiantes identificar elementos para responder a cada uno de los siguientes cuestionamientos. En el numeral 2, se aborda los elementos que los estudiantes comprendieron alrededor del hecho histórico.

Ilustración 7: Registro actividad 3 - parte 1



2. Responder las siguientes preguntas:

- Con sus palabras, narre los elementos que comprendió del hecho histórico, haciendo énfasis en el acontecimiento alrededor de la labor que debían hacer los griegos al altar de Apolo.

la Duplicacion del cubo, trabajo y duplicacion

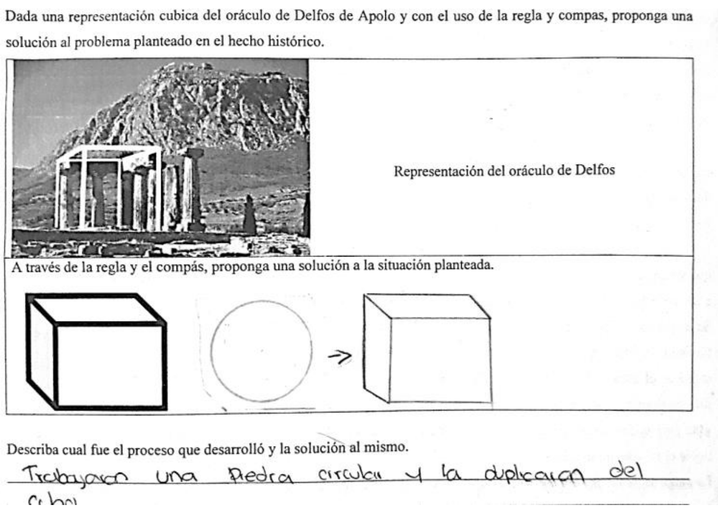
- ¿Qué elementos de las matemáticas puede identificar en este acontecimiento histórico?

Doblar el tamaño de la arista matar un cuarto de la poblacion

Fuente: elaboración propia

Es un ejercicio interesante, puesto que los estudiantes destacan la importancia de conocer los elementos, necesidades y problemas que en la historia se dieron, para entender mejor los procesos hoy en día. Sin embargo, se observa que se presentan obstáculos en registrar las apreciaciones de los estudiantes, porque se limitan a la identificación de la duplicación del cubo. Desde luego, se debe profundizar con más frecuencia la comprensión de lectura.

Ilustración 8: Registro actividad 3 - parte 2


Dada una representación cubica del oráculo de Delfos de Apolo y con el uso de la regla y compas, proponga una solución al problema planteado en el hecho histórico.

Representación del oráculo de Delfos

A través de la regla y el compás, proponga una solución a la situación planteada.

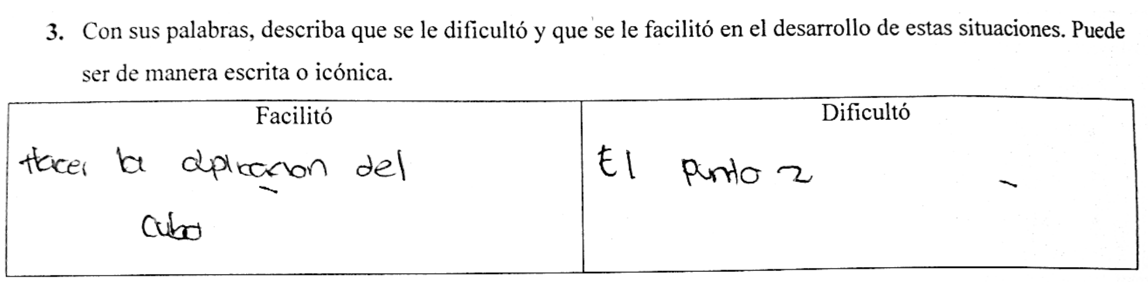
Describa cual fue el proceso que desarrolló y la solución al mismo.

Trabajaron una piedra circular y la duplicaron del cubo

Fuente: elaboración propia

En el numeral 3, aborda las apreciaciones de los estudiantes respecto a las facilidades o dificultades que se presentaron al desarrollar la actividad.

Ilustración 9: Registro actividad 3 - parte 3


3. Con sus palabras, describa que se le dificultó y que se le facilitó en el desarrollo de estas situaciones. Puede ser de manera escrita o icónica.

Facilitó	Dificultó
Hacer la duplicación del cubo	El punto 2

Fuente: elaboración propia

Es evidente que el proceso de duplicar el cubo, desde la imaginación de los estudiantes es complejo, llegando a aspectos comunes con el proceso desarrollado en la historia. Desde luego, se debe realizar a futuro el proceso para lograr solucionar el problema, por procedimientos algebraicos, para que los estudiantes sientan la satisfacción de lograr su solución, puesto que verbalmente muestran motivación para conocer el procedimiento a realizar. A continuación, se muestra la categorización y el nivel de desempeño de los estudiantes en esta actividad.

Tabla 26: Categorización actividad 3

Categoría	Tipos de registro/ tipos de cambio de registro/aplicación	Descriptor	Desempeño de los estudiantes
1 1 2	Registro lenguaje común Registro icónico Lenguaje común a algebraico	D1 D2 D1	Fernando: Básico Luis: Básico Sandra: Básico Leonardo: Básico Laura: Básico Santiago: Básico

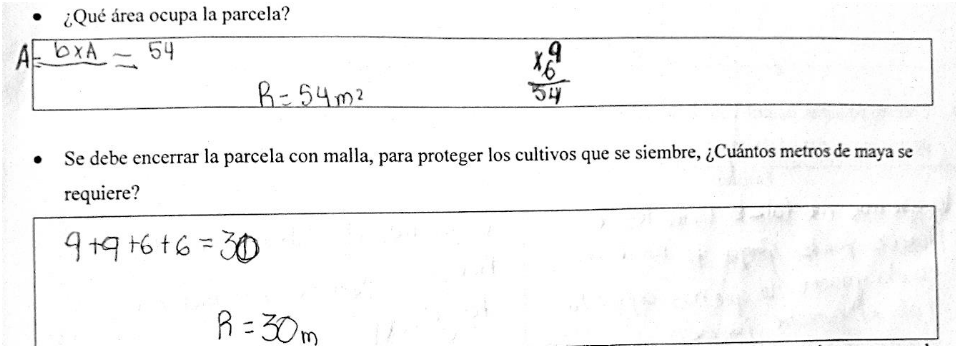
Fuente: elaboración propia

En los siguientes problemas se reconocen las representaciones que poseen los estudiantes desde problemas contextuales.

Situación problema 1 (huerta escolar).

En la primera parte al cuestionarse en la actividad sobre el área y el perímetro, la mayoría de estudiantes identificar elementos geométricos y algebraicos para llegar a la solución.

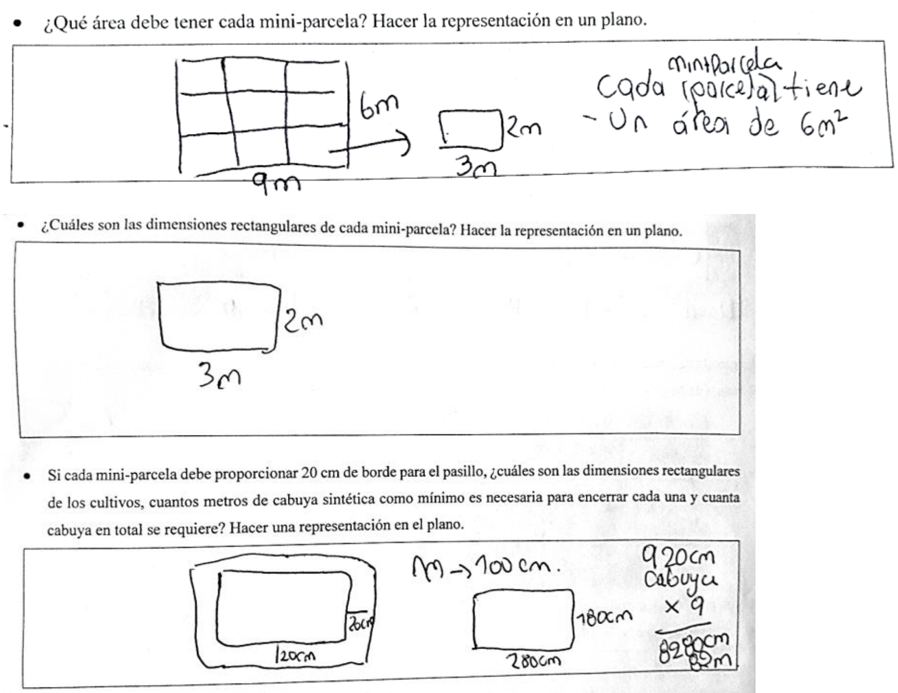
Ilustración 10: Registro actividad 4 - parte 1



Fuente: elaboración propia

Además, hay una apropiación en la interpretación del problema, y la traducción desde la información del problema del contexto al lenguaje algebraico o en su defecto a los procedimientos matemáticos. En la segunda parte, en cuanto a la división de la parcela en mini-parcelas, se logra identificar la comprensión de la mayoría de estudiantes, y llegan a resultados esperados.

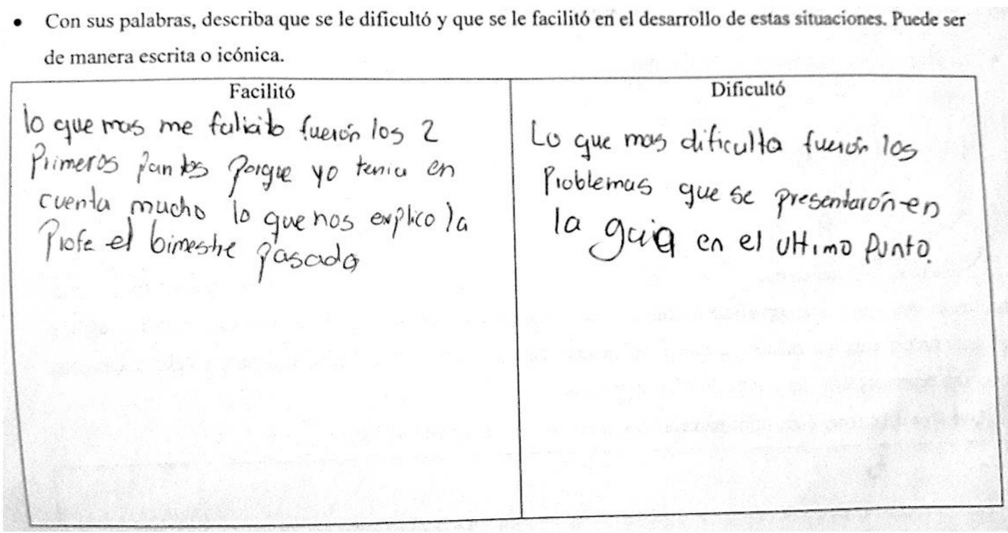
Ilustración 11: Registro actividad 4 - parte 2



Fuente: elaboración propia

Se evidencia manejo implícito en las unidades de medida, permitiendo llegar a una respuesta dando solución a los cuestionamientos planteados. En cuanto a las apreciaciones de los estudiantes respecto a las facilidades o dificultades que se presentaron al desarrollar la actividad, las manifestaciones de los estudiantes son satisfactorias, puesto que había aspectos abordados anteriormente. Sin embargo, hay elementos que se deben reforzar en la interpretación de los problemas, ya que aún se presentan obstáculos.

Ilustración 12: Registro actividad 4 - parte 3



- Con sus palabras, describa que se le dificultó y que se le facilitó en el desarrollo de estas situaciones. Puede ser de manera escrita o icónica.

Facilitó	Dificultó
lo que mas me falicito fueron los 2 Primeros puntos porque yo tenia en cuenta mucho lo que nos explico la Profe el bimestre pasado	Lo que mas dificulta fueron los Problemas que se presentaron en la guia en el ultimo punto

Fuente: elaboración propia

A continuación, se muestra la categorización y el nivel de desempeño de los estudiantes en esta actividad.

Tabla 27: Categorización actividad 4

Categoría	Tipos de registro/ tipos de cambio de registro/aplicación	Descriptor	Desempeño de los estudiantes
2	Lenguaje común a algebraico	D1	Fernando: Superior Luis: Básico Sandra: Superior Leonardo: Superior

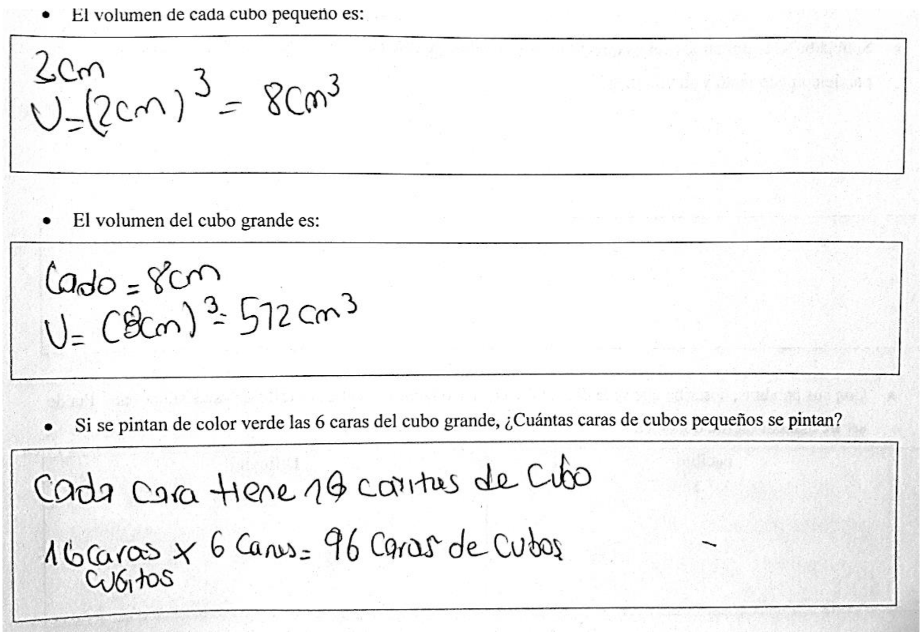
			Laura: Básico Santiago: Superior

Fuente: elaboración propia

Situación problema 2 (Cubo de cubos)

En la primera parte al cuestionarse en la actividad sobre el volumen de un cubo, compuesto por cubos de menor tamaño, la mayoría de estudiantes identifican aspectos como se muestra a continuación.

Ilustración 13: Registro actividad 5 - parte 1



- El volumen de cada cubo pequeño es:

2cm
$V=(2cm)^3 = 8cm^3$

- El volumen del cubo grande es:

Lado = 8cm
$V= (8cm)^3 = 512 cm^3$

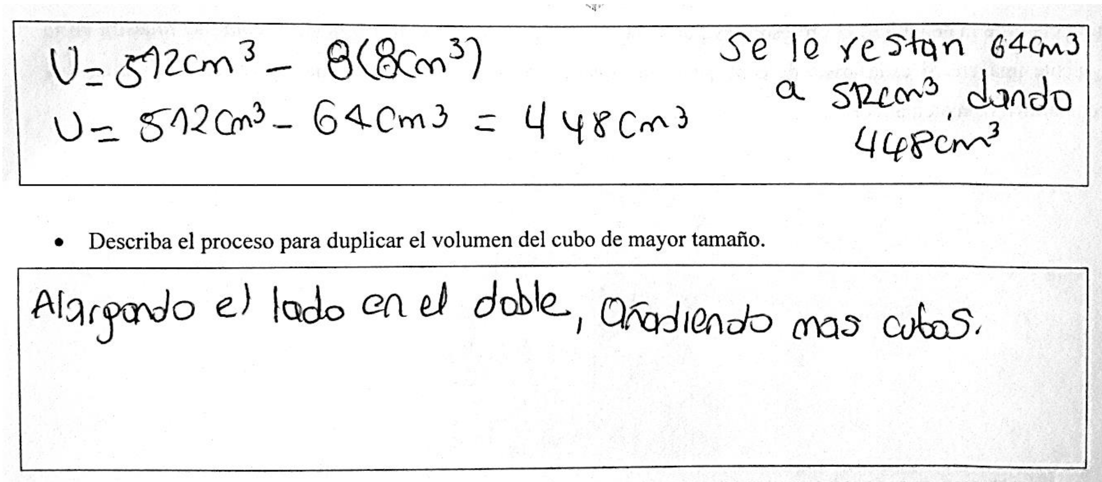
- Si se pintan de color verde las 6 caras del cubo grande, ¿Cuántas caras de cubos pequeños se pintan?

Cada cara tiene 16 caritas de cubo
16 caras cubitos x 6 caras = 96 caras de cubos

Fuente: elaboración propia

En absoluto a los estudiantes se les facilita desarrollar la actividad, con apoyo del objeto físico, desde el observar y el palpar el cubo. En la segunda parte, donde se presenta una situación de retirar 8 cubos y encontrar el nuevo volumen del cubo, los estudiantes presentan dificultades en la interpretación y en el cuestionamiento de la duplicación del cubo. Sin embargo, la mayoría de estudiantes alcanzan los resultados esperados.

Ilustración 14: Registro actividad 5 - parte 2



$V = 512cm^3 - 8(8cm^3)$

$V = 512cm^3 - 64cm3 = 448cm3$

Se le restan 64cm3 a 512cm³, dando 448cm³

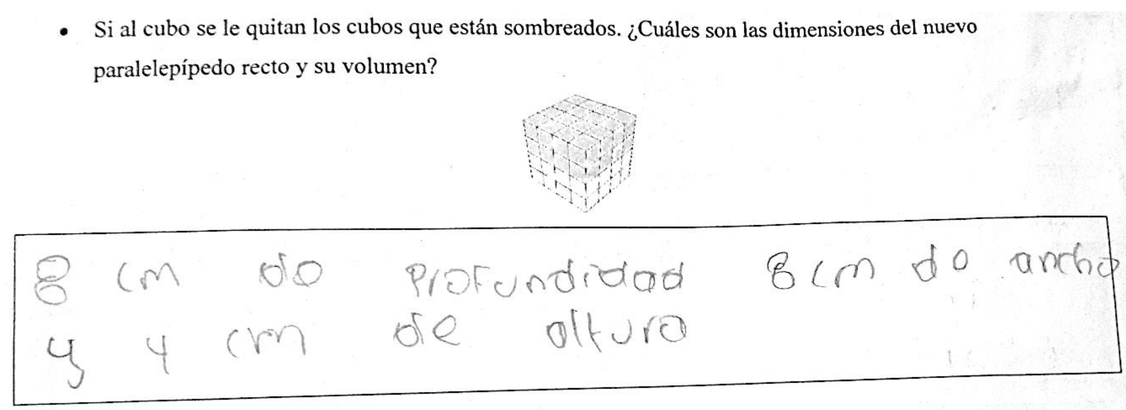
• Describa el proceso para duplicar el volumen del cubo de mayor tamaño.

Alargando el lado en el doble, añadiendo mas cubos.

Fuente: elaboración propia

En la siguiente parte de la actividad, se evidencia que los estudiantes interpretan la representación presentadas y deducen los aspectos cuestionados en la misma.

Ilustración 15: Registro actividad 5 - parte 3



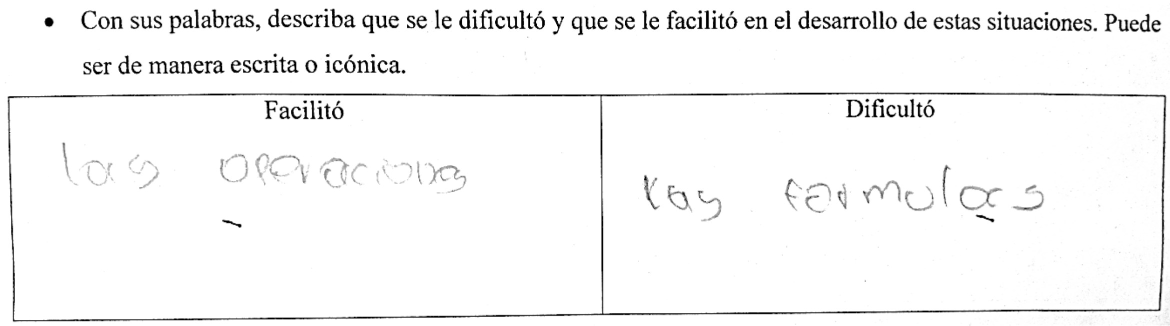
• Si al cubo se le quitan los cubos que están sombreados. ¿Cuáles son las dimensiones del nuevo paralelepípedo recto y su volumen?

8 cm do profundidad 8 cm do ancho y 4 cm de altura

Fuente: elaboración propia

Y en las manifestaciones de los estudiantes alrededor de la facilidad o dificultad que experimento en la actividad, se registra que, aunque la mayoría de veces se llegan a resultados esperados, los estudiantes presentan algunas dificultades en las formulas o la interpretación de las mismas, al aplicarlas en la solución de problemas.

Ilustración 16: Registro actividad 5 - parte 4



- Con sus palabras, describa que se le dificultó y que se le facilitó en el desarrollo de estas situaciones. Puede ser de manera escrita o icónica.

Facilitó	Dificultó
las operaciones	las formulas

Fuente: elaboración propia

A continuación, se muestra la categorización y el nivel de desempeño de los estudiantes en esta actividad.

Tabla 28: Categorización actividad 5

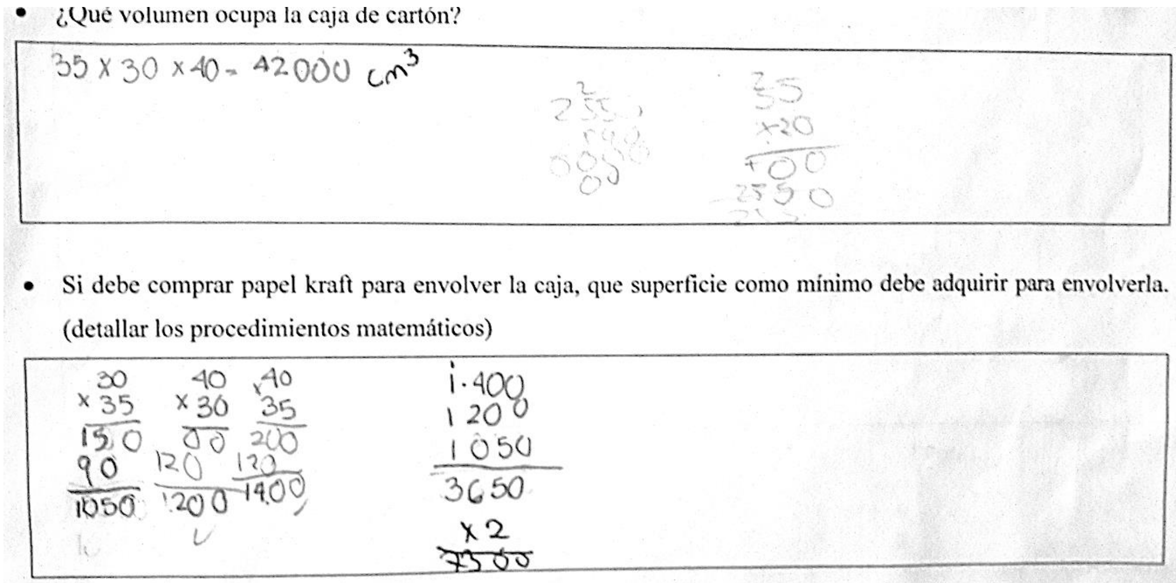
Categoría	Tipos de registro/ tipos de cambio de registro/aplicación	Descriptor	Desempeño de los estudiantes
1	Lenguaje común	D2	Fernando: Superior
1	Registro icónico	D1, D2	Luis: Superior
1	Registro geométrico	D1	Sandra: Básico
2	Lenguaje común a algebraico	D1	Leonardo: Básico
2	Registro icónico al lenguaje común		Laura: Superior
2	Registro icónico al algebraico	D1	Santiago: Superior
2	Registro icónico al geométrico	D1	
3	Aplicación del concepto de volumen del paralelepípedo recto como registro icónico.	D1	

Fuente: elaboración propia

Situación problema 3 (Empaque)

En este problema la mayoría de estudiantes muestran una actitud dispuesta frente a los cuestionamientos que se presentan allí. En cuanto al volumen de la caja de cartón, se registran procedimientos prácticos donde se evidencia el uso de operaciones básicas, para lograr llegar a los resultados esperados.

Ilustración 17: Registro actividad 6 - parte 1



- ¿Qué volumen ocupa la caja de cartón?

35 x 30 x 40 = 42000 cm³

- Si debe comprar papel kraft para envolver la caja, que superficie como mínimo debe adquirir para envolverla. (detallar los procedimientos matemáticos)

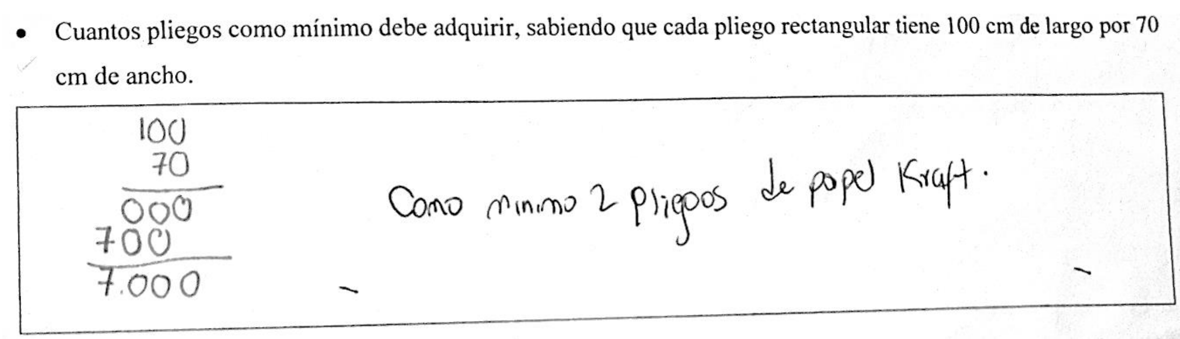
30 x 35 = 1050; 40 x 30 = 1200; 40 x 35 = 1400

1.400 + 1200 + 1050 = 3650 x 2

Fuente: elaboración propia

Sin embargo, en lo que tiene que ver con el área, traducida en encontrar la cantidad de papel kraft, no se tienen en cuenta los registros geométricos de fórmulas para llegar a la solución, sino que buscan desde el desarrollo de otros procedimientos.

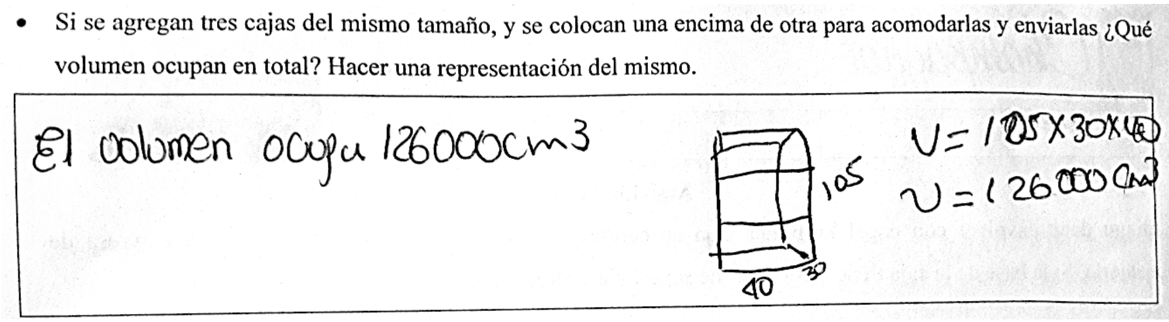
Ilustración 18: Registro actividad 6 - parte 2



- Cuantos pliegos como mínimo debe adquirir, sabiendo que cada pliego rectangular tiene 100 cm de largo por 70 cm de ancho.

100 x 70 = 7.000

Como minimo 2 pliegos de papel Kraft.



- Si se agregan tres cajas del mismo tamaño, y se colocan una encima de otra para acomodarlas y enviarlas ¿Qué volumen ocupan en total? Hacer una representación del mismo.

El volumen ocupa 126000cm3

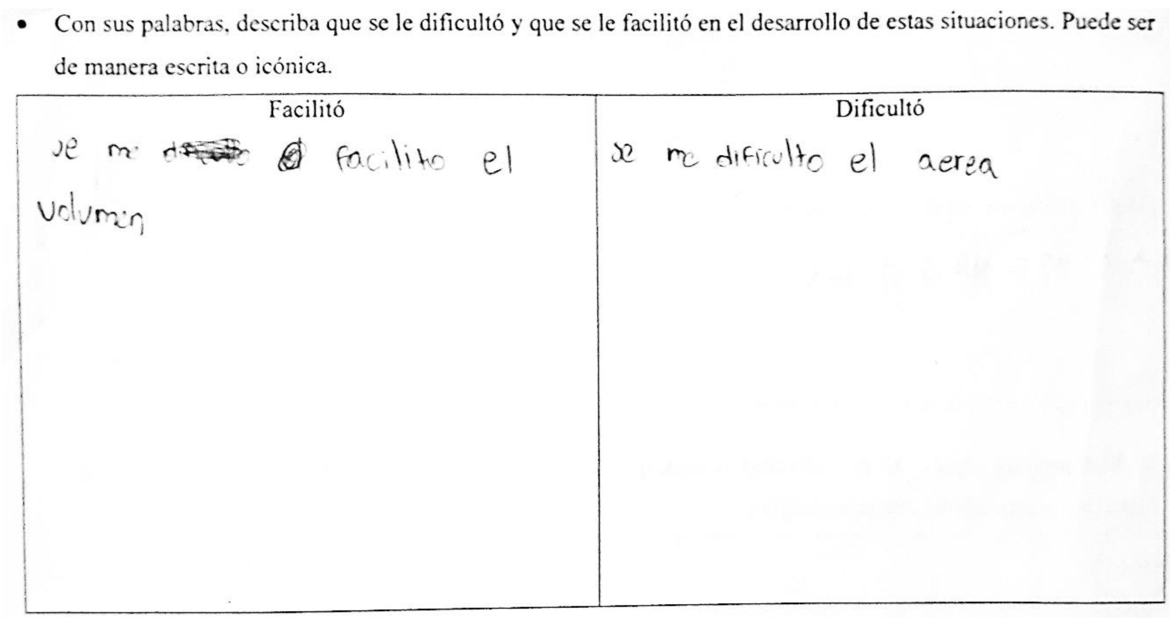
105 40 30

V= 105X30X40
V = 126000 Cm3

Fuente: elaboración propia

En las manifestaciones de los estudiantes alrededor de la facilidad o dificultad que presentaron en la actividad, se registra que, si bien el volumen es claro en el problema, cuando se aborda el área o la traducción del lenguaje común al matemático hay dificultades en el desarrollo del mismo por parte de los estudiantes.

Ilustración 19: Registro actividad 6 - parte 3



- Con sus palabras, describa que se le dificultó y que se le facilitó en el desarrollo de estas situaciones. Puede ser de manera escrita o icónica.

Facilitó	Dificultó
se me facilito el volumen	se me dificulto el aerea

Fuente: elaboración propia

A continuación, se muestra la categorización y el nivel de desempeño de los estudiantes en esta actividad.

Tabla 29: Categorización actividad 6

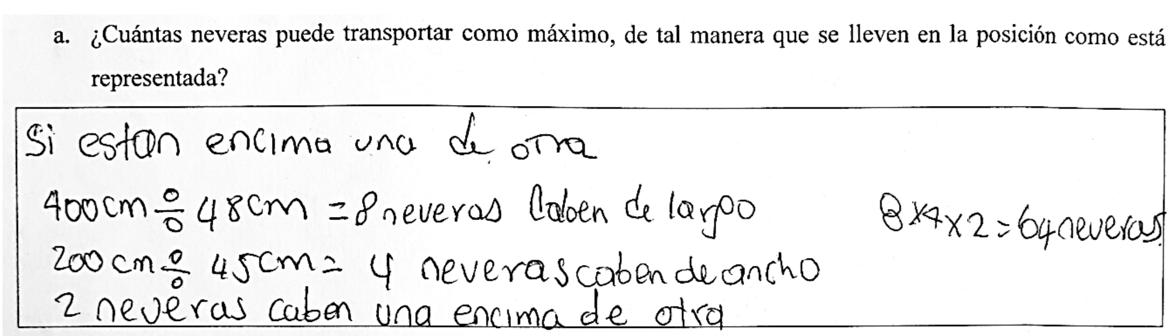
Categoría	Tipos de registro/ tipos de cambio de registro/aplicación	Descriptor	Desempeño de los estudiantes
1	Lenguaje común	D2	Fernando: Superior
1	Registro algebraico	D1	Luis: Superior
2	Lenguaje común a algebraico	D1	Sandra: Básico
2	Registro geométrico al algebraico	D2	Leonardo: Superior
2	Registro icónico al geométrico	D3	Laura: Básico
3	Aplicación del concepto volumen del paralelepípedo recto como registro geométrico.	D1	Santiago: Superior

Fuente: elaboración propia

Situación problema 4 (Transporte)

Las apreciaciones que los estudiantes muestran al abordar este problema, en un inicio es de asombro y a medida que comprenden y deducen los procedimientos a desarrollar, presentan interés, manifestando opiniones al respecto. Algunos estudiantes presentan dificultad al comprender el proceso a realizar en cuanto a la conversión de unidades de medidas para llegar a la respuesta esperada. A continuación, se muestra el avance en el desarrollo de esta actividad.

Ilustración 20: Registro actividad 7 - parte 1.


a. ¿Cuántas neveras puede transportar como máximo, de tal manera que se lleven en la posición como está representada?

Si estan encima una de otra
400cm ÷ 48cm = 8 neveras caben de largo
200 cm ÷ 45cm = 4 neveras caben de ancho
2 neveras caben una encima de otra
8x4x2 = 64 neveras

b. ¿Qué volumen ocupa cada nevera?

$45cm \times 48cm \times 92cm = 199720cm^3$

c. ¿Qué volumen ocupan la cantidad máximo de neveras que se transportan en el furgón de camión?

$199720cm^3 \times 64 = 12782080cm^3$

d. ¿Es posible que al estar completo el cupo de neveras en el furgón, haya espacio vacío? Si es así, ¿Qué volumen vacío queda en el furgón?

Si queda cupo.

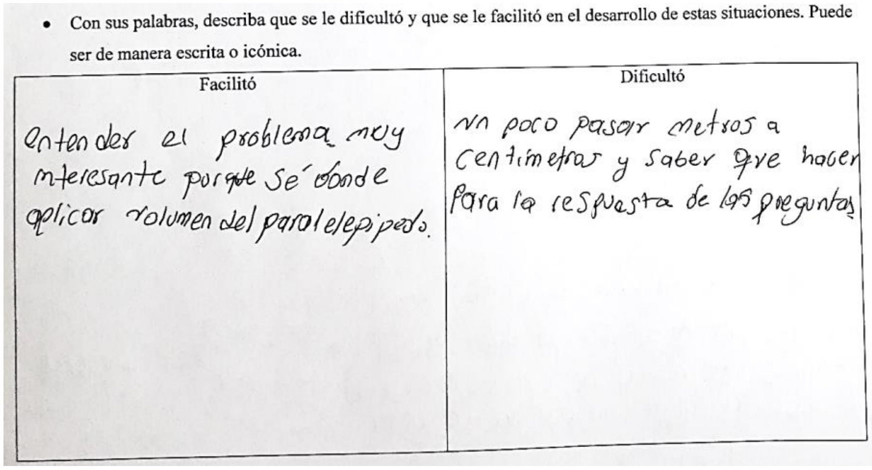
Volumen del furpon: $400cm \times 200cm \times 200cm = 16\,000.000cm^3$

El volumen vasío es: $16000.000 - 12782080 = 3217920cm^3$

Fuente: elaboración propia

Se observa que en esta actividad hay un acercamiento a lo esperado, en las apreciaciones y soluciones que los estudiantes realizan al problema y que se registra en la manera en que la mayoría de estudiantes realizan los procedimientos matemáticos, lo que hace suponer que hay más asertividad en el reconocimiento de los diferentes registros semióticos. Ahora, en lo que expresan los estudiantes y coinciden con las apreciaciones alrededor de la facilidad o dificultad que presentaron en la actividad, se registra que, ya hay un acercamiento más claro a la representación de la magnitud volumen, no de manera puramente matemática, sino en la identificación en situaciones problema, como a continuación lo indica:

Ilustración 21: Registro actividad 7 - parte 2.



- Con sus palabras, describa que se le dificultó y que se le facilitó en el desarrollo de estas situaciones. Puede ser de manera escrita o icónica.

Facilitó	Dificultó
entender el problema muy interesante porque sé dónde aplicar volumen del paralelepipedo.	un poco pasar metros a centimetros y saber que hacer para la respuesta de las preguntas

Fuente: elaboración propia

A continuación, se muestra la categorización y el nivel de desempeño de los estudiantes en esta actividad.

Tabla 30: Categorización actividad 7

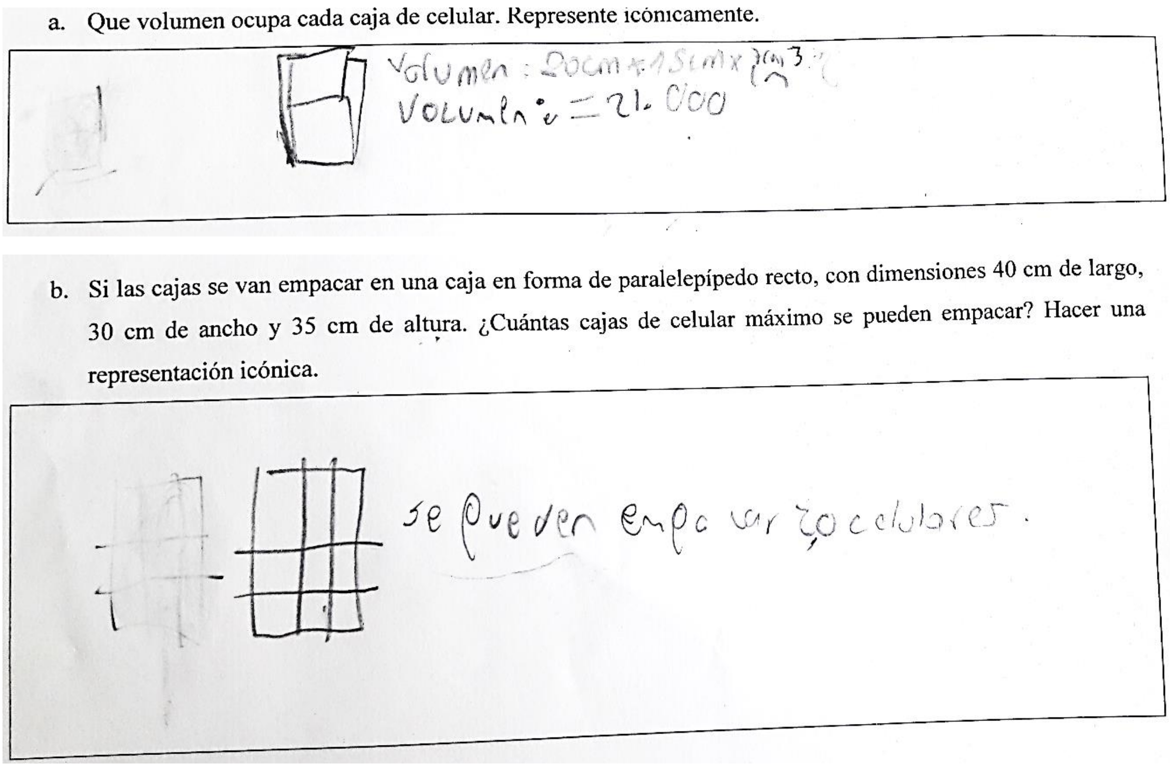
Categoría	Tipos de registro/ tipos de cambio de registro/aplicación	Descriptor	Desempeño de los estudiantes
1	Lenguaje común	D3	Fernando: Superior
1	Registro geométrico	D1	Luis: Básico
1	Registro icónico	D1	Sandra: Superior
2	Lenguaje común a algebraico	D1	Leonardo: Superior
2	Registro geométrico al algebraico	D3	Laura: Superior
2	Registro icónico al geométrico	D1	Santiago: Superior
3	Aplicación del concepto volumen del paralelepípedo recto como registro algebraico.	D1	

Fuente: elaboración propia

Situación problema 5 (Empaque de celular)

Este problema, permite reconocer y soportar los análisis realizados en actividades anteriores, puesto que los estudiantes presentan una actitud similar al desarrollar esta actividad. Se presentan dificultades al representar el dibujo del problema, sin embargo, algunos de los procedimientos matemáticos son acorde a lo que se espera en la solución del mismo.

Ilustración 22:Registro actividad 8 - parte 1


a. Que volumen ocupa cada caja de celular. Represente icónicamente.

Volumen : 20cm x 15cm x 7cm3

Volumen = 21.000

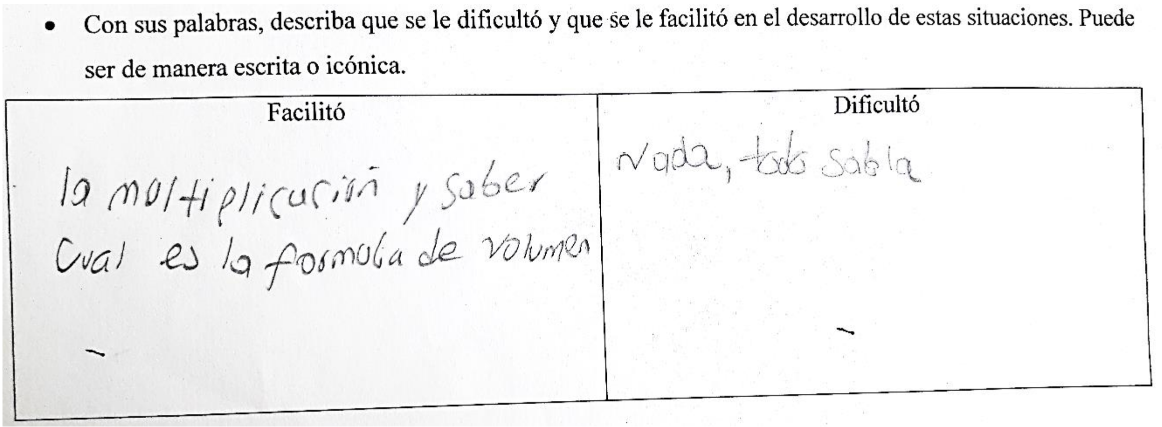
b. Si las cajas se van empacar en una caja en forma de paralelepípedo recto, con dimensiones 40 cm de largo, 30 cm de ancho y 35 cm de altura. ¿Cuántas cajas de celular máximo se pueden empacar? Hacer una representación icónica.

se pueden empacar 20 celulares.

Fuente: elaboración propia

En las expresiones de facilidad o dificultad de la actividad manifestadas por los estudiantes, la mayoría de ellos coinciden en habilidad que tienen a desarrollar la misma, como se evidencia en este registro.

Ilustración 23: Registro actividad 8 - parte 2



- Con sus palabras, describa que se le dificultó y que se le facilitó en el desarrollo de estas situaciones. Puede ser de manera escrita o icónica.

Facilitó	Dificultó
la moltiplicución y saber cual es la formula de volumen	nada, todo sabia

Fuente: elaboración propia

A continuación, se muestra la categorización y el nivel de desempeño de los estudiantes en esta actividad.

Tabla 31: Categorización actividad 8

Categoría	Tipos de registro/ tipos de cambio de registro/aplicación	Descriptor	Desempeño de los estudiantes
1	Lenguaje común	D3	Fernando: Superior
1	Registro geométrico	D2	Luis: Superior
1	Registro icónico	D2	Sandra: Superior
2	Lenguaje común a algebraico	D1	Leonardo: Superior
2	Registro geométrico al algebraico	D2	Laura: Básico
2	Registro icónico al geométrico	D1	Santiago: Superior
3	Aplicación del concepto volumen del paralelepípedo recto como registro icónico.	D1	

Fuente: elaboración propia

9 CONCLUSIONES

Una vez analizadas de manera descriptiva y analítica las actividades bajo los parámetros planteados y después de contrastarlos a la luz de los objetivos de este trabajo de investigación y los aspectos teóricos definidos de la teoría de las representaciones semióticas de Raymond Duval, se pueden detallar las siguientes conclusiones generales:

- El trabajo pedagógico donde se asuma el manejo o uso de variados registros semióticos o diferentes representaciones de objetos matemáticos, son fundamentales para el aprendizaje, pero este, en ocasiones no es una tarea naturalizada para los estudiantes, puesto que cada uno desarrolla habilidad en la que mejor comprenda o sienta significado apropiar para su uso. Por tanto, es necesario desde el liderazgo del docente en el aula de clase, el abordaje de los registros semióticos definidos (lenguaje común, algebraico, geométrico e icónico), y otros que puedan relacionarse y representarse con el componente matemático que se aborde.
- Reconocer que los estudiantes tenían conocimientos previos de la magnitud de volumen o se acercaron de manera verbal a este, es pertinente mencionar que los procesos de enseñanza y didáctica empleados en años anteriores, no fueron lo suficientemente significativos para el aprendizaje de los estudiantes, puesto que en la mayoría de ellos se inclinaban por el registro algebraico, traducido a la memorización de fórmulas, y no del análisis y la deducción de los procedimientos a desarrollar.
- Es fundamental abordar objetos matemáticos previos del componente central a estudiar o enseñar, realizando la identificación de los registros semióticos presentes en estos, como también las actividades cognitivas de tratamiento y conversión presentadas, para lograr una consolidación y comprensión de los mismos, e identificarlos en situaciones problema.
- Abordar un aspecto histórico alrededor de la magnitud volumen del paralelepípedo recto en la unidad didáctica, que representa un hecho en el cual en un momento del desarrollo de la humanidad tuvo importancia y trascendencia, permite que los estudiantes se acerquen con más expectativa a la apropiación del conocimiento científico, porque lo relacionan como un componente significativo para su saber,

fortaleciendo se argumentación frente a la necesidad de existencia de aspectos de la historia en la enseñanza y con seguridad logran un proceso de aprendizaje exitoso.

- Se confirma la teoría de Duval (2004), donde se plantea que entre más representaciones semióticas se involucren en el aprendizaje de un concepto matemático (en este caso la magnitud de volumen del paralelepípedo recto) y al interior de estas representaciones, se faciliten condiciones de congruencia, se alcanza una mejor comprensión, logrando que el estudiante establezca la diferencia entre la representación semiótica del concepto matemático y él objeto matemático representado, discriminar sus unidades significantes y ponerlas en correspondencia en otros registros, ya que el reconocimiento de la invarianza entre estas unidades significantes es la que permite la aprehensión del concepto matemático.
- El tratamiento que los estudiantes hacen del registro algebraico, es solo de la manera general en términos de la definición de la ecuación representada en la fórmula para hallar el área, el perímetro o el volumen. Es decir, hay dificultades en evidenciar otra forma de representar el registro, por lo cual, se deduce que es por el nivel de escolaridad, ya que no hay herramientas fortalecidas para realizar estas deducciones.
- Según los análisis de los resultados arrojados de la unidad didáctica y la observación del investigador, los estudiantes de grado sexto muestran una actitud activa y motivados frente a las actividades planteadas, mostrando mayor interés hacia situaciones problema que pueden ser evidenciados en su contexto y donde se realice actividades de tratamiento de representaciones semióticas que involucran la magnitud de volumen del paralelepípedo recto, que en situaciones donde se desarrolla actividades de conversión. Sin embargo, se percibe que la conversión tiene un nivel más amplio de competencia, puesto que aumenta el panorama de representación no solo en un registro, sino en varios, y permite abrir un catálogo de opciones de representación matemática.
- Los registros lenguaje común y el algebraico, se convierten algunas veces en obstáculos para la aprehensión y la comprensión de los estudiantes. Esto se presenta porque aún se identifican dificultades en el desarrollo de procedimientos aritméticos con lo que comúnmente se conoce como la traducción del lenguaje común al lenguaje simbólico en matemáticas.

- Para los estudiantes, la actividad de conversión de los registros geométrico a icónico, son de mayor comprensión y utilidad, presuntamente por la metodología tradicional con que se enseñado la geometría durante mucho tiempo y que los estudiantes tiene marcado en los procesos de aprendizaje que se llevan a cabo.
- Es evidente que, en el aprendizaje de las matemáticas, se debe seguir fortaleciendo habilidades de comprensión de lectura, puesto que se registran aspectos donde no hay una comprensión de las situaciones problema, y por ende dificultades en los resultados o soluciones esperadas.
- La consolidación de categorías alrededor de tratamientos, conversiones y aplicaciones en situaciones problema, donde está involucrado la magnitud de volumen del paralelepípedo recto, permite realizar un análisis más riguroso de los resultados y determinar el nivel de desempeño de los estudiantes, con proyección a futuro un plan de acción, que logre avance en la puesta en escena de las diferentes representaciones de un objeto matemático.

10 RECOMENDACIONES

Algunos aspectos como propuesta para profundizar en otro espacio en lo que se planteó en el desarrollo del trabajo.

- Es necesario establecer y fortalecer la inclusión de la teoría de las representaciones semióticas a las prácticas pedagógicas en el aula de clase, por parte de los docentes, en beneficio del aprendizaje de los estudiantes, ya que como lo muestran los estudios científicos al respecto, son pieza fundamental en el aprendizaje de las matemáticas.
- Los resultados obtenidos en la unidad didáctica, son del contexto donde se desarrolló el trabajo de investigación. Es importante proponer su intervención en otros contextos (instituciones educativas), de tal manera que los análisis de la categorización puedan soportar o confrontar las conclusiones de este trabajo.
- Además de los problemas que aquí se proponen, plantear otras actividades de tratamiento y conversión con situaciones problema en las que se evidencie la representación del volumen del paralelepípedo recto, y que sean de la cotidianidad y contexto de los estudiantes.
- Como complemento al trabajo, proponer el uso de herramientas de software de geometría dinámica como el Geogebra, específicamente para la representación del paralelepípedo recto, para que el trabajo tenga un enfoque educativo mediado por las TIC y que logre involucrar más al estudiante.

11 REFERENCIAS

Agudelo, Y. M. (2013). *La modelación: Una posibilidad para desarrollar la estimación de cantidades continuas en la magnitud volumen a estudiantes de grado 9°.* Manizales.

Anaconda, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. *EMA, 8*, 30-46.

Bocanegra, I. (2013). *Diseño de una Herramienta Didáctica para la Formación del Profesor de Matemáticas Utilizando Elementos Históricos de lo Logarítmico y lo Exponencial.*

Buenaventura, J. (2015). Representaciones semióticas de solidos que tienen los estudiantes de educación media. Universidad del Tolima, Ibagué Tolima.

D'Amore, B. (2007). El papel de la Epistemología en la formación de Matemática de la escuela secundaria. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Díaz, J., Mena, H. (2016). Representaciones semióticas en la enseñanza de función cuadrática para estudiantes de media vocacional (tesis de maestría). Disponible es: http://www.ingeniaudea.co/pluginfile.php/75342/mod_resource/content/1/TRABAJO%20DE%20GRADO.pdf

F.J, P. P. (1993). La resolución de problemas. *Una revisión estructurada.* Granada.

Fauvel, J., & Maanen, J. V. (2002). *History in Mathematical Education* . Estados Unidos de Ámerica: Kluwer academic publisher.

Garcia, E., Gil, J., & Rodriguez, G. (1996). Metodo de la investigacion cualitativa. Ediciones Aljibe, Granada España.

Gomez, I. (2003). La Tarea Intelectual en Matemáticas Afecto, Meta-afecto y los Sistemas de Creencias. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X*(2), 225-247.

Gomez, M. A. (2005). La transposición didáctica. Historia de un concepto. *Revista Latinoamericana de estudios educativos*, 83-115.

Gómez, H. (2014). *La Historia de las Matemáticas en la formación de profesores: Un ejemplo de su transposición didáctica.* Bogotá.

Guacaneme, E., & Torres, L. (2010). *Aproximación a las estrategias curriculares de formación en Historia de las Matemáticas en programas de formación inicial de profesores de matemáticas.* Proyecto de investigación presentado a la Convocatoria

Interna para la Conformación del Banco de Proyectos de Investigación, Universidad del Valle.

Guzmán, M. de (1984). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana en Educación, (43)*, p 19-58.

Martinez, E. C. (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. Universidad de Granada.

Ministerio de Educación Nacional (2016). Derechos básicos de aprendizaje. Recuperado de http://colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pdf

Ministerio de Educación Nacional (2015). Colombianos: conozcan los resultados de las pruebas saber 11° en las regiones del país. [Comunicado de prensa] Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/w3-article-354565.html

Ministerio de Educación Nacional (2006). Estándares básicos de competencias. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Ministerio de Educación Nacional (1998). Lineamientos curriculares en matemáticas. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf8.pdf.

Mazario, I., Sanz, T., & Hernández, R. (2009). Reflexiones sobre un tema polémico. La resolución de problemas. Habana: Universitaria CUBA.

Muñoz, R., (2004). Tres problemas clásicos y complejidad. *Revista Suma, (43),* p 29-36.

Osorio, L. (2011). Representaciones semióticas en el aprendizaje del teorema de Pitágoras. Universidad Autónoma de Manizales, Colombia.

Ospina, D., (2012). Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal. (tesis de maestría), Universidad Autónoma de Manizales, Disponible en: http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/bitstream/11182/245/1/Tesis_Las%20representaciones%20semi%C3%B3ticas%20en%20el%20aprendizaje%20del%20concepto%20de%20funci%C3%B3n%20lineal.pdf.

Perales, F. J., & Cañal de Leon, P. (2000). El diseño de unidades didácticas. Universidad Autónoma de Barcelona: Marfil - Colección Ciencias de la Educación.

Rodríguez Gómez, G., Gil Flores, J., & García Jiménez, E. (1999). Metodología de la investigación cualitativa. Málaga: Aljibe.

Sanmartí, N. (2010). El diseño de unidades didácticas. En F. Perales, & P. Cañal de Leon, *Didactica de las Ciencias Experimentales.* Barcelona: Marfil, Colección Ciencias de la Educación.

Serrano, A. F. (2011). *Procesos metafectivos en el aprendizaje de las Matemáticas.* Manizales.

Sáiz, M., (2002). El pensamiento del Maestro de primaria acerca del concepto de volumen y su enseñanza. (tesis de doctorado). Centro de investigación y de estudios avanzados del Instituto Politecnico Nacional. Mexico D.F.

Tamayo, O. E. (2012). *Didácticas Dominio - Especificas y modularidad de la mente.* Manizales Caldas.

Tamayo et al., (2010). *La clase multimodal. Formación y evolución de conceptos científicos a través del uso de tecnologías de la información y comunicación*. Manizales- Caldas, Colombia. Universidad Autónoma de Manizales.

Taylor, S. J., & Bogdan, R. (1987). Introducción a los métodos cualitativos de investigación.

Trigo, M. S. (2008). *La resolucón de problemas: Avances y perspectivas de la construcción de un agenda de Investigación y Práctica.* CINVESTAD IPN.

Ugalde, W. J. (2014). Funciones. Desarrollo historico del concepto y actividades de enseñanza y aprendizaje. *Revista digital. Matemática, Educación e Internet*, 1-47.

Villalonga, P., (2017). La competencia matemática. Caracterización de actividades de aprendizaje y evaluación en la resolución de problemas en la enseñanza obligatoria. (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona. Disponible es: http://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/457718/jmvp1de1.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Zapico, I. (2006). Enseñar matemática con su historia. *Sociedad Argentina de Educación Matemática.*

12 ANEXOS

Anexo 1: Documento de consentimiento informado para la publicación de imágenes de los estudiantes para el proyecto de investigación: Representaciones semióticas en la resolución de situaciones problema que involucran la magnitud volumen del paralelepípedo recto en estudiantes de grado sexto.

Atendiendo al ejercicio de la Patria Potestad, establecido en el Código Civil Colombiano en su artículo 288, el artículo 24 del Decreto 2820 de 1974 y la Ley de Infancia y Adolescencia, el docente John Hadminton Díaz Avendaño, profesor activo del colegio Champagnat de Ibagué solicita la autorización escrita del padre/madre de familia o acudiente del (la) estudiante_______________________________________, del grado: _________ identificado(a) con tarjeta de identidad número__________________, alumno activo del colegio Champagnat de Ibagué, para que aparezca ante la cámara con fines pedagógicos que se realizará en las instalaciones del colegio Champagnat. El propósito de estas fotografías es registrar los espacios pedagógicos de la clase de matemáticas, y quedará alojado en las plataformas y en trabajo físico y digital de la Universidad Autónoma de Manizales, y de la misma institución educativa. Sus fines son netamente pedagógicos, sin lucro y en ningún momento será utilizado para objetivos distintos. Estas imágenes serán soporte de evidencia para el proyecto de investigación.

Autorizo,

Nombre del padre/madre de familia o acudiente: ______________________________

Cédula de ciudadanía ____

Firma del padre de familia o acudiente: __________________________________

Nombre del estudiante y tarjeta de identidad: ______________________________

Firma de estudiante: ____

Nombre del estudiante:	Curso:	Guía No.	Fecha:

Anexo 2: Diseño de una unidad didáctica para reconocer las representaciones semióticas en la resolución de situaciones problema que involucran la magnitud volumen del paralelepípedo recto en estudiantes de grado sexto del colegio Champagnat de Ibagué Tolima.

NÚCLEO TEMÁTICO

Concepto de longitud, vértice, área, y volumen, unidades de medida, representaciones semióticas del concepto del volumen del paralelepípedo.

ESTANDAR BÁSICO DE COMPETENCIA

- Represento objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.
- Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.
- Calculo áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos.

DERECHO BÁSICO DE APRENDIZAJE (versión 2)

- Número 4: utiliza y explica diferentes estrategias (desarrollo de la forma o plantillas) e instrumentos (regla, compas o software) para la construcción de figuras planas y cuerpos.
- Número 5: propone y desarrolla estrategias de estimación, medición y calculo de diferentes cantidades (ángulos, longitudes, áreas, volúmenes, etc.) para resolver problemas.
- Número 6: representa y construye formas bidimensionales y tridimensionales con el apoyo en instrumentos de medida apropiados.

OBJETIVO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Reconocer las representaciones semióticas que los estudiantes de grado sexto tienen de la magnitud volumen del paralelepípedo recto.

Anexo 3: Prueba diagnóstica a través de un cuestionario, que permite explorar ideas previas de los estudiantes alrededor del concepto de la magnitud volumen geométrico.

Tiempo: 45 minutos

Responda cada una de las siguientes preguntas.

1. Defina con sus palabras los siguientes conceptos:

Longitud

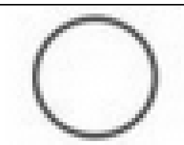
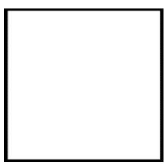
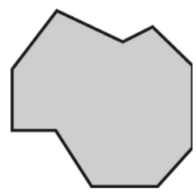
Magnitud

Perímetro

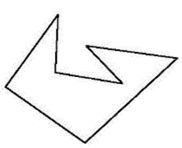
Área

Volumen

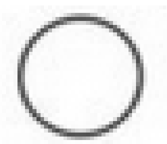
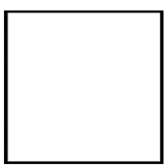
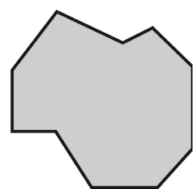
2. Señale cuales de los siguientes objetos geométricos es posible encontrar el área, área lateral o área total.

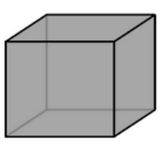
3. Qué proceso usaría para encontrar el área del siguiente objeto geométrico. Descríbalo pasó a paso.



4. Señale cuales de los siguientes objetos geométricos es posible encontrar el área, área lateral o área total.

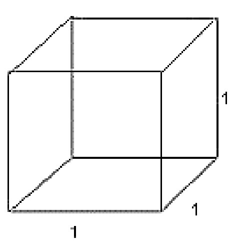
5. Si el profesor solicita encontrar el volumen del siguiente objeto geométrico, ¿cuál cree que sería el proceso a realizar? Describa paso a paso dicho proceso.



6. Desde su imaginación, ¿cuál cree fue la necesidad de uso del volumen en objetos geométricos?

7. Describir como solucionaría el siguiente problema.

Dado el siguiente cubo, ¿cómo se podría duplicar el volumen de dicho cubo, usando las herramientas de regla y compas?



8. ¿Qué dificultad tiene al abordar el concepto de volumen en un problema dado?

Colegio Champagnat Ibagué

GUÍA DE TRABAJO
Área de Matemáticas

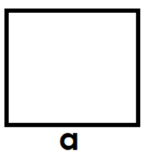
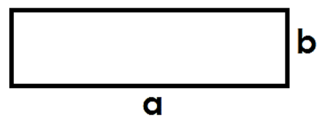
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES

Nombre del estudiante:	Curso:	Guía No.	Fecha:

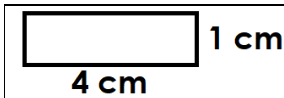
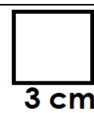
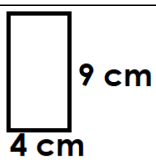
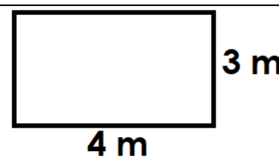
Anexo 4: Actividad 1: Área y perímetro del cuadrado y rectángulo.

Tiempo: 120 minutos

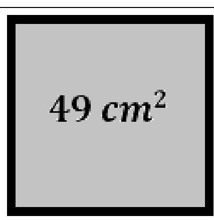
Propósito: Fortalecer los conceptos de área y perímetro del cuadrado y el rectángulo para su aplicación en situaciones problema.

Perímetro y área de un cuadrado	**Perímetro y área del rectángulo**
 $P = 4a$ $A = a^2$	 $P = 2a + 2b$ $A = a * b$

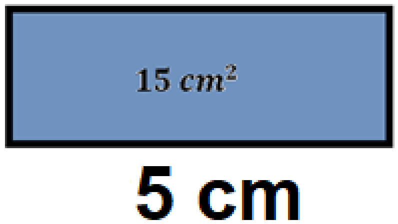
1. Hallar el área y perímetro de los siguientes cuadrados o rectángulos.

2. Si un cuadrado tiene un área de 49 cm^2, ¿Cuál es la dimensión de sus lados?, ¿cuál es su perímetro?



3. Si un rectángulo tiene un área de 15 cm^2 y su largo es 5 cm, encuentre su perímetro:



4. La base de un rectángulo es 7 cm más largo que la altura, su perímetro mide 42 cm. Encontrar el área y hacer una representación del rectángulo.

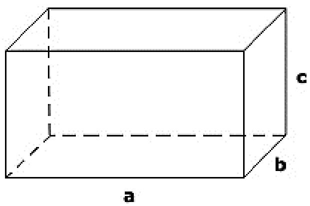
5. Con sus palabras, describa que se le dificultó y que se le facilitó en el desarrollo de estas situaciones. Puede ser de manera escrita o icónica.

Facilitó	Dificultó

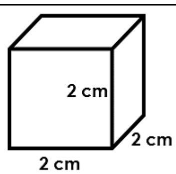
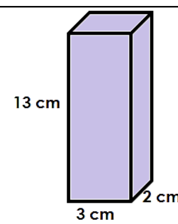
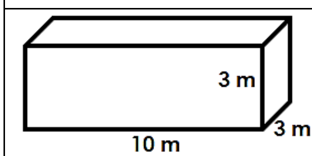
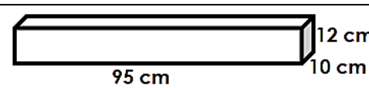
Anexo 5: Actividad 2: Área lateral, área total y volumen del paralelepípedo recto.

Tiempo: 60 minutos.

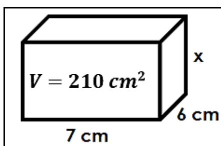
Propósito: Identificar diferentes representaciones de la magnitud volumen del paralelepípedo recto.

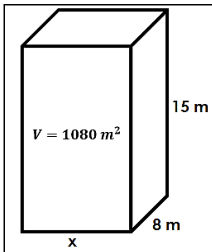
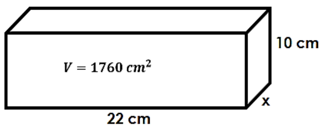
Área lateral, área total y volumen del paralelepípedo recto	
	$\acute{A}\boldsymbol{rea\ Total}: \mathbf{2}(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}) + \mathbf{2}(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{c}) + \mathbf{2}(\boldsymbol{b} * \boldsymbol{c})$ $\boldsymbol{Volumen}: \boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} * \boldsymbol{c}$

1. Encontrar el área lateral, área total y el volumen de los siguientes paralelepípedos rectos.

2. Encontrar la longitud x de los siguientes paralelepípedos rectos.

	Representaciones matemáticas:

	Representaciones matemáticas:
	Representaciones matemáticas:

3. Con sus palabras, describa que se le dificultó y que se le facilitó en el desarrollo de estas situaciones. Puede ser de manera escrita o icónica.

Facilitó	Dificultó

Anexo 6: Actividad 3: Duplicación del cubo.

Tiempo: 45 minutos.

Propósito: Abordar de la historia de la matemática, a través de la contextualización del problema griego “Duplicación del cubo”.

1. En equipos de tres estudiantes, realizar la siguiente lectura.

Duplicación del cubo

Es uno de los tres problemas griegos, que consistía en hallar, mediante el uso de regla y compas, la arista de un cubo que duplique el volumen de un cubo conocido.

El origen del problema de la duplicación del cubo se creé que comenzó en el oráculo de Delos. Fuera del mito, la historia nos enseña que el primer templo de Delfos data de fines del II milenio antes de nuestra era. Construido en la ladera sur del monte Parnaso, está enmarcado por el acantilado rosado de Rhodini y el florido acantilado de Phlemboucos, entre los cuales brota la fuente sagrada de Castalia.

Los peregrinos llegan al lugar ya sea por mar, desembarcando en el pequeño puerto de Kirrha, o por tierra, franqueando el paso de Arachova. A partir del siglo VI, la cercana ciudad de Delfos comienza a obtener ganancias del paso de los peregrinos. En el 548, un incendio destruye el templo: es reconstruido, esta vez más grande y más hermoso, gracias a una suscripción panhelénica. Al comienzo, el oráculo se presenta una vez al año. Debido al éxito cada vez mayor, los sacerdotes adoptan un ritmo mensual y emplean dos, luego tres pitonisas. A pesar de todo, los que vienen a consultar esperan muchas veces varios días antes de que llegue su turno. Estas jornadas son consagradas a las ofrendas, a los sacrificios y a las purificaciones. La gente se refresca en la fuente de Castalia.

Se envió una delegación al oráculo de Apolo en Delfos para preguntar cómo podría conjurarse la peste, que azotó Grecia en torno al año 433 a.C. y mató a un cuarto de la población, a lo que el oráculo contestó que era necesario duplicar el altar cúbico dedicado a

Apolo para ofrecerle mayor ofrenda. Al parecer, los atenienses duplicaron diligentemente las dimensiones del altar, pero esto no sirvió de nada para detener la peste; Sus artesanos cayeron en gran perplejidad en sus esfuerzos para descubrir como el altar había aumentado ocho veces su tamaño cuando se dobla el tamaño de su arista.

La plaga seguramente era un suceso importante en la historia de Grecia y muchos de sus intelectuales se dispusieron a descubrir el misterio que rodeaba aquel bloque de piedra. Este enigma ha seguido interesando a multitud de pensadores en el curso de la historia formándose así uno de los más importantes problemas.

La historia sobre la resolución del problema de la duplicación del cubo está llena de anécdotas, pero lo cierto es que como consecuencia de ello surgió:

- Sección de cónicas.
- Descubrimiento de los inconmensurables. Números irracionales.
- Método de exhaución. Cálculo aproximado del número pi.

2. Responder las siguientes preguntas:

- Con sus palabras, narre los elementos que comprendió del hecho histórico, haciendo énfasis en el acontecimiento alrededor de la labor que debían hacer los griegos al altar de Apolo.

____

____

____

____

- ¿Qué elementos de las matemáticas puede identificar en este acontecimiento histórico?

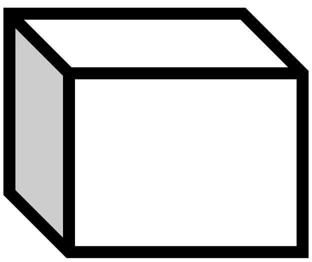
____

____

____

____

- Dada una representación cubica del oráculo de Delfos de Apolo y con el uso de la regla y compas, proponga una solución al problema planteado en el hecho histórico.

<table>
<tr><td></td><td>Representación del oráculo de Delfos</td></tr>
<tr><td colspan="2">A través de la regla y el compás, proponga una solución a la situación planteada.
</td></tr>
</table>

Describa cual fue el proceso que desarrolló y la solución al mismo.

3. Con sus palabras, describa que se le dificultó y que se le facilitó en el desarrollo de estas situaciones. Puede ser de manera escrita o icónica.

Facilitó	Dificultó

Nombre del estudiante:	Curso:	Guía No.	Fecha:

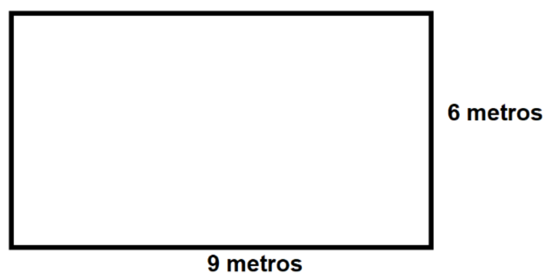
Anexo 7: Actividad 4: Situación problema 1 (huerta escolar).

Tiempo: 30 minutos.

Propósito: Analizar representaciones semióticas alrededor de la magnitud de volumen en situaciones problema y de contexto.

Describir los procesos matemáticos que desarrollar en la solución de las siguientes situaciones:

La parcela destinada para el cultivo de la huerta casera en el colegio Champagnat de Ibagué, tiene como dimensiones 9 metros de largo y 6 metros de ancho como se muestra en la siguiente representación.



Como parte del desarrollo del proyecto ambiental escolar (PRAE), se va a sembrar toda la superficie.

1. ¿Qué área ocupa la parcela?

2. Se debe encerrar la parcela con malla, para proteger los cultivos que se siembre, ¿Cuántos metros de maya se requiere?

La parcela se va a dividir en nueve mini-parcelas rectangulares iguales, de tal manera que desde grado tercero a grado once, cada uno tenga una superficie o mini-parcela y respectivamente siembre una verdura u hortaliza según el siguiente orden: cebolla, zanahoria, tomate, pimentón, cilantro, acelga, remolacha, espinaca y cebolla cabezona. Hacer una representación de la parcela y las mini-parcelas.

3. ¿Qué área debe tener cada mini-parcela? Hacer la representación en un plano.

4. ¿Cuáles son las dimensiones rectangulares de cada mini-parcela? Hacer la representación en un plano.

5. Si cada mini-parcela debe proporcionar 20 cm de borde para el pasillo, ¿cuáles son las dimensiones rectangulares de los cultivos, cuantos metros de cabuya sintética como mínimo es necesaria para encerrar cada una y cuanta cabuya en total se requiere? Hacer una representación en el plano.

6. Con sus palabras, describa que se le dificultó y que se le facilitó en el desarrollo de estas situaciones. Puede ser de manera escrita o icónica.

Facilitó	Dificultó

Colegio Champagnat Ibagué

GUÍA DE TRABAJO
Área de Matemáticas

UAM UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES

Nombre del estudiante:	Curso:	Guía No.	Fecha:

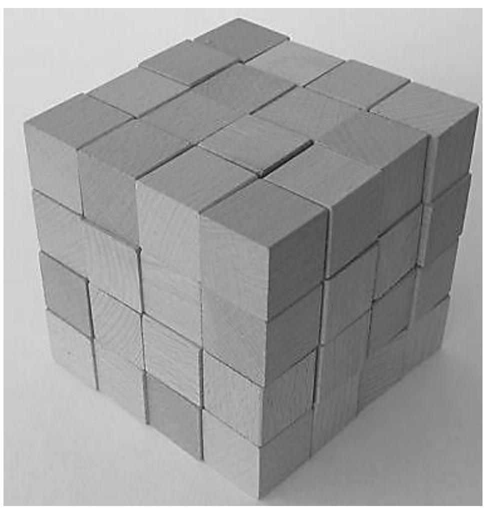
Anexo 8: Actividad 5: Situación problema 2 (Cubo de cubos).

Tiempo: 30 minutos.

Propósito: Analizar representaciones semióticas alrededor de la magnitud de volumen en situaciones problema y de contexto.

Describir los procesos matemáticos que desarrollar en la solución de las siguientes situaciones:

En la clase de matemáticas el profesor lleva un cubo construido por cubos más pequeños, como se muestra en la siguiente imagen. Si cada arista de cubo pequeño mide 2 cm, responde las siguientes preguntas y realizar los procedimientos matemáticos:

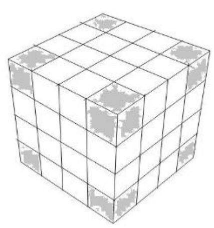


1. El volumen de cada cubo pequeño es:

2. El volumen del cubo grande es:

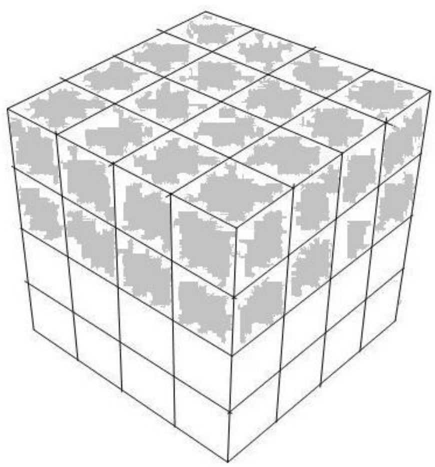
3. Si se pintan de color verde las 6 caras del cubo grande, ¿Cuántas caras de cubos pequeños se pintan?

4. Si al cubo mayor se quintan las esquinas, como se presenta en el icono. ¿Cuál es volumen del nuevo solido?



5. Describa el proceso para duplicar el volumen del cubo de mayor tamaño.

6. Si al cubo se le quitan los cubos que están sombreados. ¿Cuáles son las dimensiones del nuevo paralelepípedo recto y su volumen?



7. Con sus palabras, describa que se le dificultó y que se le facilitó en el desarrollo de estas situaciones. Puede ser de manera escrita o icónica.

Facilitó	Dificultó

Nombre del estudiante:	Curso:	Guía No.	Fecha:

Anexo 9: Actividad 6: Situación problema 3 (Empaque).

Tiempo: 30 minutos.

Propósito: Analizar representaciones semióticas alrededor de la magnitud de volumen en situaciones problema y de contexto.

Describir los procesos matemáticos que desarrollar en la solución de las siguientes situaciones:

Santiago debe envolver con papel kraft una caja de cartón para enviar una encomienda por una empresa de mensajería. Si la base de la caja tiene $1200\ cm^2$ de superficie y altura 35 cm.

1. ¿Qué volumen ocupa la caja de cartón?

2. Si debe comprar papel kraft para envolver la caja, que superficie como mínimo debe adquirir para envolverla. (detallar los procedimientos matemáticos)

3. Cuantos pliegos como mínimo debe adquirir, sabiendo que cada pliego rectangular tiene 100 cm de largo por 70 cm de ancho.

4. Si se agregan tres cajas del mismo tamaño, y se colocan una encima de otra para acomodarlas y enviarlas ¿Qué volumen ocupan en total? Hacer una representación del mismo.

5. Con sus palabras, describa que se le dificultó y que se le facilitó en el desarrollo de estas situaciones. Puede ser de manera escrita o icónica.

Facilitó	Dificultó

Nombre del estudiante:	Curso:	Guía No.	Fecha:

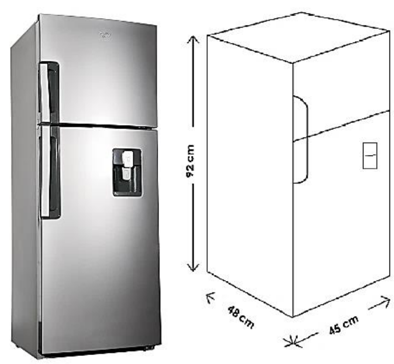
Anexo 10: Actividad 7: Situación problema 4 (Transporte).

Tiempo: 30 minutos.

Propósito: Analizar representaciones semióticas alrededor de la magnitud de volumen en situaciones problema y de contexto.

Describir los procesos matemáticos que desarrollar en la solución de las siguientes situaciones:

Una empresa transporta electrodomésticos entre varias ciudades del país. Si las dimensiones del furgón que las transporta, y las dimensiones de las neveras es como se representa en los iconos. Responder las siguientes preguntas:



1. ¿Cuántas neveras puede transportar como máximo, de tal manera que se lleven en la posición como está representada?

2. ¿Qué volumen ocupa cada nevera?

3. ¿Qué volumen ocupan la cantidad máximo de neveras que se transportan en el furgón de camión?

4. ¿Es posible que al estar completo el cupo de neveras en el furgón, haya espacio vacío? Si es así, ¿Qué volumen vacío queda en el furgón?

- Con sus palabras, describa que se le dificultó y que se le facilitó en el desarrollo de estas situaciones. Puede ser de manera escrita o icónica.

Facilitó	Dificultó

Nombre del estudiante:	Curso:	Guía No.	Fecha:

Anexo 11: Actividad 8: Situación problema 5 (Empaque de celular).

Tiempo: 30 minutos.

Propósito: Analizar representaciones semióticas alrededor de la magnitud de volumen en situaciones problema y de contexto.

Describir los procesos matemáticos que desarrollar en la solución de las siguientes situaciones:

Los celulares de una importante multinacional, los empaca en cajas que tienen 20 cm de largo, 15 cm de ancho y 7 cm de altura. Responder las siguientes preguntas:

1. Que volumen ocupa cada caja de celular. Represente icónicamente.

2. Si las cajas se van empacar en una caja en forma de paralelepípedo recto, con dimensiones 40 cm de largo, 30 cm de ancho y 35 cm de altura. ¿Cuántas cajas de celular máximo se pueden empacar? Hacer una representación icónica.

- Con sus palabras, describa que se le dificultó y que se le facilitó en el desarrollo de estas situaciones. Puede ser de manera escrita o icónica.

Facilitó	Dificultó